

ISSN 0134-9635

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный
научно-технический журнал

Основан в 1975 году

Выпуск 26

*Посвящается 90-летию БНТУ
и 80-летию ИВЛЕВА ДЮИСА ДАНИЛОВИЧА*

Минск
БНТУ
2011

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК ~~22.21я43~~

~~30.12я43~~

Т 33

Редакция сборника

Президиум редакции:

П.А. Витязь, М.С. Высоцкий, Л.Г. Красневский,
Ю.М. Плескачевский, Б.М. Хрусталев

Международный совет редакции:

J. Awrejcewicz (Польша), Г.Я. Беляев (Беларусь), J. Grabski (Польша), G. Gudehus
(Германия), Д.Д. Ивлев (Россия), В.В. Лобода (Украина),
Н.Ф. Морозов (Россия), Ж.А. Мрочек (Беларусь), Н.К. Мышкин (Беларусь),
Ф.А. Романюк (Беларусь), К. Циммерман (Германия), А.И. Шашкин (Россия),
Г.П. Черепанов (США), А.М. Якимович (Беларусь)

Редакционная коллегия:

Ю.В. Василевич (зам. председателя), В.С. Вихренко,
М.А. Журавков, М.Г. Ботогова (уч. секретарь),

И.С. Куликов, А.Т. Скойбеда, А.В. Чигарев (председатель), А.М. Якимович

Теоретическая и прикладная механика: А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, М.А. Журавков

Механика материалов и структур: Ю.В. Василевич, М.И. Кулак, Н.В. Спиридонов

Мехатроника и интеллектуальные системы: В.М. Колешко, Л.Г. Красневский

Механика машин: В.Б. Альгин, А.Т. Скойбеда, В.К. Шелег

Приборы точной механики: И.Е. Зуйков, М.Г. Киселев, В.Л. Соломахо

Механика конструкций: А.Н. Борисевич, С.В. Босаков, Т.М. Пецольд, Э.И. Старовойтов

Адрес редакции:

220013 Минск, проспект Независимости, 65

БНТУ, кафедра «Теоретическая механика»

Тел.: (+375 17) 292 74 25, 299 92 52

E-mail: theormech@rambler.ru

В журнале содержатся научные и методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и научных учреждений. Включены также материалы, обсуждавшиеся на республиканском научно-методическом семинаре с международным участием «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании».

Тематика статей сборника охватывает широкий круг вопросов. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Теория механизмов и машин». Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов.

Сборник будет полезен для преподавателей вузов, научно-инженерных работников, аспирантов.

УДК [531+621.01:531.8](082)

ББК 22.21я43

30.12я43

© БНТУ, 2011

К 80-ЛЕТИЮ ИВЛЕВА ДЮИСА ДАНИЛОВИЧА

Климов Д.М., Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
Московский городской университет управления Правительства Москвы
Самарский государственный университет*

6 сентября 2010 г. исполняется 80 лет Дюису Даниловичу Ивлеву – доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации. Д.Д. Ивлеву принадлежит свыше двухсот опубликованных научных работ, в том числе семь монографий. Его вклад в математическую теорию пластичности и механику деформируемого твердого тела с полным правом можно назвать выдающимся.



Д. Ивлев – основатель и руководитель научной школы механики идеально пластических тел и конструкций, базирующейся в университетских и академических центрах Воронежа, Самары, Владивостока, Чебоксар. Огромная часть научной и педагогической деятельности Д.Д. Ивлева связана с подготовкой кадров высшей квалификации в области механики деформируемого твердого тела. В настоящее время в рамках возглавляемой им научной школы работает свыше 20 докторов и более 100 кандидатов наук. Главное в творческой деятельности Д.Д. Ивлева – бескомпромиссное служение научной истине и неустанный поиск на самых передовых рубежах современной науки. 55 лет его научной и общественной деятельности, выдающиеся научные достижения позволяют причислить Д.Д. Ивлева к категории мыслителей, являющихся национальным достоянием России.

Д.Д. Ивлев родился 6 сентября 1930 г. в г. Чебоксары в семье преподавателя Чувашского Педагогического института Ивлева Данила Осиповича. В августе 1941 года Ивлев Д. О. был призван в ряды Красной Армии, среди его правительственных наград медаль «За взятие Берлина».

После окончания средней школы в 1948 г. Д.Д. Ивлев покидает Чебоксары и поступает на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, который заканчивает в 1953 г. В 1956 г., после окончания аспирантуры при Институте механики МГУ, он успешно защитил диссертацию «Приближенное решение упруго-пластических задач методом малого параметра» в совете при МГУ (оппонентами по этой работе выступили В.В.

Соколовский и Г.С. Шапиро; председательствовал на защите Ю.Н. Работнов) и получил ученую степень кандидата физико-математических наук. С февраля 1957 г. по октябрь 1958 г. он работает в должности младшего научного сотрудника Института механики АН СССР. В 1959 г., после защиты диссертационной работы «Пространственная задача теории идеальной пластичности», которая также представлялась в совет при МГУ, Д.Д. Ивлев получает степень доктора физико-математических наук. Оппонентами по докторской диссертационной работе выступили Л.А. Галин, Л.М. Качанов и Г.С. Шапиро, председательствовал на защите А. Ю. Ишлинский.

В октябре 1959 г. Д.Д. Ивлев, будучи 29-летним доктором физико-математических наук и уже достаточно широко известным ученым в области математической теории пластичности по приглашению ректора Воронежского университета Б.И. Михантьева приезжает в г. Воронеж. В декабре 1959 г. Д.Д. Ивлев возглавил созданную им в ВГУ кафедру теории упругости и пластичности. Талантливый ученый, прекрасный организатор и педагог Дюис Данилович сумел в короткий срок активизировать научную и педагогическую работу. Лекции и научные семинары под руководством профессора Д.Д. Ивлева отличались способностью глубоко проникать в суть обсуждаемых вопросов. В 60-е годы в Воронежском государственном университете на математико-механическом факультете Д.Д. Ивлев работал вместе с профессорами М.А. Красносельским, С.Г. Крейном, В.И. Соболевым. Творческое взаимодействие механиков и математиков Воронежского университета было заложено именно в те годы.

Созданная Д.Д. Ивлевым воронежская школа механики деформируемого твердого тела быстро получила всесоюзное признание. Проводимые в те годы научные исследования были связаны с рядом фундаментальных и прикладных проблемам механики сплошных деформируемых сред. Работы Д.Д. Ивлева и его учеников постоянно были в фокусе внимания ученых как нашей страны, так и за ее пределами; их существенное влияние на формирование математической теории пластичности было и остается общепризнанным и ощущается до сих пор. В 1961 г. Д.Д. Ивлеву было присвоено ученое звание профессора. Под руководством профессора Д.Д. Ивлева ежегодно проводились научные конференции и школы, в работе которых принимали участие ученые из Москвы, Ленинграда, Киева, Новосибирска, Ростова-на-Дону, Казани, Перми, Харькова, Краснодара, Куйбышева, Риги и других городов СССР.

Параллельно с заведованием кафедрой теории упругости и пластичности в ВГУ профессор Д.Д. Ивлев в течение ряда лет заведовал кафедрой сопротивления материалов в Воронежском политехническом институте, куда его пригласил ректор В.С. Постников. В эти же годы Д.Д. Ивлев по предложению ректора Л.Н.Талова читает лекции в Воронежском педагогическом институте. Следует отметить, что уже в годы работы в Воронежском университете началось сотрудничество Д.Д. Ивлева с одним из своих аспирантов_Геннадием Ивановичем Быковцевым, которое вскоре дало превосходные плоды - научные результаты, имеющие фундаментальное значение для механики деформируемого твердого тела. Одним из талантливых учеников Д.Д. Ивлева тех лет также был В.В. Дудукаленко. Г.И. Быковцев стал первым деканом нового факультета прикладной математики и механики, возглавил созданную им кафедру технической кибернетики и теории автоматического регулирования.

В 1966 г. Д.Д. Ивлев возвращается в Москву, где сначала работает профессором МВТУ им. Н.Э. Баумана (1966–1970 гг.) и заведует кафедрой высшей математики, а затем (1971–1982 гг.) – заведующим кафедрой высшей математики во

Всесоюзном заочном политехническом институте (сейчас Московский государственный открытый университет). Вместе со своими учениками профессорами Г.И. Быковцевым и И.А. Бережным параллельно он активно участвует в создании научной школы механики деформируемого твердого тела в г. Куйбышеве.

В 1982 г. Д.Д. Ивлев приезжает на родину в г. Чебоксары, где в период с 1982 г. по 1993 г. работает сначала заведующим кафедрой математического анализа, а затем – заведующим кафедрой механики деформируемого твердого тела в Чувашском государственном университете им. И.Н.Ульянова. В 1985–1993 гг. он является деканом физико-математического факультета. В 1993 г. Д.Д. Ивлев переходит на работу в Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, где в настоящее время заведует кафедрой математического анализа.

Работы Д.Д. Ивлева посвящены механике деформируемого тела, в основном математической теории пластичности. Ряд результатов Д.Д. Ивлева имеет фундаментальный характер для всей механики деформируемого твердого тела. Далее нам представляется уместным дать необходимые сведения о развитии математической теории пластичности и ее современном состоянии.

Первая математическая теория пластичности была создана Сен-Венаном (В. Saint-Venant, 1870 г.) [1], [2] на основе гипотезы о пропорциональности девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций при условии текучести Треска (Н. Tresca). Сен-Венаном на основании опытов Треска по истечению металлов через отверстия было предложено условие пластичности, заключающееся в том, что пластическое состояние наступает, как только максимальное касательное напряжение достигает некоторого определенного предельного значения k . Впрочем, идея такого условия принадлежит Кулону и была высказана им в работе "О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре" [3], представленной во Французскую Академию наук в 1773 г. В этой работе Кулон указывает на то, что разрушение сжатой призмы происходит в результате скольжения одной ее части относительно другой по некоторой плоскости, составляющей угол в сорок пять градусов с направлением сжатия. Скольжение возникает при достижении составляющей сжимающей силы в указанной плоскости предельной величины, достаточной для преодоления обусловленного сцеплением сопротивления скалыванию по этой плоскости. Сен-Венан рассматривал задачу о пластическом плоском деформированном состоянии и шел по пути обобщения уравнений движения вязкой жидкости Навье-Стокса, опираясь на гидродинамическое представление о течении металлов. Сен-Венан ограничился исследованием плоского деформированного состояния и поэтому его теория нуждалась в дальнейшем обобщении на случай трехмерного состояния. Соответствующее обобщение было сразу же выполнено: уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности впервые были получены Леви (М. Levy, 1871 г.) [4]. Статьи Сен-Венана и Леви появились одна за другой в *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees* за 1871 г. Леви принял в качестве условия текучести уравнение грани призмы Кулона-Треска и присоединил в качестве определяющего уравнение, выражающее пропорциональность девиатора тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций. Теория Леви, поскольку она основана на "неассоциированном" законе пластического течения, не нашла применения и представляет ныне лишь исторический интерес, отчетливо указывая на то, что на ранних этапах развития математической теории пластичности условие пластичности и определяющий закон течения рассматривались совершенно независимо друг от друга.

Соотношения Сен-Венана для плоской пластической деформации – статически определяемая система уравнений гиперболического типа, что и позволило позднее развить теорию полей скольжения, связываемую обычно с именами Генки (H. Hencky, 1923 г.) и Гейрингер (H. Geiringer, 1930 г.). Математический аппарат, соответствующий соотношениями Сен-Венана для плоской задачи, оказался, таким образом, вполне адекватным экспериментальным и теоретическим представлениям о течении идеально пластического тела. Заметим, что уравнения теории плоского напряженного состояния (в отличии от случая плоской деформации) не могут быть получены как частный случай пространственных уравнений.

Уравнения пространственной задачи математической теории пластичности длительное время оставались неизученными. И в настоящее время теория трехмерной задачи математической теории пластичности далека от завершения. Имеется весьма ограниченный круг методов и результатов, которые проливали бы свет на свойства пространственного пластического напряженно-деформированного состояния. Оценивая состояние пространственной задачи теории идеальной пластичности Л. Прандтль (L. Prandtl) в 1921 г. указывал, что для разработки пространственной задачи до сих пор еще не найдено надлежащего пути и пока, пожалуй, имеется мало перспектив ее решения. “Задачи трехмерного пластического течения трудны и мало изучены”. Так сформулировано отношение к вопросам пространственной задачи математической теории пластичности авторов известной обзорной статьи: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С. 79-118.

Пространственная задача в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. Von Mises) и ассоциированным с ним законом течения Леви-Мизеса является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны. Так, система уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса, вообще говоря, не имеет вещественных характеристических направлений (см., например, [5], с. 144-146). Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптичны (т.е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная главная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два поверхностных характеристических элемента, совпадающих с площадками максимального касательного напряжения. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения Леви-Мизеса, действительные характеристики отсутствуют. Все это не оставляет шансов обобщить методы интегрирования (см. [6]– [11]), развитые ранее для плоской задачи, соотношения которой формально статически определяемы и гиперболичны, что в конце концов и позволяет построить теорию полей скольжения, адекватно представляющую сдвиговой механизм пластического течения.

Принципиально иная ситуация наблюдается в пространственной задаче при использовании критерия текучести Кулона-Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся гиперболическими. Существование действительных характеристических поверхностей является большим математическим преимуществом. Если еще учесть, что характеристические поверхности суть поверхности скольжения, то с физической точки зрения трудно объяснить отсутствие действительных характеристических поверхностей в случае уравнений пространственной задачи при использовании критерия текучести Мизеса.

Поверхности и линии скольжения не являются только математическим понятием. Они существуют в действительности и их можно выявить травлением отполированной поверхности или разреза деформированного металла. Фигуры скольжения часто появляются в виде узоров с правильной лучистой симметрией на поверхностях или на разрезах твердых тел, испытавших деформации за пределом упругости. Линии скольжения (линии сдвигов) играют чрезвычайно важную роль как в теоретических, так и в прикладных исследованиях напряженного состояния пластически деформированного тела. Геометрия линий скольжения во многих случаях вполне определяет напряженное состояние, и такое напряженное состояние реализуется в условиях предельного равновесия тела. На этот факт, по видимому, впервые указал Д.К. Чернов. Фигуры скольжения, которые наблюдались Д.К. Черновым при различных схемах нагружения (например, при растяжении плоских образцов, при пробивке круглых отверстий), воспроизводятся в известной монографии: Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Оборонгиз, 1952. 556 с. (см. с. 103). Значительно позже линии скольжения стали исследоваться за рубежом. В начальный период развития теории пластичности при изучении пластического течения широко использовались представления о линиях и поверхностях скольжения, подчиняющихся поразительным законам, установленным математиками и инженерами в начале XX столетия. В предисловии мы уже говорили о соответствии между изменениями в структуре сильно деформированных металлов и при формации горных пород, отмечаемыми и описываемыми в петрографии. Поэтому теория линий скольжения в руках геологов может служить средством расшифровки процессов образования горных цепей и континентальных плато, восстановления истории движения земной коры (в том числе и ее континентальной части). Таким образом, теория скольжения находит свое подтверждение на двух существенно отличающихся масштабных уровнях.

К настоящему времени уже стало ясно, что предельные состояния твердых тел должны так же описываться статически определенными уравнениями гиперболического типа. Теория предельного состояния первоначально развивалась в рамках механики сыпучих сред. Основоположник теории К. Кулон сформулировал (1773 г.) основные положения теории предельного состояния и ввел представление о поверхности сползания, которые были применены для решения ряда важных прикладных задач. Систематическое изложение теории предельного состояния сыпучих сред на основе представления о сетке скольжения было дано В.В. Соколовским в 1942 г. (см.: Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 208 с.; третье издание: Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960. 244 с.). Теории предельного состояния и идеальной пластичности, таким образом, имеют общие основы, однако они далеко не тождественны. Теория идеальной пластичности основана на представлении об условии пластичности, которое, вообще говоря, может приводить либо к статически определенным, либо к статически неопределенным состояниям. Теория предельного состояния в качестве своего предмета исследования берет лишь статически определенные состояния, которые могут быть достигнуты, скажем, при пропорциональном возрастании внешних нагрузок. Для предельного состояния все "предыдущие" свойства материала не играют никакой роли, поскольку предельное состояние определяется из замкнутой системы формально статически определенных соотношений, не имеющих ничего общего с допредельным поведением тела.

Экспериментальные исследования показывают, что условие пластичности Мизеса значительно лучше согласуется с опытными данными, чем условие пластичности Кулона-Треска. Сомневаться в достоверности данных многочисленных

экспериментов не приходится, тем более, что они указывают на систематическое отклонение поведения металлов в состоянии текучести от условия Кулона-Треска. Тем не менее, можно предположить, что лучшее соответствие условия Мизеса опытным данным объясняется влиянием различных посторонних факторов, таких как упрочнение, деформационная анизотропия, поврежденность, элиминировать которые при проведении экспериментов до конца не удастся. Известно также, что чем ярче у материала на диаграмме одноосного растяжения выражена площадка текучести (т.е. чем ближе его поведение к идеально пластическому), тем лучше данные испытаний согласуются с критерием пластичности Кулона-Треска. Таким образом, критерий текучести Кулона-Треска, по-видимому, действительно лучше, чем все остальные мыслимые критерии, выражает сущность идеальной пластичности. В пользу этого вывода, т.е. большего соответствия условия Кулона-Треска физике пластической деформации, высказывались многие авторы.

Итак, формально статически определяемая задача о плоской пластической деформации вместе с ее гиперболическими соотношениями послужила отправной точкой развития всей математической теории идеальной пластичности. Распространение математического аппарата гиперболических уравнений, описывающего плоское течение идеально пластического материала на общий трехмерный случай, явилось предметом целого ряда исследований.

В 1909 г. Хаар и Карман (А. Наар, Th. von Karman) выдвинули условие «полной пластичности» [13], которое, по существу, устанавливает соответствие напряженного состояния ребру призмы Кулона-Треска, и оказалось, что соотношения пространственной задачи теории идеальной пластичности при условии полной пластичности являются статически определяемыми.

В 1923 г. Генки (Н. Hencky) [14] предложил использовать условие полной пластичности Хаара-Кармана в случае осесимметричного напряженного состояния, что привело его к статически определяемой системе уравнений равновесия, которая, как он установил, оказывается гиперболической. Позднее уравнения осесимметричной задачи с условием текучести Кулона-Треска исследовались Р. Шилдом (R.T. Shield) [15] для ребер и граней призмы Кулона-Треска. Осесимметричные автомодельные решения, соответствующие течению на ребре призмы Кулона-Треска, были построены Р. Шилдом (R.T. Shield) в той же самой работе [15]; в частности, им было произведено вычисление автомодельного поля скольжения вблизи свободной прямолинейной границы.

В 1944 г. А.Ю. Ишлинский [16] исследовал осесимметричную задачу теории пластичности, предполагая выполнение условия полной пластичности Хаара-Кармана, доказав статическую определяемость и гиперболичность основных уравнений. С помощью численного метода в этой же работе было получено решение задачи о вдавливании твердого шарика в идеально пластическую среду. Решение А.Ю. Ишлинского вызвало критические замечания Р. Хилла, полагавшего, что «такие вычисления имеют небольшое или не имеют никакого значения, так как гипотеза Хаара-Кармана для металлов физически нереальна и она вводит ошибку неизвестной величины» (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 321). Свои возражения Хилл основывал на невозможности в рамках теории течения Леви-Мизеса определить связанного с распределением напряжений, удовлетворяющим условию полной пластичности, поле скоростей из-за неправильной определенности (переопределенности) системы соотношений кинематики. Выход из сложившейся ситуации, как показало последующее развитие математической теории пластичности, состоял в последовательном использовании

гипотезы Хаара-Кармана и замене закона течения Леви-Мизеса на обобщенный ассоциированный с условием пластичности Кулона-Треска закон течения.

Соотношения пространственной задачи теории пластичности, когда, аналогично условию полной пластичности Хаара-Кармана, имеется два соотношения между главными напряжениями, были предложены и проанализированы А. Ю. Ишлинским [17], который использовал определяющие зависимости в форме соотношений перестановочности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, следующие из обобщенного ассоциированного закона пластического течения в случае течения на ребре призмы Кулона-Треска и не предполагающие столь жестких ограничений на скорости пластических деформаций, устанавливаемые традиционным для того времени требованием пропорциональности тензора скорости пластических деформаций и девиатора тензора напряжений. Впервые, в явной форме он указал на необходимость при построении теории пространственной задачи двух условий пластичности, уравнении несжимаемости и условий соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, которые он принял в форме трех уравнений, следующих из перестановочности этих тензоров [22]. В своей работе А.Ю. Ишлинский пишет: "Согласно предлагаемой теории идеальной пластичности два главных напряжения должны быть непременно равны друг другу, а третье отличаться от них на удвоенное критическое значение $2k$. Таким образом для пространственной задачи пластичности имеют место два соотношения между главными напряжениями, подобно гипотезе полной пластичности Хаара и Кармана. Этим предлагаемая теория отличается от теорий Леви и Мизеса, в которых принимается единственное соотношение." Таким образом, А.Ю. Ишлинский отказался от "неассоциированного" определяющего закона Леви [4] и дал корректное обобщение теории течения Сен-Венана [1], [2] на трехмерный случай. Пространственные соотношения Ишлинского полностью сохраняют свое значение в современной математической теории пластичности и их можно использовать при постановке и решении задач теории идеальной пластичности, поскольку они являются следствиями обобщенного ассоциированного закона течения в случае течения на ребре призмы Кулона-Треска.

Результаты А.Ю.Ишлинского предвосхитили более поздние исследования Д.Д. Ивлева [18], [19], в которых было показано фундаментальное значение условия полной пластичности Хаара-Кармана для всей теории пластичности и был развит соответствующий вариант теории пластичности: сингулярное условие текучести (в частности, ребро призмы Кулона-Треска) и обобщенный ассоциированный закон пластического течения.

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенностям на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W.T.Koiter) в 1953 г.[14]. Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа гладких поверхностей текучести, каждая из гладких поверхностей текучести дает аддитивный вклад (с соответствующим неопределенным множителем) в величину приращения пластической деформации.

Обобщенный ассоциированный закон течения, сформулированный на основе условия пластичности Треска, устанавливает, что пластические деформации по-

являются в результате сдвига (скольжения) на тех площадках, где касательные напряжения по абсолютной величине достигают предельно возможного значения, причем скольжение происходит в направлении действия максимального касательного напряжения так, что оно совершает положительную работу.

В работах Д.Д. Ивлева было установлено, что при условии полной пластичности (т.е. когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона-Треска) уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности являются статически определяемыми и принадлежат к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностным элементам уравнений статики при этом образуют конус, касающийся площадок максимальных касательных напряжений, построенных в вершине конуса. Характеристическими будут также поверхностные элементы, нормали к которым ортогональны главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) главному напряжению. Кинематические уравнения пространственной задачи теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Кулона-Треска, также гиперболически и имеют точно такие же директоры характеристических поверхностных элементов, как и статические уравнения.

Было таким образом доказано, что именно условие полной пластичности и только оно позволяет сформулировать общую теорию идеальной пластичности с единым математическим аппаратом статически определяемых уравнений гиперболического типа, соответствующим сдвиговой природе идеально пластического деформирования. Эта точка зрения разделяется далеко не всеми. Так, А.А. Вакуленко и Л.М. Качанов полагают, что доводы физического характера в пользу схемы полной пластичности "продиктованы скорее заманчивой простотой математического анализа, нежели существом вопроса" (см.: Вакуленко А.А., Качанов Л.М. Теория пластичности/ В кн.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1972. С.100). Тем не менее они замечают, что решения, полученные по схеме полной пластичности, могут иметь несомненный интерес, полемизируя при этом с Р. Хиллом, критически оценившим условие полной пластичности Хаара-Кармана как "искусственное и нереальное условие текучести" (см.: Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956. С. 320, 321). Не вызывает возражений высказываемая ими мысль о том, что ценность того или иного решения пространственной задачи устанавливается возможностью либо построить согласованное кинематически допустимое поле, либо продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. В противном случае вопрос о значимости решения остается открытым. Ясно, что исключительную ценность представляют полные решения, когда удается построить согласованное кинематически допустимое поле и продолжить поле напряжений в жесткие зоны, не нарушая условия текучести. Таким образом, неполные решения обладают лишь относительной ценностью, а полные – абсолютной. На практике, однако, чаще всего удается построить неполное поле напряжений (поле напряжений в пластической зоне) и возникает проблема его продолжения в жесткую зону так, чтобы в жесткой зоне и на границе раздела выполнялись условия равновесия и не превышался предел текучести. Общая процедура такого продолжения (или хотя бы существование такого продолжения) для сколько-нибудь широкого класса задач в настоящее время неизвестны. Учитывая все сказанное, нетрудно заключить, что по большому счету неполные решения с теоретической точки зрения вообще никакой ценности не представляют. Однако их практическая ценность часто может быть очень высокой. Так, или иначе, но большинство прикладных задач решены по идеально пластической схеме не полно.

Подобным же образом дело обстоит и в пространственной задаче: в случае грани произвольного кусочно-линейного условия текучести характеристические поверхности касаются главных направлений тензора напряжений.

В 1971 г. Д.Д. Ивлев и Г.И. Быковцев предприняли исследование общих соотношений теории пластичности как идеального, так и упрочняющегося тела, как с учетом упругих деформаций, так и без их учета, на предмет их классификации, определения характеристических поверхностей и поверхностей разрыва скоростей, скоростей деформаций и напряжений. Полученные ими результаты устанавливают, что (1) дифференциальные уравнения теории устойчивого упрочняющегося упругопластического тела не имеют действительных характеристик, т.е. эллиптичны; (2) если в качестве критерия текучести взят критерий, отличный от критерия текучести Треска, то для большинства пространственных состояний дифференциальные уравнения теории идеально упругопластического тела эллиптичны.

В 1966 г. выходит в свет монография Д.Д. Ивлева “Теория идеальной пластичности”. В этом оригинальном сочинении с высоким мастерством были изложены новые результаты и принципы математической теории идеальной пластичности и, прежде всего, теория пространственной и обобщенной плоской задачи. Заметим, что эта монография стоит в одном ряду с замечательными руководствами по теории пластичности, написанными советскими учеными-механиками, которые по мастерству изложения и богатству результатов до сих пор остаются непревзойденными образцами. И в настоящее время “Теория идеальной пластичности” Д.Д. Ивлева служит незаменимым руководством для тех, кто пытается глубже проникнуть в основы математической теории идеальной пластичности, опираясь на блестящее и последовательное изложение, данное грандом этой науки.

В механике упрочняющихся пластических тел Д.Д. Ивлев (совместно с Г.И. Быковцевым) последовательно развивал представления, основанные на трансляционном механизме упрочнения, предложенные ранее в исследованиях А.Ю. Ишлинского и В. Прагера (W. Prager). Результаты их совместных исследований легли в основу классической монографии, которая по сути представляет собой каноническое изложение математической теории пластичности упрочняющегося тела в случае малых деформаций. В этой монографии читатель найдет исчерпывающий анализ общих уравнений теории течения и свойств их решений, включая анализ сильных и слабых разрывов с помощью аппарата геометрических и кинематических условий совместности Адамара-Томаса (J. Hadamard, T. Tomas).

Исследования Д.Д. Ивлева в области математической теории пластичности подытожены в фундаментальной двухтомной монографии “Механика пластических сред”.

Помимо перечисленных, Д.Д. Ивлеву принадлежат различные результаты в области предельного состояния конструкций, статики и динамики сыпучих сред, устойчивости равновесия упругопластических тел, гидродинамики, теории трещин и механики разрушения. Следует отметить обстоятельный обзор работ по механике разрушения с изложением основных результатов этой части механики деформируемого твердого тела, сделанный им в момент острой дискуссии, посвященной механике трещин (см.: Ивлев Д.Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журнал прикл. механики и технич. физики. 1967. № 6. С. 88-128). Дискуссиям в механике посвящена важная и весьма поучительная статья: Ивлев Д.Д. Три дискуссии в механике // Вестник Самарского гос. университета. Естественно-научная серия. 2007. №4(54). С. 115-123. В ней Д.Д. Ивлев с присущей ему корректностью, тактом и бережным отношением к научным фактам затрагивает

важную тему о дискуссии по механике квазихрупкого разрушения и дает свою оценку имевшим место событиям, тем более, что Д.Д. Ивлев лично участвовал в этой дискуссии. Мы также ранее высказывались по этому поводу в статье: Радаев Ю.Н. К 75-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №5(39). 2005. С. 5-32. Наши оценки результатов имевшей место более сорока лет назад дискуссии совпадают. В частности, Д.Д. Ивлев в указанной выше статье пишет: "Прав Ю.Н. Радаев, когда написал: "Через сорок лет после этой дискуссии стало очевидным, что она нанесла значительный ущерб российской науке".

В течение трех последних десятилетий рядом ученых проводятся исследования в рамках научного направления, вектор которого был задан Д.Д. Ивлевым в его работах по теории пространственной задачи математической теории пластичности конца 50-х годов. Как уже указывалось, это один из самых сложных и наименее изученных разделов механики деформируемого твердого тела. Тем не менее за последние два десятилетия удалось существенно продвинуться в создании общей теории трехмерных уравнений математической теории пластичности с условием пластичности Треска и ассоциированным законом течения для напряженных состояний, соответствующих ребру поверхности текучести, и предложить общую схему интегрирования пространственных статических уравнений. Основой теории выступает ряд геометрических результатов по исследованию поля главных направлений тензора напряжений, характеризуемых наибольшим (или наименьшим) главным нормальным напряжением, полученных в [23] и [24]. Исследования в области пространственной задачи теории идеальной пластичности были подытожены в монографиях: Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с.; Ивлев Д.Д., Максимова Л.А., Непершин Р.И., Радаев Ю.Н., Сенашов С.И., Шемякин Е.И. Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с.

В первой из указанных монографий сделана попытка дать полное и систематическое изложение методов и результатов, связанных с исследованием трехмерных уравнений математической теории пластичности в изостагической координатной сетке, делая акцент на новых общих методах, которые обеспечивают решение прикладных задач механики деформируемого твердого тела. Исходной точкой построения общей теории пространственных уравнений выступает одна замечательная инвариантная векторная форма пространственных уравнений, анализ которой позволяет сделать заключение о расслоенности поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению. Затем рассматриваются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, основные кинематические соотношения для приращений перемещений, следующие из него, а также исследуется кинематика течения на поверхностях максимальной скорости сдвига. Показано, что скольжения на указанной поверхности (сильные разрывы приращений перемещений) могут происходить только вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну. Поэтому сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Получены интегрируемые соотношения для разрывов касательных составляющих приращений перемещений вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига. Рассмотрены кинематические соотношения в областях эллиптичности, т.е. когда гауссова кривизна положительна,

на поверхности максимальной скорости сдвига. Интегралы уравнений равновесия для расслоенного поля напряжений вдоль изостатических траекторий выводятся преобразованием векторного уравнения равновесия к изостатической координатной сетке. Устанавливается возможность отделения одной из изостатических координат, поверхности уровня которой как раз и являются слоями поля направлений, соответствующих наибольшему (наименьшему) главному нормальному напряжению.

Значительное внимание уделяется исследованию трехмерных уравнений математической теории пластичности в триортогональных изостатических координатах [25]. Основным интересом здесь представляют уравнения совместности приращений деформаций и пространственные соотношения Коши. Уравнения совместности для приращений малых деформаций в триортогональной изостатической системе координат исследуются вместе дополнительными соотношениями, связывающими физические компоненты тензора несовместности. Существенных уравнений совместности шесть. Для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона-Треска, имеется лишь три независимых уравнения совместности. Явно указываются и рассматриваются системы независимых уравнений совместности, сформулированные в изостатической координатной сетке. Определены условия, достаточные для того, чтобы при выполнении трех независимых уравнений совместности удовлетворялись три оставшихся уравнения совместности. Показано, что нарушения сплошности на поверхности идеально пластического тела распространяются вглубь тела вдоль асимптотических линий на слоях векторного поля, указывающего направления наибольшего главного нормального напряжения. Поскольку асимптотические линии наименее искривлены по сравнению с любыми другими линиями на поверхности (в том смысле, что нормальная кривизна асимптотических линий равна нулю), то нарушения сплошности проникают вглубь идеально пластического тела по наименее искривленным траекториям. Именно в этом смысле можно вести речь о минимальном искривлении траекторий распространения трещин в твердых телах.

Анализ плоской и осесимметричной задач выполнен с использованием аппарата производящих функций, определяющих канонические преобразования пространственных координат. Альтернативный вариант вывода всех основных геометрических соотношений теории плоской деформации идеально пластического тела, исходя из условия интегрируемости трехмерных пространственных уравнений, сформулированных для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона-Треска, простым понижением на одну единицу их размерности был выполнен в статье [26].

В рамках построения математической теории пластичности с уравнениями гиперболического аналитического типа был выполнен групповой анализ уравнений пространственной, плоской и осесимметричной задачи. В отношении пространственных уравнений эта работа еще далека от завершения и продолжается поиск новых симметрий пространственных уравнений Д.Д. Ивлева. Методы группового анализа все шире проникают в механику деформируемого твердого тела, позволяя в некоторых случаях получать точные решения важнейших прикладных задач. Получены новые результаты применения классических методов Ли к нелинейным уравнениям теории пластичности. Определены группы симметрий уравнений в частных производных теории пластичности, алгебры симметрий (алгебры Ли) и оптимальные системы одномерных подалгебр для пространственной, плоской и осесимметричной задач. Оптимальные системы позволяют найти ряд новых решений трехмерных уравнений теории пластичности инвариантно-

групповой природы. Применение групповых методов (особенно это касается пространственной задачи) требует выполнения огромного объема рутинных преобразований и вычислений, которые были проведены с помощью систем символьных вычислений. Чтобы оценить примерный объем вычислительной работы заметим, что лишь для одной естественной конечномерной (размерности 12) подалгебры алгебры симметрий, соответствующей группе симметрий трехмерных уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности, оптимальная система одномерных подалгебр насчитывает один трехпараметрический элемент, 12 двухпараметрических, 66 однопараметрических элементов и 108 индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений осесимметричной задачи имеет размерность 5; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного однопараметрического элемента и двадцати двух индивидуальных элементов. Алгебра симметрий уравнений плоской задачи (плоское деформированное состояние) имеет размерность 7; оптимальная система одномерных подалгебр состоит из одного двухпараметрического элемента, 11 однопараметрических и 20 индивидуальных элементов.

Преподавание математической теории пластичности в российских университетах имеет свою историю и традиции. В настоящее время они прочно связаны с именами Д.Д. Ивлева и Г.И. Быковцева. Отличительной чертой их преподавательской деятельности является сочетание прикладного содержания теории пластичности с глубоким и изящным математическим исследованием гиперболических задач для дифференциальных уравнений в частных производных, к которым приводит изучение полей напряжений и скоростей деформаций в зонах пластического течения. Такой синтез требовал также прочтения особого курса по теории дифференциальных уравнений частных производных математической физики, в котором излагались такие редко освещаемые в современной учебной литературе темы, как общая теория характеристик для нелинейных уравнений первого и второго порядков, метод каскадного интегрирования Лапласа, метод тангенциального преобразования, метод фазового преобразования.

Д.Д. Ивлев – член Национального комитета РАН по теоретической и прикладной механике, член редколлегии журнала “Известия РАН: Механика твердого тела”, член экспертного совета по математике и механике ВАК Минобрнауки России, председатель диссертационного совета по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук, действительный член Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, заслуженный деятель науки и техники РФ (1992 г.), лауреат Государственной премии Чувашской Республики в области науки и техники (2006 г.) Среди учеников Д.Д. Ивлева – доктора и кандидаты наук, которые работают в различных городах России: Москве, Воронеже, Самаре, Чебоксарах, Владивостоке.

Мы поздравляем Дюиса Даниловича с 80-летием – замечательной датой, которая является важнейшей вехой на пути его научного поиска. Мы желаем ему здоровья и творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Saint-Venant, B. Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences. – 1870. – Т. 70. – P. 473–480.
2. De Saint-Venant, B. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état / B. De Saint-Venant // Liouville J. d. Math. Pures et Appl. Ser. II. – 1871. – Т. 16. – P. 308–316, 373–382.21
3. Coulomb, C. A. Essay sur l'application des règles de maximes et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture / C. A. Coulomb // Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'académie Royale des Sciences. Année 1773. – Paris : L'imprimerie Royale, 1776.
4. Леви, М. К вопросу об общих уравнениях внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упругости : сб. ст. / М. Леви // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 20–23.22
5. Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
6. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : Гостехтеоретиздат, 1956. – 407 с.
7. Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М. : Физматгиз, 1962. – 432 с.
8. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1969. – 420 с.
9. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
10. Ивлев, Д. Д. Теория идеальной пластичности / Д. Д. Ивлев. – М. : Наука, 1966. – 232 с.
11. Быковцев, Г. И. Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
12. Ильюшин, А. А. Пластичность. Ч.1 : Уруго-пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. [СПб.] : Гостехтеоретиздат, 1948. – 376 с.
13. Хаар, А. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах : сб. ст. / А. Хаар, Т. Карман // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 41–56.23
14. Генки, Г. О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических телах : сб. ст. / Г. Генки // Теория пластичности. – М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – С. 80–101.
15. Шилд, Р.Т. О пластическом течении металлов в условиях осевой симметрии : сб. переводов / Р. Т. Шилд // Механика. – 1957. – № 1. – С. 102–122.24
16. Ишлинский, А.Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля / А. Ю. Ишлинский // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т. 8, вып. 3. – С. 201–224. (Статья воспроизводится также в книге: Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1 : Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М. : Наука, 1986. С. 17–42.)
17. Ишлинский, А.Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости / А. Ю. Ишлинский // Ученые записки МГУ. Механика. – 1946. – Вып. 117. – С. 90–108. (См. там же: С. 62–83. В заключительном подстрочном замечании

А. Ю. Ишлинский указывает на то, что статья была написана и представлена в редакцию в начале 1941 г.)

18. Ивлев, Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статике сыпучих сред / Д. Д. Ивлев // Прикладная математика и механика. – 1958. – Т. 22, вып. 1. – С. 90–96.25
19. Ивлев, Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д. Д. Ивлев // Доклады АН СССР. – 1959. – Т. 124, №3. – С. 546–549.26
20. Ивлев, Д. Д. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности / Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – №3. – С. 137. (Статья воспроизводится также в книге: Ивлев Д. Д. Механика пластических сред. Т. 1 : Теория идеальной пластичности. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. С. 20–21.)
21. Ивлев, Д. Д. К теории осесимметричного напряженного состояния при условии пластичности Треска / Д. Д. Ивлев // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – №6. – С. 112–114. (См. там же: С. 263–267.)
22. Радаев, Ю.Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественно-научная серия. – №6(56). – 2007. – С. 102–114.
23. Радаев, Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия// Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – №1. – С. 86–94.
24. Радаев, Ю.Н. К теории трехмерных уравнений математической теории пластичности / Ю. Н. Радаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 2003. – №5. – С. 102–120.
25. Радаев, Ю.Н. О гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности в изостатической координатной сетке / Ю. Н. Радаев // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 2008. – № 5. – С. 79–89.
26. Радаев, Ю.Н. К теории плоской деформации идеально пластического тела / Ю. Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественно-научная серия. – № 3(62). – 2008. – С. 272–289.

ДАВЛЕНИЕ ПЛОСКОГО ШТАМПА НА ОРТОТРОПНОЕ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Ивлев Д.Д., Непершин Р.И.

*Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева
Московский государственный технологический университет "Станкин"*

Аннотация

Рассматривается задача о давлении плоского штампа на ортотропное идеально пластическое полупространство. Зависимость напряжения текучести от направления главного напряжения задается эллипсоидом анизотропии. Угловая точка штампа и прямолинейная граница полупространства порождают центрированный веер прямолинейных характеристик, как и в случае изотропного тела, с аналогичной кинематикой пластического течения. Но давление на штамп существенно зависит от пластической анизотропии.

Ключевые слова: идеальная пластичность, плоская задача, ортотропное полупространство, эллипсоид анизотропии, давление плоского штампа.

УДК: 539.374

Анизотропия пластических свойств материала, проявляющаяся в зависимости напряжения текучести от направления, существенно влияет на несущую способность деталей машин и элементов конструкций при контактных нагрузках. Анизотропия может быть как результатом технологии обработки металлов, создающей направленную текстуру, например, после многопереходной прокатки заготовок или направленной кристаллизации слитков, так и результатом естественного волокнистого строения материала. Анизотропия тонкого листа, полученного прокаткой, существенно влияет на предельную пластичность до разрушения в технологических операциях вытяжки тонкостенных оболочек. Методы экспериментального исследования пластической потери устойчивости при сложной вытяжке с использованием модифицированного квадратичного условия пластичности Мизеса для ортотропного материала [1] приведены в [2]. Нормальная анизотропия по толщине листа с модифицированным условием пластичности Мизеса и ассоциированным законом течения использовалась в [3] при моделировании пластического обжима тонкостенной трубы с учетом изменения толщины стенки. Теоретические исследования моделей идеальной пластичности ортотропных материалов с использованием модифицированного квадратичного условия пластичности Мизеса [1] приведены в [4-6]. Общие соотношения двумерных задач для неоднородного сжимаемого анизотропного идеально пластического тела при условии полной пластичности приведены в [7]. Задача о вдавливании жесткой четырехгранной пирамиды в анизотропное идеально пластическое полупространство при квадратичном условии пластичности [1] решается методом малого параметра в [8].

1. В настоящей работе рассматривается идеальная пластическая анизотропия при условии полной пластичности [9]. В случае пространственной анизотропии напряжение текучести представим радиусом-вектором σ_s , в декартовых координатах x, y, z модуль которого σ_s определяется направляющими косинусами n_1, n_2, n_3 с осями координат x, y и z . Если главные оси анизотропии ортотропного тела совпадают с направлениями осей x, y и z , то пространственную идеальную пластическую анизотропию можно представить эллипсоидом анизотропии в виде

$$\frac{\sigma_{sx}^2}{\sigma_{s1}^2} + \frac{\sigma_{sy}^2}{\sigma_{s2}^2} + \frac{\sigma_{sz}^2}{\sigma_{s3}^2} = 1, \quad (1)$$

где σ_{s1} , σ_{s2} , σ_{s3} – значения напряжения текучести при одноосном растяжении-сжатии вдоль главных осей анизотропии; σ_{sx} , σ_{sy} , σ_{sz} – проекции вектора σ_s на направления осей координат, определяемые направляющими косинусами n_1 , n_2 , n_3 . Модуль напряжения текучести определяется формулой

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_{sx}^2 + \sigma_{sy}^2 + \sigma_{sz}^2}. \quad (2)$$

В случае изотропного тела эллипсоид анизотропии (1) представляет сферу с постоянным радиусом σ_s , не зависящим от направления. Рассмотрим плоскую деформацию ортотропного тела в плоскости x , y . При плоской деформации эллипсоид анизотропии (1) изображается эллипсом на плоскости x , y с полуосями σ_{s1} и σ_{s2} по направлениям осей x и y . Напряжение текучести σ_s , при параметрическом представлении эллипса с помощью угла наклона θ первого главного напряжения с осью x имеет вид

$$\sigma_s(\theta) = \sqrt{\sigma_{s1}^2 \cos^2 \theta + \sigma_{s2}^2 \sin^2 \theta}. \quad (3)$$

Направляющие косинусы определяются формулами

$$n_1 = \cos \theta, \quad n_2 = \sin \theta, \quad n_3 = 0. \quad (4)$$

Отличные от нуля компоненты тензора напряжений при условии полной пластичности [9] принимают вид

$$\sigma_x = \sigma - k + 2k \cos^2 \theta, \quad \sigma_y = \sigma - k + 2k \sin^2 \theta, \quad \tau_{xy} = k \sin 2\theta, \quad (5)$$

$$\sigma_z = \sigma - k, \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad k = \frac{\sigma_s}{2}. \quad (6)$$

Уравнения (5) удовлетворяют квадратичному условию пластичности при плоской деформации

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2(\theta) \quad (7)$$

с напряжением текучести σ_s , зависящим от направления первого главного напряжения для эллипса анизотропии по формуле (3).

Введем угол φ между осью x и максимальным касательным напряжением $\varphi = \theta - \frac{\pi}{4}$. Замена угла θ на угол φ приводит уравнения (3) и (5) к виду

$$\sigma_s(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_{s1}^2 + \sigma_{s2}^2 + (\sigma_{s1}^2 - \sigma_{s2}^2) \sin 2\varphi}, \quad (8)$$

$$\sigma_x = \sigma - k \sin 2\varphi, \quad \sigma_y = \sigma + k \sin 2\varphi, \quad \tau_{xy} = k \cos 2\varphi. \quad (9)$$

Подстановка напряжений (9) в дифференциальные уравнения равновесия плоской задачи приводит к гиперболической системе уравнений относительно переменных σ и φ с ортогональными характеристиками ξ и η с углами наклона α и β к оси x

$$tg\alpha = f_1(\varphi) + f_2(\varphi), \quad tg\beta = f_1(\varphi) - f_2(\varphi), \quad (10)$$

$$f_1 = \frac{k' \sin 2\varphi + \sigma_s \cos 2\varphi}{g(\varphi)}, \quad f_2 = \frac{\sqrt{k'^2 + \sigma_s^2}}{|g(\varphi)|}, \quad (11)$$

$$g = k' \cos 2\varphi - \sigma_s \sin 2\varphi, \quad k' = \frac{(\sigma_{s1}^2 - \sigma_{s2}^2) \cos 2\varphi}{\sigma_s}. \quad (12)$$

При $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ производная k' равна нулю и характеристики ξ и η совпадают с линиями скольжения – направлениями максимального касательного напряжения при $\sigma_s = \sigma_{s1}$ и $\sigma_s = \sigma_{s2}$. Вдоль характеристик выполняются дифференциальные соотношения [9]

$$d\sigma - \sqrt{k'^2 + \sigma_s^2} d\varphi = 0 \text{ вдоль } \xi, \quad d\sigma + \sqrt{k'^2 + \sigma_s^2} d\varphi = 0 \text{ вдоль } \eta, \quad (13)$$

обобщающие интегралы Генки в виде

$$d\sigma \pm F(\varphi) = \text{const}, \quad F = \int \sqrt{k'^2 + \sigma_s^2} d\varphi. \quad (14)$$

Так как, при $k' \neq 0$, характеристики ξ и η не совпадают с направлениями максимального касательного напряжения, то нормальные σ_ξ , σ_η и касательные $\tau_{\xi\eta}$ напряжения на характеристиках связаны с переменными σ и φ уравнениями равновесия

$$\sigma_\xi = \sigma - k(\varphi) \sin 2\gamma, \quad \sigma_\eta = \sigma + k(\varphi) \sin 2\gamma, \quad \tau_{\xi\eta} = k(\varphi) \cos 2\gamma, \quad \gamma = \alpha - \varphi \quad (15)$$

Дифференциальные уравнения для скоростей перемещений V_x , V_y , получаемые из ассоциированного закона пластического течения, относятся к гиперболическому типу с характеристиками ξ , η , совпадающими с характеристиками для напряжений [9]. Вследствие пластической несжимаемости материала и ортогональности характеристик вдоль них выполняются соотношения Гейрингер для проекций вектора скорости V_ξ , V_η на направления характеристик ξ и η

$$dV_\xi - V_\eta d\alpha = 0 \text{ вдоль } \xi, \quad dV_\eta - V_\xi d\alpha = 0 \text{ вдоль } \eta, \quad (16)$$

$$V_x = V_\xi \cos \alpha - V_\eta \sin \alpha, \quad V_y = V_\xi \sin \alpha - V_\eta \cos \alpha, \quad (17)$$

$$V_\xi = V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha, \quad V_\eta = V_y \cos \alpha - V_x \sin \alpha. \quad (18)$$

2. Рассмотрим задачу Прандтля о давлении плоского штампа на ортотропное идеально пластическое полупространство, в котором главные оси эллипса анизотропии совпадают с направлениями осей координат x , y . Начало координат совместим с центром O границы контакта штампа с полупространством и рассмотрим правую часть пластической области от линии симметрии $x = 0$, показанную на рис. 1.

На границе AD напряжения σ_y и τ_{xy} равны нулю и напряжение σ_x отрицательно. Эти условия и уравнения (9) определяют $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\sigma = -k$, $\sigma_x = -2k$. Из уравнений (8) и (12) находим $2k = \sigma_{s1}$, $k' = 0$, где σ_{s1} – напряжение текучести вдоль оси x . Постоянные значения σ , φ , k и $k' = 0$ на прямолинейной границе AD и дифференциальные соотношения (13) определяют однородное напряженное состояние при $\sigma = \frac{\sigma_{s1}}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ в треугольной области ACD . Из уравнений (10)–(12) следует совпадение характеристик ξ и η с направлениями максимальных касательных напряжения – линиями скольжения в этой области.

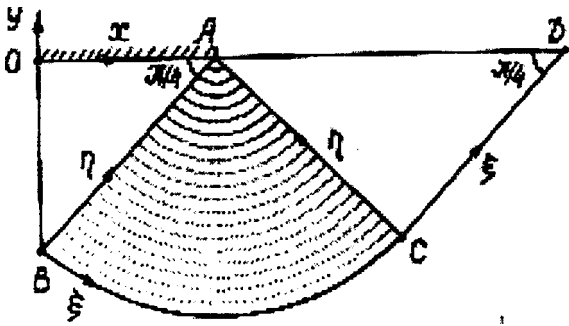


Рис. 1

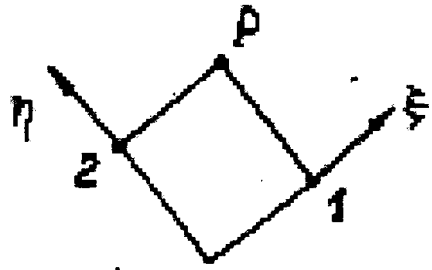


Рис. 2

При давлении плоского гладкого штампа на полупространство угол φ изменяется в угловой точке A от $+\frac{\pi}{4}$ на границе AD до $-\frac{\pi}{4}$ на границе OA . Так как η характеристика AC прямолинейна с постоянными значениями σ и φ , и соотношения (8) – (14) зависят только от φ , то интегрирование уравнений (10) – (12) с дифференциальными соотношениями (13) приводит к центрированному вееру прямолинейных η характеристик и ортогональных к ним ξ характеристик в области ACB , как и в случае изотропного тела. Однако в этой области характеристики ξ и η не совпадают с линиями скольжения изотропного тела вследствие изменения напряжения текучести от σ_{s1} в области ACD до σ_{s2} в области однородного напряженного состояния OAB с прямолинейными характеристиками ξ и η . Давление q на штамп определяется интегралом (14) с граничным условием $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\sigma = -\frac{\sigma_{s1}}{2}$ на AC с изменением угла до $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ на AB и вторым соотношением (9) при $k = \frac{\sigma_{s2}}{2}$

$$q = \frac{\sigma_{s1} + \sigma_{s2}}{2} + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{k'^2 + \sigma_s^2} d\varphi. \quad (19)$$

При численном решении уравнений (10) – (13) используем циклические процедуры расчета сетки характеристик для последовательности элементарных задач Гурса [9]. На рис. 2 показан регулярный узел P на пересечении характеристик ξ и η , проходящих через точки 1 и 2. Обозначим известные значения переменных в этих точках нижними индексами 1 и 2, и представим дифференциальные соотношения (13) между точками P и 2 вдоль ξ и между точками P и 1 вдоль η конечными разностями

$$\sigma - \sigma_2 = F - F_2, \quad \sigma - \sigma_1 = F_1 - F, \quad (20)$$

где F , F_1 и F_2 – значения интеграла (14) в точках P , 1 и 2. Из уравнений (12) находим σ и F в точке P

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2 + F_1 - F_2), \quad F = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2 + F_1 + F_2). \quad (21)$$

Представляя дифференциал dF вдоль ξ конечной разностью между точками P и 2:

$$F - F_2 = \sqrt{k'^2 + \sigma_s^2} (\varphi - \varphi_2)$$

и исключая F по второй формуле (21) находим

$$\varphi = \varphi_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2 + F_1 - F_2}{2\sqrt{k'^2(\tilde{\varphi}_1) + \sigma_s^2(\tilde{\varphi}_1)}}, \tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_2). \quad (22)$$

Угол φ вычисляется по уравнению (22) простыми итерациями с использованием формул (8) и (12) для σ_s и k' . Координаты точки P определяются из линейной системы уравнений, получаемых конечно-разностной аппроксимацией уравнений характеристик (10) с использованием средних значений угла φ между точками 1 и 2 и точкой P . После расчета сетки характеристик определяется поле скоростей перемещений графическим построением годографа скоростей с использованием ортогональности характеристик на физической плоскости x, y и на плоскости годографа V_x, V_y , или численным решением дифференциальных соотношений (16) аналогично задачам для изотропного идеально пластического тела [9].

3. На рис. 1 показана сетка характеристик ξ, η при давлении штампа на ортотропное полупространство с отношением напряжений текучести эллипса анизотропии $\frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{s1}} = 2$ с максимальным напряжением текучести по нормали к границе

полупространства. В области ABC сетка получена численным решением вырожденной задачи Гурса от угловой точки A с равномерным шагом 0.025 по углу φ и от прямолинейной характеристики AC с граничными условиями $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

$\sigma = -\frac{\sigma_{s1}}{2}, F = 0$. Численные результаты показывают выполнение условия орто-

гональности характеристик с точностью 10^{-5} . В зонах однородного напряженного состояния OAB и ACD характеристики совпадают с направлениями максимального касательного напряжения вследствие равенства нулю производной k' в экстремальных точках эллипса анизотропии.

