УДК 539.3

ОБ ОБЪЕКТИВНОСТИ УРАВНЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЯХ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Канд. техн. наук ШВЕД О. Л.

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

Тензорно-инвариантная запись физических уравнений среды гарантирует их независимость от системы координат. Для обеспечения объективности описания процесса (независимости от расположения наблюдателя, связанного с системой отсчета) вводится принцип материальной индифферентности (объективности), т. е. независимости материальных характеристик от выбора системы отсчета [1–3]. Его значение велико, так как «отказ от принципа материальной объективности означает отказ от признания существования объективных закономерностей природных явлений» [2]. Кроме того, принцип является важным инструментом при выборе структуры определяющих уравнений. Соответствующие примеры приведены в [1–3]. Принцип появился в механике несколько десятилетий назад, но на интуитивном уровне использовался с давних времен. Формально он совпадает с принципом инвариантности материальных характеристик при наложении жестких движений за одним исключением, на которое указано в [2, с. 249]. Определитель ортогонального тензора жестких движений не может быть равен –1, так как при замене системы отсчета, как показано в этой работе, ее ориентация не участвует в рассмотрении. В связи с этим следует уточнить формулировку в [3, с. 86].

При жестких движениях актуальной конфигурации входящие в уравнение скаляры, векторы, тензоры преобразуются. Будем обозначать преобразованные величины верхним индексом «звездочка». Тем самым изменяется и уравнение, в которое они входят. Если преобразованное уравнение оказывается эквивалентным исходному, то последнее называется объективным, т. е. удовлетворяющим принципу материальной объективности, либо необъективным в противном случае. В теориях, учитывающих нелинейность изменения геометрии деформируемого тела, проверка объективности уравнений обязательна, необъективные уравнения использовать нельзя.

Рассмотрим, например, уравнение вязкоупругой среды Максвелла

$$\lambda\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} - \mu\mathbf{D} = 0, \qquad (1)$$

где $\mathbf{T}, \mathbf{D}$ – индифферентные тензоры напряжений Коши и деформации скорости; λ, μ – индифферентные скаляры и точка над символом вверху или справа означает его материальную производную. Обозначим $\mathbf{O}_t$ – собственно ортогональный тензор жесткого движения, наложенного на актуальную конфигурацию, и его спин кососимметричный тензор $\omega = \dot{\mathbf{O}}_t^T \cdot \mathbf{O}_t = -\mathbf{O}_t^T \cdot \dot{\mathbf{O}}_t$, где индекс T означает операцию транспонирования; точка – скалярное произведение.

Покажем, что уравнение (1) не удовлетворяет принципу материальной индифферентности. Учитывая определения индифферентных скаляра и тензора [1], имеем:

$$\lambda^* = \lambda,\ \mu^* = \mu,\ \mathbf{D}^* = \mathbf{O}_t^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}_t,\ \mathbf{T}^* = \mathbf{O}_t^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_t,$$

$$(\mathbf{T} - \mu\mathbf{D})^* = \mathbf{T}^* - \mu^*\mathbf{D}^* = \mathbf{O}_t^{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{T} - \mu\mathbf{D}) \cdot \mathbf{O}_t,$$

$$(\dot{\mathbf{T}})^* = (\mathbf{T}^*)^{\boldsymbol{\cdot}} = (\mathbf{O}_t^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_t)^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{O}_t^{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}_t + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{O}_t^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_t - \mathbf{O}_t^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_t \cdot \boldsymbol{\omega}. \qquad (2)$$

Уравнение $\mathbf{O}_t \cdot (\lambda \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} - \mu\mathbf{D})^* \cdot \mathbf{O}_t^T = 0$, равносильное уравнению $(\lambda \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} - \mu\mathbf{D})^* = 0$, получается в виде

$$\lambda \overset{\Omega}{\mathbf{T}} + \mathbf{T} - \mu\mathbf{D} + \omega \cdot \mathbf{O}_t^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_t - \mathbf{O}_t^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}_t \cdot \omega = 0. \quad (3)$$

Соотношения (1), (3) не являются эквивалентными, и, следовательно, уравнение (1) будет необъективным.