В области ABC характеристики ξ, η не совпадают с линиями скольжения для изотропного тела, что видно из неравномерности шага по углу α между прямолинейными характеристиками η , которые сгущаются около границы AC . Для приведенного примера анизотропии предельное давление q на штамп равно $3.989\sigma_{s1}$, что существенно выше предельного давления $2.571\sigma_{s1}$ для изотропного

тела. При обратном отношении $\frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{s1}} = 0.5$ предельное давление на штамп равно

$1.994\sigma_{s1}$ и характеристики η сгущаются около границы AB , что показывает на существенное изменение напряженного состояния в пластической области. В таблицах 1 и 2 приведены зависимости угла α , безразмерных значений σ, σ_s и интеграла F от угла φ на круговой характеристике ξ , определяющие распределение напряжений по уравнениям (15) в области ABC для эллипсов анизотропии с отношениями $\frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{s1}} = 2$ и $\frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{s1}} = 0.5$. Эти результаты показывают существенное

влияние анизотропии на напряженное состояние в пластической области и на

предельное давление на штамп, определяемое вторым соотношением (9) при

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

На рис. 3 показаны зависимости безразмерного предельного давления на штамп $\frac{q}{\sigma_{s1}}$ от отношения $\frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{s1}}$, полученные интегрированием уравнения (19), которые показывают существенное влияние анизотропии на предельное состояние материала полупространства.

4. На рис. 4 показан годограф скоростей перемещений на плоскости V_x, V_y , полученный ортогональным отображением характеристик ξ, η физической плоскости (рис. 1а). В случае образования жесткой области OAB , движущейся со скоростью штампа $V_y = -1$, в точке B возникает разрыв скорости $[V] = \frac{1}{\sqrt{2}}$, сохраняющий постоянное значение вдоль жесткопластической границы BCD при $V_n = 0$ по условиям несжимаемости и непрерывности нормальной компоненты скорости на этой границе. В этом случае область ACD скользит как жесткое тело по наклонной границе CD со скоростью $[V]$ под углом $\frac{\pi}{4}$ к границе полупространства. Однородному напряженному состоянию в области OAB с гладкой границей штампа может соответствовать однородное поле скоростей перемещений с линейным изменением скорости V_y от -1 до нуля на линии симметрии $x = 0$ и линейным изменением скорости V_x от нуля до единицы при скольжении по гладкой границе штампа OA . Этим условиям соответствует линейное изменение скоростей на характеристике AB , которое вместе с условием непрерывности скоростей $V_\xi = V_n = 0$ на жесткопластической границе BCD определяет непрерывное линейное изменение скоростей вдоль прямолинейных характеристик η в области и непрерывное линейное изменение скоростей в области ACD . Годограф с непрерывным полем скоростей показан штриховыми линиями на рис. 4. В этом случае точки границы AD смещаются под углом $\frac{\pi}{4}$ к границе полупространства с линейным увеличением модуля вектора скорости от нуля в точке D до единицы в точке A . Таким образом, при давлении гладкого плоского штампа на ортотропное полупространство кинематика пластического течения остается такой же, как и для изотропного тела, включая возможность реализации различных полей скоростей в зависимости от кинематики движения области однородного напряженного состояния под штампом [10].

Таблица 1

$$\frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{s1}} = 2$$

φ	α	$-\sigma$	σ_s	F
0.7854	0.7854	0.5000	1.000	0.0000
0.6807	0.7576	0.6058	1.016	0.1058
0.5760	0.7078	0.7170	1.063	0.2170
0.4712	0.6363	0.8374	1.177	0.4015
0.3665	0.5448	0.9685	1.223	0.4685
0.2618	0.4395	1.111	1.323	0.6107

φ	α	$-\sigma$	σ_s	F
0.1571	0.3255	1.264	1.427	0.7638
0.0524	0.2064	1.427	1.531	0.9272
0.0000	0.1457	1.512	1.581	1.012
-0.0524	0.0845	1.600	1.630	1.100
-0.1571	-0.0390	1.781	1.721	1.281
-0.2618	-0.1632	1.970	1.803	1.470
-0.3665	-0.2876	2.166	1.872	1.666
-0.4712	-0.4122	2.367	1.927	1.867
-0.5760	-0.5366	2.527	1.967	2.072
-0.6807	-0.6610	2.780	1.992	2.280
-0.7854	-0.7854	2.989	2.000	2.479

Таблица 2

$$\frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{s1}} = 0.5$$

φ	α	$-\sigma$	σ_s	F
0.7854	0.7854	0.5000	1.000	0.0000
0.6807	0.6610	0.6046	0.9959	0.1046
0.5760	0.5366	0.7185	0.9837	0.2085
0.4712	0.4122	0.8110	0.9365	0.3110
0.3665	0.2876	0.9115	0.9359	0.4115
0.2618	0.1632	1.009	0.9014	0.5092
0.1571	0.0390	1.104	0.8607	0.6038
0.0524	-0.0845	1.194	0.8150	0.6945
0.0000	-0.1457	1.238	0.7906	0.7382
-0.0524	-0.2064	1.281	0.7654	0.7809
-0.1571	-0.3255	1.363	0.7135	0.8625
-0.2618	-0.4395	1.439	0.6614	0.9391
-0.3665	-0.5448	1.510	0.6116	1.010
-0.4712	-0.6363	1.576	0.5671	1.076
-0.5760	-0.7078	1.636	0.5314	1.136
-0.6807	-0.7556	1.692	0.5081	1.192
-0.7854	-0.7854	1.744	0.5000	1.244

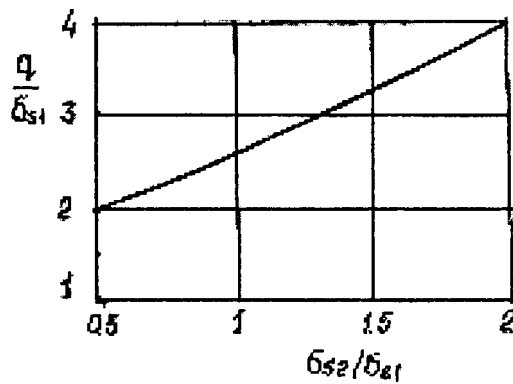


Рис. 3

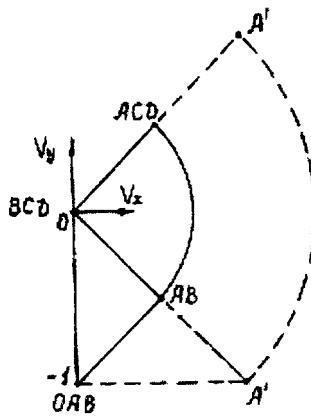


Рис.4

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
2. Томленов, А.Д. Теория пластического деформирования металлов / А. Д. Томленов. – М. : Металлургия, 1972. – 408 с.
3. Непершин, Р.И. Обжим тонкостенной трубы криволинейной матрицей / Р.И. Непершин // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2009. – № 3. – С. 54–62.
4. Матченко, Н.М. Некоторые вопросы теории пластичности анизотропных материалов : автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Н. М. Матченко. – Тула, 1975.
5. Кузнецов, Е.Е. К построению теории идеальной пластичности ортотропных сред / Е.Е. Кузнецов, И.Н. Матченко, Н. М. Матченко // Проблемы механики неупругих деформаций : сб. ст. к 70-летию Д. Д. Ивлева. – М., 2001. – С. 178–183.
6. Кузнецов, Е.Е. Осесимметричная задача теории идеальной пластичности трансверсально-изотропной среды / Е. Е. Кузнецов, Н. М. Матченко, В. В. Усачев // Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести : сб. ст. к 75-летию М.А. Задояна. – Ереван, 2006. – С. 171–176.
7. Горский, А.В. К теории общих двумерных задач теории идеальной пластичности для анизотропного неоднородного сжимаемого материала / А.В. Горский, П.В. Горский // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М., 2006. – С. 166–172.
8. Радаев, С.Ю. О внедрении жесткой пирамиды в анизотропное идеально пластическое полупространство / С. Ю. Радаев // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород : сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. – М. : Физматлит, 2006. – С. 569–575.
9. Ивлев, Д.Д. Предельное состояние деформированных тел и горных пород / Д. Д.Ивлев, Л.А. Максимова, Р. И. Непершин, Ю. Н. Радаев, С. И. Сенашов, Е. И. Шемякин. – М. : Физматлит, 2008. – 832 с.
10. Ишлинский, А. Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 704 с.

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ЮБИЛЕЙНЫЙ ГОД БПИ-БГПА-БНТУ

Чигарев А.В., Горбач Н.И.

Белорусский национальный технический университет, Минск

История кафедры теоретической механики неразрывно связана со становлением и развитием Белорусского политехнического института – одного из старейших вузов республики. Он был создан 10 декабря 1920 года.

Кафедра теоретической механики в составе БПИ начала функционировать с 1934 года. У истоков ее создания стоял крупный ученый того времени, профессор Николай Александрович Столяров (1870–1942 г.г.), который заведовал кафедрой до начала Великой Отечественной войны 1941–1945 гг.

После освобождения г. Минска от фашистских захватчиков и началом работы БПИ в 1945 году была создана объединенная кафедра теоретической механики и теории механизмов и машин. Заведующим кафедрой был избран кандидат технических наук, доцент Федор Капитонович Околковский (1887–1965 гг.)

В августе 1954 года из состава этой кафедры выделилась самостоятельная кафедра теоретической механики, заведующим которой был избран кандидат физико-математических наук, доцент Николай Александрович Бессонов (1904–1984 гг.). На момент разделения кафедры в ее составе был 1 доцент (Бессонов Н.А.), два старших преподавателя (Ничипорович Ф.В. и Ким А.Х.), 1 ассистент Свистун А.Н. и совместители Миткевич С.П., Ширшов В.М., Халимонович. К началу 1954-1955 учебного года на кафедру были дополнительно зачислены в качестве ассистентов Аксенович Д.А., Прохорова А.Н., Проскурина З.Н. и Григорович В.С. Бессонов Н.А. руководил кафедрой до конца 1956–1957 учебного года.

С сентября 1957 года до июля 1958 года обязанности заведующего кафедрой исполнял кандидат технических наук, доцент А.Х. Ким.

В июле 1958 года заведующим кафедрой был избран замечательный ученый, педагог и методист, доктор технических наук, профессор Геннадий Кузьмич Татур (1902-1979 гг.), который заведовал кафедрой до июля 1963 года.

В июне 1963 года заведующим кафедрой был избран талантливый ученый и педагог, кандидат техн. наук, доцент Алексей Харитонович Ким (1914–1992 гг.), который возглавлял кафедру до июня 1978 года. За это время он подготовил и в июне 1966 года успешно защитил докторскую диссертацию, стал профессором, одним из крупных ученых-реологов страны.

В июне 1978 года на должность заведующего кафедрой был избран кандидат технических наук, доцент Диомар Антонович Аксенович (1930-2010) который возглавлял кафедру до апреля 1984 года, а с 1 апреля 1984 года по 1 июня 1991 года кафедрой заведовал кандидат технических наук, доцент Николай Иванович Горбач (1934 г.р.).

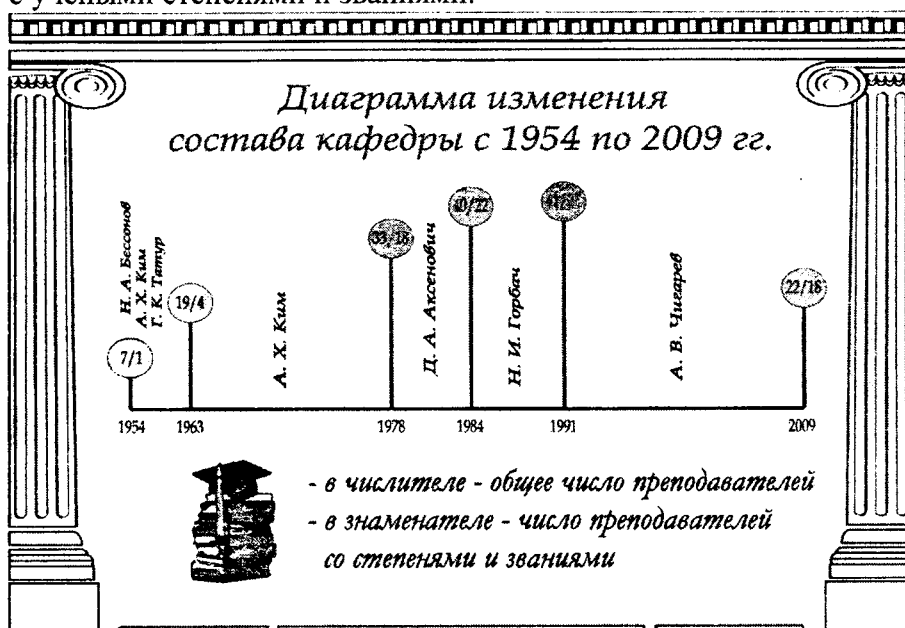
В июне 1991 года кафедру возглавил доктор физико-математических наук, профессор Анатолий Власович Чигарев (1941 г. р).

За 76 лет кафедры в ее составе в качестве преподавателей теоретической механики работало и продолжает работать 81 человек.

В составе кафедры за все время было 10 докторов наук, профессоров; кандидатов наук, доцентов – 41 человек.

Численный состав кафедры с 7 человек в 1955 г. увеличился до 41 преподавателя в 1991 г., затем с каждым годом число преподавателей сокращалось (см.

диаграмму). В настоящее время на кафедре работает 24 преподавателя, из них 18 человек с учеными степенями и званиями.



Научно-исследовательская работа

На кафедре развивались научные направления:

- **Реология вязко-пластических и неньютоновских систем.**

Научным руководителем этого направления был д-р техн. наук профессор А.Х. Ким. Под его руководством защищена одна докторская и 14 кандидатских диссертаций, из них 9 – сотрудниками кафедры.

- **Механика деформируемого твердого тел.**

Начала развиваться с приходом на кафедру д-р техн. наук, профессора Г.К. Татура. В 1976 г. это направление возглавил канд. техн. наук, доцент А.Е. Крушевский (1932–2007). В 1998 им была защищена докторская диссертация и присуждена ученая степень д-р физ.-мат. наук. В рамках этого научного направления с 1978 г. проводились также исследования под руководством профессора Г.Ф. Ершова (1922–1997) по расчету оболочек. Под руководством и консультативной поддержке Т.К. Татура было подготовлено и защищено 6 докторских и 9 кандидатских диссертаций, под руководством А.Е. Крушевского две докторские и 10 кандидатских, Г.Ф. Ершова – две кандидатские диссертации. Из общего числа диссертаций 8 защищено сотрудниками кафедры.

В 1991 г. научное направление «Механика деформируемого твердого тела» возглавил д-р физ.-мат. наук, профессор А.В. Чигарев и оно является основным научным направлением на кафедре до настоящего времени.

Под руководством профессора А.В. Чигарева в 1992 г. начал работу специализированный совет по механике деформируемого твердого тела по защите кандидатских и докторских диссертаций. На заседаниях Совета защищено 12 докторских и 16 кандидатских диссертаций.

Под руководством А.В. Чигарева подготовлено и защищено 5 докторских и 15 кандидатских диссертаций, из них 7 сотрудниками кафедры.

- **Механика неголономных систем и, в частности, динамика систем с качением.**

Научное направление по механике неголономных систем начиная со середины 60-х годов развивал д-р техн. наук, профессор М.А. Левин (1937–1993). В настоящее время в этой области продолжает работать канд. техн. наук, доцент Ю.А. Гурвич.

• Исследования по педагогике учебного процесса в вузе.

Исследования в области педагогики учебного процесса в ВУЗе были начаты в 1976 г. под руководством профессора Г.К. Татура, а с 1979 г. продолжены под руководством канд. техн. наук, доцента Н.П. Имашевой (1929г.р.). Были выполнены исследования по междисциплинарным связям, по определению содержания обучения и повышению эффективности учебного процесса.

При активном участии сотрудников кафедры организованы и проведены I и II Белорусские конгрессы по теоретической и прикладной механике в 1995 г. и 1999 г., проведены международные конференции, в 1993 г. «Вибрация и волны», г. Минск, и в 1996 г. «Экологическое моделирование и оптимизация в условиях техногенеза» (г. Солигорск).

Кафедра имеет тесные научные связи с ведущими учеными в России, Польше, Германии, Литве, Украине и США.

Сотрудниками кафедры опубликованы десятки монографий по различным направлениям, сотни статей, сотрудники принимают участие в конференциях, проводится ежегодно международный научно-методический семинар, издается научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». На кафедре действует научная школа по механике деформируемого твердого тела (руководители проф. А.В. Чигарев, проф. И.С. Куликов), учениками которой, в рамках магистратуры, аспирантуры и докторантуры защищено 5 докторских и 16 кандидатских диссертаций из них 7 сотрудниками кафедры. При кафедре действует семинар под руководством проф. Чигарева А.В. по предварительной экспертизе диссертаций, представляемых в совет при БНТУ для защиты по специальности «Механика деформируемого твердого тела» и при кафедре (зав. лабораторией Миклашевич И.А.).

Учебно-методическая работа

Кафедра проводит учебные занятия по теоретической механике на 13 факультетах университета для студентов 56 специальностей дневной и заочной форм обучения. Ежегодно около 9 000 студентов под руководством 24 преподавателей изучают курс теоретической механики и его применение к решению практических задач.

Начиная с 1960 г. и до настоящего времени сотрудниками кафедры издано более 160 учебных и учебно-методических пособий общим объемом более 640 п.л. Только в 2010 г. Издано с грифом Министерства образования четыре учебных пособия по теоретической механике общим объемом 120,6 п.л. Учебный процесс по преподаваемым дисциплинам на кафедре обеспечен необходимыми методическими разработками, наглядными пособиями и различного рода ТСО.

С 2002 года на кафедре была начата подготовка студентов по специализации «Компьютерная механика», которая представляет собой синтез дисциплин механико-математического профиля с компьютерными технологиями, базирующимися на применении пакетов программ в инженерии и научно-исследовательском моделировании.

С 2009 года специализация «Компьютерная механика» реформирована в специальность «Компьютерная мехатроника», которая органично включает в себя подготовку по трем основным базовым направлениям: механика, информатика, электроника. Будущие специалисты будут профессионально сочетать знания по различным предметам из этих базовых дисциплин при проектировании, конструировании, производстве современных машин, приборов, различных технических систем.

УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ТРЁХСЛОЙНЫХ АРМИРОВАННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЛЁГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ*

Вохмянин И.Т.¹, Немировский Ю.В.²

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин)¹

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН²

It is carried out the mathematical simulation of creep of the three-layered cylindrical shells, reinforced by the fibers of a constant cross section. It is investigated creep of the shells with the unequal strong and equal strong stressed reinforcement, loaded, in the general case, with transverse pressure and axial forces. Solution of the problem about creep of shells under the action of transverse pressure is obtained, as an example.

Исследованию равнонапряжённого армирования металлокомпозитных пластин по направлениям главных напряжений под действием сил в их плоскости в условиях установившейся ползучести посвящены работы [1–2]. В работе [3] сформулированы и решены задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) трёхслойных пластинок с равнонапряженным и неравнонапряженным армированием слоев по спиральям Архимеда, логарифмическим спиральям, спицам велоколеса симметричного и несимметричного строения в условиях установившейся ползучести под действием поперечных сил и сил в их плоскости. Изучению особенности продольно-поперечного изгиба трёхслойных кольцевых пластинок с несимметричными структурами армирования и рациональному проектированию армированных конструкций посвящены работы [4–5].

В настоящей работе сформулированы и решены задачи определения НДС и проведено исследование установившейся ползучести изгибаемых трёхслойных цилиндрических оболочек симметричного строения, армированных как равнонапряженными, так и неравнонапряженными волокнами постоянного сечения. Выявлены некоторые свойства оболочек и влияние краевых эффектов на их напряженно деформированное состояние.

Рассмотрим в цилиндрической системе координат осесимметрично нагруженную трёхслойную цилиндрическую оболочку длиной $2L$ и радиуса R , выполненную из двух внешних композитных несущих слоев с толщинами δ^\pm (знак + далее относится к величинам, характеризующим верхний слой, $0 \leq z \leq H + \delta^+$, а знак (-) – нижний, $-H - \delta^- \leq z \leq 0$) и среднего слоя (заполнителя) толщиной $2H$, ($-H \leq z \leq H$), выполненного из однородного материала, не воспринимающего цепных напряжений.

Воспользуемся линейными уравнениями равновесия оболочки [4]:

$$\frac{dn_1}{dx} = -f_t, \quad \frac{dq_1}{dx} = -n_2/r - f_n, \quad \frac{dm_1}{dx} = q_1/h - m_0. \quad (1)$$

Здесь

$$n_i = N_i/N_0, \quad m_i = M_i/M_{00}, \quad q_1 = Q_1/N_0, \quad m_0 = M_0/N_0,$$

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-08-00186-а).

$$\begin{aligned}
N_i &= \sigma_i^+ \delta^+ + \sigma_i^- \delta^-, \quad M_i = H(\sigma_i^+ \delta^+ - \sigma_i^- \delta^-), \quad N_0 = \sigma_0 H, \quad h = H/L, \\
M_{00} &= \sigma_0 H^2, \quad n_i = s_i^+ h^+ + s_i^- h^-, \quad m_i = s_i^+ h^+ - s_i^- h^-, \quad q_1 = 2s_{013}, \quad m_0 = M_0/N_0, \\
h^\pm &= \delta^\pm/H, \quad i=1,2, \quad f_i = F_i L/N_0 = p_1^+ + p_1^- + (C_0^+ h^+ + C_0^- h^- + 2C_0^0) \alpha, \\
m_0 &= p_1^+ - p_1^- + C_0^+ h^+ - C_0^- h^-, \quad p_1^\pm = q_1^\pm / \sigma_0 h, \quad s_i^\pm = \sigma_i^\pm / \sigma_0, \quad r = R/L, \\
s_{013} &= \sigma_{013} / \sigma_0, \quad f_n = F_n L/N_0 = p_n^+ + p_n^- + p_n + p_\omega + (B_0^+ h^+ + B_0^- h^- + 2B_0^0) r, \\
p_n^\pm &= q_n^\pm / (\sigma_0 h), \quad B_0^\pm = \rho^\pm \omega^2 R^2 / \sigma_0, \quad B_0^0 = \rho^0 \omega^2 R^2 / \sigma_0, \quad C_0^\pm = \rho^\pm g R / \sigma_0, \\
C_0^0 &= \rho^0 g R / \sigma_0, \quad \rho^\pm = \rho_0 \left(1 - \sum_{k=1}^K \omega_k^\pm \right) + \sum_{k=1}^K \rho_k^\pm \omega_k^\pm, \quad x = s/L, \quad -0,5 \leq x \leq 0,5,
\end{aligned}$$

величины N_i и M_i – усилия и изгибающие моменты, Q_1 – перерезывающая сила, M_0 – интенсивность распределённого осевого момента, q_i^\pm и q_n^\pm – интенсивности распределённых осевых и нормальных поверхностных сил, ρ^0 , ρ_0 , ρ_k^\pm и ρ^\pm – плотность материала заполнителя, связующего, армирующих волокон и приведённая плотность несущих слоёв, ω_k^\pm – плотности упаковки армирующих волокон, σ_i^\pm и σ_{013} – напряжения в несущих слоях и заполнителе, σ_0 – предел текучести материала одной из фаз композита, F_i и F_n – суммарные распределённые осевые и нормальное усилия, s текущая осевая координата, g – ускорение свободного падения, ω – угловая скорость вращения оболочки, $\alpha = 1$ при учете влияния собственного веса, $\alpha = 0$ – без учета влияния собственного веса.

Уравнения связи напряжений и скоростей деформаций в армированном слое и фазовых материалах (связующем, армирующих волокнах) композитных несущих слоёв [5]

$$\begin{aligned}
s_i^\pm &= a^\pm s_{0i}^\pm + \sum_{k=1}^K \omega_k^\pm s_k^\pm l_{ki}^\pm l_{kj}^\pm, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \\
\varepsilon_k^\pm &= \varepsilon_1^\pm (l_{k1}^\pm)^2 + \varepsilon_2^\pm (l_{k2}^\pm)^2, \quad l_{k1}^\pm = \cos \psi_k^\pm, \quad l_{k2}^\pm = \sin \psi_k^\pm, \\
s_{01}^\pm &= \sigma_{01}^\pm / \sigma_0, \quad s_k^\pm = \sigma_k^\pm / \sigma_0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где σ_{0i}^\pm и σ_k^\pm – напряжения в связующем материале и армирующих волокнах.

Кинематические соотношения, согласно гипотезе прямой линии (гипотезе Тимошенко):

$$\begin{aligned}
U(r) &= u_0(r) + z u_1(r), \quad W = W(r), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{01} + z_1 \kappa_1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{02} + z_1 \kappa_2, \\
\varepsilon_{13} &= \varepsilon_{013}, \quad \varepsilon_1^\pm = \varepsilon_{01} \pm \kappa_1, \quad \varepsilon_2^\pm = \varepsilon_{02} \pm \kappa_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{01} &= h \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_{02} = h \frac{u}{x}, \quad \varepsilon_{013} = u_1 + h \frac{dw}{dx}, \quad \kappa_i = H k_i, \quad \kappa_1 = h \frac{du_1}{dx}, \quad z_1 = z/H, \\
\kappa_2 &= 0, \quad u = \frac{u_0}{H}, \quad w = \frac{w_0}{H}, \quad u^\pm = \frac{U^\pm}{H} = u \pm u_1,
\end{aligned}$$

величины ε_i^\pm – скорости деформаций в несущих слоях, ε_i , ε_{13} – скорости деформаций в связующем и заполнителе, ε_{0i} , ε_{013} – скорости деформаций в отсчётной поверхности, k_i – характеристики скоростей изменения кривизн отсчётной поверхности, u_0 и w_0 – осевая и нормальная скорости перемещения точек отсчётной поверхности, u_1 – скорость наклона прямой линии, которая в начале дефор-

мирования совпадала с нормалью к отсчётной поверхности, U и U^\pm – осевые скорости перемещений точек в заполнителе и несущих слоях, W – нормальные скорости перемещения, которые одинаковы для всех точек в нормальном сечении слоёв, $W = w_0$. Кинематические соотношения (3) означают неизменность деформаций по толщине несущих слоёв и являются основой модели трёхслойной оболочки с мембранными несущими слоями [4].

Из равенств (3) следуют уравнения совместности скоростей деформаций

$$\frac{d\varepsilon_{013}}{dx} = \frac{1}{2h}(\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^-) + r \frac{d^2\varepsilon_2^+}{dx^2}, \quad \varepsilon_2^+ = \varepsilon_2^- \quad (4)$$

К уравнениям (1)–(4) добавим законы установившейся ползучести для фазовых материалов композита [2, 6]

$$\begin{aligned} s_{0i}^\pm &= 2g_0^\pm(2\varepsilon_i^\pm - \varepsilon_j^\pm), \\ s_k^\pm &= g_k^\pm \varepsilon_k^\pm, \quad \varepsilon_1^\pm = (1/6)f^\pm(2s_{01}^\pm - s_{02}^\pm), \quad \varepsilon_2^\pm = (1/6)f^\pm(2s_{02}^\pm - s_{01}^\pm), \quad s_{013} = g_{03}\varepsilon_{013}, \\ \varepsilon_k^\pm &= B_{00k}^\pm |s_k^\pm|^{m_k^\pm - 1} s_k^\pm, \quad f^\pm(T^\pm) = B_{00}^\pm (T^\pm)^{m_0^\pm - 1}, \quad T^\pm = \sqrt{[(s_{01}^\pm)^2 - s_{01}^\pm s_{02}^\pm + (s_{02}^\pm)^2]}/3, \\ \varepsilon_{013} &= B_{013} |s_{013}|^{m_3 - 1} s_{013}, \quad s_{013} = q_1/2, \quad g_{03} = \bar{B}_{003} |2\varepsilon_{013}|^{\mu_3 - 1}, \quad g_0^\pm = \bar{B}_{00}^\pm (H_0^\pm)^{\mu_0^\pm - 1}, \\ g_k^\pm &= \bar{B}_k^\pm |\varepsilon_k^\pm|^{\mu_k^\pm - 1}, \quad H^\pm = 2\sqrt{(\varepsilon_1^\pm)^2 + \varepsilon_1^\pm \varepsilon_2^\pm + (\varepsilon_2^\pm)^2}, \quad B_{00}^\pm = B_0^\pm \sigma_0^{m_0^\pm}, \\ B_{013} &= B_{03} \sigma_0^{m_3}, \quad \bar{B}_{003} = \bar{B}_{03} / \sigma_0, \quad \bar{B}_{00}^\pm = \bar{B}_0^\pm / \sigma_0, \\ \bar{B}_k^\pm &= \bar{B}_{0k}^\pm / \sigma_0, \quad B_{00k}^\pm = B_{0k}^\pm \sigma_0^{m_k^\pm}, \quad \bar{B}_0^\pm = (B_0^\pm)^{-\mu_0^\pm}, \\ \bar{B}_{0k}^\pm &= (B_{0k}^\pm)^{-\mu_k^\pm}, \quad \bar{B}_{03} = (B_{03})^{-\mu_3}, \quad \mu_k^\pm = 1/m_{0k}^\pm, \quad \mu_3 = 1/m_3, \quad \mu_0^\pm = 1/m_0^\pm, \end{aligned} \quad (5)$$

величины $B_0^\pm, B_{0k}^\pm, B_{03}, m_0^\pm, m_k^\pm, m_3$ – коэффициенты и показатели ползучести.

Выражения для напряжений (2), с учётом равенств (5), примут вид

$$s_i^\pm = a^\pm s_{0i}^\pm + \sum B_{kk}^\pm (T^\pm)^{n_k^\pm} |s_{kk}^\pm|^{\mu_k^\pm - 1} s_{kk}^\pm \omega_k^\pm (l_{ki}^\pm)^2, \quad (6)$$

где

$$s_{kk}^\pm = (l_{k1}^\pm)^2 (2s_{01}^\pm - s_{02}^\pm) + (l_{k2}^\pm)^2 (2s_{02}^\pm - s_{01}^\pm), \quad B_{kk}^\pm = (B_{00k}^\pm)^{-\mu_k^\pm} (B_{00}^\pm / 6)^{\mu_k^\pm}, \quad n_k^\pm = (m_0^\pm - 1)\mu_k^\pm.$$

Постановка задачи установившейся ползучести трёхслойной армированной цилиндрической оболочки в скоростях перемещений

Постановка задачи установившейся ползучести рассматриваемой оболочки в напряжениях осложнена дифференциальным уравнением совместности скоростей деформаций второго порядка (4). Поэтому сформулируем задачу в скоростях перемещений. Подставив в усилия и моменты уравнений равновесия (1) напряжения, согласно равенствам (1), выразим напряжения в несущих слоях через напряжения в связующих материалах и армирующих волокнах несущих слоёв на основании равенств (2). Затем выразим напряжения в фазах композитных слоёв через скорости деформаций и скорости перемещений посредством равенств (3) и законов ползучести (5)–(6). В результате получим для оболочки с неравнонапряжёнными армирующими волокнами постоянного сечения следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка

$$\frac{dY}{dx} = F, \quad (7)$$

где

$$Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)', \quad F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)',$$

$$y_1 = \frac{du_1}{dx}, y_2 = \frac{du}{dx}, y_3 = u_1, y_4 = u, y_5 = w, y_6 = \frac{dw}{dx}.$$

Элементы вектора F имеют вид

$$\begin{aligned} f_1 &= (A_1 B_4 - A_4 B_1) / \Delta, f_2 = (A_4 B_2 - A_2 B_4) / \Delta, f_3 = y_1, f_4 = y_2, f_5 = y_6, \\ \Delta &= A_1 B_2 - A_2 B_1, f_6 = (1/h) \{f_n / (2B_4 \mu_3 |\varepsilon_{13}|^{\mu_3 - 1}) - y_1\}, A_1 = h(h^+ A_{10}^+ + h^- A_{10}^-), \\ A_2 &= h(h^+ A_{10}^+ - h^- A_{10}^-), A_{10}^\pm = 2a^\pm [D_{g_{10}}^\pm (2\varepsilon_1^\pm + \varepsilon_2^\pm) + 2g_0^\pm] + \sum B_k^\pm \omega_k^\pm \mu_k^\pm |\varepsilon_k^\pm|^{\mu_k^\pm - 1} (l_k^\pm)^2, \\ B_3 &= A_{30}^+ h^+ - A_{30}^- h^-, A_3 = A_{30}^+ h^+ + A_{30}^- h^-, B_1 = A_2, B_2 = A_1, \\ A_{30}^\pm &= 2a^\pm D_{\varepsilon_2}^\pm [D_{g_{20}}^\pm (2\varepsilon_1^\pm + \varepsilon_2^\pm) + g_0^\pm] + \sum B_k^\pm [D_{\omega_k}^\pm |\varepsilon_k^\pm|^{\mu_k^\pm - 1} \varepsilon_k^\pm (l_{k1}^\pm) + \omega_k^\pm \mu_k^\pm |\varepsilon_k^\pm|^{\mu_k^\pm - 1} D_1^\pm - \\ &\quad - 2\omega_k^\pm |\varepsilon_k^\pm|^{\mu_k^\pm - 1} \varepsilon_k^\pm l_{k1}^\pm l_{k2}^\pm D_{\psi_k}^\pm], D_1^\pm = [D_{\varepsilon_2}^\pm (l_{k2}^\pm)^2 + 2l_{k1}^\pm l_{k2}^\pm (\varepsilon_2^\pm - \varepsilon_1^\pm) D_{\psi_k}^\pm] (l_{k1}^\pm)^2, \\ A_4 &= -f_1 - A_3, B_4 = q_1 / h - m_0 - B_3, n_1 = h^+ s_1^+ + h^- s_1^-, n_2 = h^+ s_2^+ + h^- s_2^-, \\ m_1 &= h^+ s_1^+ - h^- s_1^-, m_2 = h^+ s_1^+ - h^- s_1^-, D_{\omega_k}^\pm = d\omega_k^\pm / dx, D_{\psi_k}^\pm = d\psi_k^\pm / dx, \\ D_{g_{10}}^\pm &= \partial g_0^\pm / \partial \varepsilon_1^\pm = 2B_{00}^\pm (\mu_0^\pm - 1) (H^\pm)^{\mu_0^\pm - 3} (2\varepsilon_1^\pm + \varepsilon_2^\pm), \\ D_{g_{20}}^\pm &= \partial g_0^\pm / \partial \varepsilon_2^\pm = 2B_{00}^\pm (\mu_0^\pm - 1) (H^\pm)^{\mu_0^\pm} (2\varepsilon_2^\pm + \varepsilon_1^\pm), D_{\varepsilon_2}^\pm = d\varepsilon_2^\pm / dx = hy_6 / r. \quad (8) \end{aligned}$$

В случае равнонапряженного армирования волокнами постоянного поперечного сечения в уравнениях (7) и равенствах (8) следует принять $s_k^\pm = \text{const}^\pm$.

Входящие в равенства (8) характеристики армирования примем в случае:

а) армирование по образующим цилиндра – $\psi_k^\pm = 0, \omega_k^\pm = \omega_{k0}^\pm = \text{const}_k^\pm$;

б) армирование по окружностям – $\psi_k^\pm = \pi/2, \omega_k^\pm = \omega_{k0}^\pm = \text{const}_k^\pm$;

в) армирование по винтовым линиям – $\psi_k^\pm = \psi_{k0}^\pm = \text{const}_{\psi_k}^\pm, \omega_k^\pm = \omega_{k0}^\pm = \text{const}_k^\pm$

Граничные условия. В силу симметрии, рассмотрим половину оболочки $0 \leq x \leq 0,5$.

а) Жёсткая заделка краев.

$$q_1(0) = 0, y_4(0) = 0, y_5(0) = w_0, y_6(0) = 0, y_3(0,5) = 0, y_5(0,5) = 0. \quad (9)$$

Для решения начальной задачи остаются неопределёнными условия $y_1(0), y_2(0)$ и $y_5(0) = w_0$. Последнее определим из условия $n_1(0) = n_0$, если переменные $y_1(0)$ и $y_2(0)$ заданы. Неизвестной переменной является $y_3(0)$ и ее можно определить из первого и четвертого граничных условий (9) с помощью равенства для $q_1(0)$ (3) и (5) как $y_3(0) = 0$. В результате в начале интервала интегрирования имеем два неизвестных начальных значения $y_1(0)$ и $y_2(0)$, являющимися свободными задаваемыми варьируемыми параметрами для удовлетворения последних двух граничных условий (9) методом пристрелки.

б) Шарнирное опирание краев.

$$q_1(0) = 0, y_4(0) = 0, y_5(0) = w_0, y_6(0) = 0, m_1(0,5) = 0, y_5(0,5) = 0. \quad (10)$$

Здесь также определим $y_5(0) = w_0$ из условия $n_1(0) = n_0$ с учетом равенств для q_1 (3) и (5), причем $y_3(0) = 0$. Свободными параметрами являются $y_1(0) = 0$ и $y_2(0) = 0$ для удовлетворения последних двух граничных условий (10).

в) Свободные края

$$q_1(0) = 0, y_4(0) = 0, y_5(0) = w_0, y_6(0) = 0, m_1(0,5) = 0, q_1(0,5) = 0 . \quad (11)$$

В этом случае свободными граничными условиями $y_1(0) = 0$ и $y_2(0) = 0$ удовлетворим последним двум граничным условиям (11).

Численные методы и алгоритмы решения задач установившейся ползучести трёхслойных армированных цилиндрических оболочек, примеры, выводы.

Согласно постановке задачи требуется определить скорости перемещений и их производные по координате. По найденным скоростям перемещений и их производным нетрудно определить скорости деформаций ползучести, интенсивности скоростей деформаций, напряжения в несущих слоях и заполнителе, интенсивности напряжений в связующих материалах и армирующих волокнах, усилия и моменты, согласно равенствам (1)–(3), (5) и (6).

Постановка задачи отличаются существенной нелинейностью системы дифференциальных уравнений. Аналитических решений такой задачи не найдено. Для численного решения поставленных задач принят метод пристрелки, когда варьированием по определенному алгоритму двух свободных параметров с известными четырьмя граничными (начальными) условиями в середине решением серии начальных задач удовлетворяются два граничные условия на краю оболочки. Решение начальных задач осуществлено методом Фельберга с контролем точности и устойчивости [7]. Варьирование свободных параметров выполнено методом сканирования с предварительным наиболее трудоёмким определением области таких параметров.

В примере рассмотрены жесткозаделанные по краям оболочки под действием внешнего равномерного давления с параметрами и механическими характеристиками материалов – медного связующего, заполнителя и стальных армирующих волокон

$$h = 0,07, h^+ = h^- = 0,01, a^\pm = 1, p_1^\pm = 0, p_n^\pm = -0,43524 \cdot 10^{-3}, \omega = \rho^\pm = \rho_0^\pm = 0, \\ B_0^\pm = B_{03} = 3,19 \cdot 10^{-8} \text{ МПа}^{-m_0} \cdot \text{ч}^{-1}, m_0 = m_3 = 2,16, \\ B_{0k}^\pm = 6,32 \cdot 10^{-21} \text{ МПа}^{-m_1} \cdot \text{ч}^{-1}, m_1 = 6,24, \sigma_0 = 50 \text{ МПа}, n_0 = 0.$$

Расчёты выполнены для симметрично армированной оболочки, несущие слои которой армированы одинаковыми волокнами постоянного поперечного сечения по винтовым линиям с начальными параметрами $\omega_k^\pm = 0,3, \psi_k^\pm = \pi/4$. Результаты численного решения в первом примере для оболочки с неравнонапряжённым армированием представлены на рис. 1 и 2, а для оболочки с равнонапряжённым армированием – на рис. 3 и 4. Анализ полученных зависимостей приводит к следующим выводам.

1) В первой оболочке (с неравнонапряжённым армированием) реализуется состояние продольно-поперечного изгиба. Граничные условия жёсткой заделки выполнены точно на краях оболочки.

2) Согласно зависимостям $s_k^\pm(x), s_1^\pm(x), s_2^\pm(x)$ на рисунке 2, в достаточно большой области средней части оболочки напряжённо-деформированное состояние армирующих волокон близко к равнонапряжённому.

3) Во второй оболочке (с равнонапряжённым армированием, $s_k^+ = 6, s_k^- = -6$) реализуется состояние поперечного изгиба.

4) Для обеих оболочек зависимости интенсивностей скоростей деформаций $H^+(x)$ характеризуются краевыми эффектами неодинаковой интенсивности (рис. 1, 3).

5) В первой оболочке имеет место более интенсивный краевой эффект для интенсивности напряжений в связующем материале верхнего слоя (рис. 1), чем для второй оболочки (рис. 4).

6) В армирующих волокнах верхнего слоя первой оболочки напряженно-деформированное состояние характеризуется интенсивным изменением знака напряжений.

7) На рис. 1 показана наибольшая интенсивность скорости деформаций в связующем материале верхнего слоя по сравнению с интенсивностью скорости деформаций в связующем материале другого слоя, который, следовательно, менее подвержен разрушению.

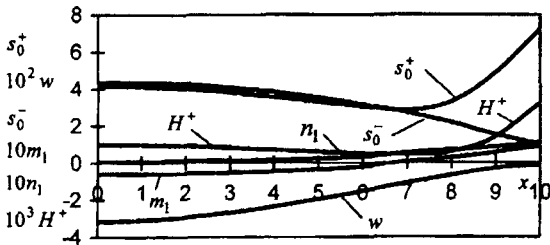


Рис. 1. Зависимости интенсивностей напряжений s_0^\pm в слоях, интенсивности скорости деформаций H^\pm , скорости прогиба w , усилия n_1 и момента m_1

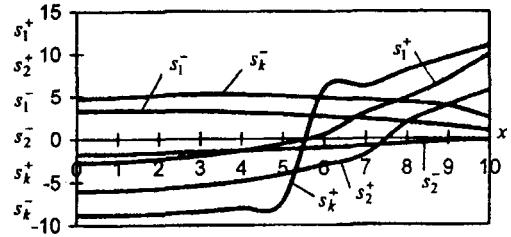


Рис. 2. Зависимости напряжений s_1^\pm и s_2^\pm в слоях, напряжений s_k^\pm в армирующих волокнах от координаты

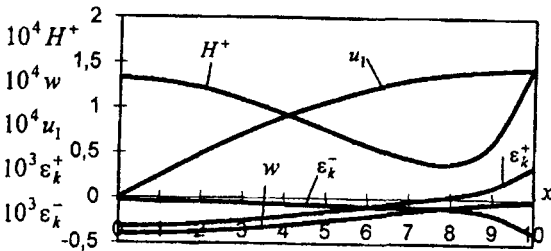


Рис. 3. Зависимости интенсивностей скоростей деформаций $H^+ = H^-$ в связующем, скорости прогиба w , параметра u_1 и скоростей деформаций ϵ_k^\pm армирующих волокон от координаты

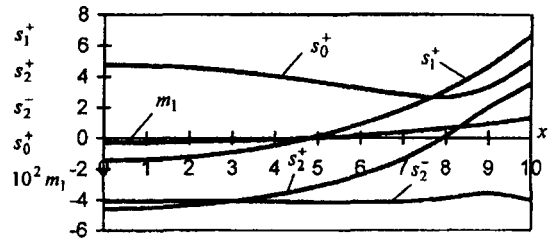


Рис. 4. Зависимости интенсивностей напряжений в связующем $s_0^+ = s_0^-$, напряжений в слоях $s_1^- = -s_1^+$, s_2^\pm и изгибающего момента m_1 от координаты

Выполненные аналитические и численные исследования показали, что постановка задачи определения НДС рассматриваемой оболочки в скоростях перемещений приводит к более простому численному решению, чем постановка такой же задачи в напряжениях, в отличие от задачи для трехслойных армированных круглых пластин [3]. Предпочитаемый способ армирования зависит от выбранного критерия эффективности. Например, интенсивность краевого эффекта для напряжений в связующем материале верхнего слоя оболочки с равнонапряженным винтовым армированием меньше, чем для оболочки с неравнонапряженным армированием, которое, следовательно, менее предпочтительно. Однако, по интенсивности краевых эффектов для скоростей деформаций, наоборот, неравнонапряженное армирование более предпочтительно. Поэтому предпочитаемый способ армирования

зависит также и от физических свойств материалов элементов композита. Варьированием параметров армирования $\omega_k^\pm, \psi_k^\pm, s_k^\pm, \sigma_0$ можно удовлетворить различным критериям эффективности проектируемой оболочки. Отметим также, что принятое предположение о постоянстве толщин несущих слоев и других параметров не является существенным. Нетрудно обобщить полученное решение и поставить задачу оптимизации оболочки с переменными толщинами несущих слоев и другими параметрами слоев по весу или стоимости и выбором различных способов армирования (по образующим, по окружностям, по винтовым линиям и др.) и строения (симметричного, несимметричного) слоистого композита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Равнонапряжённое армирование металлокомпозитных пластин по направлениям главных напряжений в условиях установившейся ползучести // Вестник Самарского государственного университета. Серия: Физ.мат. науки. — № 2(15). — 2007. — С. 41–50.
2. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Равнонапряжённое армирование металлокомпозитных пластин при установившейся ползучести // Проблемы прочности и пластичности. — 2007. — № 69. — С. 5–13.
3. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Установившаяся ползучесть трехслойных армированных круглых кольцевых пластинок с легким наполнителем//Труды Всероссийской научно-технической конференции по аэродинамике летательных аппаратов и прочности авиационных конструкций /17-19 июня 2008/ под ред. д-ра техн. наук Серьёзова А.Н. – Новосибирск: СибНИА, 2009, С. 139 – 147.
4. Вохмянин И. Т., Немировский Ю. В. Особенности продольно-поперечного изгиба трёхслойных кольцевых пластинок с несимметричными структурами армирования // Краевые задачи и математическое моделирование [Текст]: сб. тр. 8-й Всероссийской научной конференции. 1 — 3 декабря 2006 г., Новокузнецк / НФИ Кем ГУ; под общ. ред. В. О. Каледина. — Новокузнецк, 2006. — Т. 1. — С. 25–31.
5. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Рациональное проектирование армированных конструкций — Новосибирск : Наука, 2002. — 488 с.
6. Качанов Л. М. Ползучесть. — М. : Физматгиз, 1960. — 456 с.
7. Новиков Е. А. Явные методы для жёстких систем — Новосибирск : Наука, 1997. — 196 с.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СКМ «МАТЕМАТИКА» В КАЧЕСТВЕ ПРОГРАММНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЙ АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА

Чигарев А.В.¹, Борисов А.В.²

Белорусский национальный технический университет, г. Минск¹
Филиал ГОУ ВПО «Московский энергетический институт
(Технический университет)», г. Смоленск²

In the article the technique of the automated compiling of differential equations of motion of the anthropomorphic robot is reviewed. The technique of activity with the results of numerical calculations in the system of computer mathematics "Mathematica", its animation capabilities and the export of the results in the generally accepted format of saving and reviewing of the video information ".gif" is described.

В настоящее время приходится делать сложные численные расчеты и аналитические преобразования, для описания механических систем с большим числом степеней свободы, сложными геометрическими связями, наличием деформируемости и т.д. Применение систем компьютерной позволило делать численные расчеты, которые ранее были практически недоступны ученым. Громоздкие аналитические преобразования можно провести во много раз быстрее и эффективнее, представив результаты в удобном виде с помощью различных систем компьютерной математики, и, в частности, «Mathematica»¹. В данной статье рассмотрен один из вариантов таких аналитических преобразований на примере ходьбы антропоморфного механизма. Этот метод является универсальным и его можно применять для описания других механических систем.

Рассмотрим приближенную к человеку одиннадцатизвенную антропоморфную модель. Для рассмотрения плоского движения биомеханической системы в одноопорной фазе введем неподвижную правую декартову систему координат $ху$ с началом в точке O и плоскостью $ху$, в которой происходит движение центра масс. Система имеет две трехзвенные весомые ноги, две двухзвенные весомые руки и весомый корпус. Предполагаем, что правые и левые конечности являются одинаковыми. Все элементы структуры являются жесткими. На рис. 1 схематично изображен механизм, и введены соответствующие обозначения [1,4].

Пусть $O_1A_1 = O_2A_2 = l_1$, $A_1B_1 = A_2B_2 = l_2$, $B_1C = B_2C = l_3$, $CG = l_7$, $DE_1 = DE_2 = l_8$, $E_1F_1 = E_2F_2 = l_9$ – длины звеньев биомеханической системы, моделирующей человека. Положение в одноопорной фазе однозначно определяется углами φ_i ($i = 1, \dots, 11$), поэтому рассматриваемая система имеет одиннадцать степеней свободы. Обозначим через M_i моменты, развиваемые в i -том шарнире ($i = 1, \dots, 11$).

Центры масс находятся в точках: C_1 – стопы опорной ноги, C_2 – голени опорной ноги, C_3 – бедра опорной ноги, C_4 – бедра переносной ноги, C_5 – голени переносной ноги, C_6 – стопы переносной ноги, C_7 – корпуса, C_8, C_{10} – плеч, C_9, C_{11} – предплечий. Их положения будем задавать в виде отношений длины от начала соответствующего звена до центра масс ко всей длине звена, через множители n_i , ($i = 1, \dots, 11$), ($0 < n_i < 1$) (если все звенья перенумеровать по номерам индексов у соответствующих углов). Такой способ задания положений центров масс предпочтительней, так как в биомеханике человека положения центров масс конечно-

¹ Лицензионная версия данной программы приобретена за счет средств Гранта Президента Российской Федерации, номер МК-2524.2008.1.

стей определяются эмпирическим путем и задаются в процентном отношении одной части звена к другой.

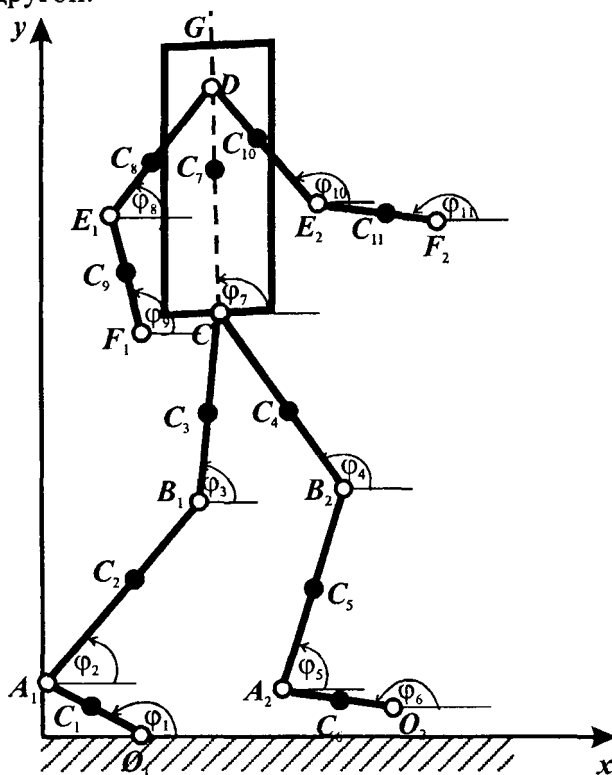


Рис. 1. Модель плоского движения стержневой механической системы с изменяемой геометрией звеньев в одноопорной фазе

Массы: $m_1, m_2, m_3, m_8, m_9, m_7$ – масса стопы, голени, бедра, плеч, предплечий и корпуса, соответственно. Моменты инерции: $I_1, I_2, I_3, I_8, I_9, I_7$ – стопы, голени, бедра, плеч, предплечий и корпуса, соответственно. Правую и левую конечности механизма будем считать одинаковыми.

Составление дифференциальных уравнений движения происходит следующим образом. Все строим в векторно-матричной форме. Справочную информацию об используемых командах программы «Mathematica» можно найти в работах [2,3].