Все тензорные величины можно подразделить на три типа: индифферентные, инвариантные и все остальные. Понятия индифферентности и инвариантности для скаляров совпадают [3]. Инвариантная величина по определению не меняется при преобразовании «звездочка». Понятно, что для объективности уравнения достаточно (но не необходимо), чтобы все входящие в него величины были представителями либо первого, либо второго типов. В нашем случае в уравнение (1), кроме тензоров первого типа, входит тензор – материальная производная **T**, который является представителем третьего типа. Материальная производная индифферентного тензора – не индифферентный тензор и не инвариантный. Универсальным средством восстановить индифферентность производной является ее замена на объективную производную, но такая процедура неоднозначна [1]. Существует множество объективных производных и возникает проблема выбора. Самой простой из них, вероятно, будет популярная яуманнская производная $\overset{W}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}$, где $\mathbf{W}$ – тензор вихря. Однако ее использование может привести к непредсказуемым последствиям, например обнаружена осцилляция напряжений при простом сдвиге [3]. Нас будет интересовать здесь только О-производная **T**

$$\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}, \quad (4)$$

где $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}^T \cdot \mathbf{O} = -\mathbf{O}^T \cdot \dot{\mathbf{O}}$ – спин собственно ортогонального тензора поворота **O**, сопровождающего общую деформацию. Уравнение (1) представляется в виде

$$\lambda \overset{\Omega}{\mathbf{T}} + \mathbf{T} - \mu\mathbf{D} = 0. \quad (5)$$

Предполагаем, что на отсчетную конфигурацию также наложено жесткое движение с собственно ортогональным тензором $\mathbf{O}_\tau$. Символ «звездочка» теперь означает преобразование обеих конфигураций. Попытаемся показать, что уравнение (5) удовлетворяет принципу материальной индифферентности. Имеем: $\mathbf{O}^* = \mathbf{O}_\tau^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}_t$; $\dot{\mathbf{O}}^* = \mathbf{O}_\tau^T \cdot (\dot{\mathbf{O}} + \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{O}}_t \cdot \mathbf{O}_t^T) \cdot \mathbf{O}_t$;

$$(\dot{\mathbf{O}}^T)^* = \mathbf{O}_t^T \cdot (\dot{\mathbf{O}}^T + \mathbf{O}_t \cdot \dot{\mathbf{O}}_t^T \cdot \mathbf{O}^T) \cdot \mathbf{O}_\tau;$$

$$(\mathbf{\Omega})^* = \mathbf{O}_t^T \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{O}_t + \omega. \quad (6)$$

Из (2), (4)–(6) следует, что О-производная **T** является индифферентным тензором и

$$(\lambda \overset{\Omega}{\mathbf{T}} + \mathbf{T} - \mu\mathbf{D})^* = \mathbf{O}_t^{\mathrm{T}} \cdot (\lambda \overset{\Omega}{\mathbf{T}} + \mathbf{T} - \mu\mathbf{D}) \cdot \mathbf{O}_t = 0.$$

Вероятно, что и требовалось показать.

Однако, просматривая доказательство объективности уравнения (5), замечаем, что оно теряет силу, если обе конфигурации совпадают [3, с. 115; 4, с. 83]. В самом деле, тогда имеем $\mathbf{O}_\tau = \mathbf{O}_t$ и в выражении для $\dot{\mathbf{O}}^*$ появляется дополнительное слагаемое $\omega \cdot \mathbf{O}_t^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{O}_t$. Следовательно, в правой части (6) аддитивно возникает еще тензор $-\mathbf{O}_t^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{O}_t$, где $\mathbf{P} = \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}_t \cdot \omega \cdot \mathbf{O}_t^T \cdot \mathbf{O}$. Таким образом, уравнение $\mathbf{O}_t \cdot (\lambda \overset{\Omega}{\mathbf{T}} + \mathbf{T} - \mu\mathbf{D}) \cdot \mathbf{O}_t^T = 0$ получается в виде

$$\lambda \overset{\Omega}{\mathbf{T}} + \mathbf{T} - \mu\mathbf{D} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (7)$$

Уравнения (5), (7) оказываются неэквивалентными. В этом случае уравнение (5) будет необъективным.