Вводим вектор обобщенных координат (команды, вводимые в программе «Mathematica» будем выделять моноширинным шрифтом), для удобства обозначим индексы 10 и 11 через 8p и 9p:

$$q = \{\{\phi_1[t]\}, \{\phi_2[t]\}, \{\phi_3[t]\}, \{\phi_4[t]\}, \{\phi_5[t]\}, \{\phi_6[t]\}, \{\phi_7[t]\}, \{\phi_8[t]\}, \{\phi_9[t]\}, \{\phi_{8p}[t]\}, \{\phi_{9p}[t]\}\}$$

Формируем вектор угловых скоростей, дифференцируя вектор обобщенных координат:

$$qv = D[q, t]$$

Формируем таблицу производных по времени от обобщенных координат, необходимую для составления функции Лагранжа.

$$DS[T_, q_] := \{\text{Table}[D[T, q[[i, 1]]], \{i, 1, \text{Length}[q]\}\}$$

Формируем таблицу производных по времени от производных обобщенных координат, необходимую для составления функции Лагранжа.

$$DV[X_, q_] := \{\text{Table}[D[X[[i, 1]], q[[j, 1]]], \{i, 1, \text{Length}[X]\}, \{j, 1, \text{Length}[q]\}\}$$

Вводим координаты центров масс звеньев механизма

$$C1 = \{\{l_1 * n_1 * \text{Cos}[\phi_1[t]], \{l_1 * n_1 * \text{Sin}[\phi_1[t]]\}\};$$

$C2 = \{\{11*\text{Cos}[\varphi1[t]] + 12*n2*\text{Cos}[\varphi2[t]]\}, \{11*\text{Sin}[\varphi1[t]] + 12*n2*\text{Sin}[\varphi2[t]]\}\};$
 $C3 = \{\{11*\text{Cos}[\varphi1[t]] + 12*\text{Cos}[\varphi2[t]] + 13*n3*\text{Cos}[\varphi3[t]]\}, \{11*\text{Sin}[\varphi1[t]] + 12*\text{Sin}[\varphi2[t]] + 13*n3*\text{Sin}[\varphi3[t]]\}\};$
 $C4 = \{\{11*\text{Cos}[\varphi1[t]] + 12*\text{Cos}[\varphi2[t]] + 13*\text{Cos}[\varphi3[t]] + 13*(1 - n3)*\text{Cos}[\pi + \varphi4[t]]\}, \{11*\text{Sin}[\varphi1[t]] + 12*\text{Sin}[\varphi2[t]] + 13*\text{Sin}[\varphi3[t]] + 13*(1 - n3)*\text{Sin}[\pi + \varphi4[t]]\}\};$
 $C5 = \{\{11*\text{Cos}[\varphi1[t]] + 12*\text{Cos}[\varphi2[t]] + 13*\text{Cos}[\varphi3[t]] + 13*\text{Cos}[\pi + \varphi4[t]] + 12*(1 - n2)*\text{Cos}[\pi + \varphi5[t]]\}, \{11*\text{Sin}[\varphi1[t]] + 12*\text{Sin}[\varphi2[t]] + 13*\text{Sin}[\varphi3[t]] + 13*\text{Sin}[\pi + \varphi4[t]] + 12*(1 - n2)*\text{Sin}[\pi + \varphi5[t]]\}\};$
 $C6 = \{\{11*\text{Cos}[\varphi1[t]] + 12*\text{Cos}[\varphi2[t]] + 13*\text{Cos}[\varphi3[t]] + 13*\text{Cos}[\pi + \varphi4[t]] + 12*\text{Cos}[\pi + \varphi5[t]] + 11*(1 - n1)*\text{Cos}[\pi + \varphi6[t]]\}, \{11*\text{Sin}[\varphi1[t]] + 12*\text{Sin}[\varphi2[t]] + 13*\text{Sin}[\varphi3[t]] + 13*\text{Sin}[\pi + \varphi4[t]] + 12*\text{Sin}[\pi + \varphi5[t]] + 11*(1 - n1)*\text{Sin}[\pi + \varphi6[t]]\}\};$
 $C7 = \{\{11*\text{Cos}[\varphi1[t]] + 12*\text{Cos}[\varphi2[t]] + 13*\text{Cos}[\varphi3[t]] + 17*n7*\text{Cos}[\varphi7[t]]\}, \{11*\text{Sin}[\varphi1[t]] + 12*\text{Sin}[\varphi2[t]] + 13*\text{Sin}[\varphi3[t]] + 17*n7*\text{Sin}[\varphi7[t]]\}\};$
 $C8 = \{\{11*\text{Cos}[\varphi1[t]] + 12*\text{Cos}[\varphi2[t]] + 13*\text{Cos}[\varphi3[t]] + 17*n7R*\text{Cos}[\varphi7[t]] + 18*(1 - n8)*\text{Cos}[\pi + \varphi8[t]]\}, \{11*\text{Sin}[\varphi1[t]] + 12*\text{Sin}[\varphi2[t]] + 13*\text{Sin}[\varphi3[t]] + 17*n7R*\text{Sin}[\varphi7[t]] + 18*(1 - n8)*\text{Sin}[\pi + \varphi8[t]]\}\};$
 $C9 = \{\{11*\text{Cos}[\varphi1[t]] + 12*\text{Cos}[\varphi2[t]] + 13*\text{Cos}[\varphi3[t]] + 17*n7R*\text{Cos}[\varphi7[t]] + 18*\text{Cos}[\pi + \varphi8[t]] + 19*(1 - n9)*\text{Cos}[\pi + \varphi9[t]]\}, \{11*\text{Sin}[\varphi1[t]] + 12*\text{Sin}[\varphi2[t]] + 13*\text{Sin}[\varphi3[t]] + 17*n7R*\text{Sin}[\varphi7[t]] + 18*\text{Sin}[\pi + \varphi8[t]] + 19*(1 - n9)*\text{Sin}[\pi + \varphi9[t]]\}\};$
 $C8p = \{\{11*\text{Cos}[\varphi1[t]] + 12*\text{Cos}[\varphi2[t]] + 13*\text{Cos}[\varphi3[t]] + 17*n7R*\text{Cos}[\varphi7[t]] + 18*(1 - n8)*\text{Cos}[\pi + \varphi8p[t]]\}, \{11*\text{Sin}[\varphi1[t]] + 12*\text{Sin}[\varphi2[t]] + 13*\text{Sin}[\varphi3[t]] + 17*n7R*\text{Sin}[\varphi7[t]] + 18*(1 - n8)*\text{Sin}[\pi + \varphi8p[t]]\}\};$
 $C9p = \{\{11*\text{Cos}[\varphi1[t]] + 12*\text{Cos}[\varphi2[t]] + 13*\text{Cos}[\varphi3[t]] + 17*n7R*\text{Cos}[\varphi7[t]] + 18*\text{Cos}[\pi + \varphi8p[t]] + 19*(1 - n9)*\text{Cos}[\pi + \varphi9p[t]]\}, \{11*\text{Sin}[\varphi1[t]] + 12*\text{Sin}[\varphi2[t]] + 13*\text{Sin}[\varphi3[t]] + 17*n7R*\text{Sin}[\varphi7[t]] + 18*\text{Sin}[\pi + \varphi8p[t]] + 19*(1 - n9)*\text{Sin}[\pi + \varphi9p[t]]\}\};$

Вычисляем скорости центров масс:

$vC1 = D[C1, t];$
 $vC2 = D[C2, t];$
 $vC3 = D[C3, t];$
 $vC4 = D[C4, t];$
 $vC5 = D[C5, t];$
 $vC6 = D[C6, t];$
 $vC7 = D[C7, t];$
 $vC8 = D[C8, t];$
 $vC9 = D[C9, t];$
 $vC8p = D[C8p, t];$
 $vC9p = D[C9p, t];$

Определяем квадраты скоростей и сразу упрощаем их:

$\text{Simplify}[\text{Transpose}[vC1].vC1]$

Находим кинетическую энергию механизма и сразу упрощаем ее:

$T = 1/2*m1*(\text{Transpose}[vC1].vC1) + 1/2*m2*(\text{Transpose}[vC2].vC2) + 1/2*m3*(\text{Transpose}[vC3].vC3) + 1/2*m3*(\text{Transpose}[vC4].vC4) + 1/2*m2*(\text{Transpose}[vC5].vC5) + 1/2*m1*(\text{Transpose}[vC6].vC6) + 1/2*m7*(\text{Transpose}[vC7].vC7) + 1/2*m8*(\text{Transpose}[vC8].vC8) + 1/2*m9*(\text{Transpose}[vC9].vC9) + 1/2*m8*(\text{Transpose}[vC8p].vC8p) + 1/2*m9*(\text{Transpose}[vC9p].vC9p);$
 $T = \text{Simplify}[T][[1, 1]] + 1/2*I1*D[\varphi1[t], t]*D[\varphi1[t], t] + 1/2*I2*D[\varphi2[t], t]*D[\varphi2[t], t] + 1/2*I3*D[\varphi3[t], t]*D[\varphi3[t], t] + 1/2*I3*D[\varphi4[t], t]*D[\varphi4[t], t] + 1/2*I2*D[\varphi5[t], t]*D[\varphi5[t], t] + 1/2*I1*D[\varphi6[t], t]*D[\varphi6[t], t] + 1/2*I7*D[\varphi7[t], t]*D[\varphi7[t], t] + 1/2*I8*D[\varphi8[t], t]*D[\varphi8[t], t] + 1/2*I9*D[\varphi9[t], t]*D[\varphi9[t], t] + 1/2*I8*D[\varphi8p[t], t]*D[\varphi8p[t], t] + 1/2*I9*D[\varphi9p[t], t]*D[\varphi9p[t], t];$

Записываем потенциальную энергию:

$$\begin{aligned}
 \Pi = & m1 * g * C1[[2, 1]] + m2 * g * C2[[2, 1]] + m3 * g * C3[[2, 1]] + \\
 & m3 * g * C4[[2, 1]] + m2 * g * C5[[2, 1]] + m1 * g * C6[[2, 1]] + m7 * g * C7[[2, 1]] \\
 & + m8 * g * C8[[2, 1]] + m9 * g * C9[[2, 1]] + m8 * g * C8p[[2, 1]] + m9 * g * C9p[[2, \\
 & 1]];
 \end{aligned}$$

Составляем функцию Лагранжа:

$$L = T - \Pi;$$

Записываем уравнения движения в общем виде:

$$Eq = \text{Simplify}[\text{Transpose}[D[DS[L, qv], t] - DS[L, q]]];$$

Выписываем левые части уравнений:

$$\begin{aligned}
 E1 &= Eq[[1, 1]]; \\
 E2 &= Eq[[2, 1]]; \\
 E3 &= Eq[[3, 1]]; \\
 E4 &= Eq[[4, 1]]; \\
 E5 &= Eq[[5, 1]]; \\
 E6 &= Eq[[6, 1]]; \\
 E7 &= Eq[[7, 1]]; \\
 E8 &= Eq[[8, 1]]; \\
 E9 &= Eq[[9, 1]]; \\
 E8p &= Eq[[10, 1]]; \\
 E9p &= Eq[[11, 1]];
 \end{aligned}$$

Записываем уравнения с правыми частями:

$$\begin{aligned}
 Eqn1 &= (E1 - (M1[t] - M2[t])); \\
 Eqn2 &= (E2 - (M2[t] - M3[t])); \\
 Eqn3 &= (E3 - (M3[t] + M4[t] + M7[t])); \\
 Eqn4 &= (E4 - (M4[t] - M5[t])); \\
 Eqn5 &= (E5 - (M5[t] - M6[t])); \\
 Eqn6 &= (E6 - M6[t]); \\
 Eqn7 &= (E7 - (M3[t] + M4[t])); \\
 Eqn8 &= (E8 - (M8[t] - M9[t])); \\
 Eqn9 &= (E9 - M9[t]); \\
 Eqn8p &= (E8p - (M8p[t] - M9p[t])); \\
 Eqn9p &= (E9p - M9p[t]);
 \end{aligned}$$

Окончательно, приравнявая их к нулю, получаем уравнения динамики движения антропоморфного механизма.

Уравнения получаются слишком громоздкими. Чтобы привести их к компактному виду, сначала группируем по членам, содержащим первые и вторые производные обобщенных координат. При этом каждый раз, для удобства обращения к промежуточным результатам, уравнению присваиваем новое название, добавляя в конец имени единицу. Так как команды однотипны, а уравнения получены, дальнейшие преобразования будем выписывать только для первого уравнения:

$$\begin{aligned}
 Eqn11 &= \text{Collect}[Eqn1, \{\phi1''[t], \phi2''[t], \phi3''[t], \phi4''[t], \phi5''[t], \\
 & \phi6''[t], \phi7''[t], \phi8''[t], \phi9''[t], \phi8p''[t], \phi9p''[t], \phi1'[t]^2, \phi2'[t]^2, \\
 & \phi3'[t]^2, \phi4'[t]^2, \phi5'[t]^2, \phi6'[t]^2, \phi7'[t]^2, \phi8'[t]^2, \phi9'[t]^2, \phi8p'[t]^2, \\
 & \phi9p'[t]^2\}];
 \end{aligned}$$

Затем упрощаем с помощью команды:

$$Eqn111 = \text{Simplify}[Eqn11].$$

В итоге, приравнявая к нулю левую часть, получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику антропоморфного робота. Приведем в качестве примера левую часть первого уравнения после группировки и упрощения:

$$\begin{aligned}
 & g \ l1 \ m1 \ \text{Cos}[\phi1[t]] + 2 \ g \ l1 \ m2 \ \text{Cos}[\phi1[t]] + 2 \ g \ l1 \ m3 \ \text{Cos}[\phi1[t]] \\
 & + g \ l1 \ m7 \ \text{Cos}[\phi1[t]] + 2 \ g \ l1 \ m8 \ \text{Cos}[\phi1[t]] + 2 \ g \ l1 \ m9 \ \text{Cos}[\phi1[t]] + g \\
 & l1 \ m1 \ n1 \ \text{Cos}[\phi1[t]] - M1[t] + M2[t] + l1 \ l2 \ (m1 + m2 + 2 \ m3 + m7 + 2 \\
 & m8 + 2 \ m9 + m2 \ n2) \ \text{Sin}[\phi1[t] - \phi2[t]] \ \phi2'[t]^2 + l1 \ l3 \ (m1 + m2 + m3 + m7
 \end{aligned}$$

$+ 2 m_8 + 2 m_9 + m_3 n_3) \sin[\varphi_1[t] - \varphi_3[t]] \varphi_3'[t]^2 - 11 13 (m_1 + m_2 + m_3 - m_3 n_3) \sin[\varphi_1[t] - \varphi_4[t]] \varphi_4'[t]^2 - 11 12 (m_1 + m_2 - m_2 n_2) \sin[\varphi_1[t] - \varphi_5[t]] \varphi_5'[t]^2 + 11^2 m_1 (-1 + n_1) \sin[\varphi_1[t] - \varphi_6[t]] \varphi_6'[t]^2 + 11 17 (m_7 n_7 + 2 (m_8 + m_9) n_7 R) \sin[\varphi_1[t] - \varphi_7[t]] \varphi_7'[t]^2 + 11 18 (-m_8 - m_9 + m_8 n_8) \sin[\varphi_1[t] - \varphi_8[t]] \varphi_8'[t]^2 + 11 18 (-m_8 - m_9 + m_8 n_8) \sin[\varphi_1[t] - \varphi_{8p}[t]] \varphi_{8p}'[t]^2 + 11 19 m_9 (-1 + n_9) \sin[\varphi_1[t] - \varphi_9[t]] \varphi_9'[t]^2 + 11 19 m_9 (-1 + n_9) \sin[\varphi_1[t] - \varphi_{9p}[t]] \varphi_{9p}'[t]^2 + (I_1 + 11^2 (m_1 + 2 m_2 + 2 m_3 + m_7 + 2 m_8 + 2 m_9 + m_1 n_1^2)) \varphi_1''[t] + 11 12 (m_1 + m_2 + 2 m_3 + m_7 + 2 m_8 + 2 m_9 + m_2 n_2) \cos[\varphi_1[t] - \varphi_2[t]] \varphi_2''[t] + 11 13 (m_1 + m_2 + m_3 + m_7 + 2 m_8 + 2 m_9 + m_3 n_3) \cos[\varphi_1[t] - \varphi_3[t]] \varphi_3''[t] - 11 13 (m_1 + m_2 + m_3 - m_3 n_3) \cos[\varphi_1[t] - \varphi_4[t]] \varphi_4''[t] - 11 12 (m_1 + m_2 - m_2 n_2) \cos[\varphi_1[t] - \varphi_5[t]] \varphi_5''[t] + 11^2 m_1 (-1 + n_1) \cos[\varphi_1[t] - \varphi_6[t]] \varphi_6''[t] + 11 17 (m_7 n_7 + 2 (m_8 + m_9) n_7 R) \cos[\varphi_1[t] - \varphi_7[t]] \varphi_7''[t] + 11 18 (-m_8 - m_9 + m_8 n_8) \cos[\varphi_1[t] - \varphi_8[t]] \varphi_8''[t]^2 + 11 18 (-m_8 - m_9 + m_8 n_8) \cos[\varphi_1[t] - \varphi_{8p}[t]] \varphi_{8p}''[t]^2 + 11 19 m_9 (-1 + n_9) \cos[\varphi_1[t] - \varphi_9[t]] \varphi_9''[t]^2 + 11 19 m_9 (-1 + n_9) \cos[\varphi_1[t] - \varphi_{9p}[t]] \varphi_{9p}''[t]$

Таким образом, описана методика составления дифференциальных уравнений движения модели антропоморфного робота.

Описанная методика является универсальной и может применяться для составления уравнений динамики разнообразных антропоморфных механизмов, с большим или меньшим количеством звеньев, может учитывать различия между правыми и левыми конечностями аппарата, наличие деформаций звеньев.

После того, как уравнения движения составлены, в СКМ «Mathematica», возникает необходимость их решения. Так как полученная система обладает большим количеством неизвестных и при этом существенно нелинейна, решить аналитически ее не представляется возможным, да и необходимости нет. Поэтому проводим ее решение численное решение.

Для того, чтобы решать численно, необходимо все параметры, входящие в уравнения, кроме неизвестных функций, определить численно. Сформируем набор констант, характеризующих длины, массы, моменты инерции, коэффициенты, определяющие положения центров масс звеньев антропоморфного робота и ускорение свободного падения. Все их зададим в системе «СИ» и все дальнейшие вычисления будем вести в этой системе единиц:

$ss = \{m_1 \rightarrow 0.98, m_2 \rightarrow 3.1, m_3 \rightarrow 10.24, m_7 \rightarrow 36.38, I_1 \rightarrow 0.01, I_2 \rightarrow 0.08, I_3 \rightarrow 0.43, I_7 \rightarrow 4.61, g \rightarrow 9.81, l_1 \rightarrow 0.26, l_2 \rightarrow 0.50, l_3 \rightarrow 0.51, l_7 \rightarrow 0.76, n_1 \rightarrow 0.5585, n_2 \rightarrow 0.5951, n_3 \rightarrow 0.5451, n_7 \rightarrow 0.5000, m_8 \rightarrow 1.95, m_8 \rightarrow 0.027, m_8 \rightarrow 0.3, n_8 \rightarrow 0.5502, m_9 \rightarrow 1.16, I_9 \rightarrow 0.013, I_9 \rightarrow 0.25, n_9 \rightarrow 0.5726, n_7 R \rightarrow 0.7, mM \rightarrow 36.38 + 2*(1.95 + 1.16) + 0.98 + 3.1 + 10.24\};$

Далее, с помощью оператора подстановки «/.» подставим их в левые части дифференциальных уравнений движения:

$Eqn1 = (E1 - (M1[t] - M2[t])) /. ss;$
 $Eqn2 = (E2 - (M2[t] - M3[t])) /. ss;$
 $Eqn3 = (E3 - (M3[t] + M4[t] + M7[t])) /. ss;$
 $Eqn4 = (E4 - (M4[t] - M5[t])) /. ss;$
 $Eqn5 = (E5 - (M5[t] - M6[t])) /. ss;$
 $Eqn6 = (E6 - M6[t]) /. ss;$
 $Eqn7 = (E7 - (M3[t] + M4[t])) /. ss;$
 $Eqn8 = (E8 - (M8[t] - M9[t])) /. ss;$
 $Eqn9 = (E9 - M9[t]) /. ss;$
 $Eqn8p = (E8p - (M8p[t] - M9p[t])) /. ss;$
 $Eqn9p = (E9p - M9p[t]) /. ss;$

Управляющие моменты определяются в виде функций от времени, на основании разработанной нами методики [1].

Также необходимо задать время, на котором численно будет интегрироваться система нелинейных дифференциальных уравнений движения:

```
tk = 0.3.
```

Задаем начальное положение и скорости антропоморфного механизма:

```
φ10 = φ1i[0]; φ20 = φ2i[0]; φ30 = φ3i[0]; φ40 = φ4i[0]; φ50 = φ5i[0]; φ60 = φ6i[0]; φ70 = φ7i[0]; φ80 = φ8i[0]; φ90 = φ9i[0]; φ80p = φ8pi[0]; φ90p = φ9pi[0];
```

Теперь проводим численное ее решение с использованной встроенной функции для численного решения дифференциальных уравнений и их систем `NDSolve`. В ней в качестве аргументов задаются сами уравнения, начальные значения углов (положение механизма) и начальные скорости, т.е. ставится задача Коши, также задается список неизвестных функций, относительно которых необходимо проводить решение системы дифференциальных уравнений, параметр t , являющийся аргументом неизвестных функций и пределы его изменения:

```
sol7 = NDSolve[{Eqn1 == 0, Eqn2 == 0, Eqn3 == 0, Eqn4 == 0, Eqn5 == 0, Eqn6 == 0, Eqn7 == 0, Eqn8 == 0, Eqn9 == 0, Eqn8p == 0, Eqn9p == 0, φ1[0] == φ10, φ2[0] == φ20, φ3[0] == φ30, φ4[0] == φ40, φ5[0] == φ50, φ6[0] == φ60, φ7[0] == φ70, φ8[0] == φ80, φ9[0] == φ90, φ8p[0] == φ80p, φ9p[0] == φ90p, φ1'[0] == 0, φ2'[0] == 0, φ3'[0] == 0, φ4'[0] == 0, φ5'[0] == 0, φ6'[0] == 0, φ7'[0] == 0, φ8'[0] == 0, φ9'[0] == 0, φ8p'[0] == 0, φ9p'[0] == 0}, {φ1, φ2, φ3, φ4, φ5, φ6, φ7, φ8, φ9, φ8p, φ9p}, {t, 0, tk}]
```

Ответ получаем в виде интерполяционных функций:

```
{{φ1 -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"], φ2 -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"], φ3 -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"], φ4 -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"], φ5 -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"], φ6 -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"], φ7 -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"], φ8 -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"], φ9 -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"], φ8p -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"], φ9p -> InterpolatingFunction[{{0., 0.3}}, "<>"]}}
```

В качестве ответа получаем набор интерполяционных функций для каждой из неизвестных функций.

Далее, стоит задача извлечения полезной информации из этих интерполяционных функций. Конечно, можно пойти традиционным путем и построить их графики (рис. 1 а). На них изображены зависимости углов поворота звеньев антропоморфного робота от времени. Так как это аналитические функции, их можно продифференцировать. Однократное дифференцирование по времени даст нам зависимости угловой скорости звеньев от времени (рис. 1 б), а повторное дифференцирование – зависимости углового ускорения звеньев механизма от времени (рис. 1 в). Построение графиков также имеет свою специфику по извлечению из переменной `sol7`, в которой, хранится все решение данной системы нелинейных дифференциальных уравнений движения.

```
ris1 = Plot[φ1[t] /. sol7, {t, 0, tk}, Background -> RGBColor[1, 1, 1], AxesLabel -> "φ1[t]", PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 0], Thickness[.01]}, DisplayFunction -> Identity];
ris11 = Plot[φ1'[t] /. sol7, {t, 0, tk}, Background -> RGBColor[1, 1, 1], AxesLabel -> "φ1'[t]", PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 0], Thickness[.01]}, DisplayFunction -> Identity];
ris111 = Plot[φ1''[t] /. sol7, {t, 0, tk}, Background -> RGBColor[1, 1, 1], AxesLabel -> "φ1''[t]", PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 0], Thickness[.01]}, DisplayFunction -> Identity];
```

```

ris2 = Plot[φ2[t] /. sol7, {t, 0, tk}, Background -> RGBColor[1,
1, 1], AxesLabel -> "φ2[t]", PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 0], Thick-
ness[.01]}, DisplayFunction -> Identity];
ris22 = Plot[φ2'[t] /. sol7, {t, 0, tk}, Background ->
RGBColor[1, 1, 1], AxesLabel -> "φ2'[t]", PlotStyle -> {RGBColor[0, 0,
0], Thickness[.01]}, DisplayFunction -> Identity];
ris222 = Plot[φ2''[t] /. sol7, {t, 0, tk}, Background ->
RGBColor[1, 1, 1], AxesLabel -> "φ2''[t]", PlotStyle -> {RGBColor[0,
0, 0], Thickness[.01]}, DisplayFunction -> Identity];
...
ris9p = Plot[φ9p[t] /. sol7, {t, 0, tk}, Background ->
RGBColor[1, 1, 1], AxesLabel -> "φ11[t]", PlotStyle -> {RGBColor[0, 0,
0], Thickness[.01]}, DisplayFunction -> Identity];
ris99p = Plot[φ9p'[t] /. sol7, {t, 0, tk}, Background ->
RGBColor[1, 1, 1], AxesLabel -> "φ11'[t]", PlotStyle -> {RGBColor[0,
0, 0], Thickness[.01]}, DisplayFunction -> Identity];
ris999p = Plot[φ9p''[t] /. sol7, {t, 0, tk}, Background ->
RGBColor[1, 1, 1], AxesLabel -> "φ11''[t]", PlotStyle -> {RGBColor[0,
0, 0], Thickness[.01]}, DisplayFunction -> Identity];

```

Для непосредственного вывода графиков на экран, используется следующая функция:

```

Show[GraphicsArray[{ris1,ris11,ris111}]];
Show[GraphicsArray[{ris2,ris22,ris222}]];
...
Show[GraphicsArray[{ris9p,ris99p,ris999p}]];

```

В результате, получаем следующие графики (рис. 2), для примера приведены зависимости координаты a) и ее производных б), в):

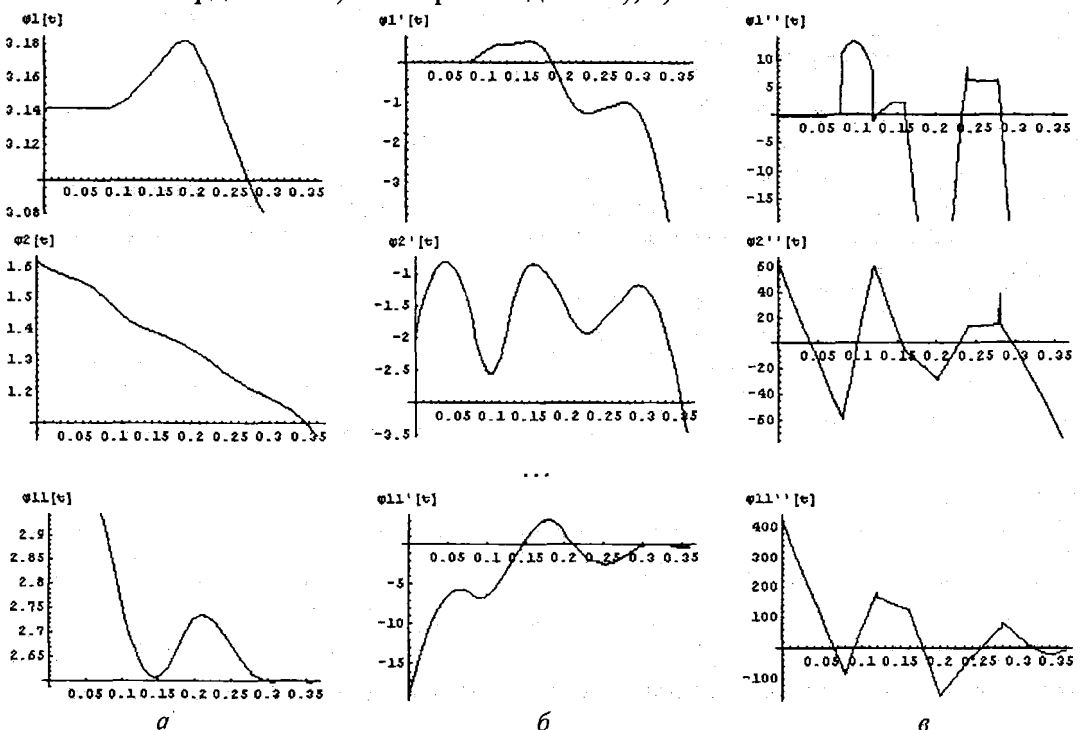


Рис. 2

Однако из них можно получить и анимационную визуальную информацию. Для этого зададим в явном виде:

```

fi1 = φ1 /. sol7[[1]];
fi2 = φ2 /. sol7[[1]];
...
fi9p = φ9p /. sol7[[1]];

```

Замечание: вообще говоря, анимационно визуализировать таким способом можно не только решение дифференциальных уравнений для антропоморфного робота, но и любое движение, заданное интерполяционными функциями, например, если экспериментально определить углы поворота звеньев человека при движении, затем по этой экспериментальной информации построить интерполяционные функции. Разница будет состоять только в значениях соответствующих констант, которые необходимо будет определить для человека и в том, что функции fi_1 и т.д. должны будут задаваться по-другому, например, так:

```
fi1 = φ1i;
fi2 = φ2i;
...
fi9p = φ9pi;
```

вся остальная методика, описываемая ниже, будет оставаться прежней.

Затем задаем углы поворота звеньев в виде функций времени в виде отложенного задания функции пользователем:

```
Fi1[t_] := fi1[tk/2 + Sign[t]*(-tk/2 + Abs[t] - tk*IntegerPart[Abs[t]/tk]);
Fi2[t_] := fi2[tk/2 + Sign[t]*(-tk/2 + Abs[t] - tk*IntegerPart[Abs[t]/tk]);
```

```
...
Fi9p[t_] := fi9p[tk/2 + Sign[t]*(-tk/2 + Abs[t] - tk*IntegerPart[Abs[t]/tk]);
```

Определим еще одну вспомогательную функцию пользователя, необходимую для более построения изображения антропоморфного робота:

```
PS7[t_] := If[t > 0, IntegerPart[t/tk], IntegerPart[t/tk] - 1];
```

Вычислим длину робота по горизонтали, необходимую для задания более компактного задания команд построения изображения:

```
Lk7 = Abs[l1[0]*Cos[φ10] + l2[0]*Cos[φ20] + l3[0]*Cos[φ30] - l1[0]*Cos[φ60] - l2[0]*Cos[φ50] - l3[0]*Cos[φ40]] /. ss
```

Задаем функцию определения координат антропоморфного робота:

```
robotzwet7[fi1_, fi2_, fi3_, fi4_, fi5_, fi6_, fi7_, fi8_, fi9_, fi8p_, fi9p_, a_, b_, t_] := {RGBColor[Mod[Abs[PS7[t] - 1], 2], 0, Mod[Abs[PS7[t]], 2]], Thickness[.02], Line[{{Lk7*PS7[t] + 0, 0}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1], l1[t]*Sin[fi1]}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2]}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] + l3[t]*Cos[fi3], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2] + l3[t]*Sin[fi3]}]}, RGBColor[Mod[Abs[PS7[t]], 2], 0, Mod[Abs[PS7[t] - 1], 2]], Thickness[.02], Line[{{Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] + l3[t]*Cos[fi3], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2] + l3[t]*Sin[fi3]}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] + l3[t]*Cos[fi3] - l4[t]*Cos[fi4], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2] + l3[t]*Sin[fi3] - l4[t]*Sin[fi4]}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] + l3[t]*Cos[fi3] - l4[t]*Cos[fi4] - l5[t]*Cos[fi5], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2] + l3[t]*Sin[fi3] - l4[t]*Sin[fi4] - l5[t]*Sin[fi5]}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] + l3[t]*Cos[fi3] - l4[t]*Cos[fi4] - l5[t]*Cos[fi5] - l6[t]*Cos[fi6], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2] + l3[t]*Sin[fi3] - l4[t]*Sin[fi4] - l5[t]*Sin[fi5] - l6[t]*Sin[fi6]}]}, RGBColor[0, 1, 0], Thickness[.05], Line[{{Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] + l3[t]*Cos[fi3] + l7[t]*Cos[fi7], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2] + l3[t]*Sin[fi3] + l7[t]*Sin[fi7]}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] + l3[t]*Cos[fi3], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2] + l3[t]*Sin[fi3]}]}, RGBColor[1, 0.8, 0.2], Thickness[.02], Line[{{Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] + l3[t]*Cos[fi3] + l7[t]*n7R*Cos[fi7] - l8[t]*Cos[fi8] - l9[t]*Cos[fi9], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2] + l3[t]*Sin[fi3] + l7[t]*n7R*Ssin[fi7] - l8[t]*Sin[fi8] -
```

```

19[t]*Sin[fi9}}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] +
l3[t]*Cos[fi3] + 17[t]*n7R*Cos[fi7] - 18[t]*Cos[fi8], l1[t]*Sin[fi1] +
l2[t]*Sin[fi2] + l3[t]*Sin[fi3] + 17[t]*n7R*Ssin[fi7] -
18[t]*Sin[fi8}}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] +
l3[t]*Cos[fi3] + 17[t]*n7R*Cos[fi7], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2] +
l3[t]*Sin[fi3] + 17[t]*n7R*Ssin[fi7]}}},
RGBColor[0.8, 0.5, 0.9], Thickness[.02], Line[{{Lk7*PS7[t] +
l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] + l3[t]*Cos[fi3] + 17[t]*n7R*Cos[fi7]
- 18p[t]*Cos[fi8p] - 19p[t]*Cos[fi9p], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2]
+ l3[t]*Sin[fi3] + 17[t]*n7R*Ssin[fi7] - 18p[t]*Sin[fi8p] -
19p[t]*Sin[fi9p]}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] +
l3[t]*Cos[fi3] + 17[t]*n7R*Cos[fi7] - 18p[t]*Cos[fi8p], l1[t]*Sin[fi1]
+ l2[t]*Sin[fi2] + l3[t]*Sin[fi3] + 17[t]*n7R*Ssin[fi7] -
18p[t]*Sin[fi8p]}, {Lk7*PS7[t] + l1[t]*Cos[fi1] + l2[t]*Cos[fi2] +
l3[t]*Cos[fi3] + 17[t]*n7R*Cos[fi7], l1[t]*Sin[fi1] + l2[t]*Sin[fi2] +
l3[t]*Sin[fi3] + 17[t]*n7R*Ssin[fi7]}}}] /. ss

```

Задаем функцию формирования изображения антропоморфного робота:

```

RBF7[fi1_, fi2_, fi3_, fi4_, fi5_, fi6_, fi7_, fi8_, fi9_,
fi8p_, fi9p_, a_, b_, t_] := Graphics[{{robotzwet7[fi1, fi2, fi3, fi4,
fi5, fi6, fi7, fi8, fi9, fi8p, fi9p, a, b, t]}}, PlotRange -> {{-1,
2}, {-1, 2}}, AspectRatio -> 1, GridLines -> Automatic,
DisplayFunction -> Identity]

```

Строим начальное положение антропоморфного робота:

```

Show[RBF7[Fi1[0], Fi2[0], Fi3[0], Fi4[0], Fi5[0], Fi6[0],
Fi7[0], Fi8[0], Fi9[0], Fi8p[0], Fi9p[0], 0.2, 0.18, 0.0], Display-
Function -> $DisplayFunction];

```

Иллюстрация работы этой команды приведена на рис. 3.

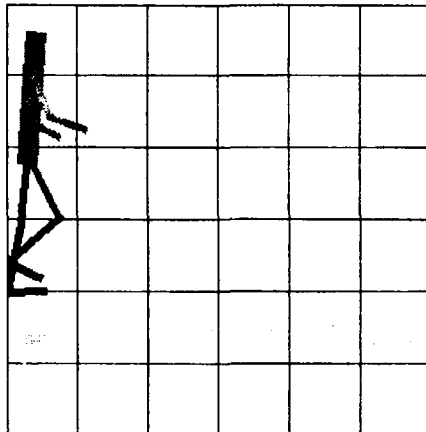


Рис. 3

Задаем функцию подготавливающую анимацию антропоморфного робота:

```

mis7F[t_] := RBF7[Fi1[t], Fi2[t], Fi3[t], Fi4[t], Fi5[t], Fi6[t],
Fi7[t], Fi8[t], Fi9[t], Fi8p[t], Fi9p[t], 0.2, 0.18, t]

```

Вводим функцию, формирующую n кадров анимации движения:

```

Res7[n_] := Table[Show[mis7F[tk/n*i], DisplayFunction -> $Dis-
playFunction], {i, n}]

```

Выводим тридцать кадров анимации командой:

```
Res7[30]
```

Результаты работы описанной методики иллюстрируются рисунком 3, на котором приведено четыре кадра анимации ходьбы антропоморфного робота.

Экспорт анимации с разными параметрами в распространенный видео формат «.gif» осуществляется следующими командами:

```

SetDirectory["D:\\Robot"] rbtmovie = Res7[30];
Export["RobotDeform.gif", rbtmovie, ConversionOptions -> {"Loop"
-> True}];

```

```
Export["RobotDeform1.gif", rbtmovie, ConversionOptions ->
{"Loop" -> False}, AnimationDisplayTime -> 1];
```

Таким образом, описана методика численного решения системы дифференциальных уравнений движения модели антропоморфного робота и его анимационная визуализация.

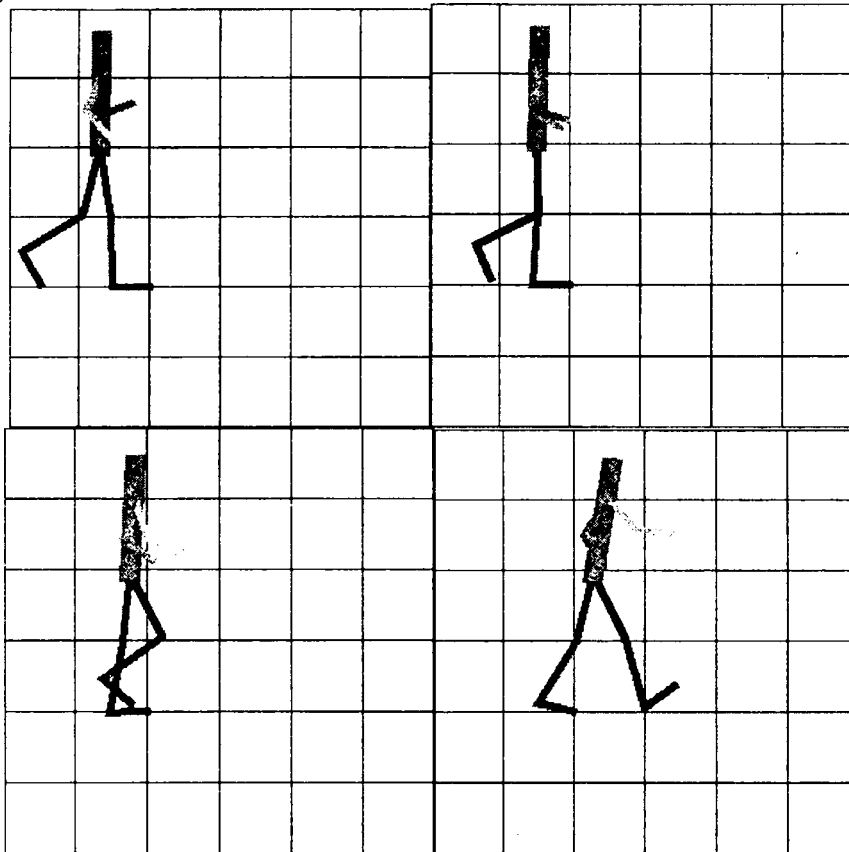


Рис. 4

Описанная методика является достаточно универсальной, и может применяться для решения систем дифференциальных уравнений динамики разнообразных объектов, с большим или меньшим количеством степеней свободы. Анимационная визуализация также может применяться для визуализации движений различных объектов, но при этом она требует изменения текстов функций, определяющих непосредственно геометрическую структуру антропоморфного робота. Необходимо будет задавать соответствующие новой модели геометрические связи. Но сам подход при этом может оставаться прежним.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов А.В. Моделирование опорно-двигательного аппарата человека и применение полученных результатов для разработки модели антропоморфного робота. – М.: Спутник +, 2009. – 212 с.
2. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 576 с.
3. Чигарев А.В., Кравчук А.И., Кравчук А.С. Основы системы Mathematica 6.0. Задачи и решения. – Минск, 2008. – 136 с.
4. Чигарев А.В., Михасев Г.И. Борисов А.В. Биомеханика. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.

CRITICAL PHENOMENA SOFT MODES AND NEGATIVE POISSON' RATIO

Nemtsov V.B., Shirko A.V., Belov V.V.

Belarusian State Technological University, Minsk

The article phenomena, soft modes and negative Poisson' ratio are considered on bases at statistical theory

For description of the elastic properties of elastomers the stress ensemble is used. The distribution function for this ensemble is obtained by means of the method of maximum informational entropy. At first we introduce the microscopic field of displacements [1] as

$$\hat{u}_i(x) = \sum_{v=1}^N u_i^v \delta(x - x^v) \quad (1)$$

and the we construct the microscopic tensor of deformation (for simplicity we consider the linear case)

$$\hat{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_i} \right). \quad (2)$$

Mean value of this tensor is

$$\langle \hat{\varepsilon}_{ik} \rangle = n \varepsilon_{ik}, \quad (3)$$

where

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

is macroscopic tensor of deformation, n is the particle number density.

Quasiequilibrium distribution function defined as

$$\rho_q = \exp \left[\Phi - \int dx \beta(x, t) \left(\hat{H}(x) - \hat{E}_{ik} \varepsilon_{ik} \right) \right]. \quad (5)$$

$E_{ik} = \tau_{ik}^0 \beta n^{-1}$, τ_{ik}^0 is the stress tensor, $\beta = kT$, k is Boltzmann constant.

The expression type (5) may be apply for the nonlinear measure of deformation [2-5].

In linear approximation we have

$$\rho_q = \rho_0 \left[1 - \int d\bar{x}' \left(\hat{H}(\bar{x}') - \langle \hat{H} \rangle_0 \right) (\beta - \beta_0) + \int E_{ik}(x') \hat{\varepsilon}_{ik}(x') dx' \right]. \quad (6)$$

Using this distribution function we obtain

$$\langle \hat{\varepsilon}_{ij} \rangle = \int E_{kl}(x') \langle \hat{\varepsilon}_{ij}(x) \hat{\varepsilon}_{kl}(x') \rangle dx' \quad (7)$$

or in the local approximation

$$n c_{ij} = E_{kl} \int \langle \hat{\varepsilon}_{ij}(x) \hat{\varepsilon}_{kl}(x') \rangle dx', \quad (8)$$

where $\int \langle \hat{\varepsilon}_{ij}(x) \hat{\varepsilon}_{kl}(x') \rangle dx'$ is correlation function of the strains fluctuation.

Therefore

$$\varepsilon_{ij} = B_{ijkl}(x) \tau_{kl}^0(x), \quad (9)$$

where

$$B_{ijkl} = \beta n^{-2} \int \langle \hat{\varepsilon}_{ij}(x) \hat{\varepsilon}_{kl}(x') \rangle dx' \quad (10)$$

is the tensor of the isothermal elastic compliances.

The tensor of the elastic module K_{ijkl} connected with the tensor of compliances the next relation

$$B_{ijmn} K_{mnlk} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (11)$$

It is very important that the tensor of compliances defined by the correlation function of the strain fluctuations.

Now we consider the simple case of the isotropic medium. Then we have

$$\varepsilon_{12}(x) = \mu^{-1} \tau_{12}, \quad (12)$$

where μ is shear modulus

$$\mu = \frac{kTn^2\nu}{\iint \langle \hat{\varepsilon}_{12}(x) \hat{\varepsilon}_{12}(x') \rangle dx' dx} \quad (13)$$

In liquid case $\varepsilon_{12} \rightarrow \infty$, and therefore $\mu \rightarrow 0$. That is the shear deformation ε_{12} is the soft mode, ν is the body volume.

It is interesting that in case of the no compressibility of elastomers when $\text{Tr} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ii} \rightarrow 0$ we obtain according to (10) that compressibility also go to zero.

In isotropic case the relations between elastic moduli and corresponding compliances directly follows from formulas [7]

$$\tau_{ij} = K \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{ii} \right), \quad (14)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9K} \delta_{ij} \tau_{ii} + \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{ii} \right). \quad (15)$$

Then we obtain the expressions for bulk elastic modulus K and for shear modulus (see 13)

$$9K = \frac{n^2 kT \nu}{\iint \langle \hat{\varepsilon}_{ii}(x) \hat{\varepsilon}_{kk}(x') \rangle dx' dx} \quad (16)$$

The Poisson's ratio defined by [7]

$$\nu = (3K - 2\mu) / 2(3K + \mu) \quad (17)$$

At calculation corresponding correlation functions in (13) and (16) it may occur the next results.

In case, when $3K < 2\mu$, $\nu < 0$ and at $K = 0$ (the compressibility is infinity)

$$\nu = -1, \text{ at } K \rightarrow \infty \text{ or } \mu \rightarrow 0 \quad \nu \rightarrow \frac{1}{2}.$$

It should be noted that in the work [8] the detailed and stimulated review of material with negative Poisson's ratio is represented.

Let as for analyses of formula (16) take into account the law of conservation

$$n - n_0 = -\text{div}u, \quad \text{div}u = \varepsilon_{ii} \quad (18)$$

Besides we used the relation (3).

The quantity $\Delta n = n - n_0$ a fluctuation of density or concentration.

The expression (16) may be rewrite the next manner

$$9K = \frac{kTn^2}{\int \langle \Delta n(0) \Delta n(r) \rangle dr} \quad (19)$$

and we find that denomination is the correlation of density (concentration) which is diverge at approach to the critical point.

In result bulk elastic modulus goes to zero and according to (17) Poisson's ratio comes to minus one (-1).

Correlation function mae be represented in another form

$$G(r) = \langle n(0)n(r) \rangle - n^2 = n^2 \left(g(r) - 1 + \frac{1}{n^2} \delta(r) \right) \quad (20)$$

where $g(r)$ is traditional binary distribution function.

Near critical point $g(r)-1$ the Orstein-Zernike form

$$g(r) - 1 = \frac{\xi}{4\pi r} \exp\left(-\frac{r}{\xi}\right) \quad (21)$$

Now the quantity $9K$ is

$$9K = \frac{kT}{\xi^3} \quad (22)$$

where ξ is correlation length, which goes to infinity at approaching to critical point. Thereof in this case $K \rightarrow 0$ and $\nu \rightarrow -1$.

For nonlinear elastic extension of elastomers the low of this deformation defined by formula [9]

$$P^* = (b_{\parallel}\lambda - b_{\perp}\lambda^{-2}) - \alpha(b_{\parallel}^{3/2}\lambda^2 - b_{\perp}^{3/2}\lambda^{-5/2}) + \beta(b_{\parallel}^{3/2}\lambda^3 - b_{\perp}^3\lambda^{-3}), \quad (23)$$

where $b_{\perp} = a/l_{\perp}$, $b_{\parallel} = a/l_{\parallel}$, a is effective length of monomer, $l_{\parallel} = a(1+2Q)$, $l_{\perp} = a(1-Q)$, Q is the scalar order parameter, λ is multiplicity stretch of material fibre, P is force per unit nondeformation area, $P^* = P/\mu$.

The examples of calculation by formula (23) represented on figures

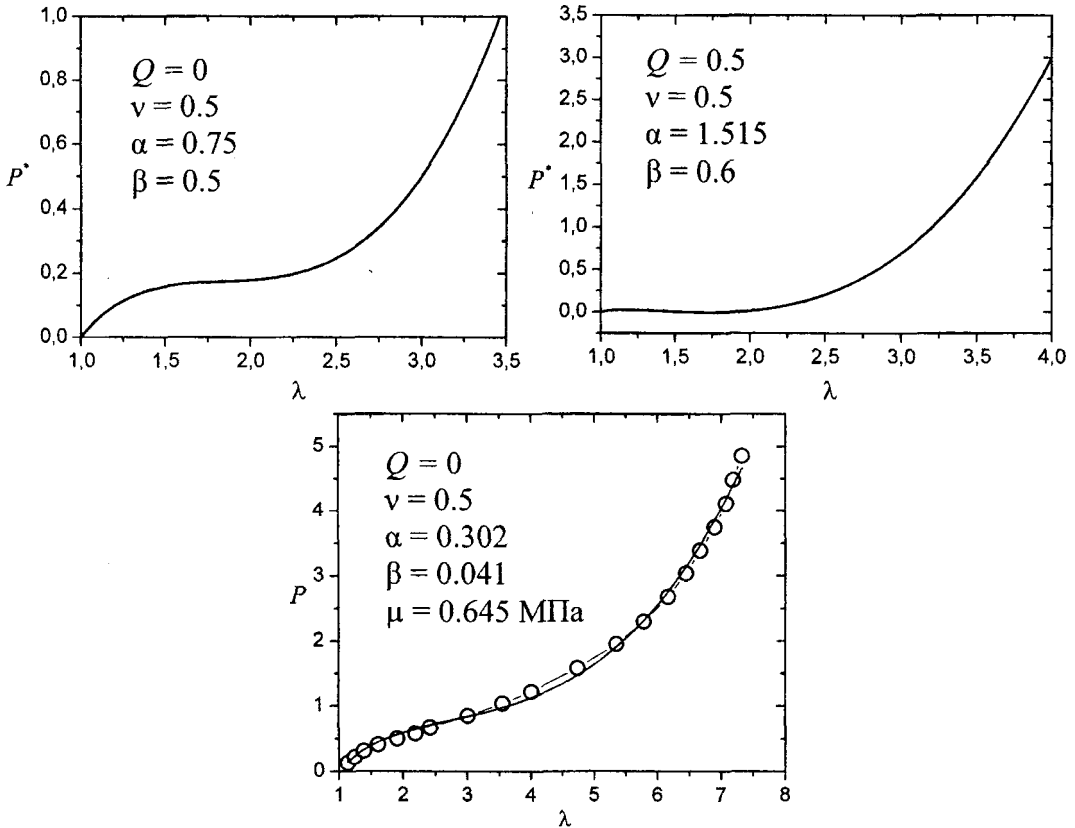


Fig. 1

In an extension of some the polymers, for example DNA molecule and nematic elastomers on the extensions curve the soft modes appears in form plateau. This means that for deformation in limits plateau Young modules and balk modules are zero. Therefore the Poisson's ratio is negative and may by equal unit.

It is very impotent generalize theory of nematic elastomets on cases when $\nu < 0$ or $\nu \neq 0.5$.

For this end instead of condition volumes invariance we mast use the condition variability a volume. The corresponding relation is

$$\lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1 + (\lambda - 1)(1 - 2\nu), \quad \lambda \equiv \lambda_z, \quad (24)$$

At $\nu = 0.5$ we obtain the condition invariants volume $\lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1$.

The equation of stretch of nenatical elastomer for $\nu \neq 0.5$ have the form

$$\begin{aligned} P^* = & b_{\parallel} \lambda - b_{\perp} d^2 \lambda^{-2} + b_{\perp} (1 - 2\nu) \lambda^{-1} - \\ & - \alpha \left[b_{\parallel}^{3/2} \lambda^2 - b_{\perp}^{3/2} d^3 \lambda^{-5/2} + b_{\perp}^{3/2} d (1 - 2\nu) \lambda^{-3/2} \right] + \\ & + \beta \left[b_{\parallel}^2 \lambda^3 - b_{\perp}^2 d^4 \lambda^{-3} + b_{\perp}^2 d^2 (1 - 2\nu) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

where $d = \sqrt{1 + (\lambda - 1)(1 - 2\nu)}$.

The parameters α and β find from experiment. Results of calculations at ν positive and negative represent Below. at $Q = 0.1$ and $Q = 0.3$.

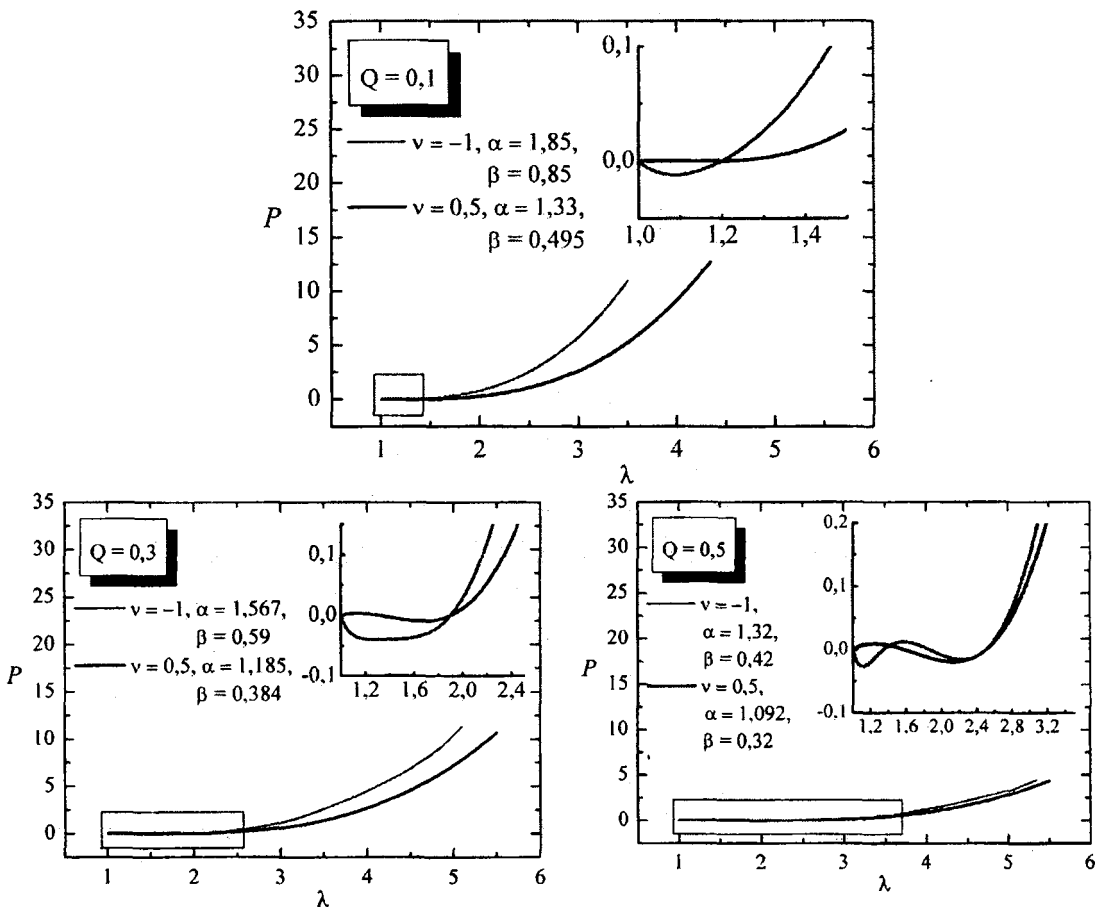


Fig. 2

REFERENTS

1. Немцов В.Б. Теоретическая и математическая физика. — 1973. — Т.14. — №2. — С. 262.
2. Немцов В.Б. ДАН БССР. — 1975. — Т. 19. — С.883.
3. Немцов В.Б. Сб. Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механики. Минск, 2001. С. 372.
4. Немцов В.Б. Теоретическая и прикладная механика. — 2004. — Вып. 17. — С. 30.
5. Немцов В.Б. Неравновесная статистическая механика систем с ориентационным порядком. — Минск, 1997. — 280 с.
6. M.Parinello, A. Rahman. J. Chem. Phys. (1), 1982. P. 2662.
7. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория упругости. — М: Наука, 1987, — 248 с.
8. Конек Д.А., Вайтеховский К.В. Плескачевский Ю.М., Шилько С.В. Механика композитных материалов и конструкций. — М., 2004. — Т. 10. — С. 25–69.
9. K.V. Tretiakov and K.W. Wojciechowski, Phys. Rev. E 60, 7626 (1999).
10. Немцов В.Б., Камлюк А.Н., Ширко А.В.// Механика машин, механизмов и материалов. — Минск, 2008. — № 3 (4). —С. 56–59.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОСТРАНСТВЕННО АРМИРОВАННЫХ СРЕД

Янковский А. П.

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

Предложена структурная модель термоупругого поведения пространственно армированной среды при общей анизотропии компонент композиции. На основе энергетического критерия эквивалентности и кинематических допущений о связи усредненных деформаций такого композита с деформациями в компонентах композиции определены термоупругие характеристики эквивалентного материала. Показано, что на основе полученных уравнений можно определить напряженно-деформированные состояния во всех компонентах композиции, используя известные усредненные деформации и температуру в композите, что имеет принципиальное значение при расчетах конструкций из таких композиционных материалов с использованием структурных теорий прочности.

Введение

Традиционной структурой композиционных материалов является слоистая, когда траектории армирующих волокон лежат в плоскостях слоев, связь между которыми осуществляется через прослойки связующего. (Критический анализ некоторых структурных моделей упругого поведения таких композитов проведен в [1, 2].) Однако особое внимание к себе привлекают композиционные материалы с пространственным расположением арматуры. Целесообразность пространственного расположения армирующих волокон определяется не только возможностью ликвидировать такой недостаток слоистых композитов как опасность расслоения вследствие слабого сопротивления сдвигу и поперечному отрыву, но и возможностью локализовать в пределах нескольких пространственных ячеек распространение трещин. Этим резко повышается несущая способность материала в толсто-стенных конструкциях, особенно в зонах приложения локализованных нагрузок и концентраторов напряжений при нестационарных термосиловых воздействиях, характерных для современных технических устройств [3]. Кроме того, при эксплуатации гибких тонкостенных волокнистых конструкций типа пластин изначально плоские структуры армирования могут в процессе деформирования трансформироваться в пространственные структуры.

В силу актуальности проблемы определения эффективных упругих характеристик пространственно армированных композитных сред развитию структурных теорий расчета таких материалов был посвящен ряд публикаций [3–7 и др.]. Однако все они не лишены определенных недостатков. Так, в [4] предлагаются две иерархические структурные модели пространственно армированного композита, но со строго ортогонально перекрестными волокнами, что существенно ограничивает область применимости этих моделей. Кроме того, как подчеркивают сами авторы, в рамках построенных в [4] моделей существует определенный произвол в выборе иерархии структуры, что приводит к неоднозначному определению значений эффективных упругих констант композита, причем для некоторых характеристик эквивалентного материала разброс полученных таким образом значений упругих постоянных может быть значительным. Построенные в [4] соотношения во многом базируются на допущении, что модуль упругости арматуры много больше соответствующей величины связующего (в 25 и более раз). Такие ситуации характерны лишь для волокнистых композитов с полимерным связующим [8].

Однако в настоящее время все более широкое применение находят композиты с «жестким» (металлическим) связующим, для которых указанное отношение, как правило, не превышает десяти [8]. Поэтому структурные соотношения, полученные в [4], не могут быть использованы при расчетах армированных сред с металлическим связующим.

В рамках работ [5–7] построены структурные модели пространственно армированных композитов для более общего случая – при произвольной ориентации в пространстве траекторий армирования. К недостатку этих работ относится то, что монолитная в реальности композитная среда представляется в виде отдельных однонаправленно армированных стержней, ориентация которых соответствует заданным направлениям армирования; при этом указанные армированные стержни получаются несвязанными между собой в единое целое (в монолитный материал). Кроме того, при таком подходе существует определенная неоднозначность в распределении всего объема связующего по однонаправленно армированным стержням, что существенно сказывается на значениях эффективных жесткостных характеристиках композита. Так, в [5] исследованы пять разных способов распределения связующего по стержням, приводящих к существенно разным значениям эффективных упругих констант материала.

В рамках указанных моделей определены лишь эффективные упругие [4, 5] или линейно-вязкоупругие [6, 7] характеристики композитных сред, но не определены их термоупругие свойства, такие как эффективные коэффициенты линейного теплового расширения, что не позволяет решать задачи деформирования композитных конструкций при наличии температурных полей. Кроме того, в рамках этих моделей невозможно определить в последующем напряженное состояние в материалах компонент композиции по усредненным напряжениям и деформациям в эквивалентной среде, что не позволяет использовать структурные теории прочности при расчете конструкций с использованием таких моделей, а также рассчитывать нелинейно-упругое и неупругое деформирование пространственно армированных композитных конструкций.

Настоящее исследование посвящено построению модели пространственно армированного гибридного композита, лишенной указанных выше недостатков.

Структурная модель пространственно армированного гибридного композита. Так как наличие арматуры с различными жесткостью и прочностью значительно расширяет диапазон свойств композиционных материалов с пространственной схемой армирования [3], то в глобальной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим гибридный композит, армированный в произвольных направлениях K семействами волокон (возможно, разной физической природы) с интенсивностями ω_k ($k = 1, 2, \dots, K$). Удельное объемное содержание связующего обозначим через ω_0 , тогда имеет место условие нормировки

$$\omega_0 + \sum_k \omega_k = 1 \quad (\omega_0 > 0, \quad \omega_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K). \quad (1)$$

(Здесь и далее суммирование осуществляется по указанному индексу от 1 до K , если не указаны пределы.) Кроме условия нормировки (1) должны выполняться и физические условия взаимного непроникновения материалов различных компонент композиции. Эти условия накладывают определенные ограничения на предельно допустимые значения суммарных плотностей армирования (на значение суммы в (1)) при плотной упаковке армирующих элементов. Так, в [3] приведены указанные предельные значения для некоторых структур пространственного ар-

мирования композитной среды, которые меньше единицы. Далее в настоящем исследовании предполагается, что эти ограничения на значения суммарных плотностей армирования выполняются. (При построении модели упругого поведения рассматриваемого композита знание конкретных чисел ω_k не обязательно, важным является выполнение условия нормировки (1).)

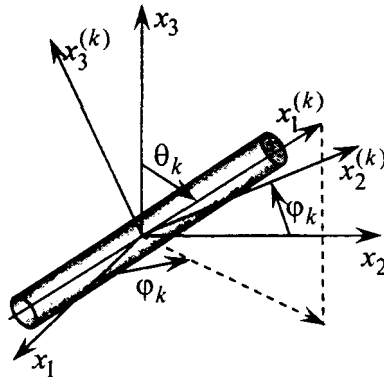


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с волокном k -го семейства

С каждым k -м семейством волокон свяжем свою локальную ортогональную систему координат $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, K$) так, чтобы ось $x_1^{(k)}$ совпадала с направлением траекторий армирования этого семейства, а оси $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ были перпендикулярны этим траекториям (см. рисунок). Углы между глобальными и локальными осями определяются таблицей направляющих косинусов.

Все компоненты композиции предполагаются анизотропными материалами, причем для удобства изложения (хотя это и не принципиально) термоупругие характеристики связующего заданы в глобальной системе координат x_1, x_2, x_3 , а арматуры k -го семейства – в локальной системе $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$; эффективные характеристики композиции определяются также в глобальной системе координат.

Таблица 1

Направляющие косинусы между глобальной и k -й локальной системами координат [9]

Оси	x_1	x_2	x_3
$x_1^{(k)}$	$l_{11}^{(k)}$	$l_{12}^{(k)}$	$l_{13}^{(k)}$
$x_2^{(k)}$	$l_{21}^{(k)}$	$l_{22}^{(k)}$	$l_{23}^{(k)}$
$x_3^{(k)}$	$l_{31}^{(k)}$	$l_{32}^{(k)}$	$l_{33}^{(k)}$

Так как при затвердевании связующего объем его может измениться, то в компонентах композиции, а значит, и в эквивалентном материале в целом могут возникнуть начальные напряжения [10]. (Определение начальных напряженных состояний в компонентах пространственно армированного композита представляет собой самостоятельную задачу, выходящую за рамки настоящего исследования. Далее в данной работе предполагаем, что эти напряжения известны.)

Согласно вышеизложенному, определяющие уравнения для эквивалентной композитной среды и компонент композиции в матричной форме имеют вид [9]

$$\begin{aligned}
\sigma &= \mathbf{p} + A(\varepsilon - \alpha T) = \partial F / \partial \varepsilon, \\
\sigma_0 &= \mathbf{p}_0 + A_0(\varepsilon_0 - \alpha_0 T_0) = \partial F_0 / \partial \varepsilon_0, \\
\bar{\sigma}_k &= \bar{\mathbf{p}}_k + \bar{A}_k(\bar{\varepsilon}_k - \bar{\alpha}_k T_k) = \partial F_k / \partial \bar{\varepsilon}_k, \quad k = 1, 2, \dots, K,
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma^* &= \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} \equiv \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}, \\
\mathbf{p}^* &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\} \equiv \{p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{23}, p_{31}, p_{12}\}, \\
\varepsilon^* &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\} \equiv \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}\}, \\
\alpha^* &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\} \equiv \{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{12}\}, \\
\sigma_0^* &= \{\sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)}, \sigma_3^{(0)}, \sigma_4^{(0)}, \sigma_5^{(0)}, \sigma_6^{(0)}\} \equiv \{\sigma_{11}^{(0)}, \sigma_{22}^{(0)}, \sigma_{33}^{(0)}, \sigma_{23}^{(0)}, \sigma_{31}^{(0)}, \sigma_{12}^{(0)}\}, \\
\mathbf{p}_0^* &= \{p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, p_3^{(0)}, p_4^{(0)}, p_5^{(0)}, p_6^{(0)}\} \equiv \{p_{11}^{(0)}, p_{22}^{(0)}, p_{33}^{(0)}, p_{23}^{(0)}, p_{31}^{(0)}, p_{12}^{(0)}\}, \\
\varepsilon_0^* &= \{\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}, \varepsilon_3^{(0)}, \varepsilon_4^{(0)}, \varepsilon_5^{(0)}, \varepsilon_6^{(0)}\} \equiv \{\varepsilon_{11}^{(0)}, \varepsilon_{22}^{(0)}, \varepsilon_{33}^{(0)}, \varepsilon_{23}^{(0)}, \varepsilon_{31}^{(0)}, \varepsilon_{12}^{(0)}\}, \\
\alpha_0^* &= \{\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)}, \alpha_4^{(0)}, \alpha_5^{(0)}, \alpha_6^{(0)}\} \equiv \{\alpha_{11}^{(0)}, \alpha_{22}^{(0)}, \alpha_{33}^{(0)}, \alpha_{23}^{(0)}, \alpha_{31}^{(0)}, \alpha_{12}^{(0)}\}, \\
\bar{\sigma}_k^* &= \{\bar{\sigma}_1^{(k)}, \bar{\sigma}_2^{(k)}, \bar{\sigma}_3^{(k)}, \bar{\sigma}_4^{(k)}, \bar{\sigma}_5^{(k)}, \bar{\sigma}_6^{(k)}\} \equiv \{\bar{\sigma}_{11}^{(k)}, \bar{\sigma}_{22}^{(k)}, \bar{\sigma}_{33}^{(k)}, \bar{\sigma}_{23}^{(k)}, \bar{\sigma}_{31}^{(k)}, \bar{\sigma}_{12}^{(k)}\}, \\
\bar{\mathbf{p}}_k^* &= \{\bar{p}_1^{(k)}, \bar{p}_2^{(k)}, \bar{p}_3^{(k)}, \bar{p}_4^{(k)}, \bar{p}_5^{(k)}, \bar{p}_6^{(k)}\} \equiv \{\bar{p}_{11}^{(k)}, \bar{p}_{22}^{(k)}, \bar{p}_{33}^{(k)}, \bar{p}_{23}^{(k)}, \bar{p}_{31}^{(k)}, \bar{p}_{12}^{(k)}\}, \\
\bar{\varepsilon}_k^* &= \{\bar{\varepsilon}_1^{(k)}, \bar{\varepsilon}_2^{(k)}, \bar{\varepsilon}_3^{(k)}, \bar{\varepsilon}_4^{(k)}, \bar{\varepsilon}_5^{(k)}, \bar{\varepsilon}_6^{(k)}\} \equiv \{\bar{\varepsilon}_{11}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{33}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{23}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{31}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{12}^{(k)}\}, \\
\bar{\alpha}_k^* &= \{\bar{\alpha}_1^{(k)}, \bar{\alpha}_2^{(k)}, \bar{\alpha}_3^{(k)}, \bar{\alpha}_4^{(k)}, \bar{\alpha}_5^{(k)}, \bar{\alpha}_6^{(k)}\} \equiv \{\bar{\alpha}_{11}^{(k)}, \bar{\alpha}_{22}^{(k)}, \bar{\alpha}_{33}^{(k)}, \bar{\alpha}_{23}^{(k)}, \bar{\alpha}_{31}^{(k)}, \bar{\alpha}_{12}^{(k)}\};
\end{aligned} \tag{3}$$

$A = (A_{ij})$, $A_0 = (A_{ij}^{(0)})$, $\bar{A}_k = (\bar{A}_{ij}^{(k)})$ – 6×6 симметричные матрицы жесткостей фиктивного материала, связующего и арматуры k -го семейства соответственно; σ , σ_0 , $\bar{\sigma}_k$, \mathbf{p} , \mathbf{p}_0 , $\bar{\mathbf{p}}_k$ – векторы-столбцы напряжений и начальных напряжений в тех же материалах соответственно; ε , ε_0 , $\bar{\varepsilon}_k$, α , α_0 , $\bar{\alpha}_k$ – векторы-столбцы деформаций и коэффициентов теплового расширения тех же материалов соответственно (здесь в отличие от [9] для удобства изложения под $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ и т. п. понимаются не полные сдвиговые деформации, а их половины, равные соответствующим компонентам тензоров деформаций $\varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}$ и т. п.); T, T_0, T_k – отклонение температуры композита, связующего и арматуры k -го семейства от температуры естественного состояния θ ; F, F_0, F_k – удельные свободные энергии Гельмгольца (инварианты) эквивалентной среды, связующего материала и арматуры k -го семейства, имеющие выражения [11]

$$\begin{aligned}
F &= \varepsilon^* \mathbf{p} + \varepsilon^* A \varepsilon / 2 - \varepsilon^* A \alpha T - \zeta T - c^\varepsilon T^2 / (2\theta), \\
F_0 &= \varepsilon_0^* \mathbf{p}_0 + \varepsilon_0^* A_0 \varepsilon_0 / 2 - \varepsilon_0^* A_0 \alpha_0 T_0 - c_0^\varepsilon T_0^2 / (2\theta), \\
F_k &= \bar{\varepsilon}_k^* \bar{\mathbf{p}}_k + \bar{\varepsilon}_k^* \bar{A}_k \bar{\varepsilon}_k / 2 - \bar{\varepsilon}_k^* \bar{A}_k \bar{\alpha}_k T_k - c_k^\varepsilon T_k^2 / (2\theta), \quad 1 \leq k \leq K;
\end{aligned} \tag{4}$$

ζ – некоторая термомеханическая характеристика композита, смысл которой будет выяснен ниже; $c^\varepsilon, c_0^\varepsilon, c_k^\varepsilon$ – теплоемкость (при постоянной деформации) фиктивного материала, связующего и арматуры k -го семейства соответственно; «звез-

дочка» означает операцию транспонирования. В соотношениях (2)–(4) и далее чертой сверху будем обозначать величины, определенные в локальной системе координат $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$, связанной с k -м семейством волокон, а те же величины, определенные в глобальной системе x_1, x_2, x_3 , будем обозначать теми же символами, но без черты. Равенства (3) задают соответствия между шестью компонентами $f_i, f_i^{(0)}, \bar{f}_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 6}$) некоторых векторов $\mathbf{f}, \mathbf{f}_0, \bar{\mathbf{f}}_k$ и компонентами соответствующих симметричных тензоров второго ранга $f_{ij}, f_{ij}^{(0)}, \bar{f}_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2, 3; 1 \leq k \leq K$).

В случаях, когда волокна изготовлены из изотропных или монотропных (с главной осью анизотропии, совпадающей с направлением армирования) материалов, направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ (см. таблицу) можно однозначно определить с помощью двух углов сферической системы координат (см. рисунок): полярного расстояния θ_k и долготы φ_k . При этом ось $x_2^{(k)}$ удобно получить поворотом оси x_2 на угол φ_k вокруг оси x_3 (именно этот случай изображен на рисунке), а направление оси $x_3^{(k)}$ определяется векторным произведением ортов, задающих направления $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$. Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ при таком задании локальной системы координат вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k, \quad l_{21}^{(k)} = -\sin \varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \\ l_{23}^{(k)} = 0, \quad l_{31}^{(k)} = -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (5)$$

(Соотношения (5) могут быть использованы и в случае общей анизотропии материалов арматуры, но тогда все характеристики материала волокон k -го семейства обязательно должны быть заданы именно в этой системе координат.)

Так как установить фактическое распределение напряжений и деформаций в композитной среде, где основной материал имеет многочисленные более жесткие включения, весьма затруднительно [9], то при нахождении практически пригодных зависимостей для определения всех независимых термоупругих постоянных пространственно армированного материала необходимо сделать некоторые допущения в виде исходных предпосылок, аналогичных принятым в [1, 2, 9].

1. Армированный материал представляет собой сплошное макроскопически квазиоднородное анизотропное тело. (При достаточно густом равномерном насыщении связующего арматурными стержнями или волокнами это предположение вполне допустимо. К этому выводу приходят все исследователи, изучающие механические свойства дисперсно-армированных сред [9].)
2. Между связующим и арматурой существует полное сцепление (идеальный термомеханический контакт).
3. В пределах представительного элемента, выделенного из композита на миниуровне, деформации, напряжения и температуры во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с изменением полей деформаций, напряжений и температур на микроуровне в малых окрестностях границ контакта связующего и волокон, пренебрегаем.
4. Усредненные поля деформаций и температуры в композиции определяются по правилу простой смеси – пропорционально объемному содержанию каждого составляющего (кинематическая гипотеза).

5. Все фазовые материалы линейно упруги и однородны; связь между деформациями, напряжениями и температурой в них определяется соотношениями Дюамеля – Неймана, записанными в матричной форме (2).
6. В качестве условия эквивалентности выступает равенство свободной энергии фиктивного однородного анизотропного материала свободной энергии рассматриваемого композита.

При переходе от глобальной системы координат x_1, x_2, x_3 к локальной системе

$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$ имеют место преобразования векторов (3):

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_k &= G_k \sigma_k \quad (\bar{\sigma}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)}), \quad \bar{p}_k = G_k p_k \quad (\bar{p}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} p_j^{(k)}), \\ \bar{\varepsilon}_k &= G_k \varepsilon_k \quad (\bar{\varepsilon}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)}, \quad i = \overline{1, 6}) \end{aligned} \quad (6)$$

и обратные им преобразования

$$\sigma_k = G_k^{-1} \bar{\sigma}_k, \quad p_k = G_k^{-1} \bar{p}_k, \quad \varepsilon_k = G_k^{-1} \bar{\varepsilon}_k, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (7)$$

где G_k^{-1} – матрица, обратная невырожденной 6×6 матрице $G_k = (g_{ij}^{(k)})$ с компонентами (см. табл. (21.40) в [9]):

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad g_{13}^{(k)} = l_{13}^{(k)} l_{13}^{(k)}, \quad g_{14}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{13}^{(k)}, \quad g_{15}^{(k)} = 2l_{13}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \\ g_{16}^{(k)} &= 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{21}^{(k)} = l_{21}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad g_{22}^{(k)} = l_{22}^{(k)} l_{22}^{(k)}, \quad g_{23}^{(k)} = l_{23}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{24}^{(k)} = 2l_{23}^{(k)} l_{22}^{(k)}, \\ g_{25}^{(k)} &= 2l_{23}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad g_{26}^{(k)} = 2l_{22}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad g_{31}^{(k)} = l_{31}^{(k)} l_{31}^{(k)}, \quad g_{32}^{(k)} = l_{32}^{(k)} l_{32}^{(k)}, \quad g_{33}^{(k)} = l_{33}^{(k)} l_{33}^{(k)}, \\ g_{34}^{(k)} &= 2l_{33}^{(k)} l_{32}^{(k)}, \quad g_{35}^{(k)} = 2l_{33}^{(k)} l_{31}^{(k)}, \quad g_{36}^{(k)} = 2l_{32}^{(k)} l_{31}^{(k)}, \quad g_{41}^{(k)} = l_{31}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad g_{42}^{(k)} = l_{32}^{(k)} l_{22}^{(k)}, \\ g_{43}^{(k)} &= l_{33}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{44}^{(k)} = l_{33}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{32}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{45}^{(k)} = l_{33}^{(k)} l_{21}^{(k)} + l_{31}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{46}^{(k)} = l_{31}^{(k)} l_{22}^{(k)} + \\ &+ l_{32}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad g_{51}^{(k)} = l_{31}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{52}^{(k)} = l_{32}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad g_{53}^{(k)} = l_{33}^{(k)} l_{13}^{(k)}, \quad g_{54}^{(k)} = l_{33}^{(k)} l_{12}^{(k)} + l_{32}^{(k)} l_{13}^{(k)}, \\ g_{55}^{(k)} &= l_{33}^{(k)} l_{11}^{(k)} + l_{31}^{(k)} l_{13}^{(k)}, \quad g_{56}^{(k)} = l_{31}^{(k)} l_{12}^{(k)} + l_{32}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{61}^{(k)} = l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{62}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{22}^{(k)}, \\ g_{63}^{(k)} &= l_{13}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{64}^{(k)} = l_{13}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \quad g_{65}^{(k)} = l_{13}^{(k)} l_{21}^{(k)} + l_{11}^{(k)} l_{23}^{(k)}, \\ g_{66}^{(k)} &= l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $l_{ij}^{(k)}$ – направляющие косинусы (см. таблицу и (5)); матрица G_k^{-1} совпадает с транспонированной матрицей (21.44) в [9].

В силу второго и третьего допущений и условий сопряжения полей напряжений, перемещений и температур на границах контакта волокон со связующим с учетом соотношений, аналогичных (6), получим

$$T_k = T_0 \quad (1 \leq k \leq K); \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_i^{(k)} = \bar{\sigma}_i^{(0,k)} = \sum_{j=1}^6 q_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(0)} \quad (i = \overline{2, 6}, \quad 1 \leq k \leq K); \quad (10)$$

$$\bar{p}_i^{(k)} = \bar{p}_i^{(0,k)} = \sum_{j=1}^6 q_{ij}^{(k)} p_j^{(0)} \quad (i = \overline{2, 6}, \quad 1 \leq k \leq K); \quad (11)$$

$$\bar{\varepsilon}_1^{(k)} = \bar{\varepsilon}_1^{(0,k)} = \sum_{j=1}^6 q_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(0)} \quad (1 \leq k \leq K), \quad (12)$$

где $\bar{\sigma}_i^{(0,k)}$, $\bar{p}_i^{(0,k)}$, $\bar{\varepsilon}_1^{(0,k)}$ – напряжения и деформации в связующем, определенные в локальной системе координат $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$. (Кроме того, из тех же допущений помимо равенств (9) в пределах представительного элемента с учетом закона теплопроводности Фурье тождественно выполняются и условия сопряжения по тепловым потокам на границах контакта связующего и волокон.)

Согласно четвертому допущению, усредненные поля температуры и деформаций в композиции определяются так:

$$T = \omega_0 T_0 + \sum_k \omega_k T_k; \quad (13)$$

$$\varepsilon = \omega_0 \varepsilon_0 + \sum_k \omega_k \varepsilon_k; \quad (14)$$

(Здесь соотношение (14) записано в глобальной системе координат x_i .)

Из равенства (13) с учетом (9), (1) следует

$$T = T_k = T_0 \quad (1 \leq k \leq K), \quad (15)$$

т.е. средняя температура композиции в пределах представительного элемента равна температуре каждой компоненты.

Из равенств (10), (12) с учетом (2), (11), (15) и пятого допущения вытекает

$$\bar{\varepsilon}_1^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(0)}, \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^6 \left(\bar{A}_{ij}^{(k)} \bar{\varepsilon}_j^{(k)} - \bar{A}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)} T \right) = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sum_{l=1}^6 \left(A_{jl}^{(0)} \varepsilon_l^{(0)} - A_{jl}^{(0)} \alpha_l^{(0)} T \right), \quad i = \overline{2, 6}, \quad 1 \leq k \leq K.$$

Эту систему запишем в следующей матричной форме

$$B_k \bar{\varepsilon}_k = C_k \varepsilon_0 + D_k T, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (17)$$

где ненулевые элементы 6×6 матриц $B_k = (b_{ij}^{(k)})$, $C_k = (c_{ij}^{(k)})$ и вектора $D_k = \{d_i^{(k)}\}$ согласно (16) определяются так:

$$\begin{aligned} B_{11}^{(k)} &= 1, \quad B_{1j}^{(k)} = 0 \quad (j = \overline{2, 6}), \quad B_{ij}^{(k)} = \bar{A}_{ij}^{(k)} \quad (i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}), \\ C_{1j}^{(k)} &= g_{1j}^{(k)} \quad (j = \overline{1, 6}), \quad C_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} A_{lj}^{(0)} \quad (i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}), \\ D_1^{(k)} &= 0, \quad D_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 \left(\bar{A}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)} - g_{ij}^{(k)} \sum_{l=1}^6 A_{jl}^{(0)} \alpha_l^{(0)} \right) \quad (i = \overline{2, 6}). \end{aligned} \quad (18)$$

В частном случае изотропных материалов компонент композиции в (2) и (18) нужно учесть, что ненулевые элементы матриц \bar{A}_k , A_0 и векторов $\bar{\alpha}_k$, α_0 имеют вид [9]:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ii}^{(k)} &= A_{ii}^{(k)} = 2G^{(k)} (1 - \nu^{(k)}) / (1 - 2\nu^{(k)}), \quad \bar{A}_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(k)} = 2G^{(k)} \nu^{(k)} / (1 - 2\nu^{(k)}), \\ \bar{A}_{ll}^{(k)} &= A_{ll}^{(k)} = 2G^{(k)} = E^{(k)} / (1 + \nu^{(k)}) \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad j \neq i, \quad l = 4, 5, 6), \\ \bar{\alpha}_i^{(k)} &= \alpha_i^{(k)} = \alpha^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \quad 0 \leq k \leq K), \end{aligned} \quad (19)$$

где $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$, $\alpha^{(k)}$ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного теплового расширения k -й компоненты композиции.

В силу (18) $\det B_k \neq 0$, поэтому из (17) получаем

$$\bar{\varepsilon}_k = E_k \varepsilon_0 + \mathbf{F}_k T, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (20)$$

где

$$E_k = B_k^{-1} C_k, \quad \mathbf{F}_k = B_k^{-1} \mathbf{D}_k; \quad (21)$$

B_k^{-1} – матрица, обратная B_k .

Соотношение (20) определяет деформации $\bar{\varepsilon}_k$ k -го семейства арматуры (заданные в локальной системе координат $x_i^{(k)}$) через температуру T и деформации ε_0 связующего (заданные в глобальной системе x_i).

Преобразуем равенство (14) с учетом (7), (20), тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \omega_0 \varepsilon_0 + \sum_k \omega_k G_k^{-1} \bar{\varepsilon}_k = \omega_0 \varepsilon_0 + \sum_k \omega_k G_k^{-1} (E_k \varepsilon_0 + \mathbf{F}_k T) = \\ &= \left(\omega_0 I + \sum_k \omega_k G_k^{-1} E_k \right) \varepsilon_0 + \sum_k \omega_k G_k^{-1} \mathbf{F}_k, \end{aligned} \quad (22)$$

где I – 6×6 единичная матрица. Из соотношения (22) следует

$$\varepsilon_0 = H \varepsilon - H \mathbf{f} T, \quad (23)$$

где H – 6×6 матрица, \mathbf{f} – вектор-столбец вида

$$H = \left(\omega_0 I + \sum_k \omega_k G_k^{-1} E_k \right)^{-1}, \quad \mathbf{f} = \sum_k \omega_k G_k^{-1} \mathbf{F}_k. \quad (24)$$

Соотношение (23) определяет деформации в связующем ε_0 через усредненные деформации композиции ε и температуру T .

Согласно первому и шестому допущениям имеем

$$F = \omega_0 F_0 + \sum_k \omega_k F_k.$$

Из этого соотношения с учетом (4), (15) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^* \mathbf{p} + \varepsilon^* A \varepsilon / 2 - \varepsilon^* A \alpha T - \zeta T - c^\varepsilon T^2 / (2\theta) &= \\ = \omega_0 \left[\varepsilon_0^* \mathbf{p}_0 + \varepsilon_0^* A_0 \varepsilon_0 / 2 - \varepsilon_0^* A_0 \alpha_0 T - c_0^\varepsilon T^2 / (2\theta) \right] &+ \\ + \sum_k \omega_k \left[\bar{\varepsilon}_k^* \bar{\mathbf{p}}_k + \bar{\varepsilon}_k^* \bar{A}_k \bar{\varepsilon}_k / 2 - \bar{\varepsilon}_k^* \bar{A}_k \bar{\alpha}_k T - c_k^\varepsilon T^2 / (2\theta) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Выразим в (25) за счет (20) деформации $\bar{\varepsilon}_k$ через ε_0 , а затем, используя (23), исключим из правой части этого равенства вектор ε_0 , тогда после элементарных преобразований с учетом симметрии матриц \bar{A}_k , A_0 будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon^* \mathbf{p} + \varepsilon^* A \varepsilon / 2 - \varepsilon^* A \alpha T - \zeta T - c^\varepsilon T^2 / (2\theta) &= \omega_0 \left\{ \varepsilon^* H^* \mathbf{p}_0 - \mathbf{f}^* H^* \mathbf{p}_0 T + \varepsilon^* H^* A_0 H \varepsilon / 2 - \right. \\ - \varepsilon^* H^* A_0 (\alpha_0 + H \mathbf{f}) T &+ \left[\mathbf{f}^* H^* A_0 (2\alpha_0 + H \mathbf{f}) - c_0^\varepsilon / \theta \right] T^2 / 2 \left. \right\} + \sum_k \omega_k \left\{ \varepsilon^* H^* E_k^* \bar{\mathbf{p}}_k + \right. \\ + \left(\mathbf{F}_k^* - \mathbf{f}^* H^* E_k^* \right) \bar{\mathbf{p}}_k T &+ \varepsilon^* H^* E_k^* \bar{A}_k E_k H \varepsilon / 2 - \varepsilon^* H^* E_k^* \bar{A}_k (\bar{\alpha}_k - \mathbf{F}_k + E_k H \mathbf{f}) T + \\ + \left[\mathbf{f}^* H^* E_k^* \bar{A}_k (E_k H \mathbf{f} - 2\mathbf{F}_k + 2\bar{\alpha}_k) - \mathbf{F}_k^* \bar{A}_k (2\bar{\alpha}_k - \mathbf{F}_k) - c_k^\varepsilon / \theta \right] &T^2 / 2 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как равенство в (26) должно выполняться при любых ε , T , то из него вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
A &= H^* \left(\omega_0 A_0 + \sum_k \omega_k E_k^* \bar{A}_k E_k \right) H, \\
\mathbf{p} &= H^* \left(\omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_k \omega_k E_k^* \bar{\mathbf{p}}_k \right), \\
c^\varepsilon / \theta &= \omega_0 \left[c_0^\varepsilon / \theta - \mathbf{f}^* H^* A_0 (2\alpha_0 + H\mathbf{f}) \right] + \sum_k \omega_k \left[c_k^\varepsilon / \theta - \mathbf{f}^* H^* E_k^* \bar{A}_k \times \right. \\
&\quad \left. \times (E_k H\mathbf{f} - 2\mathbf{F}_k + 2\bar{\alpha}_k) + \mathbf{F}_k^* \bar{A}_k (2\bar{\alpha}_k - \mathbf{F}_k) \right], \\
\zeta &= \omega_0 \mathbf{f}^* H^* \mathbf{p}_0 - \sum_k \omega_k \left(\mathbf{F}_k^* - \mathbf{f}^* H^* E_k^* \right) \bar{\mathbf{p}}_k; \\
A\alpha &= H^* \left[\omega_0 A_0 (\alpha_0 + H\mathbf{f}) + \sum_k \omega_k E_k^* \bar{A}_k (\bar{\alpha}_k - \mathbf{F}_k + E_k H\mathbf{f}) \right], \tag{28}
\end{aligned}$$

где нужно учесть выражения для матриц и векторов (21), (24), (18), (8).

Из равенства (28) следует

$$\alpha = A^{-1} H^* \left[\omega_0 A_0 (\alpha_0 + H\mathbf{f}) + \sum_k \omega_k E_k^* \bar{A}_k (\bar{\alpha}_k - \mathbf{F}_k + E_k H\mathbf{f}) \right], \tag{29}$$

где $A^{-1} = (a_{ij})$ – матрица, обратная A (см. (27)), – матрица эффективных коэффициентов податливости композиции a_{ij} .

Первое равенство (27) определяет в матричной форме эффективные механические жесткости рассматриваемой композиции; соотношение (28) – эффективные температурные жесткости; равенство (29) – эффективные коэффициенты линейного теплового расширения; второе соотношение (27) – усредненное начальное напряженное состояние в композиции; третье равенство (27) – эффективную теплоемкость композиции; четвертое соотношение (27) – эффективную постоянную ζ .

Помимо первого соотношения (2) на основании первого равенства (4) дополнительно получим [11]

$$S = -\partial F / \partial T = \varepsilon^* A\alpha + \zeta + c^\varepsilon T / \theta,$$

где S – удельная энтропия рассматриваемой композиции. Следовательно, постоянная ζ определяет удельную энтропию композита в естественном состоянии ($\varepsilon = 0$, $T = 0$), вызванную наличием начального напряженного состояния во всех компонентах композиции.

З а м е ч а н и е 1. В настоящем исследовании метод определения эффективных характеристик рассматриваемого композита назван кинематическим, так как в качестве одной из гипотез (четвертой) использовались кинематические равенства (14), связывающие между собой средние деформации композиции с деформациями фазовых материалов. При этом никаких допущений о связи средних напряжений σ в композите с напряжениями σ_0 , $\bar{\sigma}_k$ в фазовых материалах не делалось. Определить эффективные характеристики рассматриваемого композита можно было бы, введя соответствующую гипотезу, позволяющую связать σ с σ_0 , $\bar{\sigma}_k$, и не делая никаких допущений о связи ε с ε_0 , $\bar{\varepsilon}_k$ ($1 \leq k \leq K$). Такой подход целесообразно назвать статическим методом определения эффективных характеристик пространственно армированного композита. Изложение этого метода выходит за рамки настоящего исследования в силу ограниченности объема статьи.

З а м е ч а н и е 2. Важной особенностью предложенной модели рассматриваемого композита является возможность определения напряжений $\sigma_0, \bar{\sigma}_k$ и деформаций $\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_k$ в компонентах композиции по известным средним деформациям ε . Действительно, пусть известны деформации ε и температура T , тогда из (23), (20), (15) можно определить $\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_k, T_0, T_k$, а из второго и третьего соотношений (2) можно получить напряжения $\sigma_0, \bar{\sigma}_k$. Знание напряжений $\sigma_0, \bar{\sigma}_k$ и деформаций $\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}_k$ ($1 \leq k \leq K$) имеет принципиальное значение при использовании в дальнейшем структурных теорий прочности, и кроме того, для изотропных материалов компонент композиции позволяет построить структурные формулы для эффективных характеристик композита при нелинейно-упругом или упругопластическом деформировании материалов компонент композиции, так как реальные материалы часто имеют нелинейные зависимости $\sigma \sim \varepsilon$ [12]. Для этого можно использовать деформационную теорию пластичности и метод переменных параметров упругости [12], причем на каждой итерации этого метода приближения для эффективных характеристик исследуемого композита можно определить по изложенной выше схеме, заменив лишь $G^{(k)}, \nu^{(k)}$ в (19) на значения (при $T = 0, \bar{p}_k = 0, p_0 = 0$)

$$\tilde{G}^{(k)} = \frac{\sigma_i^{(k)}}{3\varepsilon_i^{(k)}}, \quad \tilde{\nu}^{(k)} = \frac{1/2 - (1 - 2\nu^{(k)})\sigma_i^{(k)} / (3E^{(k)}\varepsilon_i^{(k)})}{1 + (1 - 2\nu^{(k)})\sigma_i^{(k)} / (3E^{(k)}\varepsilon_i^{(k)})}, \quad 0 \leq k \leq K,$$

где $\sigma_i^{(k)}, \varepsilon_i^{(k)}$ – интенсивности напряжений и деформаций в k -й компоненте композиции, известные из решения на предыдущей итерации (на первой итерации все материалы предполагаются линейно-упругими с характеристиками $E^{(k)}, \nu^{(k)}, G^{(k)}$).

З а м е ч а н и е 3. Полученные в настоящем исследовании соотношения (27)–(29) могут быть использованы для определения эффективных характеристик композитов, армированных волокнами с покрытиями (типа борных [8]), а также при учете переходных зон [10], возникающих в силу химического взаимодействия волокон со связующим на границах их контактов (зоны интерметаллидов в металлокомпозитах и т. п.) или частичного разрушения компонент композиции на этих границах. Для этого указанные покрытия или зоны нужно рассматривать как дополнительные фиктивные семейства арматуры, удельное объемное содержание и физико-механические характеристики которых известны.

Заключение

Предложенная структурная модель позволяет определить все эффективные термоупругие характеристики пространственно армированного в произвольных направлениях композита при общей анизотропии материалов компонент композиции. Кроме того, в рамках этой модели можно определить напряженное состояние во все компонентах композиции, что является важным обстоятельством для использования в последующем структурных теорий прочности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-90402-Укр_а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 72).

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Эффективные физико-механические характеристики композитов, однонаправлено армированных моноотропными волокнами. Сообщение 1: модель армированной среды // Известия вузов. Строительство. – 2006. – № 5. – С. 16–24.
2. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 1. – С. 3–32.
3. Пространственно-армированные композиционные материалы: справочник / Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
4. Тарнопольский Ю.М., Поляков В.А., Жигун И.Г. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик // Механика полимеров. – 1973. – № 5. – С. 853–860.
5. Крегер А.Ф., Мелбардис Ю.Г. Определение деформируемости пространственно армированных композитов методом усреднения жесткостей // Механика полимеров. – 1978. – № 1. – С. 3–8.
6. Крегер А.Ф., Тетерс Г.А. Применение методов усреднения для определения вязкоупругих свойств пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1979. – № 4. – С. 617–624.
7. Крегерс А.Ф., Тетерс Г.А. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1982. – № 1. – С. 14–22.
8. Композиционные материалы: справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
9. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Соппротивление жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1972. – 500 с.
10. Каримбаев Т.Д., Мыктыбеков Б.М., Панова И.М. Математические модели нелинейного деформирования однонаправленно-армированных композиционных материалов. – М.: Труды ЦИАМ № 1334, 2005. – 160 с.
11. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
12. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ И НЕЙТРОННОМ ОБЛУЧЕНИИ

Клус С.А., Куликов И.С., Ширвель П.И.

Белорусский национальный технический университет, Минск

A cylindrical shell undergoing irregular temperature and radiation has been considered. The numerical solution has been proposed to solve the problem for fuel cladding under creep, thermal and radiation strains. A graphic distribution of deflections and stresses of a short cylindrical shell have been received.

Известно, что в ядерной энергетике широко распространены цилиндрические и сферические тепловыделяющие элементы (ТВЭЛы), которые представляют собой топливный керамический слой соответствующей геометрии, заключенный в тонкостенную металлическую оболочку, препятствующую утечке продуктов деления и разрушению элемента. В центре элемента имеется полость, где накапливается газообразные продукты деления, что приводит к возрастанию давления

внутри. Таким образом, оболочка нагружена как внешним давлением теплоносителя, так и давлением с внутренней полости [1]. ТВЭЛ работает при высокой температуре, поэтому явления упругого деформирования, пластичности, радиационной и тепловой ползучести, газового распухания топлива могут привести с течением времени к значительной суммарной деформации металлической оболочки и ее разрушению.

Отметим, что оболочка ТВЭЛ является наиболее ответственной конструкционной деталью активной зоны реактора, находящейся в сложных тепловых, механических, радиационных и химических условиях эксплуатации (коррозия от теплоносителя, распухание от пузырьков газообразных продуктов деления, радиационная и тепловая ползучесть, радиационное упрочнение, гелиевое охрупчивание). Главным требованием, предъявляемым к оболочкам ТВЭЛов, является длительное сохранение герметичности. Конструкция оболочки и ее толщина должны обеспечивать устойчивость под действием внешнего давления теплоносителя, прочность при термических и изгибных напряжениях, напряжениях от давления ГПД и действия распухающего

топливного сердечника, приходящего в контакт с оболочкой. Таким образом, важно знать значения напряжений, под действием которых оболочка еще выполняет функцию разделения топлива и теплоносителя (считается, что ТВЭЛ выходит из строя, когда оболочка разгерметизируется).

Изучение характера и степени возможных повреждений оболочек составляет одну из самых сложных проблем, учитывая, что до перегрузки ТВЭЛы должны работать до 9000 – 12 000 часов. Одним из способов решения является исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки с целью проверки надежной работоспособности конструкции ТВЭЛ. Данные элементы работают фак-

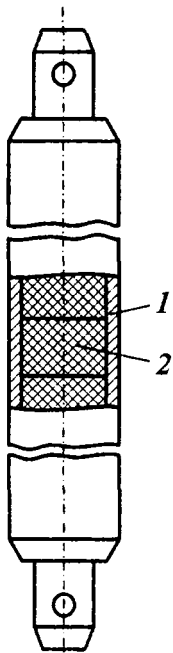


Рис. 1. Схема ТВЭЛ:
1 — оболочка; 2 — топливо
(UO_2)

тически в экстремальных условиях: подвержены значительным механическим, тепловым и радиационным нагрузкам. Заметим, что степень необратимых изменений, происходящих в оболочках под влиянием перечисленных факторов, во многом зависит от интенсивности и длительности нейтронного облучения, температуры облучения и характера ее изменения в процессе работы реактора, от исходной структуры и свойств материалов оболочек, а также от свойств теплоносителя и его гидравлических характеристик.

Одно из важных следствий эксплуатации оболочки твэла – возникновение значительных внутренних напряжений. Их появление связано с действием внешних статических, динамических и вибрационных нагрузок, со структурными изменениями под облучением, с распуханием оболочки, с неодинаковым температурным уровнем отдельных участков оболочки (вследствие неравномерности энерговыделения по объему), а также с температурными градиентами по сечению оболочки (возникающими благодаря наличию тепловых потоков от топлива к теплоносителю). Таким образом, в оболочках твэлов в процессе работы ядерного реактора могут возникать три типа напряжений [2]: вызываемые давлением теплоносителя, а также давлением распухающего топлива, находящегося в контакте с оболочкой; обусловленные стационарными и нестационарными температурными полями; от неравномерного распухания материала оболочки.

Рассмотрим модель НДС участка оболочки твэла ядерного реактора в пределах топливной таблетки (рис. 2), находящейся в неравномерном температурном поле под действием внешнего давления теплоносителя в условиях нейтронного облучения. Предполагается, что реактор вышел на полную мощность и начальное

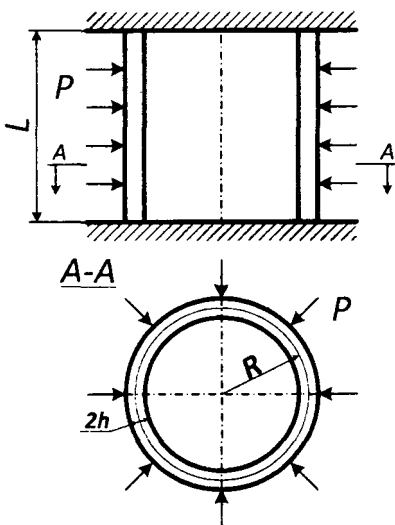


Рис. 2. Модель участка оболочки твэла

распределение температуры в оболочке к моменту выхода реактора на заданную мощность известно. Распределение температуры в оболочке считается стационарным во время всей кампании реактора. Моделирование будем производить при следующих условиях: температурное поле предполагается независимым от напряженного состояния оболочки; влияние изменений объема, вызванных напряжениями, на тепловое поле считается незначительным и в задаче не учитывается. При этом предполагаем, что теплофизические и механические характеристики материала остаются неизменными в интервале расчетных температур. Это относится и к прочностным свойствам материала. Принимаем во внимание тот факт, что облучение обычно мало влияет на значение упругих постоянных [3] и поэтому модуль

упругости и коэффициент Пуассона считаются зависящими только от температуры, причем $E(T)$ и $\nu(T)$ полагаются известными. В реальности для данного случая модуль Юнга, коэффициент Пуассона, а также коэффициент теплового расширения не зависят от температуры, поскольку в процессе работы реактора на постоянной мощности температура твэла обычно мало меняется, и поэтому можно использовать средние значения указанных характеристик (за исключением переходных процессов, например, выхода реактора на мощность или расхолаживания).

Для компонент деформации и изменений кривизны срединной поверхности оболочки и перемещений ее срединного слоя имеют место следующие приближенные соотношения:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \frac{u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\omega}{R}; \varepsilon_{x\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \chi_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} - u_\varphi \right); \chi_{x\varphi} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} - u_\varphi \right), \quad (2)$$

где u_x, u_φ – перемещения в осевом и окружном направлении соответственно, ω – прогиб оболочки.

Для цилиндрической оболочки, находящейся во внутривапорных условиях, компоненты деформаций и напряжений в общем виде связаны между собой соотношениями:

$$\varepsilon^{(z)}_{xx} = \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}}{E} + \varepsilon^T_{xx} + \frac{1}{3}\varepsilon^S_{xx}; \varepsilon^{(z)}_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{xx}}{E} + \varepsilon^T_{\varphi\varphi} + \frac{1}{3}\varepsilon^S_{\varphi\varphi}, \quad (3)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N_{xx}}{h} + \frac{12M_{xx}x}{h^3}; \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{N_{\varphi\varphi}}{h} + \frac{12M_{\varphi\varphi}x}{h^3}, \quad (4)$$

$$N_{xx} = D_N (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi} - (1+\nu)(\varepsilon^T_{xx} + \varepsilon^S_{xx})), \quad (5)$$

$$N_{\varphi\varphi} = D_N (\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{\varphi\varphi} - (1+\nu)(\varepsilon^T_{\varphi\varphi} + \varepsilon^S_{\varphi\varphi})),$$

$$M_{xx} = D_M (\chi_{xx} + \nu\chi_{\varphi\varphi} - (1+\nu)(\chi^T_{xx} + \chi^S_{xx})), \quad (6)$$

$$M_{\varphi\varphi} = D_M (\nu\chi_{xx} + \chi_{\varphi\varphi} - (1+\nu)(\chi^T_{\varphi\varphi} + \chi^S_{\varphi\varphi})).$$

Здесь ε_{ij}^T – объемные термические деформации; ε_{ij}^S – объемные деформации радиационного распухания. Заметим, что в постановке рассматриваемой задачи присутствуют радиационное распухание оболочки. В общем случае оно представляет собой изменение объема материала оболочки под действием потока быстрых нейтронов, причем значительно меняет картину распределения деформаций и напряжений [4]. Термическое воздействие, в данной задаче, представляет собой неравномерный стационарный нагрев тонкостенной цилиндрической оболочки. Ввиду одновременного действия температуры и облучения происходят неравномерные объемные изменения оболочки (термическое расширение и радиационное

распухание). Эти неравномерные объемные изменения являются источником дополнительных напряжений, которые наряду с напряжениями, вызванными механическим воздействием, оказывают влияние на поведение конструкции. Вопрос состоит в том, насколько сильно они могут повлиять на прочностные качества исследуемой оболочки.

Спроектируем силы (рис. 3) на оси x и z и найдём моменты сил относительно оси y . Положим, что внешние силы

действуют только лишь по нормали к поверхности оболочки. Из симметрии можно заключить, что сдвигающие силы ($N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$), поперечные силы (Q_φ) и крутящие моменты ($M_{x\varphi} = M_{\varphi x}$) равны нулю. С учетом вышесказанного система уравнений равновесия примет следующий вид:

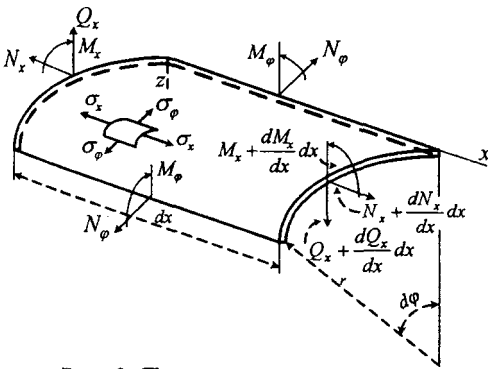


Рис. 3. Проекция сил и моментов в тонкостенной цилиндрической оболочке

$$\begin{cases} \frac{dN_x}{dx} r dx d\varphi = 0, \\ \frac{dQ_x}{dx} r dx d\varphi + N_\varphi dx d\varphi + q r dx d\varphi = 0, \\ \frac{dM_x}{dx} r dx d\varphi - Q_x r dx d\varphi = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Отсюда получаем исходное уравнение равновесия, записанное через приложенные нагрузки и образуемые моменты:

$$\begin{cases} \frac{dN_x}{dx} = 0, \\ \frac{dQ_x}{dx} + \frac{N_\varphi}{r} + q = 0, \\ \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Влиянием сил N_x пренебрегаем ($N_x = const = 0$). Тогда уравнения (8) примут вид:

$$\begin{cases} \frac{dQ_x}{dx} + \frac{N_\varphi}{r} = -q, \\ \frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Продифференцируем второе уравнение системы уравнений (9) по x :

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{dQ_x}{dx}. \quad (10)$$

Подставим уравнение (10) в первое уравнение системы (9):

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{N_\varphi}{r} = -q. \quad (11)$$

Запишем геометрические уравнения (соотношения Коши). Из симметрии следует, что смещение в окружном направлении обращается в ноль, поэтому в расчетах для связи тензора деформаций и вектора перемещений учитываются только u и w .

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\omega}{r}, \quad \chi_{xx} = -\frac{d^2 \omega}{dx^2}. \quad (12)$$

Выведем физические уравнения. Учитывая, что нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, пренебрежимо малы по сравнению с остальными напряжениями и при расчёте не учитываются, запишем систему физических уравнений (3) в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx} - \nu \sigma_{\varphi\varphi}}{E} + B(x), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \nu \sigma_{xx}}{E} + B(x), \end{cases} \quad (13)$$

где $B(x)$ – функция учета неупругих объемных деформаций в оболочке:

$$B(x) = \alpha \Delta T(x) + \frac{1}{3} S[T(x), \varphi t]. \quad (14)$$

Выразим из системы уравнений (13) главные напряжения:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{xx(z)} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi(z)} - B(x)(1+\nu)] \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{\varphi\varphi(z)} + \nu\varepsilon_{xx(z)} - B(x)(1+\nu)] \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\varepsilon_{xx(z)} = \varepsilon_{xx} + z\chi_{xx}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi(z)} = \varepsilon_{\varphi\varphi} + z\chi_{\varphi\varphi}. \quad (16)$$

Выражение (15) устанавливает зависимость напряжений от упругих и терморадиационных деформаций.

Воспользуемся следующими формулами для определения нормальных сил и изгибающего момента:

$$N_{xx} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz, \quad N_{\varphi\varphi} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} dz, \quad M_{xx} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \cdot z \cdot dz. \quad (17)$$

Применим выражения (17) к системе (15), учитывая (16). Проведя интегрирование, получим следующую систему физических уравнений:

$$\begin{cases} N_{xx} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi} - B(x)(1+\nu)] \\ N_{\varphi\varphi} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{xx} - B(x)(1+\nu)] \\ M_{xx} = D[\chi_{xx} + \nu\chi_{\varphi\varphi}] \end{cases} \quad (18)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость оболочки

После подстановки в систему (19) соотношений Коши в виде (12) имеем:

$$\frac{du}{dx} = -\nu \frac{\omega}{r} + B(x)(1+\nu). \quad (19)$$

Подставляя (19) во второе уравнение системы (15), получаем $N_{\varphi\varphi}$. В конечном итоге получаем следующие выражения для усилий и моментов:

$$N_{\varphi\varphi} = Eh \left[\frac{\omega}{r} - B(x) \right], \quad (20)$$

$$M_{xx} = -D \frac{d^2\omega}{dx^2}. \quad (21)$$

Подставляя (20) и (21) в (11), получаем конечное уравнение для прогиба рассматриваемой оболочки:

$$D \frac{d^4\omega}{dx^4} - \frac{Eh}{r^2} \omega = q - \frac{Eh}{r} [B(x)] \quad (22)$$

Последнее выражение представляет собой уравнение равновесия для короткой цилиндрической оболочки, записанное через ее прогиб в условиях нейтронного облучения и термосилового воздействия.