Заметим, что объективность уравнений не требуется в геометрически линейной теории, вероятно, ввиду нестрогого обращения там с поворотами, поскольку при их строгом учете обнаруживается, что линейный тензор деформации при жестком движении становится ненулевым [1, с. 26], а это недопустимо. Относительное смещение частиц тела отсутствует и его сплошность не нарушается, Следовательно, по определению деформация не возникает.

Использование О-производной в активном процессе нагружения сыграло решающую роль при обобщении классической модели нелинейной упругости [1] на нелинейную модель упругопластичности [5]. Объективная О-производная, в выражении которой общий поворот заменен на упругий, позволяет однозначно решить отмеченную выше проблему выбора скорости напряжений. С ее помощью двойственное описание процесса в двух пространствах основных мер упругой деформации распространяется на пространства напряжений $\mathbf{T}$ и $\mathbf{O}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{O}^T$. Это дает возможность исключить влияние поворотов и определить упругий спин [6].

Построение было выполнено ценой неизбежных потерь. Вводимая промежуточная (разгрузочная) конфигурация является отсчетной для обобщенного упругого закона [4] и, как правило, оказывается неизвестной. Полностью разгрузить тело после появления необратимых деформаций обычно невозможно. Однако всегда могут быть определены основной и взаимный векторные базисы разгрузочной конфигурации. Утверждение о том, что промежуточная конфигурация определена с точностью до поворота [4], на наш взгляд, ошибочное. Разгрузочная конфигурация либо не определена, либо может быть найдена точно там, где все тело деформируется как один элемент.

Законченное определение пластической деформации получается с использованием мультипликативного разложения Крёнера – Ли транспонированного градиента общей деформации $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(t)=\mathbf{F}_{\mathrm{e}}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{p}}$; $\mathbf{F}_{\mathrm{p}}=(\mathbf{F}_{\mathrm{e}})^{-1}\cdot\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^T(t)$. В условиях изотропии $\mathbf{F}_{\mathrm{p}}$ – единичный тензор. Градиент общей деформации определяется известными соотношениями [1]. Строгое определение $\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ через его полярное разложение обеспечивает возможность найти $\mathbf{F}_{\mathrm{p}}$. Тензоры $\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$, $\mathbf{F}_{\mathrm{p}}$ утрачивают смысл градиентов деформации, но оказываются невырожденными. Полярное разложение $\mathbf{F}_{\mathrm{p}}$ дает тензоры пластических меры искажений и поворота. Относительно пластической деформации никаких предположений делать не требуется, если строго определить тензор $\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$, используя не только кинематические понятия.

Модель нелинейной упругости достаточно разработана, и существуют подходящие изотропные потенциалы напряжений [1], в которые следует добавить анизотропные структуры, по крайней мере, до второго порядка включительно. Трансформация обобщенного упругого закона (вторая сторона упрочнения по Генки) осуществляется по вводимым определяющим уравнениям для тензора остаточных напряжений и коэффициентов анизотропии [5, 6]. Надо обеспечить и не требующуюся в упругости неотрицательность такого потенциала по его смыслу запасенной энергии, поскольку при обобщении модели нужно постулировать определяющее уравнение для скорости изменения запасенной энергии. Это дает возможность получить дифференциальное уравнение для тензора меры упругих искажений с использованием О-производной.