Пример расчета

В качестве конкретного примера будем рассматривать напряженно-деформированное состояние участка оболочки твэла (в пределах топливной таблетки), изготовленной из холоднодеформированной аустенитовой стали

ОХ16Н15МЗБ (316L – зарубежный аналог). Механические характеристики материала исследуемой оболочки представлены в табл. 1. Таким образом, имеем, что оболочка внутренним радиусом $R_1=0,003$ м и внешним радиусом $R_2=0,0032$ м находится под действием: внутренних $P_B=7,5$ МПа и внешних $P_H=0,1$ МПа нагрузок в условиях нелинейных температурных и радиационных полей.

Таблица 1

Исходные данные для моделирования оболочки конечной длины твэла

Величина	Значение
P – внешнее давление со стороны теплоносителя	0,1 МПа
E – модуль упругости материала оболочки	$1,5 \cdot 10^5$ МПа
ν – коэффициент Пуассона материала оболочки	0,3
λ – коэффициент теплопроводности материала оболочки	18 Вт/(м·К)
q_v – тепловыделение в единице объема материала оболочки	$2,20 \cdot 10^9$ Вт/м ³
α – коэффициент линейного расширения материала оболочки	$18,3 \cdot 10^{-6}$ град ⁻¹
ϕ – плотность нейтронного потока	$2,81 \cdot 10^{19}$ нейтрон/(см ² ·ч)

Функция радиационного распухания $S(T(x), \phi t)$, зависящая от температуры, времени и заданного нейтронного потока (флюенса нейтронов), для стали ОХ16М15НЗБ имеет вид [4]:

$$S(T(x), \phi t) = 4,9 \cdot 10^{-51} (\phi t)^{1,71} \cdot 10^{\frac{15490}{T(x)} + \frac{598 \cdot 10^4}{(T(x))^2}}. \quad (23)$$

Функция распределения температуры $T(x)$ задается интерполяцией значений экспериментального распределения температуры по поверхности оболочки твэла (табл. 2) для короткого участка оболочки длиной $L=10$ мм.

Таблица 2

Значения распределения температуры вдоль длины оболочки твэла

T, K	x_b, M										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
T_a	518	564	639	729	800	847	874	888	893	889	875
T_b	490	525	591	678	748	795	824	843	855	859	855

Отметим, что большинство физических процессов в активной зоне ядерного реактора описывается нелинейными уравнениями. Аналитическое решение подобных уравнений известно лишь для единичных случаев. Поэтому решение нелинейных задач сводится к использованию численных методов [5]. В качестве граничных условий задаем жесткое закрепление, где исследуемый слой оболочки зажат между двумя абсолютно жесткими поверхностями и благодаря взаимодействию соседних слоев принудительно обеспечивается условие неизменности толщины оболочки. Такие граничные условия в математической интерпретации имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega &= 0 \text{ при } x = 0, L, \\ \frac{d\omega}{dx} &= 0 \text{ при } x = 0, L. \end{aligned} \quad (24)$$

Дифференциальное уравнение (22) с граничными условиями (24) представляет собой краевую задачу. Используя известные методы решения краевых задач

[6], проводим модельный расчет задачи в программном пакете MathCAD 14.0. Отметим, что на первых этапах расчета были получены значения распределения прогибов по длине оболочки (рис. 4) для простейшего случая (упругая механическая задача без учета терморadiационного воздействия), которые необходимо сравнить с другими решениями для аналогичной задачи.

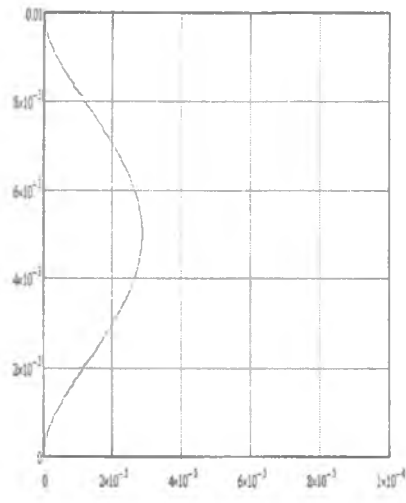


Рис. 4. Распределение прогибов по длине оболочки

Для проверки правильности и корректности составленного алгоритма программы (верификация программы), сравним результаты, полученные для термоупругой задачи (учитывается действие только внешнего давления теплоносителя), при ее реализации в пакете MathCAD 14.0 с результатами аналогичной задачи, смоделированной в инженерном программном комплексе FEM ANSYS.

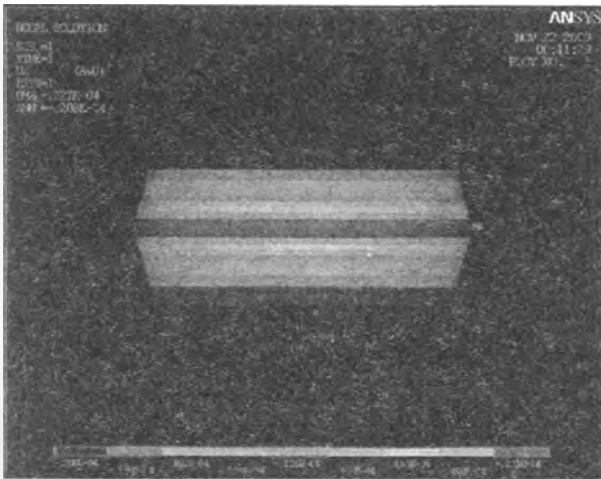


Рис. 5. Распределение прогибов в цилиндрической оболочке

В результате сравнения можно заключить, что значения прогибов по длине оболочки, полученные в расчетном модуле MathCAD (рис. 4) совпадают с прогибами, полученными средствами CAE в пакете ANSYS (рис. 5). Что, в свою очередь, говорит о правильности составленного алгоритма и выбора численного метода решения, который соответственно может применяться и для решения поставленной квазистатической терморadiационноупругой задачи.

Результаты, полученные по средствам компьютерной программы, реализованной в пакете MathCAD 14.0 для механического анализа НДС оболочки с учётом внешнего давления, температурного расширения и радиационного распухания для различных временных интервалов нагружения, представлены на рис. 6, 7.

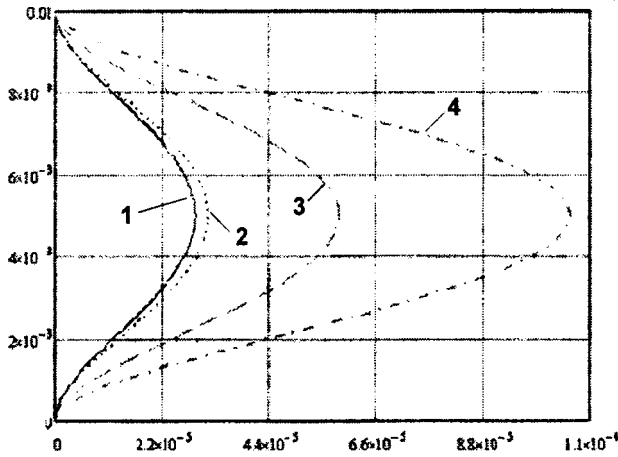


Рис. 6. Распределение прогибов по длине оболочки: 1 – при $t=0$ ч, 2 – при $t=1000$ ч, 3 – при $t=4000$ ч, 4 – при $t=7000$ ч

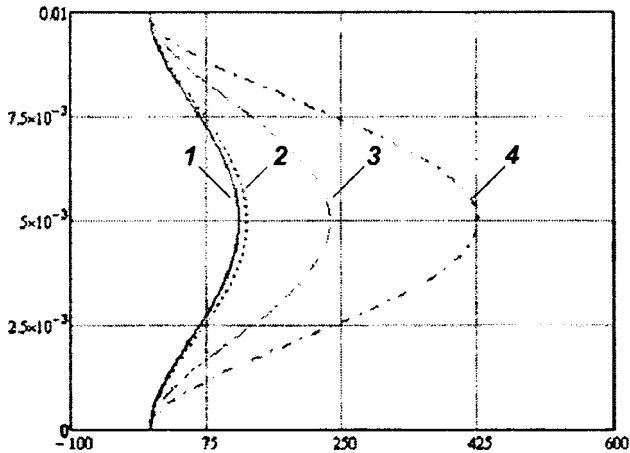


Рис. 7. Распределение эквивалентных напряжений по длине оболочки: 1 – при $t=0$ ч, 2 – при $t=1000$ ч, 3 – при $t=4000$ ч, 4 – при $t=7000$ ч

Из полученных графических зависимостей можно заключить, что с увеличением срока эксплуатации оболочки твэла значительно увеличиваются значения прогибов и напряжений. Так значения прогибов оболочки после 7000 ч эксплуатации претерпели изменения (в сравнении с $t=0$ ч, где влияние радиационного распухания (23) не учитывается), увеличив свое значение в пять раз (см. рис. 6), а значения напряжений, в свою очередь, увеличились на 300 МПа (рис. 7). Такие большие изменения обусловлены влиянием фактора радиационного распухания, которое со временем становится весьма существенно (достигает 15 %), что необходимо учитывать, в первую очередь, при проектировании конструкций, для долговременной работы (7000–10 000 ч) во внутриреакторных условиях.

Вывод

- Рассмотрены вопросы расчета тонкостенной оболочки тепловыделяющего элемента ядерного реактора АЭС.
- Дана методика расчета напряженно-деформированного состояния.
- Получены разрешающие выражения в условиях нейтронного облучения и термосилового воздействия.
- Разработана механико-математическая модель и алгоритм нахождения основных характеристик НДС, реализована компьютерная программа нахождения

решения поставленной терморadiационной квазистатической задачи в пакете MathCAD 14.0.

- Приведены результаты модельных расчётов.
- Построены графические зависимости прогибов и напряжений по длине оболочки.
- Проведен сравнительный анализ полученных результатов в программной среде ANSYS.

Благодарности

- *Работа выполнена при поддержке гранта БРФФИ № T09M-090.*
- *Авторы работы выражают благодарность сотрудникам ГНУ «ОИЭЯИ-Сосны» НАН Беларуси Левчуку А.В. и Глембоцкому А.В. за помощь в обработке полученных результатов.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Займовский, А.С. Тепловыделяющие элементы атомного реактора / А.С. Займовский, В.В. Калашников, И.С. Головнин. – М.: Атомиздат, 1979. – 517 с.
2. Фрост Б. Твэлы ядерных реакторов: пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 248 с.
3. Куликов, И.С. Прочность элементов конструкций при облучении / И.С. Куликов, В.Б. Нестеренко, Б.Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1990. – 144 с.
4. Куликов, И.С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов/И.С.Куликов, Б.Е. Тверковкин. – Минск: Наука и техника, 1984. – 104 с.
5. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. СПб.: Физматлит, 2002. – 630 с.
6. Рихтмайер, Р.Д. Разностные методы решения краевых задач / Р.Д. Рихтмайер, К. Мортон. – М.: Мир, 1972. – 418 с.

ИЗГИБ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОГО НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

Старовойтов Э.И., Поддубный А.А.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

We consider the deformation of an elastic three-layer rod partially supported on elastic foundation of Winkler. To describe the kinematics of asymmetric in thickness of package accepted hypothesis rod broken normal. A system of equilibrium equations and its general analytical solution in displacements. The numerical analysis of solutions.

Введение

Композиционные, в том числе слоистые элементы конструкций широко используются в транспортном машиностроении: в качестве корпусных элементов вагонов, авиационных аппаратов, космических объектов, строительных панелей, и т.д. В связи с этим актуальной является проблема их расчета при различных внешних воздействиях и внутренней конфигурации. Деформирование трехслойных элементов конструкций не связанных с упругим основанием исследовано в [1]. Изгиб трехслойного стержня полностью опертого на упругое основание рассмотрен в работах [2, 3]. Здесь исследован изгиб локально распределенной нагрузкой трехслойного стержня, *частично* опертого на упругое основание.

Постановка задачи

Рассматривается несимметричный по толщине упругий трехслойный стержень с жестким наполнителем (рисунок 1). Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя. Для описания кинематики пакета используется *гипотеза «ломаной» нормали*: в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Деформации считаются малыми. На внешний слой 1 стержня действует локально распределенная поперечная нагрузка постоянной интенсивности

$$q(x) = q_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)). \quad (1)$$

Частично стержень опирается на упругое основание Винклера, т. е. реакция

$$q_r = -kwH(x_0 - x), \quad (2)$$

где k – жесткости упругого основания; $w(x)$ – прогиб стержня; $H_0(x_0)$ – функция Хевисайда.

В силу принятых гипотез прогиб во всех точках поперечного сечения стержня одинаков. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно сдвигу слоев. Через $u(x)$ обозначено продольное перемещение срединной плоскости наполнителя, h_k – толщина k -го слоя ($k = 1, 2, 3$), при этом толщина наполнителя $h_3 = 2c$.

Введенные геометрические гипотезы позволяют выразить продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ через три искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$ и $w(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,x} \quad (c \leq z \leq c+h_1), \quad u^{(3)} = u + z\psi - zw_{,x} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,x} \quad (-c-h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (3)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; z – координата рассматриваемого волокна.

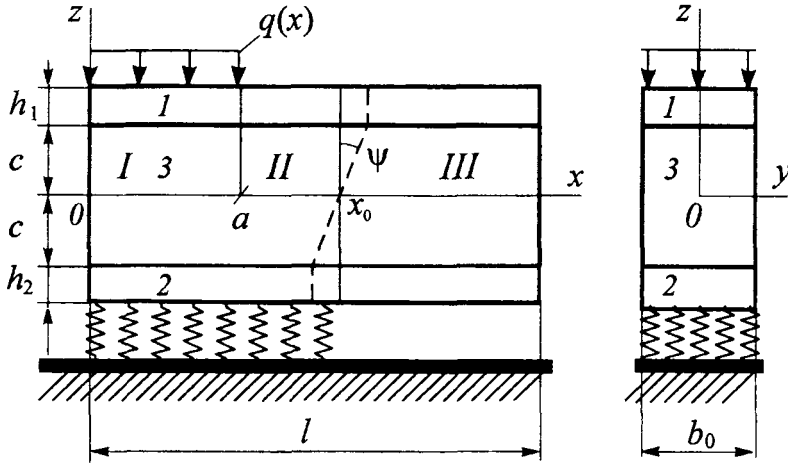


Рис. 1. Расчетная схема трехслойного стержня

В слоях стержня вводятся внутренние силы и моменты:

$$N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \quad (4)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений, b_0 – ширина поперечного сечения стержня.

Уравнения равновесия трехслойного стержня в усилиях и силовые граничные условия следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (5)$$

где δA и δW – вариации работ внешних сил и внутренних напряжений

$$\begin{aligned} \delta A &= \iint_S (q + q_r) \delta w dS = b_0 \int_0^l (q + q_r) \delta w dx, \\ \delta W &= \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_x^{(k)} \delta \epsilon_x^{(k)} + 2\sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3}) dz dS = \\ &= b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \epsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} dz \right] dx. \end{aligned}$$

В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия и граничные условия рассматриваемого трехслойного стержня в усилиях.

$$\begin{cases} N_{,x} + b_0 p = 0, \\ H_{,x} - Q = 0, \\ M_{,xx} + b_0 (q + q_R H(x_1 - x)) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

При этом должны выполняться следующие силовые граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad N = N_0, \quad M = M_0, \quad M_{,x} = Q_0, \quad H = 0, \\ x = l: \quad N = N_l, \quad M = M_l, \quad M_{,x} = Q_l, \quad H = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя соотношения (3), (4) выразим внутренние усилия и моменты через искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$:

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= b_0 K_1^+ \left[h_1 (u_{,x} + c\psi_{,x}) - (c + \frac{1}{2} h_1) h_1 w_{,xx} \right], \\ N^{(2)} &= b_0 K_2^+ \left[h_2 (u_{,x} - c\psi_{,x}) + (c + \frac{1}{2} h_2) h_2 w_{,xx} \right], \\ N^{(3)} &= 2b_0 K_3^+ c u_{,x}, \\ M^{(1)} &= b_0 K_1^+ \left[h_1 (c + \frac{1}{2} h_1) (u_{,x} + c\psi_{,x}) - (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2) h_1 w_{,xx} \right], \\ M^{(2)} &= b_0 K_2^+ \left[-h_2 (c + \frac{1}{2} h_2) (u_{,x} - c\psi_{,x}) - (c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2) h_2 w_{,xx} \right], \\ M^{(3)} &= \frac{2}{3} b_0 K_3^+ c^3 (\psi_{,x} - w_{,xx}), \quad Q^{(3)} = 2b_0 G_3 c \psi, \\ K_k^+ &\equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \end{aligned}$$

где G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации k -го слоя.

С помощью соотношений (3), (4) внутренние усилия и моменты можно выразить через искомые три функции $u(x)$, $\psi(x)$, $w(x)$. Подставив их в силовые уравнения равновесия, получим систему дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемого трехслойного стержня в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} = 0, \quad a_6 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \psi = 0, \\ a_7 u_{,xxx} + a_3 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} - kwH(x_1 - x) = -qH(a - x), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + 2K_3^+ c, \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + \frac{2}{3} K_3^+ c \right], \\ a_3 &= c \left[K_1^+ h_1 (c + \frac{1}{2} h_1) + K_2^+ h_{20} (c + \frac{1}{2} h_{20}) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right], \\ a_4 &= K_1^+ h_1 (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2) + K_2^+ h_{20} (c^2 + ch_{20} + \frac{1}{3} h_{20}^2) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3, \\ a_5 &= 2G_3 c, \quad a_6 = c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_{20} \right], \quad a_7 = K_1^+ h_1 (c + \frac{1}{2} h_1) - K_2^+ h_{20} (c + \frac{1}{2} h_{20}). \end{aligned}$$

Система уравнений (8) имеет разрывные коэффициенты, обусловленные наличием функций Хевисайда в реакции основания (2) и нагрузке (1).

Решение краевой задачи проводится в зонах непрерывности коэффициентов системы (8): I – $x < a$, область с нагрузкой и опиранием на упругое основание; II – $x < x_0$, область опирания на упругое основание, но без нагрузки; III – область без основания и без нагрузки ($x > x_0$).

В первой области обе функции Хевисайда обращаются в единицу. Искомые перемещения в этой области пометим индексом «1» внизу. Система (8) здесь принимает вид

$$\begin{aligned} a_1 u_{1,xx} + a_6 \psi_{1,xx} - a_7 w_{1,xxx} &= -p, \\ a_6 u_{1,xx} + a_2 \psi_{1,xx} - a_3 w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 &= 0, \\ a_7 u_{1,xxx} + a_3 \psi_{1,xxx} - a_4 w_{1,xxx} - \kappa w_1 &= -q. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение системы уравнений (9), при основании средней жесткости [3] будет:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= C_{11} e^{\lambda_1 x} + C_{21} e^{-\lambda_1 x} + C_{31} e^{\lambda_3 x} + C_{41} e^{-\lambda_3 x} + C_{51} e^{\lambda_5 x} + C_{61} e^{-\lambda_5 x} + \frac{q_0}{\kappa}, \\ \psi_1(x) &= C_{11} a_{01} e^{\lambda_1 x} - C_{21} a_{01} e^{-\lambda_1 x} + C_{31} a_{12} e^{\lambda_3 x} - C_{41} a_{12} e^{-\lambda_3 x} + C_{51} a_{13} e^{\lambda_5 x} - \\ &\quad - C_{61} a_{13} e^{-\lambda_5 x} + b_2 \frac{q_0}{\kappa} x + b_3 q_0 x, \\ u_1(x) &= C_{11} a_{21} e^{\lambda_1 x} - C_{21} a_{21} e^{-\lambda_1 x} + C_{31} a_{22} e^{\lambda_3 x} - C_{41} a_{22} e^{-\lambda_3 x} + C_{51} a_{23} e^{\lambda_5 x} - \\ &\quad - C_{61} a_{23} e^{-\lambda_5 x} + b_5 q_0 \left(\frac{b_2}{\kappa} + b_3 \right) x + C_{81} x + C_{91}, \end{aligned} \quad (10)$$

где C_{11}, \dots, C_{91} – константы интегрирования, остальные параметры a_{ij}, b_i выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоев и совпа

дают с приведенными в [3].

Во второй области нагрузки нет, соответствующая функция Хевисайда в (1) обращается в ноль, опирание присутствует и функция Хевисайда в (2) обращается в единицу.

Решение системы (12) (индекс «2» внизу) следует из (9), при $q = 0$:

$$\begin{aligned} w_2(x) &= C_{12} e^{\lambda_1 x} + C_{22} e^{-\lambda_1 x} + C_{32} e^{\lambda_3 x} + C_{42} e^{-\lambda_3 x} + C_{52} e^{\lambda_5 x} + C_{62} e^{-\lambda_5 x}, \\ \psi_2(x) &= C_{12} a_{01} e^{\lambda_1 x} - C_{22} a_{01} e^{-\lambda_1 x} + C_{32} a_{12} e^{\lambda_3 x} - C_{42} a_{12} e^{-\lambda_3 x} + C_{52} a_{13} e^{\lambda_5 x} - C_{62} a_{13} e^{-\lambda_5 x}, \\ u_2(x) &= C_{12} a_{21} e^{\lambda_1 x} - C_{22} a_{21} e^{-\lambda_1 x} + C_{32} a_{22} e^{\lambda_3 x} - C_{42} a_{22} e^{-\lambda_3 x} + C_{52} a_{23} e^{\lambda_5 x} - \\ &\quad - C_{62} a_{23} e^{-\lambda_5 x} + C_{82} x + C_{92}, \end{aligned} \quad (11)$$

где C_{12}, \dots, C_{92} – новые константы интегрирования.

Теперь рассмотрим систему уравнений (8) в области III – без опирания на основание и без нагрузки. Здесь обе функции Хевисайда равны нулю. Система (8) здесь принимает вид

$$\begin{aligned} a_1 u_{1,xx} + a_6 \psi_{1,xx} - a_7 w_{1,xxx} &= -p, \\ a_6 u_{1,xx} + a_2 \psi_{1,xx} - a_3 w_{1,xxx} - a_5 \psi_1 &= 0, \\ a_7 u_{1,xxx} + a_3 \psi_{1,xxx} - a_4 w_{1,xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Искомые перемещения в этой области (индекс «3») будут [1]:

$$\psi_3 = C_{23} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{33} \operatorname{ch}(\beta_2 x) - \frac{\gamma_{12}}{\beta_2^2} (qx + C_{13}),$$

$$w_3(x) = \frac{1}{\alpha_{22}} \left[\frac{\alpha_{12}}{\beta_2} \left[C_{23} \operatorname{ch}(\beta_2 x) + C_{33} \operatorname{sh}(\beta_2 x) - \frac{\gamma_{12}}{\beta_2} \left(\frac{1}{2} qx + C_{13} \right) x \right] + \frac{a_1 C_{13}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{43}}{2} x^2 + C_{53} x + C_{63},$$

$$u_3(x) = \gamma_{32} \left(C_{23} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{33} \operatorname{ch}(\beta_2 x) - C_{13} \frac{\gamma_{12}}{\beta_2^2} \right) + \frac{a_7}{2\alpha_{22}} C_{13} x^2 + C_{73} x + C_{83}. \quad (13)$$

Объединяя (10), (11), (13) получим искомое решение краевой задачи:

$$\psi(x) = \psi_1(x) + (\psi_2(x) - \psi_1(x))H(x-a) + (\psi_3(x) - \psi_2(x))H(x-x_0),$$

$$u(x) = u_1(x) + (u_2(x) - u_1(x))H(x-a) + (u_3(x) - u_2(x))H(x-x_0),$$

$$w(x) = w_1(x) + (w_2(x) - w_1(x))H(x-x_0) + (w_3(x) - w_2(x))H(x-x_0). \quad (14)$$

Константы интегрирования $C_{11}, \dots, C_{91}, C_{12}, \dots, C_{92}, C_{13}, \dots, C_{83}$ определяются из восьми граничных условий на торцах стержня и дополнительных 16 условий равенства перемещений и их производных в точках нерегулярности $x = a, x = x_0$ ($C_{71} = C_{72} = 0$).

- | | |
|--|--|
| 1. $\langle \psi_2(x) - \psi_1(x) \rangle \Big _{x=x_1} = 0$ | 8. $\langle u_{1,x}(x) - u_{2,x}(x) \rangle \Big _{x=x_1} = 0$ |
| 2. $\langle \psi_{2,x}(x) - \psi_{1,x}(x) \rangle \Big _{x=x_1} = 0$ | 9. $(x = 0, \psi_1 = 0)$ |
| 3. $\langle \psi_{2,xx}(x) - \psi_{1,xx}(x) \rangle \Big _{x=x_1} = 0$ | 10. $(x = 0: u_1 = 0)$ |
| 4. $\langle w_1(x) - w_2(x) \rangle \Big _{x=x_1} = 0$ | 11. $(x = 0: w_1 = 0)$ |
| 5. $\langle w_{1,x}(x) - w_{2,x}(x) \rangle \Big _{x=x_1} = 0$ | 12. $(x = 0: w_{1,x} = 0)$ |
| 6. $\langle w_{1,xx}(x) - w_{2,xx}(x) \rangle \Big _{x=x_1} = 0$ | 13. $(x = l: \psi_2 = 0)$ |
| 7. $\langle u_1(x) - u_2(x) \rangle \Big _{x=x_1} = 0$ | 14. $(x = l: u_2 = 0)$ |
| | 15. $(x = l: w_2 = 0)$ |
| | 16. $(x = l: w_{2,x} = 0)$ |

Численные результаты

При численной реализации решений (14), (10)–(13) принималась жесткая заделка торцов стержня; интенсивность нагрузки $q_0 = 2$ МПа; пакет материалов слоев Д16Т–фторопласт–Д16Т; относительные толщины слоев $h_1 = 0,02, h_2 = 0,02, h_3 = 0,09$; модули упругости материалов (МПа): $G_1 = G_2 = 0,267 \cdot 10^5; G_3 = 90; K_1 = K_2 = 0,8 \cdot 10^5; K_3 = 4700$.

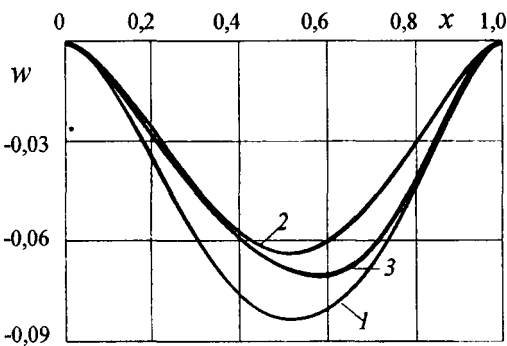
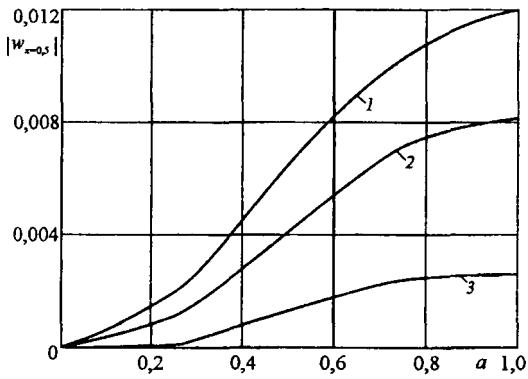


Рис. 2. Прогиб трехслойного стержня при непрерывной нагрузке

Рис. 2 показывает изменение прогиба вдоль оси при нагрузке распределенной по всей поверхности стержня ($a = l$): 1 – $\kappa = 0$; 2 – опирание всего стержня; 3 – оперта левая половина нижнего слоя ($\kappa = 100$ МПа/м). С увеличением области опирания перемещения уменьшаются, полное опирание приводит к уменьшения прогиба на 24 %, частичное – на 10 %.



1 – $\kappa = 1$; 2 – $\kappa = 100$; 3 – $\kappa = 10^5$ МПа/м,
 величина прогибов 3 увеличена в 100 раз
 Рис. 3. Прогибы ($x = 0,5$) в зависимости
 от длины интервала нагрузки a

На рис. 3 приведены графики изменения прогиба по середине стержня ($x = 0,5$) в зависимости от длины интервала нагрузки a ($b = 0$) при различных жесткостях упругого основания. Линейное увеличение интервала нагрузки вызывает нелинейный рост прогибов. При переходе от основания малой жесткости к средней (от 1 к 2) прогиб уменьшается на 30 %. Если основание высокой жесткости 3, то максимальный прогиб стержня составляет 0,23 % от первоначального прогиба (1).

Выводы

Приведенная методика и решение краевой задачи позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния при изгибе частично опертого трехслойного стержня при локальных нагрузках в зависимости от прочностных и геометрических параметров слоев и основания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. наука, 2004. – 386 с.
- 2 Старовойтов, С.А. Напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня на упругом основании / Старовойтов С. А. // Вестник БелГУТа «Наука и транспорт». – 2004. – № 1 (10). – С. 25–28.
- 3 Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 379 с.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНСТРУКТИВНО АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Ван Чживэй, Босяков С.М.

Белорусский государственный университет, Минск

The analytical solution of approximate natural frequencies for the free vibration of cylindrical shells of GFRP (glass fiber reinforced plastic) with clamped boundary conditions at one end and simple supported boundary conditions at another end is presented using the Rayleigh-Ritz method, while the winding angle varies. Frequency variations for different vibration modes with certain shell's geometrical parameters are discussed. The effect of shell's geometrical parameters is also investigated on natural frequencies.

Введение

Одной из важнейших задач на стадии проектирования тонкостенных оболочечных конструкций, широко применяемых в авиационной, ракетно-космической технике и различных областях промышленности, является динамический расчет. Необходимым элементом исследования динамики оболочек является определение собственных частот и форм малых колебаний, причем наибольший интерес для приложений представляют частоты из нижнего спектра. Использование в инженерной практике полимерных материалов, в частности стеклопластиков, делает обязательным учета анизотропии упругих свойств при исследовании низкочастотных колебаний оболочек. Результаты нахождения собственных частот свободных колебаний для ортотропных оболочек представлены в работах [1]. В то же время, сведения о частотах свободных колебаний в случае, когда основные направления упругости составляют некоторый угол с координатными линиями, практически отсутствуют, что обусловлено высокой сложностью соответствующих определяющих соотношений. В настоящей работе представлены результаты определения собственных частот свободных колебаний цилиндрических оболочек из ориентированного стеклопластика на основании метода Рэлея – Ритца для случая шарнирного опирания двух концов оболочки, а также при граничных условиях, соответствующих заделке одного конца и шарнирному опиранию другого конца оболочки.

Уравнение частот

В случае заделки на одном конце и шарнирного опирания другого конца оболочки имеем граничные условия

$$\begin{aligned} u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0 \text{ при } \alpha = 0, \\ v = w = M_{11} = N_{11} = 0 \text{ при } \alpha = l/R. \end{aligned} \quad (1)$$

Для защемленной двумя концами оболочки граничные условия сформулируем следующим образом:

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0, \text{ при } \alpha = 0 \text{ и } \alpha = l/R, \quad (2)$$

где u , v и w – перемещения срединной поверхности оболочки в продольном, окружном и радиальном направлениях соответственно, l – длина оболочки, R – радиус срединной поверхности оболочки, α – выраженное в долях радиуса срединной поверхности оболочки R расстояние по образующей, N_{11} и M_{11} – внутренняя

сила и момент.

Компоненты перемещений u , v и w , удовлетворяющие граничным условиям (1) и (2), а также приближенно описывающие форму изогнутой поверхности колеблющейся оболочки, зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= A_{mn} \varphi(\alpha) \cos(n\theta) \sin(\omega t), \\ v &= B_{mn} \psi(\alpha) \sin(n\theta) \sin(\omega t), \\ w &= C_{mn} \psi(\alpha) \cos(n\theta) \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n – число волн в окружном направлении, θ – угловая координата в окружном направлении, A_{mn} , B_{mn} и C_{mn} – амплитуды колебания вдоль соответствующих направлений, ω – циклическая частота колебаний, t – время, $\psi(\alpha) = \cosh(\lambda_m R \pi \alpha / l) - \cos(\lambda_m R \pi \alpha / l) -$

$-\sigma_m (\sinh(\lambda_m R \pi \alpha / l) - \sin(\lambda_m R \pi \alpha / l))$ – балочная функция, описывающая продольные колебания оболочки, $\varphi(\alpha) = \frac{l}{\lambda_m R \pi} \psi'(\alpha)$, λ_m – число, которое зависит

от числа волн вдоль образующей цилиндра и определяется граничными условиями на концах оболочки, σ_m – величина, определяемая коэффициентом λ_m .

Потенциальная энергия, накапливаемая всей оболочкой при ее упругой деформации, имеет следующее выражение [5]:

$$U = \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{l/R} (N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} + M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12}) d\alpha d\theta. \quad (4)$$

Выражения для внутренних сил и моментов имеют вид [4]:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz, \quad M_{11} = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + w_{ij} z) z dz, \quad (5)$$

$$w_{11} = B_{11} \chi_{11} + B_{12} \chi_{22} + B_{16} \chi_{12}, \quad w_{22} = B_{12} \chi_{11} + B_{22} \chi_{22} + B_{26} \chi_{12},$$

$$w_{12} = w_{21} = B_{16} \chi_{11} + B_{26} \chi_{22} + B_{66} \chi_{12}.$$

Здесь напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} , χ_{ij} , $i, j = 1, 2$ в срединной поверхности в соотношениях (5) определяются следующим образом [4, 5]:

$$\sigma_{11} = B_{11} \varepsilon_{11} + B_{12} \varepsilon_{22} + B_{16} \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{22} = B_{12} \varepsilon_{11} + B_{22} \varepsilon_{22} + B_{26} \varepsilon_{12},$$

$$\sigma_{12} = B_{16} \varepsilon_{11} + B_{26} \varepsilon_{22} + B_{66} \varepsilon_{12},$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right), \quad (6)$$

$$\chi_{11} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad \chi_{12} = -\frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \theta}.$$

Постоянные упругости зависят от угла φ намотки стекловолокна и определяются следующим образом [4]:

$$B_{11} = b_{11} \cos^4(\varphi) + b_{22} \sin^4(\varphi) + \left(b_{66} + \frac{1}{2} b_{12} \right) \sin^2(2\varphi),$$

$$B_{22} = b_{11} \sin^4(\varphi) + b_{22} \cos^4(\varphi) + \left(b_{66} + \frac{1}{2} b_{12} \right) \sin^2(2\varphi),$$

$$B_{12} = (b_{11} + b_{22} - 2b_{66}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + b_{12} (\sin^4(\varphi) + \cos^4(\varphi)),$$

$$B_{66} = (b_{11} + b_{22} - 2b_{12})\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) + b_{66}\cos^2(2\varphi),$$

$$B_{26} = \frac{1}{2}(b_{22}\cos^2(\varphi) - b_{11}\sin^2(\varphi))\sin(2\varphi) - \frac{1}{4}(b_{12} + 2b_{66})\sin(4\varphi),$$

$$B_{16} = \frac{1}{2}(b_{22}\sin^2(\varphi) - b_{11}\cos^2(\varphi))\sin(2\varphi) - \frac{1}{4}(b_{12} + 2b_{66})\sin(4\varphi),$$

где b_{11} , b_{22} , b_{12} и b_{66} – основные модули упругости ортотропного материала, φ – угол между основными направлениями упругости и координатными линиями (угол ориентации стекловолокна относительно основы стеклоткани).

Кинетическая энергия всей оболочки

$$T = \frac{1}{2}\rho R^2 \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{l/R} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) d\alpha d\theta dz, \quad (7)$$

где ρ – плотность стеклопластика, h – толщина оболочки.

Подставим соотношения (5) и (6) в выражения (4) и (7) с учетом равенств (3). После соответствующих преобразований будем иметь потенциальную энергию и кинетическую энергию всей оболочки. Подставим полученные выражения в следующее уравнение движения оболочки [4]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{mn}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{mn}} + \frac{\partial U}{\partial q_{mn}} = 0.$$

Здесь $q_{mn} = \{A_{mn} \sin(\omega t), B_{mn} \sin(\omega t), C_{mn} \sin(\omega t)\}^T$.

Приравняв нулю определитель, составленный из коэффициентов при переменных q_{mn} полученной системы уравнений, будем иметь следующее характеристическое уравнение для нахождения собственных частот свободных колебаний

$$|M\omega^2 - K| = 0, \quad (8)$$

где M – матрица массы, K – матрица жесткости.

Расчет частот при жестком заземлении концов оболочки

Для нахождения параметра λ_m в этом случае подставим выражения (3) в граничные условия (1). После несложных преобразований будем иметь

$$\tan(\pi\lambda_m) - \tanh(\pi\lambda_m) = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) получим (случай $\lambda_m = 0$, соответствующий тривиальному случаю нулевых перемещений не рассматриваем):

$$\lambda_m = m + 1/4, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

$$\sigma_m = \frac{\cosh(\pi\lambda_m) - \cos(\pi\lambda_m)}{\sinh(\pi\lambda_m) - \sin(\pi\lambda_m)}. \quad (11)$$

Подставив различные значения λ_m в соотношение (8), получим $\sigma_m \approx 1$.

Расчет собственных частот на основании численного решения уравнения (8) с учетом решений (10) и (11) проведем для оболочки из тканевого стеклопластика, упругие свойства которого описываются основными константами упругости $b_{11} = 18.3$, $b_{22} = 25.2$, $b_{66} = 3.5$, $b_{12} = 2.77$ ГПа; плотность $\rho = 1850$ кг/м³. Геометрические размеры оболочки описываются постоянными $h = 1$ мм, $R = 0.5$ м, $l = 10$ м. Зависимость собственных частот ω_{mn} от угла намотки стекловолокна φ при $m = 1$, $n = 1, 5$ и при $n = 1$, $m = 1, 2$ для различных мод колебаний представлены на рис. 1 и 2.

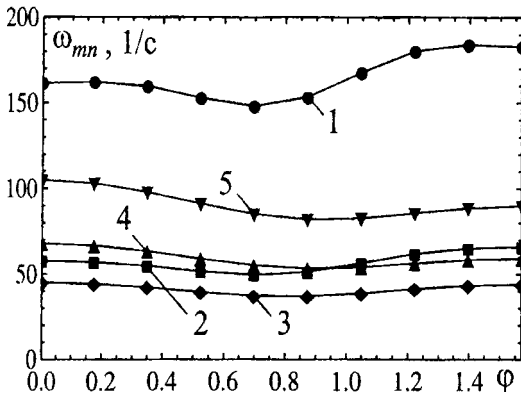


Рис. 1. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = 1$: 1 - $n = 1$; 2 - $n = 2$; 3 - $n = 3$; 4 - $n = 4$; 5 - $n = 5$

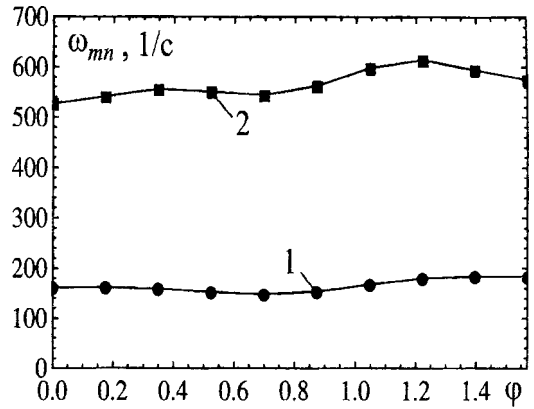


Рис. 2. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $n = 1$: 1 - $m = 1$; 2 - $m = 2$

Из рис. 1 видно, что минимумы частот для различных мод колебаний соответствуют различным углам намотки. В частности, минимум частот ω_{11} и ω_{12} соответствует углу $\varphi = 40^\circ$, для других мод минимум частоты достигается при $\varphi \approx 50^\circ$. Зависимости низших собственных частот от угла намотки φ аналогичны. При $m = 1$ и $n = 3$ получаем частоту основного тона.

Из рис. 2 видно, что зависимости частот от угла намотки аналогичны для двух рассмотренных мод колебаний. В то же время, при $n = m = 1$ минимум частот достигается при $\varphi = 39^\circ$, тогда как при $n = 1$ и $m = 2$ наименьшее значение частоты соответствует углу $\varphi = 0^\circ$. Также отметим, что минимальное значение собственной частоты ω_{31} наблюдается при $\varphi = 90^\circ$ и составляет $\approx 78 \cdot 10^3$ 1/с. Таким образом, можно сделать вывод, что влияние изменения параметра m на величины собственных частот свободных колебаний более существенно, чем параметра n .

На рис. 3 и 4 показаны зависимость частоты ω_{11} от угла намотки φ для различных отношений h/R и R/l .

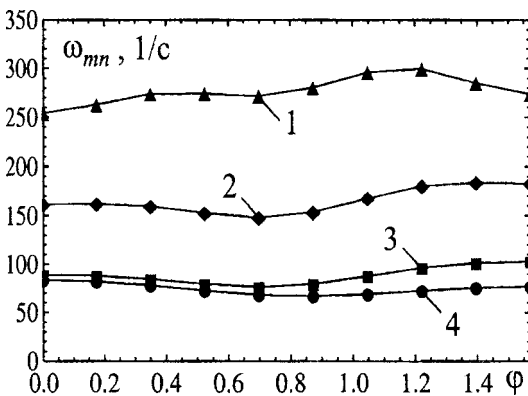


Рис. 3. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = n = 1$ для различных отношений h/R : 1 - $h/R = 0.001$; 2 - $h/R = 0.002$; 3 - $h/R = 0.004$; 4 - $h/R = 0.01$

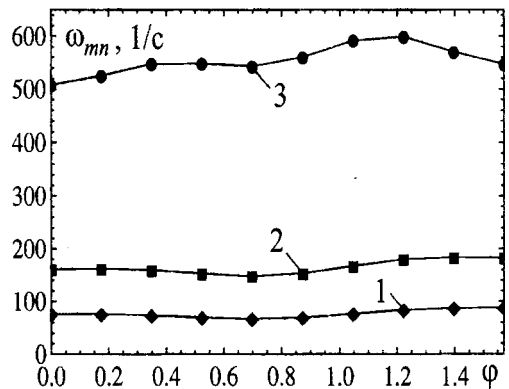


Рис. 4. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = n = 1$ для различных отношений R/l : 1 - $R/l = 1/30$; 2 - $R/l = 1/20$; 3 - $R/l = 1/10$

Из рис. 3 следует, что зависимости собственных частот свободных колебаний от угла намотки стекловолокна имеют различный характер для различных отношений h/R . Значения частот с увеличением значений отношения h/R уменьшаются.

Как видно из рис. 4 при малых значениях отношения R/l величины собственных частот свободных колебаний практически не изменяются для различных углов намотки стекловолокна. При увеличении значения R/l зависимость $\omega_{11}(\varphi)$ приобретает более сложный характер, и возрастают значения частот.

Расчет частот при жестком заземлении одного конца и шарнирном закреплении другого конца оболочки

В этом случае параметр λ_m найдем, подставив выражения (3) в граничные условия (2). В результате получим

$$\cos(\pi\lambda_m)\cosh(\pi\lambda_m) - 1 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_m = m + 1/2, \text{ где } m = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Параметр σ_m определяется выражением (11). Так же как и в предыдущем случае, для различных значений λ_m , определяемых равенством (12), будем иметь $\sigma_m \approx 1$.

С учетом полученного решения (12) выполним расчет собственных частот на основании численного решения уравнения (10) для цилиндрической оболочки из тканевого стеклопластика (при вычислениях принимаем прежние постоянные упругости и геометрические размеры оболочки). Зависимости собственных частот ω_{mn} от угла намотки стекловолокна φ при $m=1, n=\overline{1,5}$ и $n=1, m=\overline{1,3}$ представлены на рис. 5 и 6 соответственно.

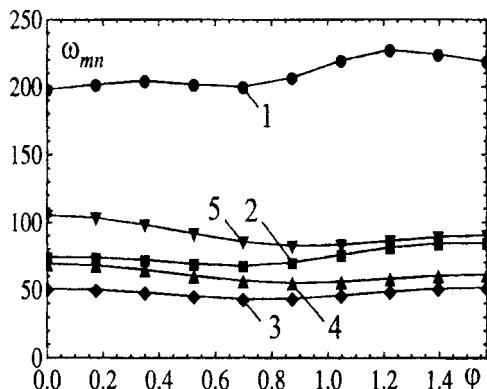


Рис. 5. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = 1$: 1 - $n = 1$; 2 - $n = 2$; 3 - $n = 3$; 4 - $n = 4$; 5 - $n = 5$

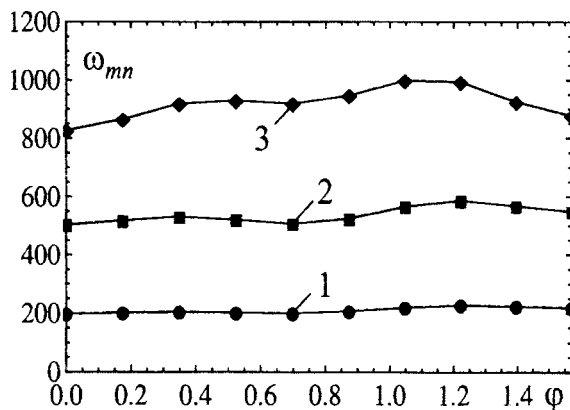


Рис. 6. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $n = 1$: 1 - $m = 1$; 2 - $m = 2$; 3 - $m = 3$

Из рис. 5 видно, что с увеличением угла намотки частоты ω_{11} и ω_{12} постепенно уменьшаются, достигая минимума при $\varphi \approx 40^\circ$. Для других мод наименьшее значение частоты наблюдается при $\varphi \approx 50^\circ$. Таким образом, минимальные значения частот для различных мод имеют место при различных углах намотки. Также заметим, что из рис. 5 следует, что частота ω_{13} является частотой основного тона.

Как показывает рис. 6, характер изменений частот аналогичен для различных мод. Частоты ω_{21} и ω_{31} достигают минимальных значений при углах намотки $\varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 90^\circ$. Частота ω_{11} имеет наименьшее значение при $\varphi = 40^\circ$. Сравнивая зависимости частот ω_{mn} , представленные на рисунках 5 и 6, можно сделать вывод, что влияние изменения параметра m на изменение собственных частот более велико, чем изменения параметра n .

На рис. 7 и 8 показаны зависимости частоты ω_{11} от угла намотки φ для различных отношений h/R и R/l .

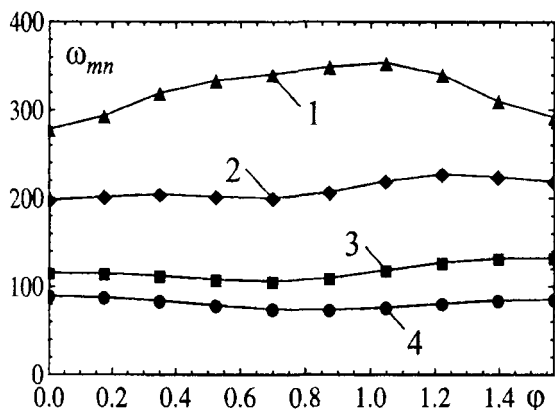


Рис. 7. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = n = 1$ для различных отношений h/R : 1 – $h/R = 0.001$; 2 – $h/R = 0.002$; 3 – $h/R = 0.004$; 4 – $h/R = 0.01$

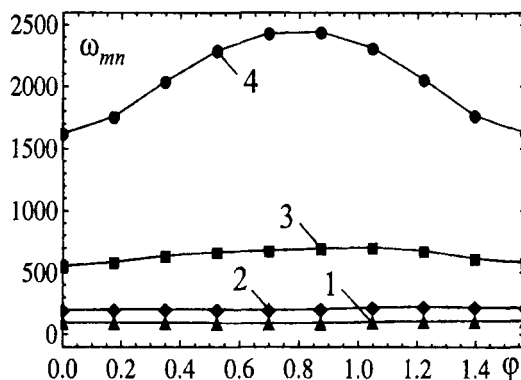


Рис. 8. Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m = n = 1$ для различных отношений R/l : 1 – $R/l = 1/30$; 2 – $R/l = 1/20$; 3 – $R/l = 1/10$; 4 – $R/l = 1/4$

Из рис. 7 видно, что при увеличении отношения h/R значение угла намотки, соответствующее минимальному значению частоты свободных колебаний изменяется, в частности, при $h/R = 0.001$ и $h/R = 0.002$ наименьшее значение ω_{11} наблюдается для угла $\varphi \approx 40^\circ$. При дальнейшем увеличении отношения h/R минимум частоты имеет место для $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$; для углов намотки близких к 45° частота свободных колебаний приобретает наибольшие значения. Как следует из рисунка 8, при значениях $R/l = 1/30$ и $R/l = 1/20$ угол намотки на частоту свободных колебаний практически не влияет; при увеличении значений отношения R/l наименьшие частоты наблюдаются при углах $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$, а максимальная частота наблюдается для углов $\varphi \approx 45^\circ$.

Заключение

Приближенный расчет собственных частот свободных колебаний нижнего спектра цилиндрических оболочек из стеклопластика, выполненный на основании метода Рэлея – Ритца, показывает, что значения частот существенно зависят от угла намотки стекловолокна. Полученные результаты можно использовать при проектировании таких оболочек в случае жесткого защемления двух концов оболочки, а также жесткой заделки одного из ее концов и шарнирного опирания дру-

гого конца. Также отметим, что значения собственных частот ω_{mn} для одних и тех же углов намотки стекловолокна, находятся в соотношении, которое соответствует результатам натуральных экспериментов и результатам, полученным для анизотропных и изотропных оболочек [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Михасев Г. И. Асимптотические методы в теории тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1997. 304 с.
2. Lee Y. S., Kim Y. W. Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners // *Advances in Engineering Software* 1999; Vol. 30 (9–11). P. 649–655.
3. Сопротивление стеклопластиков / Бажанов В.Л. и [др.] // М.: Машиностроение. 1968. – 304 с.
4. Пластинки и оболочки из стеклопластиков/ Бажанов В.Л. и [др.] // М.: Москва, 1970. – 404 с.
5. Xu Zhilun. *Elasticity (Volume II)*. – Beijing: Higher Education Press, 2006. – 287 p.

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА НА ДЕФОРМАЦИОННО-ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИТНЫХ КАРДИОИМПЛАНТАТОВ

Хиженок В.Ф., Шилько С.В.

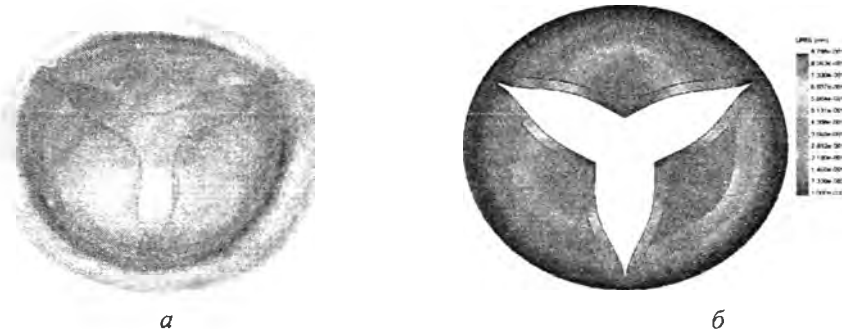
*Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого
НАН Беларуси, Гомель*

Введение

Повышение качества жизни и улучшение демографической ситуации в Беларуси и России в значительной степени связано с лечением заболеваний сердечно-сосудистой системы, как основной причины смертности и инвалидности населения. Хирургическое лечение указанных заболеваний невозможно без массового использования средств протезирования. Приоритетное значение полимеров и эластомеров, как материалов для кардиоимплантатов, обусловлено их близостью биотканям сердца по химической природе и физико-механическим свойствам. Возможность управления свойствами названных материалов путем направленного армирования делает актуальным изучение влияния структуры получаемых анизотропных композитов на деформационно-прочностные характеристики.

Клапанные протезы с эластичными замыкательными элементами

Для выполнения требований, предъявляемых к распространенным кардиоимплантатам – искусственным клапанам сердца (ИКС), предложены различные конструкции клапанных протезов на основе синтетических и биологических материалов [1]. Перспективны ИКС с композитными замыкательными элементами, в основном моделирующие морфологию и деформационные свойства природного прототипа (миокарда). В частности, на рис. 1, а представлен вариант конструкции ИКС с тремя запирающими элементами (створками), а на рис. 1, б моделируется фаза его открытия за счет прогиба створок. Использование эластичных биосовместимых полимерных материалов в принципе позволяет создать клапанный протез, эквивалентный естественному клапану сердца, но, в отличие от биологического протеза, не подверженный кальцификации [2]. Проблема заключается в обеспечении необходимого уровня прочностных характеристик эластичных ИКС, что резко сужает ограниченный (по критерию биосовместимости) перечень пригодных для изготовления кардиоимплантатов базовых полимерных материалов.



*Рис. 1. Искусственный клапан сердца с эластичными створками (а)
и распределение изгибных перемещений в стадии открытия ИКС (б)*

Ниже рассматриваются композиты на основе полиуретана (ПУ) и политетрафторэтилена (ПТФЭ) с армирующим наполнителем в виде волокон полиэфира и полиамида, бионейтральность которых обеспечивалась капсуляцией в матричной фазе.

Определение деформационно-прочностных характеристик матричных материалов

Деформационно-прочностные характеристики полиуретана и политетрафторэтилена, допущенных для использования в кардиохирургии, определялись на машине Instron 5567 по ГОСТ 11262-80 (растяжение). Испытывались образцы ПУ в виде полосок размером 10x0,8x50 и ПТФЭ в виде лопаток толщиной 0,96 мм, шириной 2 мм и длиной рабочей части 10 мм. Результаты статических испытаний приведены на рис. 2 и в табл. 1, 2.

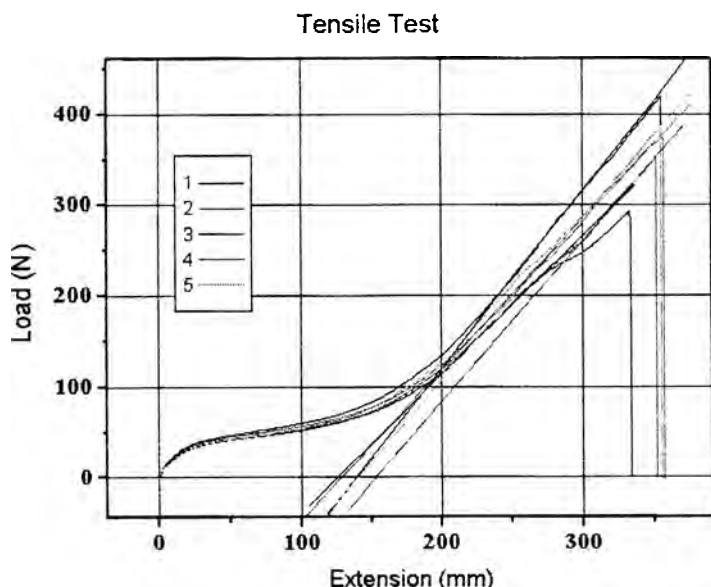


Рис. 2. Диаграмма «нагрузка - перемещение» образца ПУ

Таблица 1

Механические характеристики ПУ

	Длина рабочей части образца (mm)	Скорость (mm/min)	Модуль упругости (MPa)	Макс. напряж. (MPa)	Деформация в момент текуч. (%)	Макс. нагрузка (N)	Деформация при разрыве (%)	Толщина (mm)
1	50.00	100.00	12.30	52.33	710.00	418.61	710.02	0.80
2	50.00	100.00	11.10	44.01	703.33	352.11	703.33	0.80
3	50.00	100.00	9.55	36.68	666.67	293.46	667.02	0.80
4	50.00	100.00	10.37	46.90	713.33	375.17	714.64	0.80
5	50.00	100.00	11.19	48.41	710.00	387.24	710.99	0.80
Mean	50.00	100.00	10.90	45.66	700.67	365.32	701.36	0.80
S.D.	0.00	0.00	1.02	5.85	19.35	46.79	19.63	0.00
C.V.	0.00	0.00	9.40	12.81	2.76	12.81	2.80	0.00
Minimum	50.00	100.00	9.55	36.68	666.67	293.46	667.02	0.80
Maximum	50.00	100.00	12.30	52.33	713.33	418.61	714.64	0.80
Range	0.00	0.00	2.75	15.64	46.67	125.15	47.62	0.00

Механические характеристики ПТФЭ

	Длина рабочей части образца (mm)	Скорость (mm/min)	Модуль упругости (MPa)	Макс. напряж. (MPa)	Деформация в момент текуч. (%)	Макс. нагрузка (N)	Деформация при разрыве (%)	Толщина (mm)
1	10.00	10.00	357.75	36.55	292.83	69.82	293.45	0.96
2	10.00	10.00	451.44	34.34	259.00	65.59	260.09	0.96
3	10.00	10.00	400.74	32.60	232.81	62.26	233.24	0.96
4	10.00	10.00	478.89	34.08	259.85	65.10	260.84	0.96
Mean	10.00	10.00	422.20	34.39	261.12	65.69	261.91	0.96
S.D.	0.00	0.00	53.80	1.63	24.58	3.12	24.64	0.00
C.V.	0.00	0.00	12.74	4.75	9.41	4.75	9.41	0.00
Minimum	10.00	10.00	357.75	32.60	232.81	62.26	233.24	0.96
Maximum	10.00	10.00	478.89	36.55	292.83	69.82	293.45	0.96
Range	0.00	0.00	121.14	3.96	60.01	7.56	60.21	0.00

Видно, что указанные гемосовместимые полимеры характеризуются значительными предельными деформациями, что важно для реализации больших изгибных перемещений замыкательных элементов. Вместе с тем, для реализации более высокой прочности при малой изгибной жесткости, а также исходя из структуры миокарда, содержащего относительно жесткие волокна (хорды), следует изучить возможности направленного армирования указанных биосовместимых материалов высокопрочными и высокомодульными волокнами.

Расчет упругих констант армированных материалов

Направленная укладка волокон в одной плоскости (представляет интерес и более сложные, пространственные схемы армирования) описывается моделью ортотропного материала, деформационные свойства которого описываются набором упругих констант $E_x, E_y, E_z, \nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}, G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$. Расчет констант, исходя из объемного содержания, модуля упругости и коэффициента Пуассона матрицы и наполнителя, производили по формулам, приведенным, в частности, в работе [3].

Исходя из описанных выше испытаний на растяжение, задавались модули упругости матриц (ПУ и ПТФЭ) $E_{ПУ} = 10$ МПа и $E_{ПТФЭ} = 0,4$ ГПа соответственно; коэффициенты Пуассона указанных материалов принимались равными $\nu_{ПУ} = 0,43$ и $\nu_{ПТФЭ} = 0,45$. Наполнителем служили волокна полиэфира и полиамида с модулем упругости и коэффициентом Пуассона соответственно:

$$E_{П} = 1 \text{ ГПа}, \nu_{П} = 0,46; E_{ПА} = 2,4 \text{ ГПа}, \nu_{ПА} = 0,4 \text{ [4]}.$$

Были рассмотрены варианты структуры материала (рис. 3), различающиеся по объемной доле волокон в продольном и поперечном направлении, а также углу армирования.

1 – $C_1 = 0,2; C_2 = 0; \alpha = 0$ (рис. 3, а); 2 – $C_1 = 0; C_2 = 0,2; \alpha = 0$ (рис. 3, б);
3 – $C_1 = 0,1; C_2 = 0,1; \alpha = 45^\circ$ (рис. 3, в); 4 – $C_1 = 0,1; C_2 = 0,1; \alpha = 90^\circ$ (рис. 3, г),
где C_1, C_2 – объемные доли волокон, ориентированных в продольном направлении и поперечном направлении; α – угол ориентации волокон.

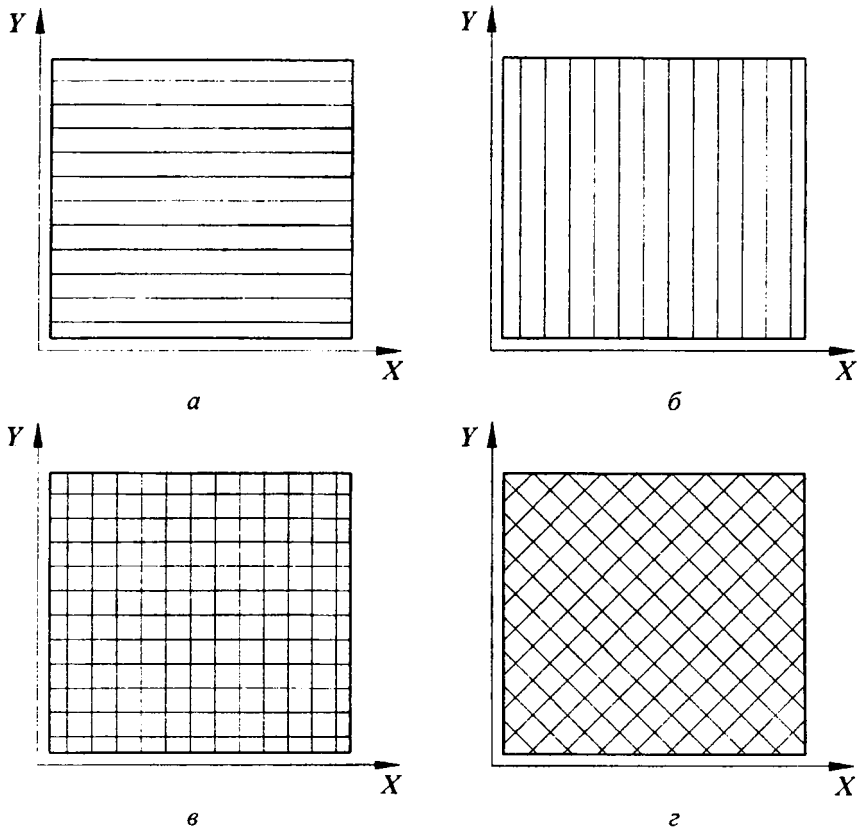


Рис. 3. Варианты армирования материала

Полученные упругие константы для композитов на основе полиуретана и политетрафторэтилена приведены в табл. 3, 4 соответственно.

Таблица 3

Упругие константы композита на основе ПУ в зависимости от способа армирования

Наименование параметра	Вариант армирования и материал волокон							
	полиэфир				полиамид			
	1	2	3	4	1	2	3	4
E_x , МПа	208	15,09	112,7	19,14	488	15,23	252,9	20,1
E_y , МПа	15,09	208	112,7	19,14	15,23	488	252,9	20,1
E_z , МПа	15,09	15,09	26,47	26,47	15,23	15,23	30,81	30,81
G_{xy} , МПа	5,201	5,201	5,201	45,59	5,227	5,227	5,227	103,7
G_{yz} , МПа	4,36	5,201	4,78	9,56	4,366	5,227	4,797	9,593
G_{xz} , МПа	5,201	4,36	4,78	9,56	5,227	4,366	4,797	9,593
ν_{xy}	0,436	0,032	0,059	0,855	0,424	0,013	0,026	0,931
ν_{yz}	0,73	0,436	0,715	0,121	0,744	0,424	0,73	0,058
ν_{xz}	0,436	0,73	0,715	0,121	0,424	0,744	0,73	0,058

Упругие константы композита на основе ПТФЭ в зависимости от способа армирования

Наименование параметра	Вариант армирования и материал волокон							
	полиэфир				полиамид			
	1	2	3	4	1	2	3	4
E_v , МПа	520	466,1	493,4	474,3	800	524,4	666,5	542,4
E_y , МПа	466,1	520	493,4	474,3	524,4	800	666,5	542,4
E_z , МПа	466,1	466,1	467,3	467,3	524,4	524,4	545,4	545,4
G_{xy} , МПа	163,6	163,6	163,6	172,6	184,5	184,5	184,5	243,9
G_{yz} , МПа	156,6	163,6	160,1	320,2	165,7	184,5	175,1	350,3
G_{xz} , МПа	163,6	156,6	160,1	320,2	184,5	165,7	175,1	350,3
ν_{xy}	0,452	0,405	0,427	0,256	0,44	0,288	0,348	0,362
ν_{yz}	0,488	0,452	0,471	0,453	0,582	0,44	0,524	0,427
ν_{xz}	0,452	0,488	0,471	0,453	0,44	0,582	0,524	0,427

Можно заметить, что даже при использовании эластомерной ПУ матрицы исследуемые материалы характеризуются существенно более высоким модулем упругости в сравнении с миокардом (на рис. 4 приведены данные, полученные авторами на подопытных животных (крысах) методом контактного индентирования).

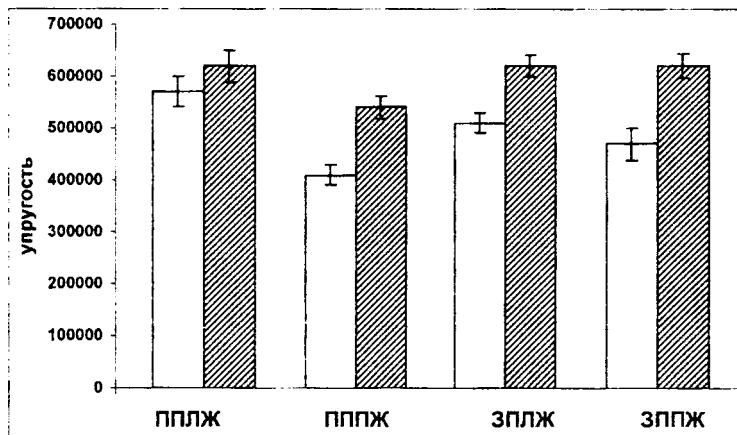


Рис. 4. Оценка статического модуля упругости миокарда в области передних и задних стенок правого и левого желудочков сердца, Па

Анализ деформационно-прочностных характеристик композитного ИКС

Расчет напряженно-деформированного состояния запирающего элемента выполнялся в программной среде SolidWorks (Cosmos/Works) на геометрически идентичной 3D модели. Задаваемые граничные условия соответствовали свободному краю запирающего элемента и соединению части его контура с относительно жестким опорным кольцом (рис. 1а). На поверхности элемента задавалось равномерно распределенное давление, равное систолическому $p(x) = p_0 = 13,33$ кПа (100 мм рт. ст.) в момент начала открытия клапана (рис. 5, а). Более точное распределение давления $p(x)$ может быть взято из результатов гидродинамического

анализа, проведенного, например, в [5]. Эквивалентные напряжения определялись по критерию Мизеса.

Результаты расчета НДС композитного запирающего элемента постоянной толщины $h = 1$ мм приведены на рис. 5б,в и в табл. 5. В результате проведенных расчетов установлено, что эквивалентные напряжения достигают максимума при значении угла армирования $\alpha = 45^\circ$ (рис. 5). В диапазоне $15^\circ < \alpha < 90^\circ$ зависимость перемещения от угла армирования близка к линейной. Оптимальной с точки зрения минимума эквивалентных напряжений при требуемом изгибном перемещении кончика запирающего элемента (не менее 2 мм), по-видимому, является близкое к однонаправленному (угол ориентации волокон $\alpha = 80-90^\circ$) армирование полиуретана полиэфирными волокнами. Запирающие элементы на основе ПТФЭ при толщине $h = 1$ мм являются слишком жесткими, что, очевидно, вызовет увеличенное гемодинамическое сопротивление при открытии ИКС. Приемлемая эластичность запирающих элементов при заданной толщине достигается при использовании композитов на основе эластомера ПУ. Однако даже в этом случае материал имплантата имеет существенно более высокий модуль упругости в сравнении с биопрототипом (см. рис. 4).

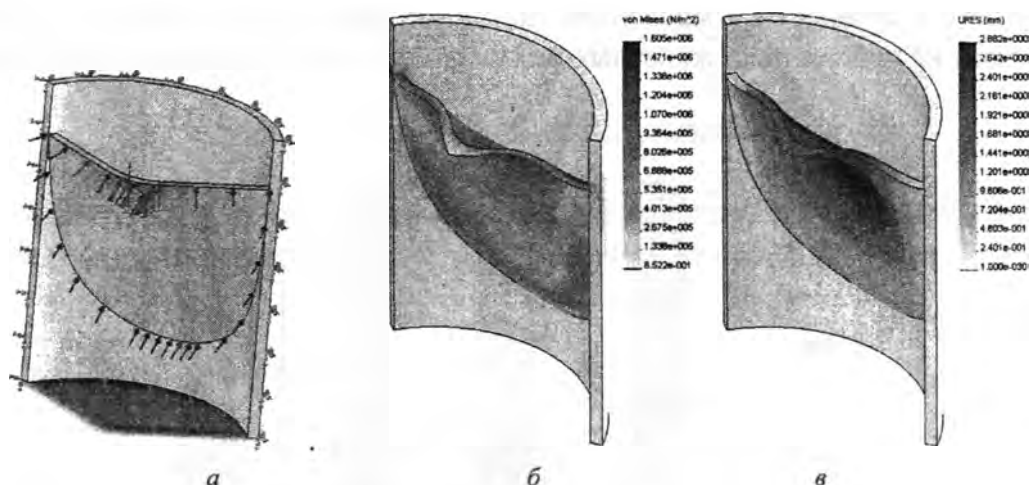
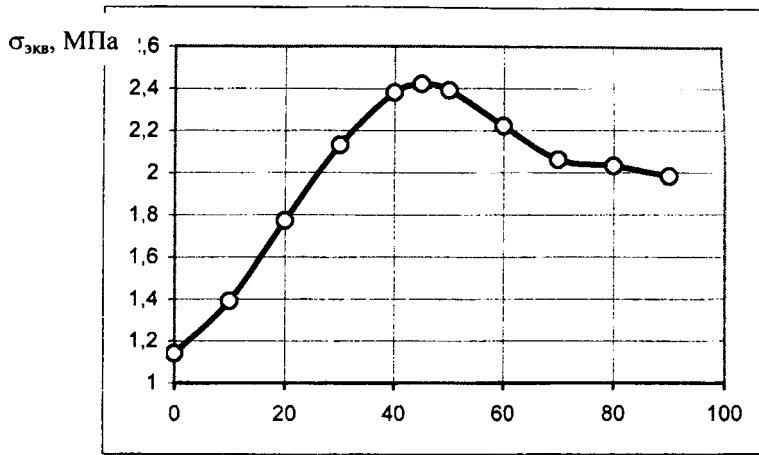


Рис. 5. Расчетная схема запирающего элемента (а), эквивалентные напряжения (б) и перемещения изгиба (в) при максимальной открытии ИКС

Таблица 5

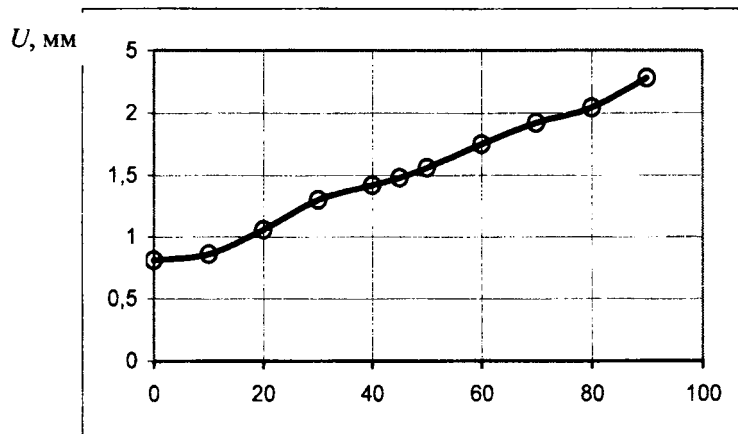
Эквивалентные напряжения и перемещения изгиба запирающего элемента ИКС для двух видов матрицы и наполнителя

Матрица		Наполнитель и вариант армирования							
		Полиэфир				Полиамид			
		1	2	3	4	1	2	3	4
ПУ	σ , МПа	1,14	1,59	1,09	1,44	1,18	2,24	1,17	1,65
	U , мм	0,81	1,95	0,75	0,99	0,79	1,1	0,62	0,76
ПТФЭ	σ , МПа	0,95	0,94	0,95	1,11	0,96	0,94	0,95	1,1
	U , мм	0,035	0,037	0,036	0,034	0,027	0,033	0,029	0,028



а)

α, град



б)

α, град

Рис. 6. Зависимость эквивалентных напряжений (а) и перемещений изгиба (б) от угла армирования

Критическим показателем работоспособности ИКС с разрабатываемыми эластичными элементами является прочность последних в условиях длительной циклической нагрузки (не менее 10 лет функционирования протеза или 400 млн. срабатываний запирающих элементов) в области больших деформаций. Для прогнозирования долговечности по данному критерию проводили расчет на усталость при изгибе с использованием программы КЭ анализа SolidWorks/Cosmos. В расчете были использованы данные по гига-усталости (усталости в области сотен миллионов циклов) полиуретанов (рис. 7), полученные в [2].

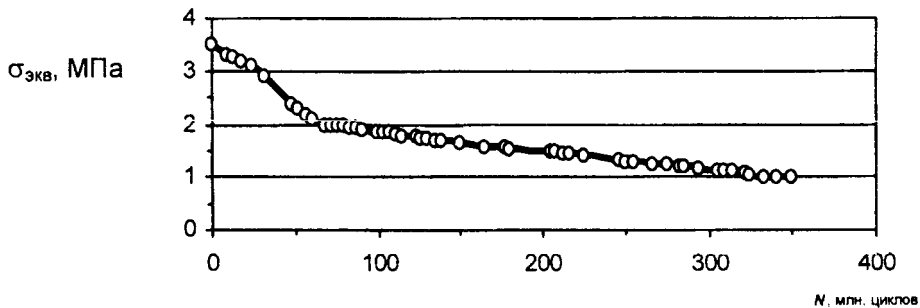


Рис. 7. Усталостная кривая для ПУ по данным [2]

На рис. 8 показана зона возникновения повреждений и расчетная оценка ресурса (число циклов до разрушения) замыкательного элемента ИКС в соответствии с гипотезой линейного суммирования усталостных повреждений.

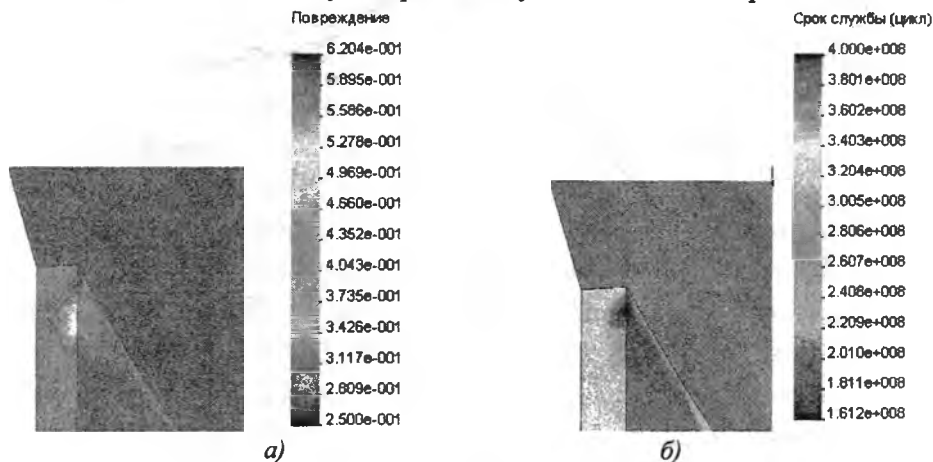


Рис. 8. Оценка усталостной прочности эластичного ИКС: локализация повреждений в замыкательном элементе (а), прогнозируемый срок службы ИКС (б).

Видно, что усталостная долговечность эластичного кардиоимплантата весьма высока и приближается к требуемой. Тем не менее, существенная неоднородность в расчетном распределении повреждений, необходимость реализации значительных изгибных перемещений и обеспечения равнопрочности конструкции с учетом гидролиза эластомера в биологически активной среде, показывает необходимость дальнейшей геометрической оптимизации и совершенствования структуры материала запирающих элементов для более близкого соответствия протезируемым тканям сердца.

Заключение

Направленно-армированные материалы на основе полимеров и эластомеров наиболее перспективны для создания кардиопротезов, эквивалентных природным по геометрическим и деформационным характеристикам.

Моделирование деформационных характеристик и анализ усталостной прочности выявил потенциальную работоспособность эластичных запирающих элементов искусственного клапана сердца на основе направленно-армированного полиуретана при условии дальнейшей геометрической и структурной оптимизации с учетом гидролиза в биологически активной среде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fradet G.J., Jamieson W.R.E., Abel J.G., Lichtenstein S.V., Miyagishima R.T., Ling H., Tyers G.F.O. Clinical performance of biological and mechanical prostheses // The Annals of Thoracic Surgery. Vol. 60, Suppl. 2, 1995, pp. 453-458.
2. Aguirre A.F., Oliva M., Schoephoerster R.T., Kasyanov V.A. Static and dynamic mechanical testing of a polymer with potential use as heart valve material // Summer Bioeng: Conf., Florida, June 25-29, 2003. pp. 1039-1040.
3. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.. Соппротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972.
4. Армированные пластики / В.А. Бунаков [и др.]; под ред. Г.С. Головкина, В.И. Семенова. – М.: МАИ, 1997.

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИОННЫХ ИЗДЕЛИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Василевич Ю.В., Неумержицкая Е.Ю., Язневич А.М., Чигарев В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The systematic aspects of the practical use of statistical methods with the calculation for the strength of the potentially dangerous objects are presented.

В сопротивлении материалов расчеты на прочность традиционно ведутся в детерминированной постановке по двум методам: метод расчета по допускаемым напряжениям и методу расчета по предельным состояниям (появление пластических деформаций, потеря устойчивости и др.). Расчет по предельным состояниям основан на сравнении максимально действующей нагрузки с предельной нагрузкой, соответствующей предельному состоянию, определяемому потерей работоспособности или разрушением элемента конструкции.

Независимо от метода, расчет конструкции связан с тремя группами величин: механическими свойствами материалов; геометрическими размерами поперечных сечений и наличием концентраторов напряжений; величиной действующих нагрузок. В каждой группе величины имеют рассеяние, являются случайными, что должно учитываться при оценке прочности рассчитываемого элемента конструкции [1-3]. Расчет по допускаемым напряжениям не учитывает фактора случайности величин. Считается, что свойства материалов и внешняя нагрузка постоянны. В действительности как нагрузка, так и свойства материалов, а следовательно и прочность, являются случайными величинами, определяемыми различными случайными факторами. При неблагоприятных условиях напряжения в элементах конструкции могут превышать предел прочности, что приведет к разрушению или появлению трещин.

В качестве примера рассмотрим кривые распределения механических свойств стали 15XCHD (число случаев $n = 1358$) (рис. 1). По оси ординат откладывается относительная частота появления результата в процентах.

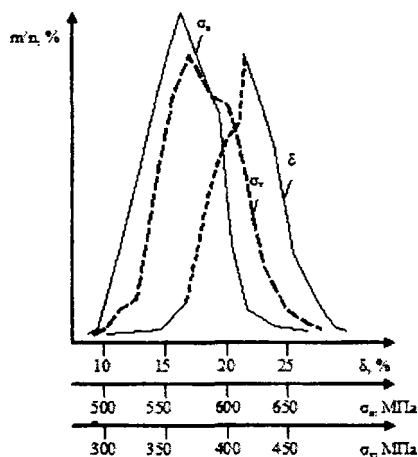


Рис. 1

Из рис. 1 видно, что такие механические характеристики металла, как предел прочности σ_B , предел текучести σ_T , относительное удлинение δ , отличаются

значительно даже в пределах одного листа, соответственно будет изменяться и несущая способность конструкции.

При расчете по предельным состояниям максимальная действующая нагрузка не должна превышать предельной нагрузки. Например, при растяжении стержня напряжения у пластичных материалов не должны превышать предела текучести $\sigma_{np} = \sigma_T$, у хрупких материалов - предела прочности $\sigma_{np} = \sigma_B$. В этом случае предельная нагрузка, определяющая несущую способность стержня будет равна $F_{np} = \sigma_{np} \cdot A$, где A – площадь поперечного сечения стержня.

Испытания металлов показывают: когда у пластичных металлов напряжения достигают предела текучести - появляются пластические деформации, когда у хрупких металлов напряжения достигают предела прочности - происходит разрушение.

Условие прочности при линейном напряженном состоянии имеет вид

$$\sigma \leq \sigma_{np}, \quad (1)$$

где σ – максимальное напряжение в элементе конструкции; σ_{np} – опасное напряжение, при котором в материале наступает предельное состояние.

Предельное напряжение σ_{np} зависит от свойств материала и определяется в результате испытания материала на растяжение и сжатие. Для пластичных материалов σ_{np} принимается равным пределу текучести σ_T , для хрупких материалов – пределу прочности σ_B . Чтобы условие (1) выполнялось при изменении нагрузки в эксплуатации при изменении свойств материала в σ_{np} вводят коэффициент безопасности n , определяющий допускаемое напряжение $\sigma \leq \frac{\sigma_{np}}{n} = [\sigma]$, где n – коэффициент безопасности; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

Введение коэффициента безопасности связано с разбросом механических характеристик материала, со случайным характером внешних нагрузок, с неточностью размеров и формы деталей и т.д. Чем больше значение коэффициента безопасности, тем надежнее будет конструкция, но при этом она будет более тяжелой и более дорогой.

При назначении коэффициента безопасности учитывается опыт эксплуатации аналогичных конструкций, качества материала, проектируемая долговечность и значимость, уровень развития технологии изготовления, точность задания внешних нагрузок и т.д. На основе обобщения накопленного опыта, с учетом влияющих факторов разрабатываются нормативные значения коэффициентов безопасности для различных отраслей машиностроения и даже для отдельных машин и деталей, что приводит к значительному разбросу коэффициента безопасности даже при расчете однотипных объектов разными организациями. Дать аргументированное объяснение различию коэффициента безопасности невозможно, поэтому использование коэффициента безопасности в расчетах связано с определенной величиной неопределенности.

Научно обоснованные величины коэффициентов безопасности могут быть установлены только на основе точного знания вероятностных характеристик действующих нагрузок и прочностных характеристик материала элементов конструкций.

Трудность определения несущей способности элемента конструкции состоит в том, что механические характеристики материала, геометрические размеры элемента и действующие нагрузки являются случайными величинами.

Для представленных на рис. 2 распределений рабочих σ и предельных $\sigma_{\text{пр}}$ напряжений определим коэффициент безопасности как отношение математических ожиданий m_σ и $m_{\sigma_{\text{пр}}}$

$$n = \frac{m_\sigma}{m_{\sigma_{\text{пр}}}}, \quad (2)$$

где m_σ и $m_{\sigma_{\text{пр}}}$ – соответственно значения математических ожиданий рабочих и предельных напряжений. Из формулы (2) следует, что при одном и том же значении коэффициента безопасности вероятность разрушения элемента конструкции будет различной в зависимости от параметров распределения.

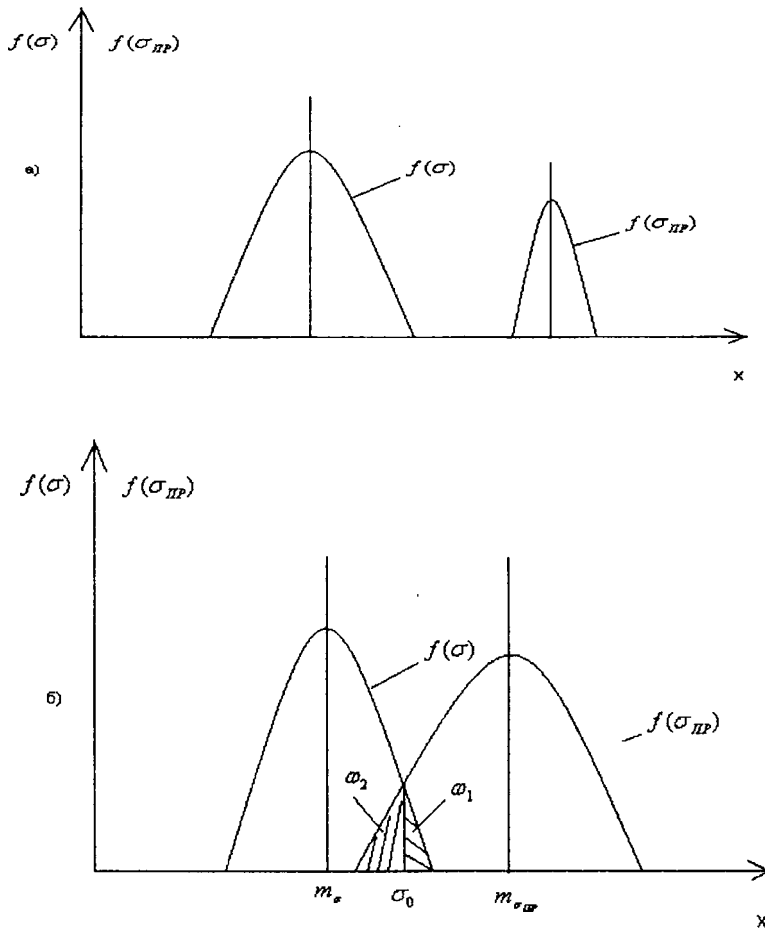


Рис. 2

В случае а, так как кривые плотности вероятности $f(\sigma)$ и $f(\sigma_{\text{пр}})$ не пересекаются, то вероятность разрушения элемента конструкции практически исключена.

В случае б) кривые плотности вероятности пересекаются, образуя области, в которых возможны разрушения (на рис. 2, б заштрихованы).

$$\omega_1 = \int_{\sigma_0}^{\infty} f(\sigma) d\sigma, \quad \omega_2 = \int_0^{\sigma_0} f(\sigma_{\text{пр}}) d\sigma_{\text{пр}}.$$

Получить приближенную оценку для вероятности разрушения можно, приняв за исходную координату точку пересечения кривых распределения. Вероятность, что одновременно произойдут события $\sigma > \sigma_0$ и $\sigma_{\text{пр}} < \sigma_0$ будет равна

произведению площадей ω_1 и ω_2 (рис. 2, б), дающих для искомой вероятности оценку снизу

$$P(\sigma > \sigma_0, \sigma_{PP} < \sigma_0) < \omega_1 \omega_2,$$

где $\omega_1 \cdot \omega_2$ – вероятность разрушения, при любом значении

$$\sigma_0 = \sigma_{PP0}. \quad (3)$$

Вероятность того, что одновременно событие $\sigma < \sigma_0, \sigma_{PP} > \sigma_0$ не произойдут, будет равна

$$1 - (1 - \omega_1) \cdot (1 - \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \cdot \omega_2. \quad (4)$$

Формула (4) дает для искомой вероятности оценку сверху.

Двусторонняя оценка вероятности события $\sigma > \sigma_{PP}$, согласно формул (3) и (4), будет находиться в пределах

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \cdot \omega_2 > P(\sigma > \sigma_{PP}) > \omega_1 \cdot \omega_2. \quad (5)$$

Таким образом, чтобы определить вероятность разрушения элемента конструкции требуется знать параметры плотностей распределения вероятностей, действующих σ и предельных σ_{PP} напряжений, а при назначении коэффициента безопасности необходимо учитывать разброс прочностных характеристик материала, действующих нагрузок и размеров элементов конструкции.

Путь распределения σ и σ_{PP} подчиняются нормальному закону

$$f(\sigma) = \frac{1}{S_\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2 \cdot S_\sigma^2}\right], \quad (6)$$

$$f(\sigma_{PP}) = \frac{1}{S_{\sigma_{PP}} \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\sigma_{PP} - m_{\sigma_{PP}})^2}{2 \cdot S_{\sigma_{PP}}^2}\right], \quad (7)$$

где S_σ и $S_{\sigma_{PP}}$ – средние квадратические отклонения напряжений. Так как величины σ и σ_{PP} независимы, то вероятность того, что действующие напряжения превысят предельный уровень будет:

$$P(\sigma > \sigma_{PP}) = \int_0^\infty f(\sigma_{PP}) \cdot \left\{ \int_{\sigma_{PP}}^\infty f(\sigma) d\sigma \right\} d\sigma_{PP}. \quad (8)$$

Надежность (вероятность безотказной работы) конструкции, равна

$$H = 1 - P(\sigma > \sigma_{PP}). \quad (9)$$

Подставляя (6), (7) в (8) получим

$$P(\sigma > \sigma_{PP}) = \int_0^\infty \frac{1}{S_{\sigma_{PP}} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \exp\left[-\frac{(\sigma_{PP} - m_{\sigma_{PP}})^2}{2 \cdot S_{\sigma_{PP}}^2}\right] \times \\ \times \left[\int_{\sigma_{PP}}^\infty \frac{1}{S_\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \exp\left\{-\frac{(\sigma - m_\sigma)^2}{2 S_\sigma^2}\right\} d\sigma \right] d\sigma_{PP}. \quad (10)$$

Опуская довольно сложные преобразования формулы (10), приведем конечное выражение для вероятности безотказной работы элемента конструкции

$$H = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{m_{\sigma_{PP}} - m_\sigma}{S_\sigma} \int_0^{\frac{\beta^2}{2}} e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta,$$

$$\text{где } S_z = \sqrt{S_{\sigma_{\text{ПП}}}^2 + S_{\sigma}^2}; \quad \beta = \frac{(m_{\sigma_{\text{ПП}}} - m_{\sigma})}{S_z}.$$

Сравним надежность (вероятность безотказной работы) и коэффициент безопасности, являющийся в машиностроении мерой прочностной надежности.

Определим коэффициент безопасности как отношение средних значений предельных и действующих напряжений

$$n = \frac{\overline{\sigma_{\text{ПП}}}}{\sigma}. \quad (11)$$

Подставляя (6) и (7) в (9), учитывая (11) после преобразований получим

$$H = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left(\frac{(n-1)}{\sqrt{2(S_{\sigma}^2 + S_{\sigma_{\text{ПП}}}^2)}} \right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left(\frac{(n-1)}{\sqrt{2(\nu_1^2 + n^2 \nu_2^2)}} \right) \right\}, \quad (12)$$

где $\nu_1 = \frac{S_{\sigma}}{\sigma}$; $\nu_2 = \frac{S_{\sigma_{\text{ПП}}}}{\sigma}$ – коэффициенты вариации действующих и предельных напряжений для материала элемента конструкции.

Уравнение (12) показывает, что при одном и том же коэффициенте безопасности в зависимости от коэффициентов вариации напряжений, имеют место различные значения вероятности разрушения, т.е. получаем различные оценки надежности конструкции. Следовательно, учет рассеяния, изменчивости характеристик материала и внешних нагрузок позволяет создавать конструкции, имеющие большую надежность и ресурс.

Рассмотрим на примере растянутого стержня влияние среднего квадратического отклонения при постоянном среднем значении, на вероятность разрушения.

Прочность стержня определяется размером поперечного сечения и свойством металла, которые в общем случае имеют рассеяние $F = \sigma_B \cdot A$,

где σ_B – предел прочности; A – площадь поперечного сечения.

Пусть среднее значение предела прочности равно $\overline{\sigma_B} = 45000 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$, а среднее значение площади $\overline{A} = 1,5 \text{ см}^2$.

Среднее значение силы будет $\overline{F} = \overline{\sigma_B} \cdot \overline{A} = 45000 \cdot 1,5 = 67500 \text{ Н}$.

Примем, что при рассеянии σ_B и A величина силы \overline{F} остается постоянной.

Положим, что в первом варианте средние квадратические отклонения были

$$S_{\sigma} = 2500 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}; \quad S_A = 0,015 \text{ см}^2.$$

Соответственно дисперсии равны

$$D_{\sigma} = 6,25 \cdot 10^6 \left(\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \right)^2; \quad D_A = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4.$$

Так как случайные величины σ_B и A независимы, то дисперсия D_F определяется выражением

$$D_F = D_{\sigma} \cdot D_A + \overline{\sigma}^2 D_A + \overline{A}^2 D_{\sigma}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$D_F = 6,25 \cdot 10^6 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4} + 45000^2 \cdot 2,25 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4} + 1,5^2 \cdot 6,25 \cdot 10^6 = 145195 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Среднее квадратическое отклонение силы $S_F = \sqrt{D_F} = \sqrt{145195 \cdot 10^2} = 3810 \text{ Н}$.

$$\text{Коэффициент вариации } \upsilon_F = \frac{S_F}{\bar{F}} = \frac{3810}{67500} = 0.056.$$

Кривая распределения плотности вероятности $f_1(F)$ представлена на рис. 3.

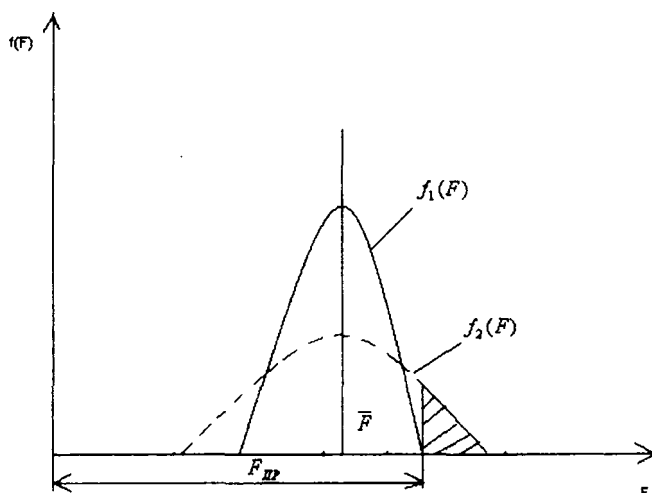


Рис. 3

Во втором варианте средние квадратические отклонения

$$S_\sigma = 4000 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}; S_A = 0,04 \text{ см}^2.$$

Соответственно дисперсии будут $D_\sigma = 16 \cdot 10^6 \left(\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \right)^2$; $D_A = 16 \cdot 10^{-4} \text{ см}^4$.

Дисперсия силы равна $D_F = 392656 \cdot 10^2 \text{ Н}^2$.

Среднее квадратическое отклонение силы $S_F = 6266 \text{ Н}$.

$$\text{Коэффициент вариации } \upsilon_F = \frac{6266}{67500} = 0.093.$$

Коэффициент вариации во втором варианте увеличился на 66 %.

Кривая распределения плотности вероятности $f_2(F)$ представлена также на рис. 3 (пунктиром).

Из рисунка следует, что если F_{PP} -предельная нагрузка, соответствующая предельному состоянию, то кривая плотности распределения вероятности $f_1(F)$ с ней не пересекается и разрушение невозможны. С увеличением рассеяния увеличивается правая ветвь кривой плотности распределения $f_2(F)$, которая пересекает F_{PP} , создавая вероятность разрушения, пропорциональную заштрихованной площади.

Следовательно, увеличение рассеяние при постоянном среднем значении силы \bar{F} , приводит к увеличению вероятности разрушения стержня. Аналогично можно показать влияние концентрации напряжений на вероятность разрушения элемента конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миттаг Х.-Й., Ринне Х. Статистические методы обеспечения качества. – М.: Машиностроение, 1995. – 616с.
2. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. – М: Физматгиз, 1960.
3. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.

СЕНСОРНАЯ МИКРОСИСТЕМА СВЕТОЦВЕТОВОГО КОНТРОЛЯ ПОЧВЫ: СХЕМОТЕХНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Колешко В.М., Гулай А.В., Гулай В.А., Полынкова Е.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Представлены разработанные схемотехнические решения электронно-оптического модуля для светоцветового контроля почвы в технологии точного земледелия. Выполнен анализ структуры целей сенсорного контроля в точном земледелии, а также функциональное назначение основных компонентов сенсорной микросистемы для реализации целей контроля почвы. Приведены электрические схемы сенсорных модулей со стабилизацией интенсивности, а также с импульсной модуляцией оптического излучения. Описана интеллектуальная сенсорная микросистема на светодиодных драйверах с реализацией функций саморефлексии и алгоритм ее функционирования. Проанализирован опыт применения созданной сенсорной микросистемы при лабораторных исследованиях и полевых испытаниях предложенного способа светоцветового контроля почвы. Показано изменение коэффициента яркости почвы в различных диапазонах оптического спектра в зависимости от содержания в ней органических веществ.

Один из наиболее продуктивных методов реализации технологий точного земледелия основан на получении и использовании достоверной информации о качестве почвы в каждой точке обрабатываемого сельскохозяйственного поля. Эффективным инструментом исследования свойств почвы и изменений, которые происходят в ней под влиянием человеческой деятельности, является контроль цветовых характеристик, которые наиболее полно и объективно определяются спектрами отражения. С учетом этого разработан светоцветовой метод контроля почвы в режиме реального времени по ее спектральной отражательной способности [1, 2]. Сущность разработанного метода заключается в формировании информационного образа в виде сочетания оптических параметров почвы и определении на его основе характеристик качества, в частности, концентрации в почве органических веществ. Для реализации данного метода создан ряд электронно-оптических модулей сенсорной микросистемы контроля почвы, схемотехнические решения и отличительные особенности которых представлены в настоящей работе.

Структурно-функциональное представление сенсорного контроля в технологии точного земледелия

Структура целей сенсорного контроля в точном земледелии

Значимость проблемы проектирования специальных сенсорных систем для контроля почвы определяется тем, что подходы, положенные в основу создания таких систем, оказывают существенное влияние на формирование структуры целей, достигаемых в технологии точного земледелия. Структуру целей на разных уровнях планирования и организации сельскохозяйственного производства (условно приняты оперативный, тактический, стратегический уровни) определим, отталкиваясь от интеллектуального процесса формирования динамического многопараметрового информационного образа (комплексного, обобщенного параметра) почвы как одного из центральных вопросов реализации технологии точного земледелия. Построение структуры целей на основе формирования информационного образа почвы с обобщением его к параметру плодородия почвы поясняется схемой на рис. 1.

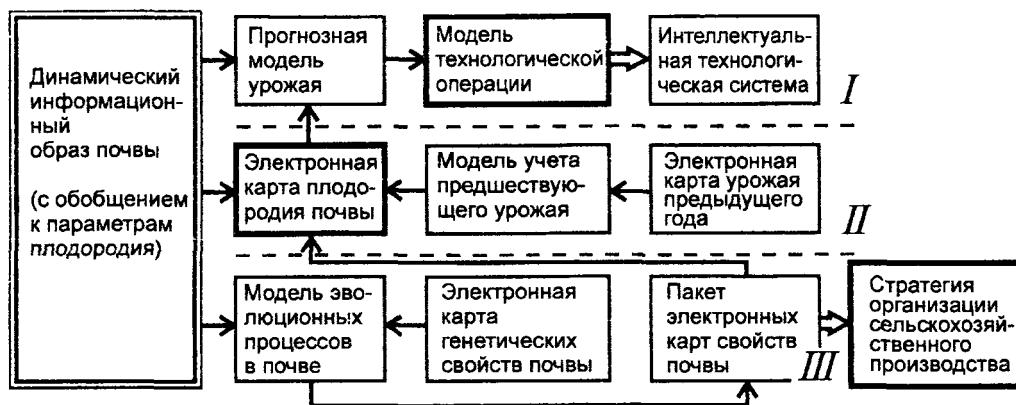


Рис. 1. Структура целей на разных уровнях реализации технологии точного земледелия

На оперативном уровне (I) контролируемые параметры почвы используются для создания прогнозной модели урожая, на основе которой интеллектуальная технологическая система реализует модель конкретной операции аграрного производства. На этой технологической стадии получение информационного сенсорного образа почвы является определяющим в реализации идеи точного, адаптивного земледелия. На тактическом уровне (II) для создания электронной карты плодородия почвы кроме оперативной, текущей сенсорной информации о свойствах и состоянии почвы используются также отложенные сведения о предшествующем урожае на обрабатываемом поле, которые обобщены в виде электронной карты урожая предыдущего года. В данном случае текущая информация о состоянии почвы используется как корректирующая в уточнении электронной карты плодородия. На уровне определения стратегии организации сельскохозяйственного производства (III) на основе пакета электронных карт физико-химических свойств почвы динамический информационный сенсорный образ учитывается в модели эволюционных почвенных процессов параллельно со сведениями о генетических свойствах почвы.

Таким образом, главными целями на условно принятых технологических уровнях являются: на оперативном – формирование модели конкретной аграрной операции интеллектуальной технологической системой; на тактическом – создание электронной карты почвенного плодородия; на стратегическом – получение пакета электронных карт физико-химических свойств почвы. Выделенные уровни целей объединены процессом использования динамического информационного образа почвы, а также связаны между собой операциями формирования моделей и создания электронных почвенных карт. Так, пакет электронных карт физико-химических свойств почвы анализируется при создании электронной карты плодородия почвы, которая, в свою очередь, ложится в основу прогнозной модели урожая текущего года.

Функции сенсорной микросистемы контроля почвы

Контроль отражательных характеристик почвы выполняется с помощью набора светодиодов и фотоприемника, а также устройства обработки информации (рис. 2). Сигнал с выхода фотоприемника обрабатывается микропроцессорным устройством, формирующим сенсорный информационный образ почвы. Мобильная интеллектуальная система технологического уровня оснащается аппаратурой спутниковой навигации, что позволяет осуществлять пространственную привязку результатов мониторинга почвы и использовать результаты контроля для создания высокоточных электронных почвенных карт. Сенсорная система светоцвето-

вого контроля может оснащаться подсистемой оценки других физических параметров почвы, например, блоком измерения ее температуры.

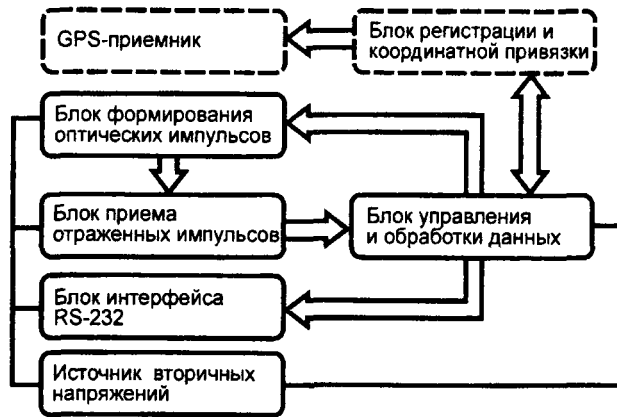


Рис. 2. Структурно-функциональная схема сенсорного модуля для цветоцветового контроля почвы

При создании сенсорных систем для контроля отражательных свойств почвы учитывается антропоморфный характер метода оценки ее качества по цвету, которая выполняется визуально на протяжении многих веков. Поэтому в соответствии с разработанным способом измерения параметров отражения почвы производится на тех длинах волн видимого диапазона, которые соответствуют определенному чистому цвету. С этой точки зрения выбираются следующие спектральные точки сенсорного контроля: фиолетовый свет (400 нм), синий (470 нм), зеленый (520 нм), желтый (590 нм), оранжевый (610 нм), красный (630 нм); дополнительно - инфракрасное излучение, белый свет. Количество спектральных точек контроля n связано с масштабом неоднородности q параметра отражения почвы в видимом оптическом диапазоне соотношением $n \geq c\Delta\lambda/q$, где $c > 1$ — постоянная, $\Delta\lambda$ — ширина оптического диапазона. Учитывая, что величина q трудно поддается анализу и определению, разработана модификация сенсорной системы, в которой точки контроля не соотносятся с определенным цветом, а равномерно размещены вдоль спектрального диапазона. Для такого варианта сенсорной системы использованы светодиоды с длиной волны излучения 405; 460; 505; 530; 570; 620; 660 нм.

Электронно-оптический сенсорный модуль со стабилизацией интенсивности оптического излучения

Особенности сенсорной микросистемы

Структурная схема сенсорной микросистемы состоит из следующих блоков: источника вторичных напряжений, схемы подключения микроконтроллера, схемы управления световыми импульсами, схемы обработки сигналов фотоприемника (рис. 3). Основной особенностью электронно-оптического блока является то, что питание светодиодов осуществляется стабилизированным током. Поскольку интенсивность излучения светодиодов прямо пропорционально току питания, следовательно, стабилизация тока позволяет снизить флуктуации интенсивности излучения при воздействии побочных факторов и за счет этого повысить точность контроля показателя отражения оптического излучения от контролируемого участка почвы.

Электронно-оптический блок выдает посредством интерфейсов RS-232 либо RS-485 (задается пользователем) восемь чисел в двоично-десятичном представлении, соответствующих коэффициентам отражения излучения по каждой из восьми спектральных линий. Диапазон каждого значения 0...1000. Значение 0 свидетельствует об отражении поверхностью излучения, более чем в 100 раз меньшего, нежели от калибровочной поверхности. Значение 1000 соответствует коэффициенту отражения излучения исследуемой поверхностью, равному коэффициенту отражения от эталонной поверхности, по которой проводится калибровка электронно-оптического блока.

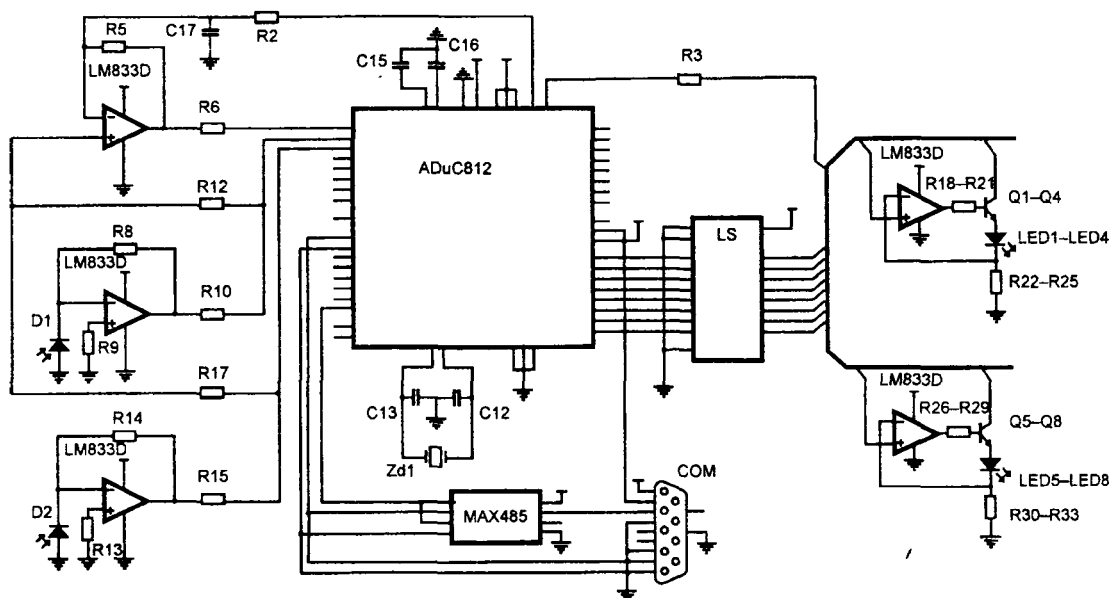


Рис. 3. Электрическая схема электронно-оптического модуля сенсорной микросистемы со стабилизацией интенсивности оптического излучения

Конструктивно электронная часть сенсорного блока выполняется в виде двух печатных плат с размерами порядка 48x80 мм, на которых размещены отдельные модули сенсорной системы, электрически соединенные между собой с помощью разъема. Обе платы механически крепятся к металлической панели, содержащей светодиоды и фотоприемники. Разработанная конструкция позволяет использовать фотодиоды, обладающие максимальной чувствительностью в разных диапазонах видимого спектра. Конструкция электронно-оптического блока оптимизирована таким образом, что один из фотодиодов принимает отраженный от почвы свет синего и фиолетового светодиодов, а другой фотодиод принимает отраженное излучение других светодиодов. Для увеличения интенсивности падающего излучения возможна установка двух светодиодов фиолетового цвета и двух светодиодов синего цвета, имеющих наименьшую излучательную способность. Использование разработанной конструкции позволяет выдерживать расстояние между контролируемой поверхностью почвы и плоскостью фотоприемников порядка 10 мм, что положительно сказывается на точности контроля качества почвы.