В [5] дано представление тензора упругого спина, позволяющее найти упругий поворот. Более громоздкое соотношение существует и для трехмерного напряженно-деформированного состояния [6]. Тензор спина разлагается в сумму тензора вихря и некоторого индифферентного тензора. Поскольку яуманнская производная индифферентного тензора индифферентна [1], и О-производная $\mathbf{T}$ будет индифферентна (4). Это обеспечивает объективность предложенных в [5, 6] определяющих уравнений. Рассмотренный выше случай совпадения отсчетной и актуальной конфигураций, когда теряется индифферентность О-производной $\mathbf{T}$, не реализуется в активном процессе. Тогда имеет место пассивный процесс нагружения, и значит, используется обобщенный закон упругости.

Отметим, что свойства инвариантности относительно отсчетной и актуальной конфигураций тензоров $\mathbf{F}_{\mathrm{e}}$ и градиента общей деформации совпадают. Разложение Крёнера – Ли является объективным уравнением.

ВЫВОДЫ

1. Рассмотрен принцип независимости материальных характеристик от выбора системы отсчета (принцип материальной объективности). Указано условие его совпадения с принципом инвариантности материальных характеристик при наложении жестких движений.

Принцип материальной объективности утверждает, что все материальные характеристики (включая и необъективные) должны входить в физические законы специальным образом: при замене системы отсчета изменяется и определяющее уравнение, но полученное уравнение должно быть равносильным исходному.

2. Уравнения геометрически линейной теории часто оказываются непригодными для нелинейной вследствие нарушения принципа материальной индифферентности. Замена материальной производной тензора напряжений Коши на объективную производную позволяет сделать уравнение объективным. На примере классического уравнения Максвелла показаны некоторые тонкости такого преобразования при использовании О-производной (1), (5).

3. Объективная О-производная индифферентного тензора, в частности напряжений Коши, не будет индифферентным тензором только при условии совпадения актуальной и отсчетной конфигураций. Показано, что при активном процессе в обсуждаемой модели упругопластической среды такой случай исключается. Это позволяет обеспечить обязательную объективность определяющих уравнений при моделировании конечных деформаций и поворотов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. **Лурье, А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М., 1980. – 512 с.

2. **Жилин, П. А**. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П. А. Жилин. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. – 275 с.

3. **Поздеев, А. А.** Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения / А. А. Поздеев, П. В. Трусов, Ю. И. Няшин. – М., 1986. – 232 с.

4. **Левитас, В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В. И. Левитас. – Киев, 1987. – 229 с.

5. **Швед, О. Л.** К теории упругопластичности при конечных упругих деформациях и поворотах / О. Л. Швед // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 45–48.

6. **Швед, О. Л.** Двойственное описание упругопластического процесса / О. Л. Швед // Вестник БГУ. – 2007. – № 2. – С. 88–93.

Поступила 25.10.2006

УДК 629.11.001.24:531.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДЕРЖЕК ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА

Канд. техн. наук, доц. ЧЕПЕЛЕВА Т. И., студ. ЧЕПЕЛЕВ А. Н.

Белорусский национальный технический университет,
Минский государственный медицинский университет

Одной из ведущих областей машиностроения является производство транспортных машин. Процессы, связанные с производством машин, можно рассматривать как сосредоточенными, так и распределенными. Процесс производства будем считать сосредоточенным, если один и тот же интеллектуальный исполнитель одновременно задействован для нескольких производственных подструктур и управляет ими. Распределенным же будем считать процесс, если несколько различных интеллектуальных исполнителей управляют определенным количеством подструктур.

Для поддержки принятия решений задействованы информационно-аналитические системы, которые предназначены для сопровождения процессов производства машин. При создании систем параллельной обработки данных необходимо знать минимальное время реализации рассматриваемых процессов, а также время взаимодействия параллельных процессов, связанных с производством машин. Реализация сложных параллельных процессов – это особый механизм, который ведет к росту накладных расходов, что значительно влияет на производство машин.