Рабочий диапазон температур электронно-оптического блока 0...+30 градусов, температура хранения -20...+50 градусов. Электронно-оптический блок питается от стабилизированного источника питания, напряжение питания 4.9...5.1 В, ток потребления не превышает 300 мА. Погрешность измерения электронно-оптического блока по каждой спектральной линии не более 1%. Длина линии передачи информации не должна превышать: 10 метров при исполь-

зовании интерфейса RS-232, 1000 метров — при использовании интерфейса RS-485.

Источник вторичных напряжений предназначен для генерации напряжения питания всех блоков сенсорной системы. На вход источника подается напряжение питания (VCC) +5 В. Преобразователь напряжения дает на линии VDD напряжение, необходимое для питания схемы управления световыми импульсами; ток источника 60 мА. На микросхеме LE66CD собран источник напряжения AVDD, необходимый для питания аналоговой части микроконтроллера и схемы обработки импульсов фотоприемника. Напряжение AVDD равно 5,5 В, его отклонение от нормального значения не превышает 1%.

Микроконтроллер ADuC812 управляет работой электронно-оптического блока, проводит логические и математические операции над полученными результатами, осуществляет информационный обмен с устройством регистрации и координатной привязки. Микроконтроллер может находиться в трех режимах работы: программирования, калибровки, снятия и передачи данных.

Схема управления импульсами светодиодов осуществляет регулирование тока, протекающего через каждый светодиод. Ток через светодиод прямо пропорционален напряжению ЦАП микроконтроллера DAC1. Диапазон регулирования тока 0...40 мА. При напряжении DAC1, равном 1 В, ток через светодиод составляет 20 мА; для увеличения тока до 40 мА напряжение DAC1 должно составлять 2 В. Последовательность включения светодиодов определяется состоянием выходов микроконтроллера A1...A8.

Схема обработки сигналов осуществляет линейное преобразование мощности светового потока, поступающего на фотоприемник, в напряжение воспринимаемого диапазона АЦП микроконтроллера. Коэффициент преобразования определяет ЦАП микроконтроллера DAC0.

Блок интерфейсов. Обмен информацией с электронно-оптическим блоком происходит посредством интерфейсов RS-232 либо RS-485. Интерфейс RS-485 организован на микросхеме MAX485. Интерфейс RS-232 реализован непосредственно на управляющем микроконтроллере.

Алгоритм работы. Режим калибровки выполняется после поступления команды на калибровку от блока регистрации и координатной привязки (код 33h). В режиме снятия и передачи данных, после подачи напряжения питания на прибор, микроконтроллер инициализируется и переходит в ждущий режим, необходимый для завершения переходных процессов. Продолжительность данного режима 100 мс. При этом напряжение на двух ЦАП микроконтроллера равно нулю, все цифровые выходы находятся в состоянии логического нуля. После завершения режима микроконтроллер устанавливает на выходе DAC1 напряжение, определяющее ток через светодиод DS1, на выходе DAC0 — напряжение, определяющее коэффициент преобразования схемы обработки сигналов фотоприемника. Микроконтроллер находится в указанном состоянии 5 мс, после чего устанавливает логическую единицу на выводе A1 (включение светодиода DS2), а затем АЦП микроконтроллера начинает оцифровку напряжения на выводе ADC0. Получаемые данные заносятся в память микроконтроллера.

После завершения шестнадцати циклов оцифровки, микроконтроллер переводит вывод A1 в состояние логического нуля, усредняет 16 полученных данных, результат заносит в память. На выходе DAC1 устанавливает напряжение, определяющее ток через светодиод DS2, на выходе DAC0 - напряжение, определяющее коэффициент преобразования схемы обработки сигналов фотоприемника при горении DS2, и устанавливает логическую единицу на выводе A2 (включение све-

одиода DS2). Через заданный промежуток времени начинается оцифровка сигнала ADC0. В дальнейшем цикл повторяется для остальных светодиодов. В результате, после выключения восьмого светодиода, в памяти микроконтроллера записаны восемь усредненных значений АЦП. Затем цикл контроля возобновляется с первого светодиода. Восемь чисел, получаемых после включения всех светодиодов, сохраняются в буфере памяти микроконтроллера. В буфере хранятся данные четырех последних циклов контроля; после завершения пятого цикла данные первого цикла удаляются и заполняются данными, полученными во втором цикле. При получении запроса от блока регистрации и координатной привязки (код AAh) микроконтроллер доводит текущий цикл до конца, начинает новый цикл и во время ожидания перед включением первого светодиода усредняет данные, хранящиеся в буфере за четыре цикла, и отправляет их в блок регистрации и координатной привязки, сделавший запрос.

Сенсорная микросистема с модуляцией оптических сигналов и контролем температуры почвы

Подключение микроконвертора

В схеме использован микроконвертор — специальный гибридный микроконтроллер, предназначенный для выполнения аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразований с высокой степенью точности (рис. 4). Для устранения фоновых шумов в составе оптического сигнала, которые отрицательно влияют на точность контроля, в сенсорной системе используется модуляция излучения светодиодов и последующее детектирование принимаемых оптических сигналов. Сигнал модулируется с помощью генератора, выполненного на микросхеме 74HC00, частота настройки которого равна 100 кГц. Таким образом, с микроконтроллера снята функция генератора (как неосновная функция в работе сенсорной системы), он лишь выполняет включение генератора сигналом логической единицы на выводе GEN_ON/OFF.

Выходы ADC0 и ADC1 используются для подачи на АЦП сигналов фотоприемника и сенсора температуры. Выводы DAC0 и DAC1 являются выходами ЦАП и предназначены для регулирования амплитуды оптических импульсов на светодиодах и управления коэффициентом усиления системы обработки сигналов фотоприемника. Выводы D1...11 служат для включения определенного светодиода. Выводы RxD и TxD являются линиями связи с управляющим микроконтроллером. С их помощью подключается также микроконвертор к микросхемам преобразования интерфейсов RS-422 и RS-232C (COM порт компьютера). С использованием вывода RE/DE при необходимости включается интерфейс RS-422. Для получения вторичных напряжений питания применяется микросхема 78L05 — стабилизатор постоянного напряжения 5 В.

Модуль интерфейсов

Микросхема MAX489 преобразует TTL уровни интерфейса RS-232 в дифференциальные сигналы интерфейса RS-422. Микросхема MAX3232 служит для согласования устройства при его подключении к COM порту компьютера. Линия RE/DE разрешает передачу данных по интерфейсу RS-422.

Схема генерации оптических импульсов

Импульсы частотой 100 кГц с выхода генератора на микросхеме 74HC00 после усиления поступают на вход модуля светодиодов. Ток, проходящий через све-

одиод, создает падение напряжения на резисторе RP1, которое усиливается с помощью операционного усилителя U103A с коэффициентом усиления, равным 5. Операционный усилитель U103B работает в режиме компаратора, на инвертирующий вход которого подается напряжение с цифро-аналогового преобразователя микроконвертора. Когда уровень напряжения на неинвертирующем входе микроконвертора превышает уровень напряжения ЦАП, открывается транзистор Q18, коммутирующий выход генератора на землю. Таким образом, ток, протекающий через светодиод, определяется напряжением ЦАП, то есть управляется микроконвертором; диапазон регулирования тока составляет 5–35 мА.

Схема обработки сигналов фотоприемника

Фотодиод работает в режиме источника тока, при этом его выходной ток создает падение напряжения на резисторе R22. Это напряжение усиливается с помощью операционного усилителя U104B (коэффициент усиления равен 10). Далее, для выделения переменной составляющей сигнала используется конденсатор C14, а для его усиления — U104A с коэффициентом усиления 100. Детектирование сигнала производится с помощью цепочки D2–C17.

Схема подключения светодиодов

Модуль светоизлучающих элементов состоит из восьми пар светодиодов, коммутируемых транзисторами Q46–Q61. На эмиттеры транзисторов подаются сигналы с выхода системы управления импульсами светодиодов, а порядок работы светодиодов определяется микроконвертором.

Блок контроля температуры

Контроль температуры выполняется с использованием микроконтроллера PIC16F688T. Источник питания данного блока собран на основе стабилизатора напряжения 78L05, а для реализации функций интерфейса использована микросхема MAX489. Такое схемотехническое построение блока контроля температуры позволяет выполнять его в виде автономного конструктивного модуля в сенсорной системе мониторинга почвы.

Алгоритм работы сенсорного модуля

При подаче напряжения питания на сенсорный модуль микроконвертор инициализируется и входит в режим снятия данных. Далее при поступлении на вход устройства управляющего кода 33h производится цикл нормирующих измерений. На данном этапе выполняется контроль коэффициента яркости эталонной белой поверхности, при этом контроллер генерирует последовательность импульсов светодиодов минимальной амплитуды. С помощью аналого-цифрового преобразователя снимаются показания фотоприемника, и с учетом полученных данных микроконвертор устанавливает амплитуды сигналов светодиодов такими, чтобы при следующем цикле контроля амплитуда принятых детектированных сигналов была равна 4 В. Если указанный уровень не достигнут, производятся повторные циклы подгонки. Уровни нормирующих значений ЦАП заносятся в память микроконвертора, и устройство отправляет код о готовности.

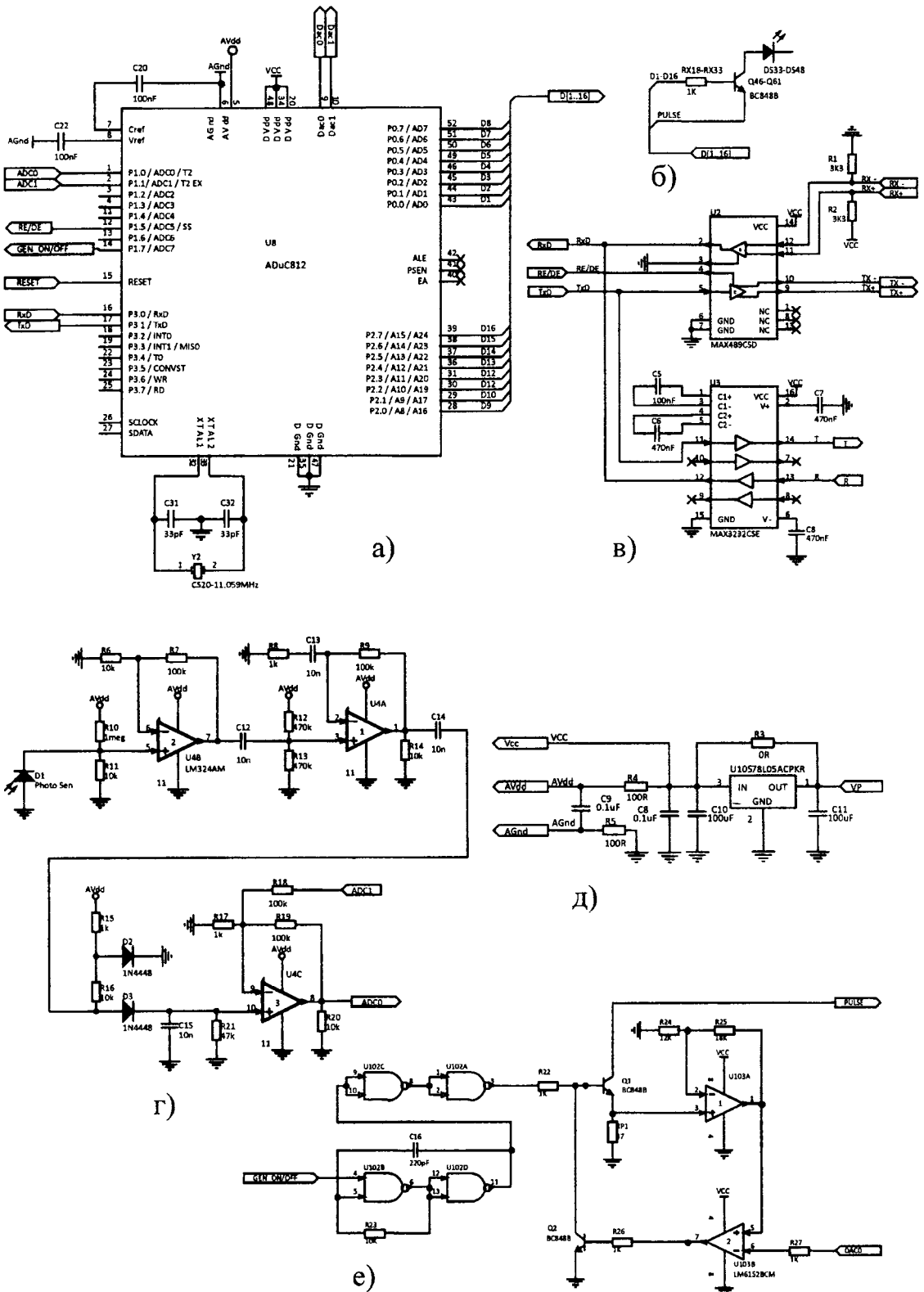


Рис. 4. Электрические схемы: а — подключение микроконвертора; б — система светодиодов; в — блок интерфейсов; г — блок обработки сигналов; д — источник вторичных напряжений; е — система управления светодиодами

В процессе работы управляющая система посылает запрос о проведении контроля, при этом сенсорный модуль производит цикл из четырех измерений. Полученные данные об интенсивности отраженного сигнала усредняются и записываются в память микроконвертора. Затем происходит деление полученных дан-

ных на нормировочную величину отраженного от белой поверхности сигнала. В результате получаются значения, соответствующие шестнадцати коэффициентам отражения. Благодаря использованию пар светодиодов одинаковых спектров компенсируется угол наклона устройства к контролируемой поверхности. Устройство отсылает 18 байт информации: 16 первых байт соответствуют восьми коэффициентам яркости почвы и два байта используются для проверки достоверности передаваемой информации.

Интеллектуальная сенсорная микросистема на светодиодных драйверах с реализацией функций саморефлексии

Схема подключения микроконтроллера и источника вторичных напряжений приведена на рис. 5, а схема управления светодиодными импульсами и обработки сигналов фотоприемника – на рис. 6. Представляется важным дать краткую характеристику основных компонентов, входящих в состав электронных блоков интеллектуального светоцветового модуля: источника вторичных напряжений, блока интерфейса RS-232, схемы формирования оптических импульсов, блока приема отраженных световых импульсов, блока управления и обработки данных.

Отличительной особенностью данной сенсорной системы является то, что она реализует функции самодиагностики, например диагностики излучателей света, для исключения использования сигналов с выхода неисправных приборов. Кроме того, в состав задач, решаемых сенсорной системой введена функция самокоррекции — возможность коррекции светового потока, который изменяется при изменении температурного режима оптических излучателей. Получаемые результаты сенсорного контроля сопровождаются информацией об их достоверности, что составляет функцию самоаттестации сенсорной системы.

Источник вторичных напряжений

Поскольку разработанный сенсорный прибор выполняется в мобильном варианте и базируется на сельскохозяйственных машинах, его питание осуществляется от источника постоянного напряжения 12 В. В качестве источника опорного напряжения АЦП используется внутренний генератор опорного напряжения микроконтроллера. Для получения стабилизированного напряжения питания цифровых микросхем 5,0 и 3,3 В применяются линейные стабилизаторы напряжения LM1117IMPX-5.0 и LM1117IMPX-3.3 соответственно. Они характеризуются низким минимальным падением напряжения, высоким подавлением помех по питанию и высокой точностью. В соответствии со своими параметрами (максимальное входное напряжение 20 В; выходное напряжение для LM1117IMPX-5.0: 4,8–5,2 В, для LM1117IMPX-3.3: 3,168–3,432 В; нестабильность выходного напряжения 1 мВ) данные линейные стабилизаторы напряжения вполне применимы в схеме источника вторичных напряжений интеллектуальной сенсорной системы.

увеличить или уменьшить ток, проходящий через светодиод, при помощи светодиодного драйвера MBI5171CD. Параметры данной микросхемы (8 каналов с постоянным током; максимальный ток через канал — 120 мА; максимальная частота — 25 МГц; высокая точность стабилизации тока: между каналами < 3%, между микросхемами < 6%) удовлетворяют требованиям, предъявляемым к компонентам интеллектуальной системы цветоцветового контроля.

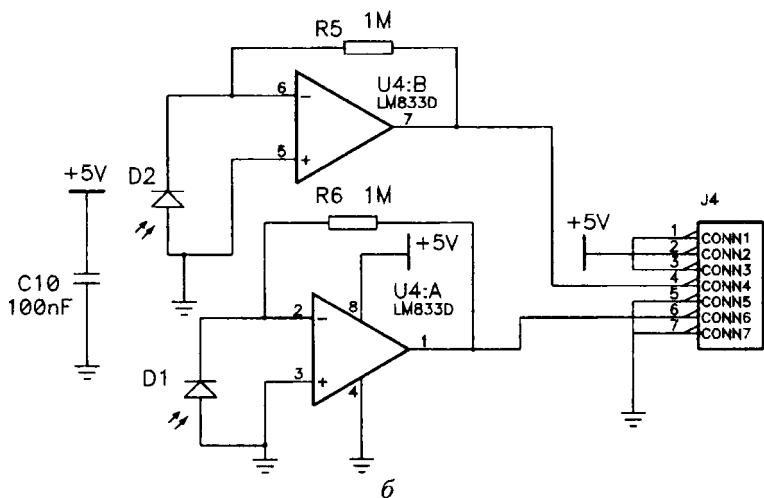
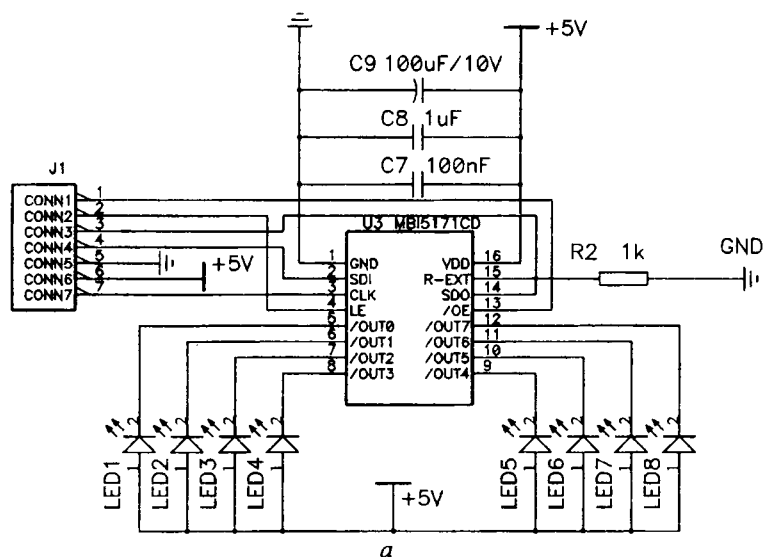


Рис. 6. Схема управления светодиодными импульсами (а) и обработки выходных сигналов фотоприемника (б)

Блок приема отраженных световых импульсов

Данный блок состоит из фотодиода и подключенной к нему микросхемы операционного усилителя LM833D. Операционный усилитель включен по схеме преобразования тока в напряжение. Указанная микросхема состоит из двух операционных усилителей, один из которых используется в связке с фотодиодом, принимающим импульсы, излучаемые светодиодом, а второй — в связке с фотодиодом, принимающим отраженные оптические импульсы. Микросхема характеризуется достаточно высоким коэффициентом усиления — 110 дБ и низким уровнем шума — 4,5 нВ.

Блок управления и обработки данных

Указанный блок содержит микроконтроллер C8051F121, который выполняет следующие функции: управление световыми импульсами и их коррекцию; прием и хранение оцифрованного значения отраженных импульсов; диагностику чувствительных элементов; обработку данных и формирование результатов; аттестацию результатов контроля; прием и передачу данных по интерфейсу RS-232.

Алгоритм функционирования интеллектуального сенсорного модуля.

После включения питания микроконтроллер приступает к инициализации, которая заключается в увеличении его тактовой частоты за счет использования встроенной системы автоподстройки. Элементом стабилизации частоты тактового сигнала служит кварцевый резонатор с частотой 11059200 Гц. После настройки генератора микроконтроллер выполняет настройку периферийных модулей, а затем переходит в режим ожидания новой команды. Каждые 50 мкс переопределение таймера запускает аналого-цифровое преобразование, по окончании которого микроконтроллер переходит к процедуре обработки прерывания по АЦП. Микроконтроллер записывает 16 оцифрованных значений с одного светодиода, гасит его и включает другой светодиод. Всего по каждой спектральной линии хранится 64 значения.

Если микроконтроллер получает команду **провести поверку модуля**, он выполняет следующие действия:

- 1) включает режим поверки прибора;
- 2) ожидает окончания поверки;
- 3) усредняет полученные данные;
- 4) записывает результаты во Flash-память.

При получении команды **определить тип почвы** микроконтроллер производит следующее:

- 1) вычисляет среднее значение коэффициента яркости на определенной спектральной линии;
- 2) определяет коэффициент вариации показателя отражения почвы;
- 3) среднее значение и коэффициент вариации заносит в память;
- 4) проводит проверку вычисления средних значений коэффициента яркости и коэффициентов вариации; переходит к п. 1, если вычисления не выполнены;
- 5) вычисляет евклидово расстояние от исследуемого значения до соответствующей табличной величины; устанавливает достоверность результата;
- 6) сравнивает величину евклидова расстояния с его минимальным значением; переходит к выполнению п. 8, если полученная величина больше минимального значения;
- 7) записывает номер почвенного образца и евклидово расстояние как минимальное;
- 8) проверяет на окончание чтения таблицы с параметрами почв; переходит в п. 5, если чтение таблицы не закончено;
- 9) определяет достоверность результата (при его зависимости от температуры);
- 10) записывает в буфер передатчика свой адрес, адрес получателя, тип почвы, достоверность результата, CRC.

Опыт применения разработанной сенсорной системы для цветоцветового контроля почвы

Конструктивно интеллектуальная сенсорная система выполняется в виде унифицированного модуля, который встраивается в заглубляемый в почву механизм

сельскохозяйственного агрегата с целью совмещения процедуры мониторинга почвы с проведением технологической операции. Сенсорный контроль осуществляется также с помощью разработанной автономной мобильной системы в виде прицепного устройства к мини-трактору. Кроме того, модификацией конструкции интеллектуальной сенсорной системы является малогабаритное устройство для фермерских хозяйств и индивидуальных предпринимателей.

Лабораторные исследования

Для экспериментального исследования способа светоцветового контроля почвы в лабораторных условиях разработано устройство, представляющее собой механизм для плавного перемещения оптического сенсорного модуля над почвенным образцом и состоящее из шагового электродвигателя, обеспечивающего передвижение оптического модуля по направляющим, и элементов передачи движения к данному модулю (рис. 7). Управление механизмом перемещения и осуществление его связи с электронно-оптическим блоком производится с помощью микроконтроллера AT Mega 16. Выбор шагового электродвигателя в качестве электропривода дискретного действия в разработанном устройстве обусловлен его существенными достоинствами: такой двигатель дает возможность преобразовывать унитарный код (последовательность импульсов) в пропорциональное перемещение механизма.

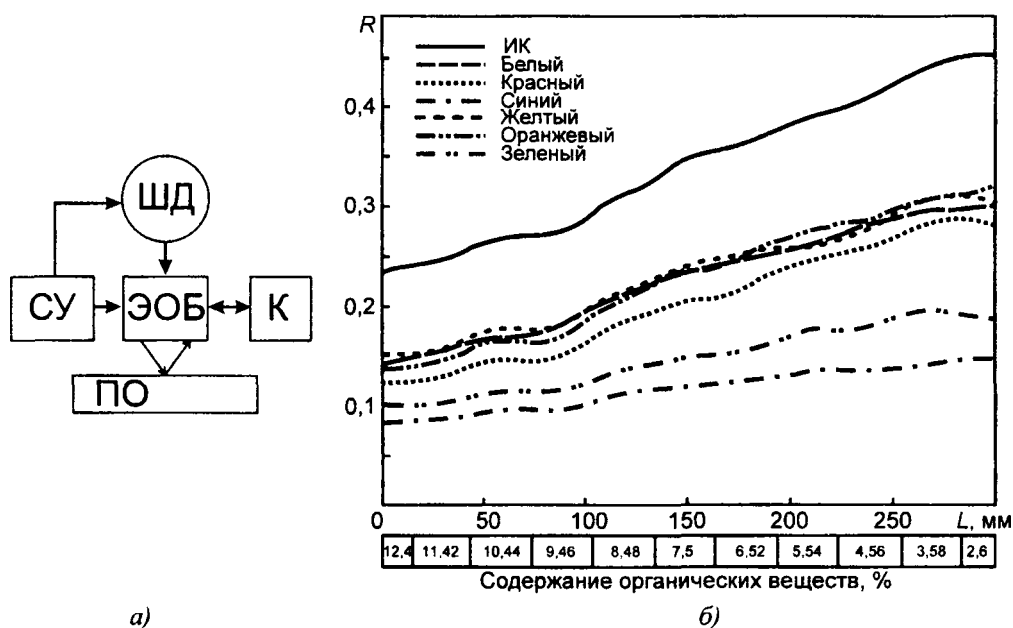


Рис. 7. Структурная схема экспериментального устройства для исследования способа светоцветового контроля почвы (а) и зависимость коэффициента яркости почвенного образца от содержания органических веществ (б): ЭОБ — электронно-оптический блок; К — компьютер; ПО — почвенные образцы; ШД — шаговый двигатель; СУ — схема управления шаговым двигателем

Динамический светоцветовой контроль почвы с использованием данной многоканальной сканирующей сенсорной системы осуществляется следующим образом. С компьютера на сенсорный блок передается команда запуска измерений, сенсорный блок включает светодиоды, передает команду о начале измерений на схему управления шаговым двигателем и начинает съем информации. Схема управления шаговым двигателем после получения информации о начале измерений производит коммутацию обмоток двигателя в необходимом для передвиже-

ния сенсорного блока порядке. После перемещения сенсорного блока на заданную величину схема управления формирует сигнал об окончании цикла измерений и передает его на сенсорный блок, при этом прекращается съем информации. Продолжительность процедуры динамического контроля почвенного образца составляет 30 с (144 значения амплитуды 8 информационных импульсов длительностью по 10 мс с временными промежутками между импульсами по 5 мс).

Почвенный образец представляет собой кювету, заполненную смесью почв с заранее известным содержанием органических веществ и определенной влажностью (~1–2%). Для подготовки почвенных образцов использовались следующие типы почв:

- темно-серая почва, содержащая 12,4% органических веществ и включающая сравнительно крупные частицы сложной формы, вероятнее всего органического происхождения;
- светло-желтая почва, содержащая 2,6% органических веществ, имеющая в своем составе как крупные частицы округлой формы, так и значительное количество мелких частиц.

Зависимости коэффициента яркости от положения электронно-оптического блока над поверхностью почвенного образца представлены на рис. 3. Наибольшие значения коэффициента яркости характерны для ИК-излучения, наименьшие — для синего света, причем все цветовые диапазоны в порядке уменьшения R располагаются в следующий ряд: ИК-излучение, оранжевый и желтый свет, белый, красный, зеленый, синий свет. Коэффициент яркости почвы наиболее плавно увеличивается с уменьшением содержания в ней органических веществ от 12,4% до 9,46 % и более резко возрастает при уменьшении этого параметра почвы с 9,46 % до 2,6 %. Указанная зависимость R от содержания органических веществ характерна для всех цветовых диапазонов оптического излучения, используемых в процессе диагностики почвы.

Полевые испытания

Конструкция разработанной мобильной сенсорной микросистемы для использования в качестве навесного механизма к мини-трактору показана на рис. 8. Электронно-оптический модуль сенсорной микросистемы соединен с блоком регистрации и координатной привязки, который осуществляет запись получаемых результатов и географические координаты точки контроля. Здесь же представлен фрагмент временной последовательности данных в виде коэффициентов яркости почвы для разных спектральных точек видимого диапазона. Разные каналы записи представленных данных соответствуют измеряемым параметрам при освещении почвы оптическим излучением разного цвета.

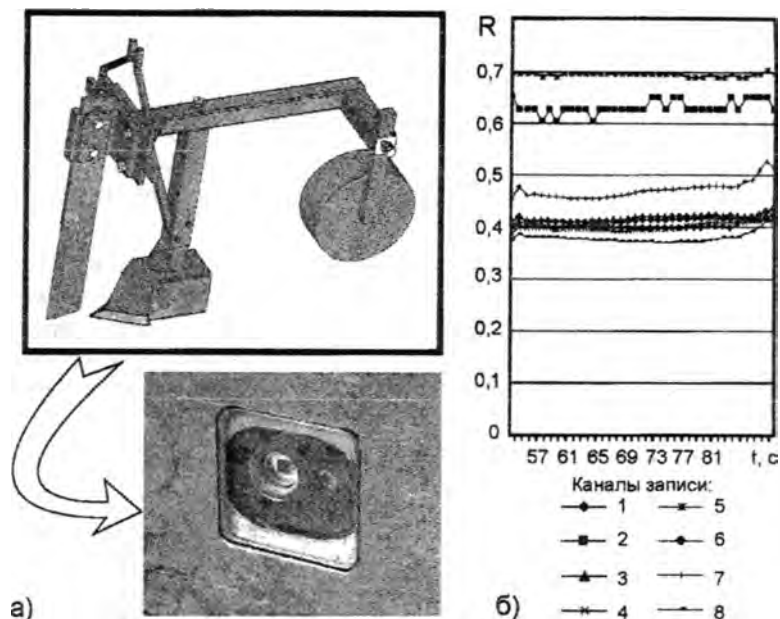


Рис. 8. Внешний вид сенсорной микросистемы для светоцветового контроля почвы (а) и фрагмент временной последовательности данных с ее выхода (б)

Оснащение разработанной мультисенсорной системы средствами автоматической навигации позволяет выполнять контроль параметров почвы с определенной периодичностью, производить привязку формируемого информационного образа почвы к координатам местности, заносить в память результаты контроля, а также долготу и широту каждой точки контроля. Механика системы дает возможность выдерживать заданную величину заглубления в течение всего процесса диагностики почвы, то есть «копировать» поверхность почвы. Глубина контроля регулируется исходя из особенностей строения профиля почвы и залегания ее гумусово-аккумулятивного горизонта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колешко В. М., Гулай А. В., Лученок С. А. Светоцветовой метод эволюционной диагностики почв для технологии точного земледелия // Теоретическая и прикладная механика: межведомств. сб. научно-методических статей. — 2006. — Вып. 20. — С. 198–208.
2. Колешко В. М., Гулай А. В., Лученок С. А. Формирование светоцветового информационного образа почвы в технологии точного земледелия // Теоретическая и прикладная механика: научно-технический международный журнал. — 2007. — Вып. 22. — С. 279–286.

ЛОКАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Ботогова М.Г.

Белорусский государственный университет, Минск

Рассматривается класс задач о свободных колебаниях вязкоупругих конических оболочек средней длины. Оболочки не обязательно являются оболочками вращения, края оболочки в общем случае являются не обязательно плоскими кривыми. Материал этой статьи опирается на результаты работы [1], в которой был предложен метод построения решения уравнений пологих оболочек, сосредоточенного в окрестности «наиболее слабой» асимптотической линии.

1. Основные асимптотические формулы

Рассмотрим свободные колебания некруговой конической оболочки. На срединной поверхности введем ортогональную систему координат s и φ , причем координату φ на направляющей выберем таким образом, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $d\sigma^2 = R^2(ds^2 + s^2d\varphi^2)$. Здесь $s = s^0 R^{-1}$, s^0 – расстояние до вершины конуса, R – радиус срединной поверхности, φ – координата на направляющей. Считаем, что оболочка ограничена двумя краями $s_1(\varphi) \leq s \leq s_2(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Материал оболочки – линейновязкоупругий с мгновенным модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Для описания спектра колебаний может быть использована система уравнений пологих оболочек [1,2], записанная в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Delta^2 \left[W' - \int_{-\infty}^t K(t-\tau) W'(\tau) d\tau \right] + \frac{k(\varphi)}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + m_p \frac{\partial^2 W'}{\partial t^2} &= 0; \\ \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi - \frac{k(\varphi)}{s} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[W' - \int_{-\infty}^t K(t-\tau) W'(\tau) d\tau \right] &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s}, \quad \varepsilon^8 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}, \quad W' = \varepsilon^4 R^{-1} W^*,$$
$$\Phi = \Phi^* (\varepsilon^4 E h)^{-1}, \quad m_p = \rho R^2 (\varepsilon^4 E)^{-1}.$$

Здесь ε – малый параметр, W^* , Φ^* – нормальный прогиб и функция напряжений соответственно, ρ – плотность материала, $K(t-\tau)$ – функция скорости релаксации. Слагаемые в (1), содержащие функцию $K(t-\tau)$ будем называть «вязкими».

В качестве граничных условий на краях $s_i = s_i(\varphi)$ рассмотрим группу шарнирного закрепления. Напряженное состояние оболочки состоит из основного напряженного состояния и простого краевого эффекта вблизи краев. Для построения основного напряженного состояния необходимо на каждом крае удовлетворить лишь двум условиям. Для группы шарнирной опоры эти условия с точностью до величин порядка ε^2 имеют вид [1]

$$W' = \Phi = 0 \text{ при } s_i = s_i(\varphi), \quad i=1, 2. \quad (2)$$

Представим решение системы (1) в виде

$$W' = W(s, \varphi, \varepsilon) \exp(i\Omega t), \quad \Phi = F(s, \varphi, \varepsilon) \exp(i\Omega t), \quad \Omega = \omega + i\alpha, \quad (3)$$

где ω – искомая частота, α – число, характеризующее скорость затухания колебаний. Подставляя (3) в (1) и замечая, что $\int_{-\infty}^t K(t - \tau) \exp(i\Omega \tau) d\tau = \exp(i\Omega t) C$, где $C = \int_0^{+\infty} K(\theta) \exp(-i\Omega \theta) d\theta$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (1 - C)\varepsilon^4 \Delta^2 W + \frac{k(\varphi)}{s} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - m_p \Omega^2 W &= 0, \\ \varepsilon^4 \Delta^2 F - \frac{k(\varphi)(1 - C)}{s} \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Принимая во внимание зависимость радиуса кривизны и краев оболочки $s_i(\varphi)$ от φ , мы предполагаем, что оболочка имеет «наиболее слабую» образующую, вблизи которой локализуются собственные формы колебаний [1]. Решение системы уравнений (4) при удалении от «наиболее слабой» образующей может быть представлено в виде ВКБ-функций [1,2]:

$$W = W_\Sigma(s, \xi) \exp \left\{ i \left[\varepsilon^{-1/2} p \xi + \frac{1}{2} b \xi^2 \right] \right\}; \quad (5)$$

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots, \quad k(\varphi) = k(\varphi_0) + \varepsilon k'(\varphi_0) + 0.5 \varepsilon^2 k''(\varphi_0) + \dots \quad (6)$$

$$W_\Sigma(s, \xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^{n/2} w_n(s, \xi), \quad \xi = \varepsilon^{-1/2} (\varphi - \varphi_0), \quad (7)$$

где $w_n(s, \xi)$ полиномы по ξ , $\varphi = \varphi_0$ – «наиболее слабая» образующая, в окрестности которой локализуются колебания, p, b – неизвестные числа ($Im p = 0, Im b > 0$). Число p определяет изменчивость в направлении φ , а параметр b характеризует скорость уменьшения глубины вмятины при удалении от нее. Функция F ищется в виде (5). Учитывая (6),

$$C = \int_0^{+\infty} K(\theta) e^{-i(\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots)\theta} d\theta = C_0 + \varepsilon \Omega_1 C_1,$$

где
$$C_0 = \int_0^{+\infty} K(\theta) e^{-i\Omega_0 \theta} d\theta, \quad (8)$$

$$C_1 = -i \int_0^{+\infty} \theta K(\theta) e^{-i\Omega_0 \theta} d\theta.$$

Подставляя (5)-(7), предварительно исключив функцию F , учитывая (8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$, получим последовательность уравнений для определения $w_n(s, \xi)$, которая может быть записана в виде

$$L_0 w_0 = 0, \quad L_0 w_1 + L_1 w_0 = 0, \quad L_0 w_2 + L_1 w_1 + L_2 w_0 = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$L_0 z = \frac{(1 - C_0) p^4 z}{s^3} + \frac{k^2(\varphi_0)(1 - C_0)}{p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right) - m_p \Omega_0^2 s z; \quad (10)$$

$$L_1 z = b \frac{\partial L_0}{\partial p} \xi z - i \frac{\partial L_0}{\partial p} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial L_0}{\partial \varphi_0} \xi z;$$

$$L_2 z = \left(\frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2} + 2b \frac{\partial^2 L_0}{\partial p \partial \varphi_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_0}{\partial \varphi_0^2} \right) \xi^2 z - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - ib \frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2} \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} - i \frac{\partial^2 L_0}{\partial p \partial \varphi_0} \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 L_0}{\partial p \partial \varphi_0} z - \frac{i}{2} ib \frac{\partial^2 L_0}{\partial p^2} z + \Omega_1 N z;$$

$$N z = \frac{\partial L_0}{\partial \omega_0} z.$$

Граничные условия для w_n при $s_i = s_i(\varphi)$ получаются из (2) с учетом (5), (7) и имеют следующий вид:

$$w_0(s, \xi) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} = 0, \quad w_1(s, \xi) + \xi s' \frac{\partial w_0}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial s^2} + \xi s' \frac{\partial^3 w_0}{\partial s^3} = 0. \quad (11)$$

2. Краевая задача в нулевом приближении

Рассмотрим краевую задачу (12) в нулевом приближении

$$\frac{(1-C_0)p^4 w_0}{s^3} + \frac{k^2(\varphi_0)(1-C_0)}{p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} \right) - m_p \Omega_0^2 s w_0 = 0; \quad (12)$$

$$w_0(s, \xi) = \frac{\partial^2 w_0}{\partial s^2} = 0 \text{ при } s_i = s_i(\varphi).$$

Здесь

$$C_0 = B_0 - iA_0, \quad w_0 = w_0^{(1)} + iw_0^{(2)}, \quad B_0 = \int_0^{+\infty} K(\theta) e^{\alpha_0 \theta} \cos(\omega_0 \theta) d\theta,$$

$$A_0 = \int_0^{+\infty} K(\theta) e^{\alpha_0 \theta} \sin(\omega_0 \theta) d\theta, \quad \Omega_0 = \omega_0 + i\alpha_0.$$

Отделяя вещественную и мнимую части в уравнении (12), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{k^2(\varphi_0)(1-B_0)}{p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2} \right) - \frac{k^2(\varphi_0)A_0}{p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2} \right) + \frac{(1-B_0)p^4 w_0^{(1)}}{s^3} - \frac{A_0 p^4 w_0^{(2)}}{s^3} - m_p (\omega_0^2 - \alpha_0^2) s w_0^{(1)} + 2m_p \alpha_0 \omega_0 s w_0^{(2)} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{k^2(\varphi_0)(1-B_0)}{p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2} \right) + \frac{k^2(\varphi_0)A_0}{p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2} \right) + \frac{(1-B_0)p^4 w_0^{(2)}}{s^3} + \frac{A_0 p^4 w_0^{(1)}}{s^3} - m_p (\omega_0^2 - \alpha_0^2) s w_0^{(2)} - 2m_p \alpha_0 \omega_0 s w_0^{(1)} = 0.$$

$$w_0^{(1)} = w_0^{(2)} = \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2} = 0. \quad (14)$$

Заметим, что для рассматриваемого варианта граничных условий имеет место равенство

$$\int_{s_1}^{s_2} w_0^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2} \right) ds = \int_{s_1}^{s_2} w_0^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2} \right) ds. \quad (15)$$

Умножая первое из уравнений (13) на $w_0^{(1)}$, второе – на $-w_0^{(2)}$, складывая и интегрируя по отрезку $[s_1, s_2]$, получим следующее выражение:

$$\frac{m_p(\omega_0^2 - \alpha_0^2)}{1 - B_0} = Z. \quad (16)$$

Если же умножить первое уравнение (13) на $-w_0^{(2)}$, а второе на $w_0^{(1)}$, сложить их и проинтегрировать, то получим, что

$$\frac{2m_p\alpha_0\omega_0}{A_0} = Z, \quad (17)$$

где

$$Z = \frac{k^2(\varphi_0)}{p^4} \left\{ \int_{s_1}^{s_2} \left[w_0^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2} \right) + w_0^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2} \right) \right] ds + p^4 \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{s^3} \left[(w_0^{(1)})^2 + (w_0^{(2)})^2 \right] ds \right\} \times \left(\int_{s_1}^{s_2} s \left[(w_0^{(1)})^2 + (w_0^{(2)})^2 \right] ds \right)^{-1}.$$

Из (16) и (17) следует, что

$$\frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0} = \frac{(\omega_0^2 - \alpha_0^2)}{1 - B_0}. \quad (18)$$

Учитывая (18), уравнения (13) можно переписать в виде

$$\frac{k^2(\varphi_0)}{p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0^{(1)}}{\partial s^2} \right) + \frac{p^4 w_0^{(1)}}{s^3} - \frac{2m_p\alpha_0\omega_0}{A_0} s w_0^{(1)} = 0; \quad (19)$$

$$\frac{k^2(\varphi_0)}{p^4} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(s^3 \frac{\partial^2 w_0^{(2)}}{\partial s^2} \right) + \frac{p^4 w_0^{(2)}}{s^3} - \frac{2m_p\alpha_0\omega_0}{A_0} s w_0^{(2)} = 0.$$

Отсюда, с учетом граничных условий следует, что, во-первых $w_0^{(1)} = M w_0^{(2)}$, где M – произвольная константа; во-вторых

$$\frac{2\alpha_0\omega_0}{A_0} = \omega_e^2, \quad (20)$$

где ω_e – собственная частота колебаний соответствующей упругой конической оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Товстик П.Е. Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек. // Прикл. матем. и механика. -1983. –Т.47. – №5. – С.815-822.
2. Михасев Г.И. О свободных низкочастотных колебаниях вязкоупругих цилиндрических оболочек. // Прикл. механика. – 1992. – Т.28. – №9. – С.50-55.

УДАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ ИЗ РЕОНОМНОГО МАТЕРИАЛА

Холодарь Б.Г.

Брестский государственный технический университет, Брест

Considered is the development in time of stresses and strains in the straight rod of two different cross-sectional areas and a rigid mass ($M > 0$) at the free end during an impact with an absolute-rigid motionless barrier of infinite weight. Material of the rod is a rheonomic elastic-plastic body described by Maxwell's equation with nonlinear viscosity.

В [1] рассмотрена задача об ударе жесткой массой по свободному торцу прямого закрепленного стержня постоянного сечения из реономного упруго-пластического материала, а в [2] – задача о соударении такого стержня, несущего на конце массу $M \geq 0$, с жесткой преградой. Задачи решены численно в одномерном приближении. Описание свойств материала проведено с помощью уравнения Максвелла с переменной вязкостью, экспоненциально зависящей от напряжения.

Уравнения, описывающие поведение системы, имеют вид [1-2]

$$v'_0 = \frac{\mu}{\beta E} p_0, \quad p'' + \kappa(1 + \text{abs}(p)) \exp(\text{abs}(p)) p' - p''_{\xi} = 0,$$

где обозначено: σ – напряжения в материале, $p = \beta \sigma$, $\kappa = \frac{L\sqrt{E\rho}}{\eta_0}$, $\mu = m/M$,

$m = \rho AL$ – масса стержня, A, L – площадь и длина стержня, M – величина присоединенной массы, $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в стержне, $v = V/c$, V – скорость массы M , индексом “0” отмечены параметры на торце с присоединенной массой, штрихами – производные по безразмерному времени $\tau = t/(L/c)$, t – время, p''_{ξ} – вторая производная по безразмерной продольной координате $\xi = x/L$. Материал характеризуется плотностью ρ , модулем упругости E и структурными параметрами β и η_0 , которые контролируют развитие остаточных деформаций в материале с вязкостью $\eta = \eta_0 \exp(-\beta\sigma)$. В расчетах значения констант приняты равными:

$$\rho = 7.8e3 \text{ Кг/м}^3, \quad E = 2e11 \text{ Па}, \quad \eta_0 = 1e11 \text{ Па/с}, \quad \beta = 5e - 8 \text{ Па}^{-1}.$$

Ниже рассматривается задача, аналогичная [2], но для ступенчатого стержня, имеющего вдоль оси два участка с разной площадью поперечного сечения (для удобства будем говорить о “тонком” и “толстом” участках кругового сечения), которые между собой сопрягаются переходным участком конической формы с углом полураствора 45° . Диаметры участков приняты отличающимися в два раза – $d = 5\text{мм}$ и $D = 10\text{мм}$, причем ударяемый торец стержня имеет меньший диаметр. При решении задачи стержень (общая длина $L = 0.1$ м) разбивался на одинаковые отрезки числом $N = 1000$, поэтому длина участка перехода составляет от $N_p = 1$ до $N_p = 25$ длин таких отрезков $\Delta x = L/N$, а положение его задается координатой $\xi = L_p$.

При решении варьировалась скорость соударения, величина присоединенной массы, а также длина и положение переходной зоны на оси стержня.

Целью рассмотрения является вопрос о влиянии реономности материала на развитие напряженно-деформированного состояния (НДС) в зоне перехода между участками. Хотя одномерный подход применительно к вопросу о концентрации

НДС не вполне правомерен, задача в первом приближении дает ответы на некоторые из возникающих вопросов.

Влияние скорости соударения V_0 и величины присоединенной массы M на поведение ступенчатого стержня аналогично случаям [1,2], — с ростом V_0 и M продолжительность удара нарастает, возрастает также и уровень максимальных напряжений и деформаций. Кратковременные пиковые напряжения, возникающие на ударяемом торце непосредственно после удара, определяются скоростью соударения и структурными параметрами материала (β и η_0), а максимум напряжений в стержне, реализующийся за время нагружения (до момента смены знака напряжений на ударяемом торце), зависит также от волновых процессов на торцах и у переходного участка. Поэтому влияние V_0 и M носит немонотонный характер, более ярко проявляющийся, когда масса M мала. Величина массы основное воздействие оказывает на длительность ударного процесса и число проходов волн напряжений по стержню до момента возникновения σ_{\max} , а также на уровень развивающихся остаточных деформаций, обеспечивающих поглощение исходной кинетической энергии системы. Как и в [2], время смены знака скорости присоединенной массы короче времени удара. В проведенных расчетах не имел места случай, когда присоединенная масса отделялась бы от стержня раньше, чем он сам от преграды.

Вместе с тем, ступенчатый характер распределения погонной массы и положение переходного участка вносят свои особенности в течение волновых процессов, более ярко выражающиеся при неодинаковости длин участков стержня.

Сложный характер взаимосвязи результатов ударного нагружения с параметрами системы виден на рис.1-5.

На рис.1 показано изменение во времени напряжений на ударяемом торце при нескольких значениях скорости V_0 и различной длине ударяемого участка стержня.

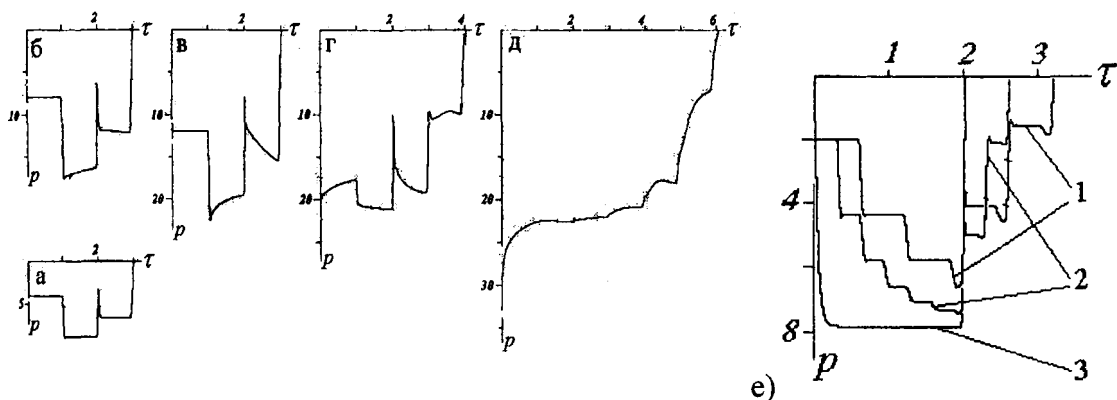


Рис.1. Напряжения за время удара ($M=0$, $N_p=25$): а-д — $V_0=1, 2, 3, 5, 10$ соответственно, $L_p=0.475$; е — $V_0=1$, $L_p=0.675, 0.825, 0.975$ (кривые 1,2,3 соответственно)

При скоростях соударения, не вызывающих заметных пластических деформаций, напряжения за время первого прохода волны по стержню мало изменяются (для $M=0$), однако с ростом V_0 процесс спада высоких пиковых напряжений начинает занимать все более значительную долю времени. Это, в свою очередь, способствует возникновению переменных напряжений на последующих отрезках времени. Сокращение длины ударяемого участка (и сопутствующее этому увеличение числа отражений) заметно влияет на ход нарастания напряжений, приводя в пределе зависимость $\sigma(t)$ к форме плавной кривой. При этом увеличивается и уровень максимальных напряжений, так как нарастает масса отражающего волну

второго участка стержня. Существенным отличием рассматриваемой задачи от задачи о нагружении прямого стержня при малых скоростях соударения при отсутствии присоединенной массы ($M = 0$) является изменение длительности удара – она становится больше $T = 2$.

Распределение по длине стержня максимальных напряжений $\sigma_{\max}(x)$, возникших за время удара, для нескольких значений скорости соударения V_0 показано на рис.2.

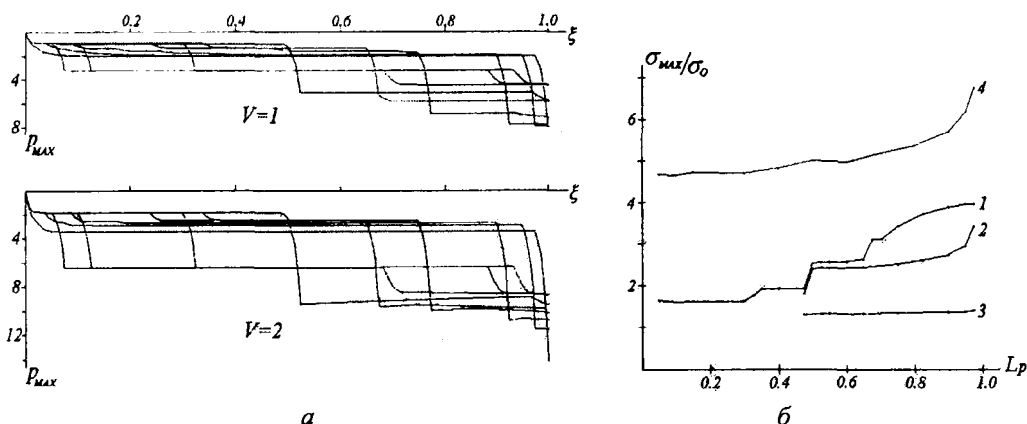


Рис. 2:

a – распределение максимумов напряжений вдоль стержня при $L_p = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.65, 0.75, 0.9, 0.95, 0.975$ и $M=0, N_p=25$; *б* – максимальные напряжения в переходной зоне: 1-3 – $V=1, 2, 5$ соответственно, $M=0$; 4 – $V=1, M=2, \sigma_0 = c\rho V_0$

Зависимости $\sigma_{\max}(x)$ имеют ступенчатую форму, которая хорошо выражена на участке стержня большей длины. Каждой ступеньке соответствует свой интервал времени от начала удара, а ее длина связана с длиной короткого участка стержня, т.е. с эффектом отражения волн от его границ. Количество этих ступенек зависит от реализовавшегося до наступления σ_{\max} числа отражений волнового фронта от торцов стержня и переходной зоны. С ростом скорости соударения и появлением остаточных деформаций зависимости $\sigma_{\max}(x)$ на ударяемом участке заменяются плавными кривыми, что более заметно при небольшой длине участка, так как в этом случае число волновых отражений возрастает. При использованных значениях структурных параметров β и η_0 затухание упругих процессов при однократном проходе волны напряжений незначительно [2], поэтому на фоне сокращения длины ударяемого участка более важным является факт сопутствующего увеличения массы второго участка (для $V = 1, M = 0$ и изменении относительной длины толстого участка от $L_s = 0.05$ до $L_s = 0.975$ напряжения увеличиваются примерно на 40%). При $M \neq 0$ увеличивается роль отражений от торца с присоединенной массой. Абсолютный максимум напряжений имеет место на ударяемом торце или у начала переходной зоны, а их отношение не равно отношению площадей их сечений. Максимальные усилия, передаваемые участками стержня, неодинаковы и растут по мере увеличения длины утолщенного участка.

Отношения максимальных напряжений в переходной зоне и на ударяемом торце к уровню упругих ударных напряжений $\sigma_0 = c\rho V_0$ показаны на рис. 3 при $M = 0, L_s = 0.5$. Там же приведено соотношение между этими максимумами, характеризующее концентрацию напряжений возле переходного участка.

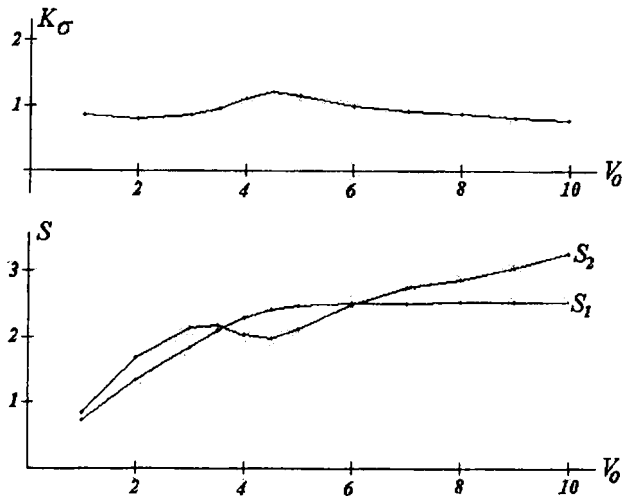


Рис. 3. Максимальные напряжения на ударяемом торце $S_1 = \sigma(L)/\sigma_0$, в переходной зоне $S_2 = \sigma(L/2)/\sigma_0$ и их соотношение $K_\sigma = S_2/S_1$ в зависимости от скорости нагружения V_0

Экстремум при $V_0 \approx 4.5$ связан с тем, что вблизи этого уровня скорости имеет место изменение характера распределения наибольших напряжений по длине тонкого участка стержня – почти равномерное распределение при невысоких скоростях соударения заменяется неравномерным, причем с ростом V_0 концентрация напряжений возникает вначале возле переходной зоны за счет отражения волн от толстого участка, а далее максимум переходит на ударяемый торец. Скорость, при которой возникает этот эффект, зависит от структурных параметров материала. Например, для $\eta_0 = 1e9$ максимум коэффициента концентрации возникает при $V_0 \approx 2.8$ вместо прежних $V_0 \approx 4.5$. При изменении положения переходного участка могут одновременно проявиться экстремумы при нескольких скоростях (например, для $Ls = 0.25$ дополнительный экстремум появляется также возле $V \approx 2.2$).

Варьирование длиной переходного участка мало изменяет величину и распределение напряжений по стержню, что естественно для одномерной модели. Однако при высоких скоростях соударения, когда материал получает заметные неупругие деформации, уменьшение длины переходного участка ($N_p = 25 \rightarrow N_p = 1$) приводит к появлению на стержне диаметра D сразу за переходным участком небольшой по протяженности зоны, где возникающие максимальные напряжения имеют уровень более низкий, чем напряжения в остальных точках. Это вызвано, вероятно, особенностями отражения волн, подошедших к переходному участку со стороны торцевой массы ($M \neq 0$), – небольшая масса тонкого участка слабо влияет на их отражение.

Развитие деформаций по длине стержня в зависимости от скорости нагружения также проходит несколько этапов – при малых V_0 они примерно одинаковы по длине каждого участка, но с ростом V_0 на ударяемом участке они становятся существенно различными – перед переходной зоной появляется их максимум, который затем переходит на ударяемый торец.

На рис. 4 показана зависимость $\sigma(\epsilon)$ на ударяемом торце стержня ($M = 0$, $Ls = 0.5$).

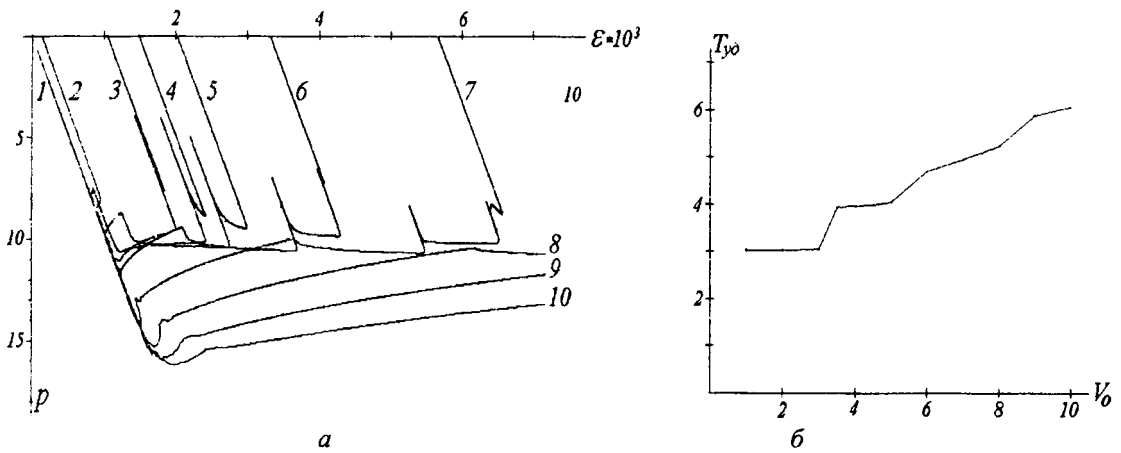


Рис. 4:
 а – связь напряжений и деформаций на ударяемом торце
 (кривые 1-10 – $V_0=1-10$ соответственно);
 б – длительность соударения в зависимости от V_0

При низких скоростях соударения связь напряжений и деформаций носит линейный характер с незначительным проявлением гистерезиса, а при увеличении V_0 и появлении неупругих деформаций зависимость $\sigma(\epsilon)$ принимает пилообразный характер, отражая влияние волновых процессов. С ростом V_0 ширина “зуба текучести” на кривой $\sigma(\epsilon)$ постепенно увеличивается, что в дальнейшем приводит к его размыванию.

Сопровождающие деформацию процессы зарождения структурных дефектов в точках стержня связаны как с дифференциальной, так и с интегральной характеристиками процесса – с мощностью рассеяния W и поглощенной энергией A . Распределения максимальных значений этих величин при $M = 0$, $L_p = 0.475$, $N_p = 25$, достигнутых в точках стержня за время удара и отнесенных к своим максимальным уровням во всем стержне, показаны на рис. 5, а, а на рис. 5, б – зависимости W и A от скорости соударения V_0 (также в относительных величинах).

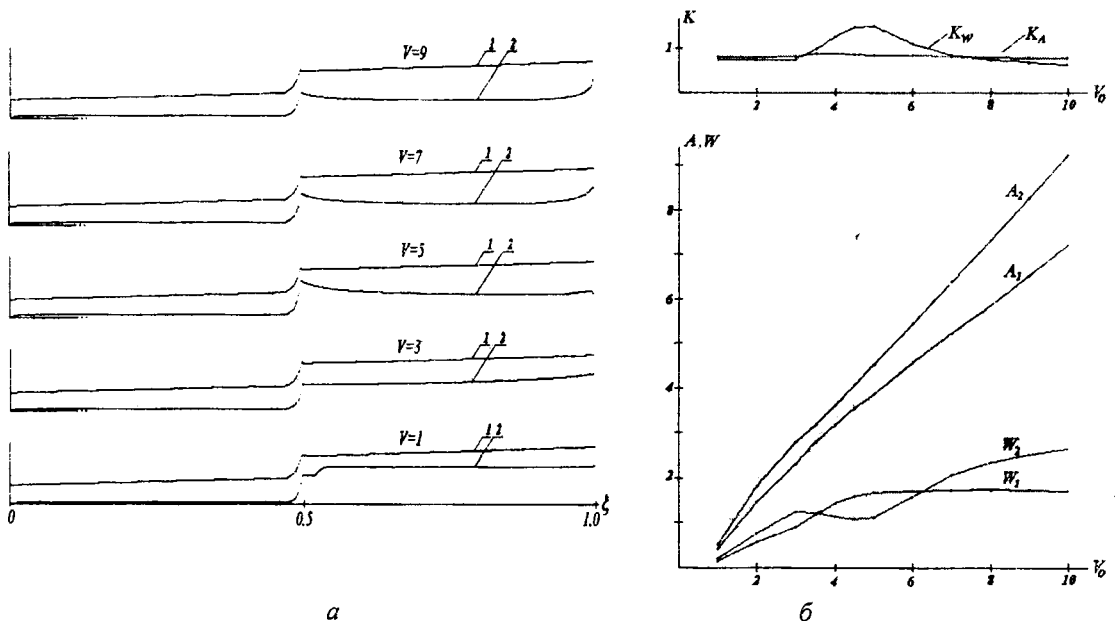


Рис. 5: а – распределение максимальных уровней A_{MAX} и W_{MAX} (кривые 1,2 соответственно) по длине стержня; б – связь мощности и поглощенной энергии со скоростью нагружения:
 $W_1 = W_{MAX}(L/2)$, $W_2 = W_{MAX}(L)$, $K_W = W_1/W_2$, $A_1 = A_{MAX}(L/2)$, $A_2 = A_{MAX}(L)$, $K_A = A_1/A_2$

Видно, что W почти линейно на обоих участках, а форма кривых A сохраняет некоторое подобие с зависимостью $\sigma_{\max}(x)$. Как и выше для напряжений и деформаций, для W и A также можно отметить возможность возникновения экстремумов коэффициентов концентрации возле переходной зоны в некотором интервале скоростей соударения.

Отмеченные особенности поведения системы сохраняются и при аperiодическом характере движения.

Т.о., в ступенчатом реономном стержне наряду с высоким уровнем НДС на ударяемом торце, в начале переходной зоны может иметь место концентрация осевых напряжений, деформаций, мощности рассеяния и поглощенной энергии, что увеличивает вероятность появления трещин в этом сечении.

Следует также отметить, что из-за большого числа влияющих параметров развитие НДС является процессом достаточно сложным и не во всем предсказуемым, поскольку роль некоторых факторов носит конкурирующий характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Холодарь Б.Г. Продольный удар по стержню из реономного материала // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь: сборник статей XVI Международного научно-методического семинара, 28–30 мая 2009 г. – Брест, 2009. – С. 191–196.
2. Холодарь, Б.Г. Продольный удар о жесткую преграду реономного стержня с массой на конце / Б.Г. Холодарь // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь: сборник статей XVI Международного научно-методического семинара, 28–30 мая 2009 г. – Брест, 2009.

КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА

Леоненко Д. В.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

The axisymmetric forced vibrations of a viscoelastic circular sandwich plate on an elastic foundation are studied. The plate is subjected to axisymmetric loads with frequency equal to one of the natural frequencies of the plate. The foundation reaction is described by the Winkler model. The problem on the viscoelastic plate oscillations was solved by averaging. The numerical results are analyzed.

Введение

Колебания упругих сплошных круговых трехслойных пластин с легким заполнителем на упругом основании изучены в [1]. Здесь рассмотрена поперечно нагруженная вязкоупругая круговая трехслойная пластина на деформируемом основании Пастернака под действием динамических нагрузок.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Через h_k обозначена относительная толщина k -го слоя. Для изотропных несущих слоев, толщиной h_1, h_2 , приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине заполнитель ($h_3 = 2c$) легкий, т. е. в нем пренебрегается работа напряжений σ_{rz} в тангенциальном направлении. Вертикальная нагрузка $q(r, t)$ распределена по внешней поверхности пластины (рис. 1). На границах слоев перемещения непрерывны. На внешнем контуре пластины радиуса r_1 , предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. К внешней

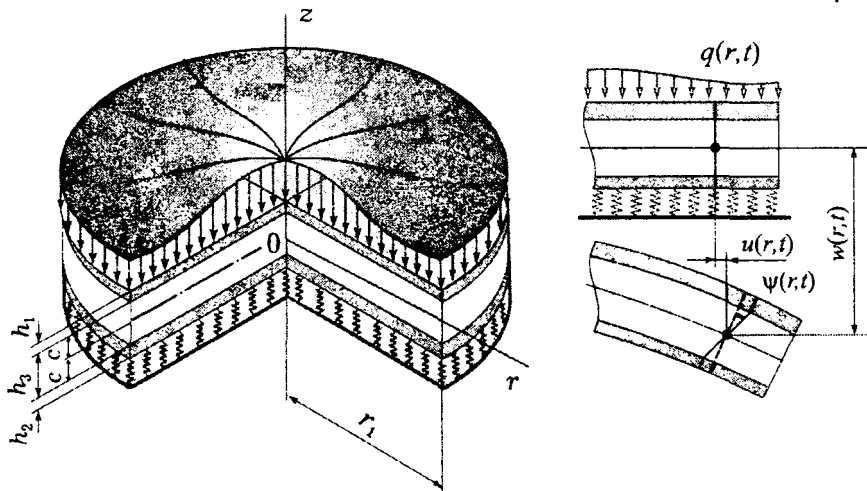


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной пластины на упругом основании

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $u(r), \psi(r), w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми.

Связь между реакцией и прогибом примем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой $q_r = \kappa_0 w$ (κ_0 – коэффициент постели основания).

Физические соотношения для материалов слоев выпишем, используя интегральный оператор линейной вязкоупругости:

$$s_{\alpha\beta}^k = 2G_k^* \varepsilon_{\alpha\beta}^k, \quad \sigma^k = 3K_k \varepsilon^k, \quad (1)$$

где G_k^* – оператор линейной вязкоупругости

$$G_k^* f(t) \equiv G_k (1 - R_k^*) f(t) \equiv G_k \left(f(t) - \int_0^t R_k(t-\tau) f(\tau) d\tau \right),$$

$R_k(t)$ – ядро релаксации материала k -го слоя, G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации, $s_{\alpha\beta}^k, \varepsilon_{\alpha\beta}^k$ – девиаторы напряжений и деформаций k -го слоя, ε_k – объемная деформация.

Система уравнений поперечных колебаний вязкоупругой пластины следует из уравнений для упругой пластины, рассмотренной в [1], если в коэффициентах a_m ($m = 1, \dots, 6$) модули сдвига G_k формально заменить операторами линейной вязкоупругости G_k^* (1):

$$L_2(a_1^* u + a_2^* \psi - a_3^* w_{,r}) = 0, \quad L_2(a_2^* u + a_4^* \psi - a_5^* w_{,r}) = 0, \\ L_3(a_3^* u + a_5^* \psi - a_6^* w_{,r}) - M_0 \ddot{w} - \kappa_0 w = -q, \quad (2)$$

где

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3},$$

запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

В качестве начальных примем следующие условия

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r).$$

Если контур пластины зашпелен, то при $r = r_1$ должны выполняться граничные условия

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0.$$

При шарнирном опирании контура пластины и наличии на нем жесткой диафрагмы должны выполняться требования:

$$u = \psi = w = M_r = 0.$$

Решение задачи

Для решения применим *метод усреднений* в динамических задачах линейной вязкоупругости [2]. Система уравнений (2) является интегродифференциальной. Для ее упрощения введем гипотезу о подобии ядер релаксации материалов слоев:

$$R_k(t) = l_k R_3(t), \quad l_k = \text{const}, \quad 0 \leq \int_0^t R_3(\tau) d\tau \ll 1, \quad R_3(\tau) \geq 0. \quad (3)$$

То есть здесь предполагается, что ядра релаксации материалов слоев выражаются через ядро релаксации заполнителя, которое в дальнейшем принимается пропорциональным некоторому малому положительному параметру. Для многих конструкционных материалов эта гипотеза выполняется.

Распределенная нагрузка $q(r, t)$ считается малой и записывается в виде разложения в ряд по фундаментальной ортонормированной системе собственных функций v_n :

$$q(r, t) = \varepsilon_1 M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t), \quad (4)$$

где ε_1 – некоторый малый параметр;

$$v(\lambda_n, r) = \frac{1}{d_n} \left[J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right],$$

$J_n(r)$, $I_n(r)$ – функции Бесселя [3].

Операторы линейной вязкоупругости a_m^* в (2) представляем в виде

$$a_m^* = a_m - a_m' R_3^*, \quad (m = 1, \dots, 6), \quad (5)$$

где для коэффициентов a_m и a_m' справедливы соотношения:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k,$$

$$a_3 = h_1(c + \frac{1}{2} h_1) K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2} h_2) K_2^+, \quad a_4 = c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+),$$

$$a_5 = c \left[h_1(c + \frac{1}{2} h_1) K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2} h_2) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right],$$

$$a_6 = h_1(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2) K_1^+ + h_2(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+,$$

$$a_1' = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^3 l_k G_{k0}, \quad a_2' = \frac{4}{3} c(l_1 G_{10} - l_2 G_{20}), \quad a_3' = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^2 l_k G_{k1},$$

$$a_4' = \frac{4}{3} (G_{32} + c^2(l_1 G_{10} + l_2 G_{20})), \quad a_5' = \frac{4}{3} (G_{32} + c(l_1 G_{11} - l_2 G_{21})),$$

$$a_6' = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^3 l_k G_{k2}, \quad G_{kn} = \int_{h_k} G_k z^n dz, \quad (n = 0, 1, 2).$$

Решение системы трех интегро-дифференциальных уравнений (2), с учетом условий (3)–(5) будем искать в виде

$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t), \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t). \quad (6)$$

где координатные функции $\varphi_n(r)$

$$\varphi_n(\lambda_n, r) = \frac{\lambda_n}{d_n} \left[J_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - J_1(\lambda_n r) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} (I_1(\lambda_n r_1) \frac{r}{r_1} - I_1(\lambda_n r)) \right].$$

Подстановка выражений (4)–(6) в третье уравнение системы (2) приводит к уравнению относительно неизвестной функции времени $T_n(t)$:

$$\begin{aligned} & L_3(b_1 a_3 \varphi_n + b_2 a_5 \varphi_n - a_6 v_{n,r}) T_n - \kappa_0 v_n T_n - M_0 v_n \ddot{T}_n = \\ & = -\varepsilon_1 M_0 v_n q_n + L_3(b_1 a_3' \varphi_n + b_2 a_5' \varphi_n - a_6' v_{n,r}) R_3^* T_n, \end{aligned}$$

$$R_3^* T_n \equiv \int_0^t R_3(t - \tau) T_n(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Преобразуем уравнение (7) к следующему виду

$$\begin{aligned} & \frac{L_3(b_1 a_3 \varphi_n + b_2 a_5 \varphi_n - a_6 v_{n,r})}{v_n} - \frac{\kappa_0 T_n + M_0 \ddot{T}_n - \varepsilon_1 M_0 q_n}{T_n} = \\ & = \frac{L_3(b_1 a_3' \varphi_n + b_2 a_5' \varphi_n - a_6' v_{n,r}) R_3^*}{v_n}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как функции v_n являются собственными, то для них справедливо соотношение, следующее из решения динамической задачи теории упругости:

$$\frac{L_3(b_1 a_3 \varphi_n + b_2 a_5 \varphi_n - a_6 v_{n,r})}{v_n} = \frac{\kappa_0 T_n + M_0 \ddot{T}_n}{T_n} = -M_0 \left(\omega_n^2 - \frac{\kappa_0}{M_0} \right), \quad (9)$$

где ω_n – частоты собственных колебаний, определяемые через собственные числа λ_n ;

$$\omega_n^2 = \frac{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2) M_0} (\lambda_n^4 + \kappa^4).$$

Подставив выражение (9) в (8), получаем

$$\frac{L_3(b_1 a_3' \varphi_n + b_2 a_5' \varphi_n - a_6' v_{n,r})}{v_n} = -\frac{M_0 \omega_n^2 T_n + M_0 \ddot{T}_n - \varepsilon_1 M_0 q_n}{R_3^* T_n} = -M_0 \omega_n'^2. \quad (10)$$

Величины типа частот ω_n' определяются через обобщенные собственные числа λ_n для упругой пластины по формуле

$$\omega_n'^2 = \frac{a_6' - a_3' b_1 - a_5' b_2}{M_0} \lambda_n^4.$$

Здесь для решения системы (7) используем предложенный в [2] метод усреднения для динамических задач линейной вязкоупругости. В этом случае предполагается существование в последнем члене уравнения малого параметра ε , который в окончательных результатах следует положить равным единице, так как малость интегральных членов обеспечивается условием (3). Поэтому ядро релаксации $R_3(t)$ заменим величиной $\varepsilon R_3(t)$.

Из соотношения (10) для функции времени $T_n(t)$ получаем уравнение

$$\ddot{T}_n + \omega_n'^2 T_n = \varepsilon_1 q_n + \varepsilon \omega_n'^2 k_n \int_0^t R_3(t-\tau) T_n(\tau) d\tau, \quad k_n = \omega_n'^2 / \omega_n^2. \quad (11)$$

Применительно к нашей задаче имеем

$$T_n = \left[A_n \cos \omega_n (1 + 0,5 R_{cn}) t + B_n \sin \omega_n (1 + 0,5 R_{cn}) t \right] \exp(-0,5 \omega_n R_{sn} t) + \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}} \cos(\omega_n t + \varphi_{01} - \varphi_{02}), \quad (12)$$

где R_{cn} , R_{sn} – два основных Фурье-образа ядра $k_n R_3(t)$, характеризующие скорость возрастания частоты и логарифмический декремент затухания:

$$R_{cn} = k_n \int_0^\infty R_3(\tau) \cos(\omega_n \tau) d\tau, \quad R_{sn} = k_n \int_0^\infty R_3(\tau) \sin(\omega_n \tau) d\tau, \quad \varphi_{01} = \operatorname{arctg} \frac{R_{sn}}{R_{cn}},$$

$$\varphi_{02} = \operatorname{arctg} \frac{q_{1n}}{q_{2n}}, \quad q_{1n} = \frac{1}{\omega_n} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q_n(t) \sin(\omega_n t) dt, \quad q_{2n} = \frac{1}{\omega_n} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T q_n(t) \cos(\omega_n t) dt.$$

Константы A_n , B_n определяются из начальных условий движения:

$$A_n = \int_0^{\eta} w(r, 0) v_n r dr - \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}} \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}),$$

$$B_n = \frac{1}{\omega_n (1 + 0,5R_{cn})} \left[\frac{\omega_n R_{sn}}{2} A_n + 2 \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}} \sin(\varphi_{01} - \varphi_{02}) + \int_0^1 \dot{w}(r, 0) v_n r dr \right]. \quad (13)$$

Первое слагаемое (12) представляет свободные затухающие колебания системы, причем декремент пропорционален синус-образу Фурье R_{sn} ядра $k_n R_3(t)$, а возрастание частоты – косинус-образу ядра R_{cn} . Второе слагаемое описывает гармонические вынужденные колебания с частотой ω_n и амплитудой

$$\frac{2}{\omega_n} \sqrt{\frac{q_{1n}^2 + q_{2n}^2}{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}}. \quad (14)$$

Таким образом, вынужденные колебания круговой трехслойной пластины, набранной из линейно вязкоупругих слоев, описываются выражениями (6) с функцией времени (12) и системой функций v_n, φ_n .

При малых силах порядка ε излагаемый метод усреднения дает отличную от нуля амплитуду (14) только в случае резонанса. Поэтому рассмотрим случай, когда частота нагрузки совпадает с одной из частот ω_k собственных колебаний пластины:

$$q(r, t) = q_0 (D \cos(\omega_k t) + E \sin(\omega_k t)), \quad (D, E, k - \text{const}).$$

Начальные условия движения принимаем однородными. Характеристики колебаний (12), соответствующие k -й гармонике, в этом случае следующие:

$$q_k(t) = D_k \cos \omega_k t + E_k \sin \omega_k t, \quad q_{1k} = \frac{E_k}{2\omega_k}, \quad q_{2k} = \frac{D_k}{2\omega_k}, \quad \varphi_{02} = \arctg \frac{D_k}{E_k},$$

$$(q_{1n} = q_{2n} = 0, \quad n \neq k), \quad D_k = \frac{Dq_0 r_1}{M_0 d_k \lambda_k} \left[J_1(\lambda_k r_1) - \frac{J_0(\lambda_k r_1)}{I_0(\lambda_k r_1)} I_1(\lambda_k r_1) \right],$$

$$E_k = \frac{Eq_0 r_1}{M_0 d_k \lambda_k} \left[J_1(\lambda_k r_1) - \frac{J_0(\lambda_k r_1)}{I_0(\lambda_k r_1)} I_1(\lambda_k r_1) \right]. \quad (15)$$

Прогиб, радиальное перемещение и относительный сдвиг в заполнителе следуют из соотношений (6) с учетом (15), (16).

Численные результаты получены для жестко закрепленной пластины (Д16Т–фторопласт–Д16Т) с относительными толщинами слоев $h_1 = h_2 = c = 0,02$. Вычисления проводились с использованием пакета MathCAD. Интенсивность резонансной нагрузки $q_0 = 1$ Па. Ядро релаксации заполнителя принимается в виде, предложенном Ржаницыным [4]:

$$R(t) = \frac{Ae^{-pt}}{t^{1-\beta}},$$

где A, p, β – параметры ядра, определяемые экспериментально.

Изменение резонансного прогиба упругой – a и вязкоупругих – b, v пластин во времени при отсутствии упругого основания ($\kappa_0 = 0$) показана на рисунке 2. Вязкоупругость материалов приводит к уменьшению амплитуды колебаний и ее стабилизации при $t > 700$ с.

Аналогичная картина для резонансных прогибов упругой – a и вязкоупругих – b, v пластин наблюдается при наличии упругого основания $\kappa_0 = 10^8$ Па/м (рис. 3). Вязкоупругость материалов и здесь приводит к уменьшению амплитуды колебаний и ее стабилизации, но уже за гораздо большее время, т. е. при $t > 2000$ с. Влияние упругого основания характеризуется уменьшением скорости нарастания амплитуды огибающей в начальный период времени $t < 50$ с, (см. рис. 2, б; 3, б) и увеличением периода ее нестационарности.

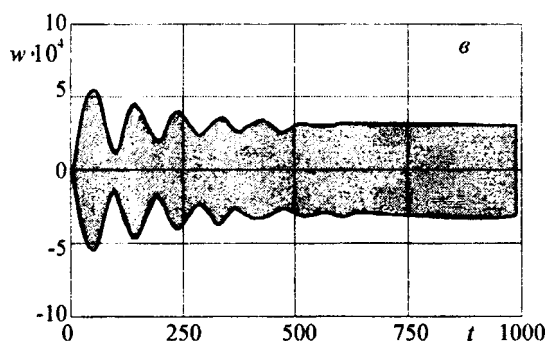
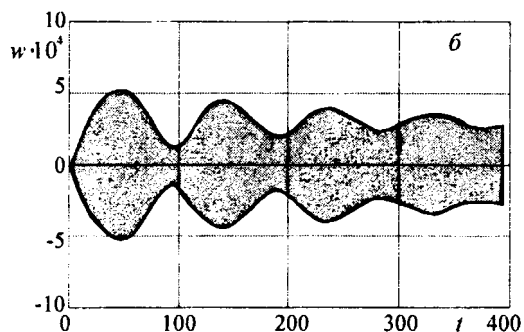
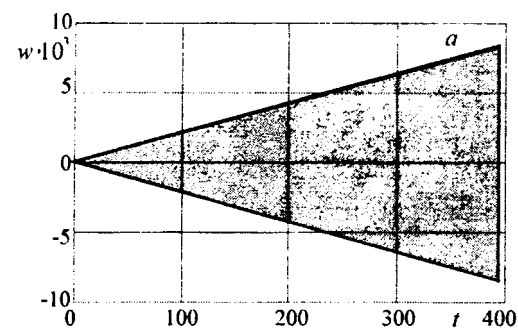


Рис. 2. Зависимость прогиба упругой (а) и вязкоупругих (б), (в) пластин при резонансе при $\kappa_0 = 0$

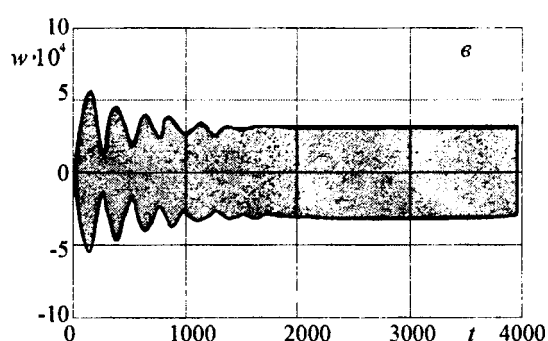
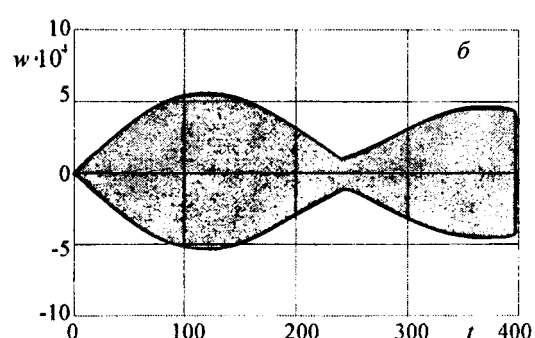
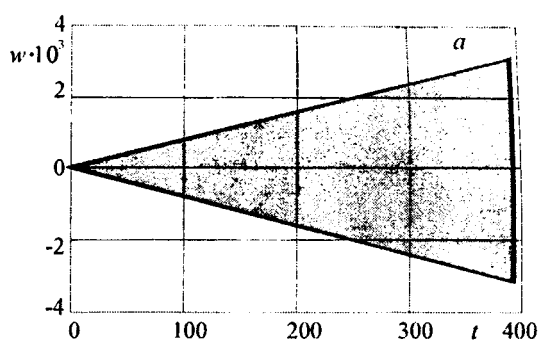


Рис. 3. Зависимость прогиба упругой (а) и вязкоупругих (б), (в) пластин при резонансе при $\kappa_0 = 10^8$ Па/м

Выводы

Таким образом решена задача о колебаниях вязкоупругой круговой трехслойной пластины на основании Винклера, проведен численный анализ, показавший, что вязкоупругость материалов пластины приводит к уменьшению и стабилизации амплитуды колебаний, инерционность оснований замедляет затухание свободных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леоненко, Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием распределенных локальных нагрузок / Д. В. Леоненко // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – 2 (19). – С. 14–19.
2. Ильюшин, А. А. Основы математической теории термовязко-упругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
3. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
4. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ПО ДЛИНЕ ЖЕСТКОСТЬЮ

Косых Э.Г.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Sandwich thin walled beam open cross section is considered. For the kinematics description carryings layers accepted the hypotheses Broken Normal. Filler is hard. Boundary problem come to the linear system of differential equations with variable coefficients. Received combined equations of equilibrium and its analytical solution via moving.

Keywords and phrases: sandwich thin walled beam, hypotheses Broken Normal, boundary value problem, variable rigidity.

Устоявшаяся классификация тонкостенных стержней на конструкции открытого и закрытого профилей [1], недостаточна в том смысле, что одна и та же конструкция может рассматриваться и закрытой и открытой, Все зависит от соотношения размеров поперечного сечения. Тем более, в случае заполнения пространства между внешними слоями заполнителем, при значительном неравенстве размеров - длины профиля и его толщины - принятие модели открытого профиля совершенно естественно.

На рисунке 1. изображен эскиз фрагмента модели крыла планера и его поперечное сечение. Внешние слои назовем обшивкой - ее верхним и нижним слоями соответственно. Пусть толщины этих слоев будут h_1, h_2 , а пространство между верхним и нижним слоями, будучи заполненное другим материалом, например жестким заполнителем, естественно считать внутренним слоем, пусть, толщиной $2c$. Таким образом, в качестве простейшей модели крыла планера примем консольный трехслойный тонкостенный стержень открытого профиля.

Ограничимся малыми деформациями, которые определяются соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1)$$

Здесь $u_{i,j}$ - производная переменной u_i по j -й координате. Введем криволинейную ось поперечного сечения - рис.1 с соответствующей координатой - s как след пересечения срединной плоскости с поперечным сечением. Координата s отсчитывается от произвольно выбранной точки отсчета на срединной линии сечения - криволинейной оси. Пусть это будет точка M_0 .

В каждой точке оси s введем местную систему координат - $(\vec{\tau}, \vec{n})$, соответственно направлениям: по касательной и нормали к срединной линии сечения. Перемещения вдоль этих направлений обозначим через v, w . В третьем, продольном направлении перемещение обозначим u .

Учитывая геометрию стержня, гипотезу В.З. Власова об отсутствии сдвига в срединной поверхности, а также введенные им понятия секториальных характеристик сечения, получим для перемещений v, w, u формулы:

$$\begin{aligned} v &= \xi(z) \cos \alpha + \eta(z) \sin \alpha + \theta(z) h, \\ w &= -\xi(z) \sin \alpha + \eta(z) \cos \alpha + \theta(z) t, \\ u &= \zeta(z) - \xi_{,z}(z)x - \eta_{,z}(z)y - \theta_{,z}(z)\varpi. \end{aligned}$$

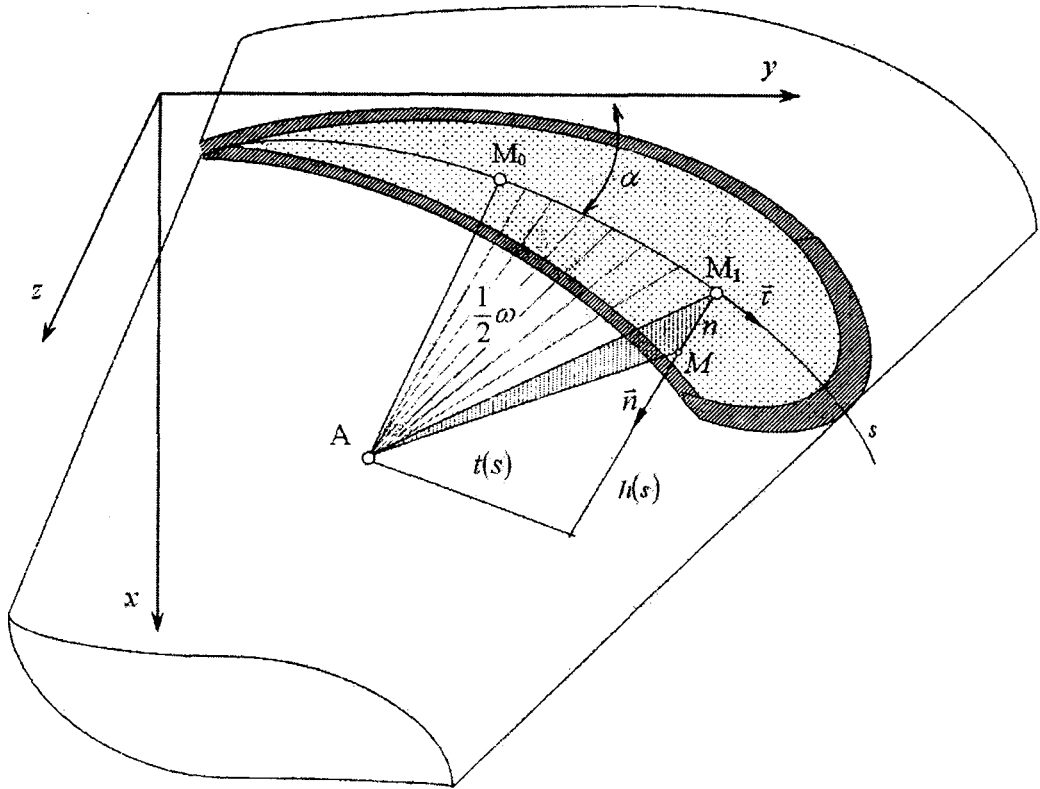


Рис. 1. Эскиз модели фрагмента крыла планера

Здесь $\xi(z)$, $\eta(z)$, $\zeta(z)$ – перемещение профиля как жесткого целого в плоскости и из плоскости сечения, $\theta(z)$ – угол закручивания, обусловленный деформацией поперечного сечения и чистым кручением стержня,

$$h = (x - a_x) \sin \alpha - (y - a_y) \cos \alpha,$$

$$t = (x - a_x) \cos \alpha + (y - a_y) \sin \alpha,$$

$$dx = (ds) \cos \alpha, \quad dy = (ds) \sin \alpha,$$

ω – секториальная площадь.

Учитывая, что для слоистой конструкции необходимо учитывать работу продольного момента, то с принятием к рассмотрению сдвиговой поправки по Тимошенко С.П. – Ψ , продольные перемещения по слоям примут вид

$$u^{(1)} = \zeta(z) + c\Psi - \xi_{,z}(z)(x(s) - n \sin \alpha(s)) - \eta_{,z}(z)(y(s) + n \cos \alpha(s)) - \theta_{,z}(z)(\omega(s) + nt(s));$$

$$u^{(2)} = \zeta(z) - c\Psi - \xi_{,z}(z)(x(s) - n \sin \alpha(s)) - \eta_{,z}(z)(y(s) + n \cos \alpha(s)) - \theta_{,z}(z)(\omega(s) + nt(s));$$

$$u^{(3)} = \zeta(z) - n\Psi - \xi_{,z}(z)(x(s) - n \sin \alpha(s)) - \eta_{,z}(z)(y(s) + n \cos \alpha(s)) - \theta_{,z}(z)(\omega(s) + nt(s)).$$

По формулам Коши (1) вычислим деформации. Например, для среднего слоя получим

$$\varepsilon_{zz}^{(3)} = u_{,z}^{(3)} = \xi_{,zz}(z) - n\Psi_{,z}(z) - \xi_{,z,z}(z)(x(s) - n \sin \alpha(s)) - \eta_{,zz}(z)(y(s) + h \cos \alpha(s)) - \theta_{,zz}(z)(\omega(s) + nt(s)), \quad (2)$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2}(u_{,n}^{(3)} + w_{,z}) = \frac{1}{2}(-\Psi - w_{,z} + w_{,z}) = -\frac{1}{2}\Psi.$$

Уравнения равновесия получим, применяя принцип Лагранжа.

Вычисляем вариации деформаций, например для $\delta \varepsilon_{zz}^{(1)}$ получим

$$\delta \varepsilon_{zz}^{(1)} = \delta \zeta_{,z}(z) + c \delta \psi_{,z} - \delta \xi_{,zz}(x(s) - n \sin \alpha(s)) - \\ - \delta \eta_{,zz}(z)(y(s) + n \cos \alpha(s)) - \delta \theta_{,zz}(\omega(s) + n t(s)).$$

Аналогично для других вариаций в слоях: $\delta \varepsilon_{zz}^{(2)}$, $\delta \varepsilon_{zz}^{(3)}$, $\delta \varepsilon_{zn}^{(3)}$.

Введем внутренние силы, интегрируя по поперечному сечению, т.е. по координатам n , s .

$$N^{(\kappa)} = \iint_{sn} \sigma_{zz} ds dn; \quad Q = Q^{(3)} = \iint_{sn} \sigma_{zn}^{(3)} ds dn; \quad M_x^{(\kappa)} = \iint_{sn} \sigma_{zz}^{(\kappa)} y ds dn; \\ M_y^{(\kappa)} = -\iint_{sn} \sigma_{zz}^{(\kappa)} ds dn; \quad B = \iint_{sn} \sigma_{zz}^{(\kappa)} \omega ds dn$$

Необходимо учесть крутящий момент свободного кручения M_x .

Определим вариацию потенциальной энергии, как работу внутренних сил деформаций по слоям, и интегрируя по объему получим

$$\delta W = \int \sum_z \iint_{sn} (\sigma_y^{\kappa} \delta \varepsilon_{ij}^{(\kappa)}) ds dn dz.$$

Аналогично для вариации работа внешних сил получим

$$\delta A = \iint_{zs} (p_z \delta u + p_v \delta v + p_w \delta w) ds dz + \delta A_G.$$

Здесь δA_G – вариации работы внешних сил на контуре.

Подставляя в эти выражения вариации деформаций и преобразуя слагаемые с вариациями производных известным образом [2], например,

$$(N(z) \delta \xi_{,z}) = (N(z) \delta \xi)_{,z} - (N_{,z}(z) \delta \xi).$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим систему уравнений равновесия в силах:

$$N_{,z} = -p_z, \\ M_{,z} - Q = 0, \\ M_{y,zz} = \int_{L(z)} \frac{dp_z}{dz} x ds - q_x, \\ M_{x,zz} = \int_{L(z)} \frac{dp_z}{dz} y ds - q_y, \\ B_{,zz} + M_{k,z} = \int_{L(z)} \frac{dp_z}{dz} \omega ds - m. \quad (3)$$

Здесь M – обобщающий момент, соответствующий сдвигу Ψ ; m – погонный крутящий момент; q_x , q_y , p_z – погонные распределенные поверхностные нагрузки.

Преобразуем условия равновесия в силах (3) в уравнения равновесия в перемещениях.

$$\left(F \xi_{,z} + S_n \psi_{,z} - S_y \xi_{,zz} - S_x \eta_{,zz} - S_\omega \theta_{,zz} \right)_{,t} = \frac{1}{E} p_z, \\ \left(S_n \zeta_{,z} + I_n \psi_{,z} - T_{ny} \xi_{,zz} - I_{nx} \eta_{,zz} + I_{nx} \theta_{,zz} \right)_{,z} - \bar{G} \Psi = 0, \\ \left(-S_y \xi_{,z} - I_{yn} \psi_{,z} + I_y \xi_{,zz} + I_{yx} \eta_{,zz} + I_{y\omega} \theta_{,z} \right)_{,zz} = \frac{1}{E} \left(q_x + \int_{L(z)} p_{z,z} x ds \right),$$

$$\begin{aligned} (-S_x \xi_{,z} - I_{xn} \psi_{,z} + I_{xy} \xi_{,zz} + I_x \eta_{,zz} + I_{x\omega} \theta_{,z})_{,zz} &= \frac{1}{E} \left(q_y - \int_{L(z)} p_{z,z} y ds \right) \\ (-S_\omega \xi_{,z} - I_{\omega n} \psi_{,z} + I_{\omega y} \xi_{,zz} + I_{x\omega} \eta_{,zz} + I_\omega \theta_{,z})_{,zz} - \left(\frac{G}{E} I_\rho \theta_{,z} \right)_{,z} &= \frac{1}{E} \left(m + \int_{L(z)} P_{z,z} \omega ds \right). \end{aligned}$$

Следует заметить, что полученная система уравнений имеет принципиально ту же структуру как и в случае сплошного тонкостенного стержня, правда на два порядка выше, что обусловлено учетом сдвига во внутреннем слое [3]. Но здесь геометрические характеристики вычисляются по слоям и суммируются. Более того эти характеристики, а именно моменты инерции I_x , I_y , в связи с тем, что для любой малой окрестности приращения вида $n \sin \alpha$, $n \cos \alpha$. Поэтому геометрические характеристики примут вид, например

$$I_x = \int y^2(s) dF + \int \cos \alpha(s) dI,$$

где $dF = \delta(s) ds$; $dI = \frac{\delta^3(s)}{12} ds$.

Полученная система уравнений шестнадцатого порядка. В рамках матричного метода решения [4] система уравнений может быть приведена к системе восьми уравнений второго порядка канонической формы. Тогда решение может быть представлено через матричные функции $Co(E(z))$ и $Si(E(z))$ с определяющей матрицей $E(z)$ восьмого порядка, что вполне обозримо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.
2. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель: Белгут, 2002. – 344 с.
3. Косых Э.Г. Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней переменной жесткости / Э.Г. Косых // Вестник Самарского государственного университета. – Самара, 2008. – №8/1(67). – С. 300–399.
4. Косых Э.Г. Поперечный изгиб тонкостенного стержня с переменной по длине жесткостью. – Минск: Механика, 2010.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕКУЧЕСТИ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ОДНООСНОГО СЖАТИЯ

Гавриленко С.Л.

*Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого
НАН Беларуси, Гомель*

Fluidity modeling of a nonlinear elastic viscoplastic material in conditions of uniaxial compression has been carried out. Changes of the area of cross section of a sample and linear factor of deformation from time have been taken into account. Results of modeling have been compared to experimental data.

Введение

Хладотекучесть, как проявление ползучести, в особенности свойственная политетрафторэтилену (ПТФЭ), в определенной степени способствует широкому использованию указанного полимерного материала в уплотнительной технике, способствуя с течением времени прилеганию контактирующих поверхностей. С другой стороны, хладотекучесть приводит к нестабильности геометрической формы сопряжений из антифрикционных полимерных композитов при эксплуатации. Таким образом, в целях прогнозирования эксплуатационных характеристик трибосопряжений на стадии проектирования, необходимо описание и прогнозирование хладотекучести.

В данной работе описана методика прогнозирования хладотекучести на основе математического моделирования напряженно-деформированного состояния материала в условиях растяжения и сжатия.

Постановка задачи

Искомými функциями задачи являются компоненты вектора скорости. В общем случае эти 3 компоненты зависят от 4 переменных (цилиндрических координат и времени):

$$V_r = V_r(r, \varphi, z, t), \quad V_\varphi = V_\varphi(r, \varphi, z, t), \quad V_z = V_z(r, \varphi, z, t).$$

Считаем, что компоненты тензора скоростей деформации связаны с компонентами вектора скорости соотношениями Коши, которые в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\xi_{rr} = \frac{\partial V_r}{\partial r}; \quad \xi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r}; \quad \xi_{zz} = \frac{\partial V_z}{\partial z};$$

$$\xi_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \right); \quad \xi_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right); \quad \xi_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right).$$

Последние соотношения верны при малых градиентах компонент вектора скорости. Малые градиенты могут быть обеспечены при условии небольшой скорости нагружения и относительно большой рабочей длины образца.

Исходной является модель нелинейного упруговязкопластического материала с ненулевым пределом текучести. Аналитическая форма модели имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\tau}{H} \xi_{ij} \\ \tau = \tau_0 + K \left(\frac{H}{\varepsilon_0} \right)^m \text{ при } \tau \geq \tau_0, \\ \sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \text{ при } \tau < \tau_0 \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0. \end{array} \right.$$

Здесь S_{ij} и ξ_{ij} – соответственно девиаторы напряжений и скоростей деформации, $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ – соответственно тензора напряжений и деформации, τ и H – интенсивности тензора напряжений и скоростей деформации соответственно, τ_0 – предел текучести, m – параметр скоростной чувствительности, K – коэффициент вязкости, ε_0 – некоторая характерная скорость деформации, λ, μ – параметры Ламе, div – оператор дивергенции.

С помощью векторного и скалярного соотношений модели могут быть получены компоненты девиатора скоростей деформации и напряжений. Тогда уравнения движения в цилиндрических координатах относительно 4 неизвестных функций $V_x(x, y, z, t)$, $V_y(x, y, z, t)$, $V_z(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$ в квазистатическом подходе имеют вид [1, 2].

Граничные условия для этой системы уравнений имеют вид:

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Gamma} = 0,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши; Γ – подвижная боковая граница образца, n_j – нормаль к границе Γ .

Предполагаем, что материал однородный по структуре и ширине. Процесс движения разобьем на несколько состояний. Для каждого состояния верны следующие предположения:

- 1) изменением размеров тела можно пренебречь (аналогично квазистатическому подходу [3]);
- 2) на верхнем торце образца задан постоянный вектор скорости, на боковых торцах нулевые усилия (свертка тензора напряжений и внешней нормали равна нулю), нижнее и верхнее сечения свободно скользят.

При сделанных предположениях относительно продольной скорости сделаем допущение:

$$V_z = -\frac{v}{l_m} z.$$

Оператор дивергенции в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

Далее делаем предположение, что $\frac{\partial V_r}{\partial r}$ и $\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$ являются функциями только

времени. В силу сделанных предположений вектор скорости имеет вид

$$V_r = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m} r, \quad V_\varphi = 0, \quad V_z = -\frac{v}{l_m} z.$$

Находим тензор скоростей деформации, для этого воспользуемся соотношениями Коши: $\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$, где V_i – компоненты вектора скорости, x_i – декартовы координаты, $i, j=1,2,3$. После несложных математических операций, получаем компоненты тензора скоростей деформации. Они имеют вид

$$\xi_{11} = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m}, \quad \xi_{22} = \frac{1}{2} \frac{v}{l_m}, \quad \xi_{33} = -\frac{v}{l_m}, \quad \xi_{12} = 0, \quad \xi_{13} = 0, \quad \xi_{23} = 0.$$

После того, как компоненты тензора скоростей деформаций известны находим интенсивность скоростей деформации (второй инвариант тензора) по известной формуле:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij} \xi_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2 + \xi_{33}^2)}.$$

Последнее равенство верно для тензора скоростей деформации диагонального вида. После подстановки компонент имеем

$$H = \frac{v}{l_m}.$$

Воспользовавшись вторым соотношением в определяющих соотношениях модели, получим интенсивность девиатора напряжений τ :

$$\tau = \tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m.$$

Согласно векторным соотношениям модели определим компоненты девиатора тензора напряжений. После несложных математических преобразований получим

$$S_{11} = \frac{1}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right), \quad S_{22} = \frac{1}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right),$$

$$S_{33} = -\frac{2}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right), \quad S_{12} = 0, \quad S_{13} = 0, \quad S_{23} = 0.$$

Далее находим первый инвариант тензора напряжений. Для этого выпишем уравнение равновесия в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial(S_{33} + p)}{\partial z} = 0.$$

Учитывая, что $\frac{\partial S_{33}}{\partial z} = 0$ и после подстановки выражений для компонент вектора скорости получаем систему уравнений в частных производных для определения p :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Зная компоненты девиатора напряжений и первый инвариант, можем найти σ_{33} по формуле $\sigma_{33} = S_{33} + p$.

Зная $\sigma_{33}(x, y, z, t)$ и $S(t)$ некоторого поперечного сечения по известной формуле условия равновесия можем найти зависимость силы от времени t .

$$P_T(t_i) = \frac{2\pi r_i^2}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right) - p\pi r_i^2.$$

Значение p находим из граничных условий (нулевое усилие на боковой поверхности образца). После несложных математических преобразований имеем:

$$p = -\frac{1}{3} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right).$$

Таким образом, теоретическое значение силы определяется выражением:

$$P_T(t_i) = \pi r_i^2 \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{v}{l_m} \right)^m \right).$$

Аналогичный подход рассмотрен для призматических образцов в работе [5].

Моделирование одноосного сжатия

Для определения параметров модели проведено испытание на сжатие цилиндрического образца радиусом 10 мм и высотой 30 мм со скоростью движения захвата $V = 10$ мм/мин (Instron 5567). Зависимость «Усилие - перемещение» приведена на рис. 1.

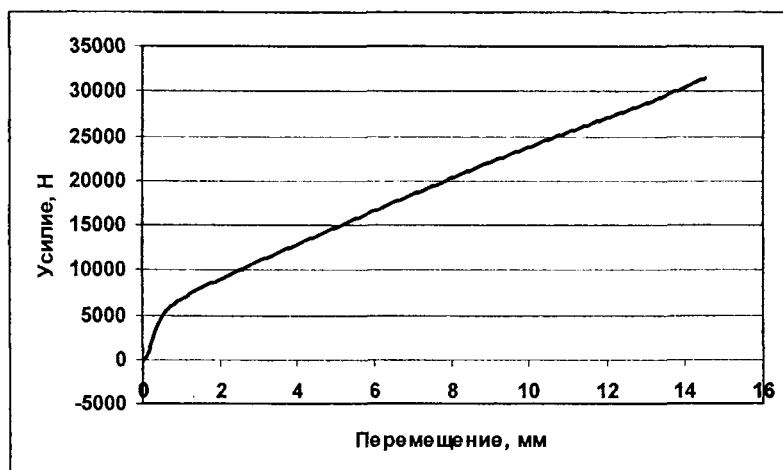


Рис. 1. Зависимость «Усилие (Н) – перемещение (мм)» для материала FLUVIS 25 AM2

Из зависимости «Усилие - перемещение» методом наименьших квадратов и значения точки перегиба кривой получены параметры модели в вязкопластической области:

$$\tau_0 = 16,33 \text{ МПа}, K = 39,99 \text{ МПа}, m = 1,118.$$

Моделирование текучести

При известных параметрах вязкопластической модели проведено моделирование текучести материала FLUVIS 25 AM2. С этой целью проведено испытание на текучесть при постоянной силе $P = 15000$ Н. Данное значение силы достигалось движением захватов со скоростью $V = 10$ мм/мин. Зависимость «Перемеще-

ние – время» для цилиндрического образца диаметром 20 мм и высотой 30 мм в условиях текучести представлена на рис. 2.

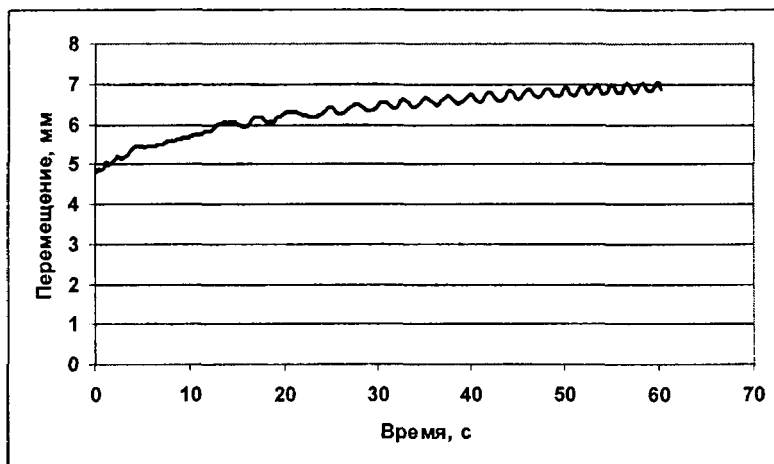


Рис. 2. Зависимость «Перемещение (мм) – время (с)» для материала FLUVIS 25 AM2 при действии постоянной силы $P=15000$ Н

При текучести образца материала имеет место следующая зависимость перемещения текучести от времени:

$$\kappa dt = \frac{du}{l_0 - u},$$

где l_0 – высота образца, соответствующая началу текучести ($l_0 = 25,2$ мм), l_1 – начальная высота образца ($l_1 = 30$ мм), r_0 – начальный радиус образца ($r_0 = 10$ мм), κ – коэффициент, определяемый из следующего соотношения:

$$P_T(t_i) = \frac{\pi r_0^2 l_1}{l_0 - u} \left(\tau_0 + K \left(\frac{1}{\varepsilon_0} k \right)^m \right).$$

После несложных математических преобразований получаем интегральную зависимость текущего перемещения текучести от времени, которая имеет вид, аналогичный приведенному в работе [4]:

$$\frac{1}{K^m} \frac{P_{\text{мек}} l_0}{\pi r_0^2 l_1} \int \frac{1}{\varepsilon_0 \frac{P_{\text{мек}}(l_0 - u)}{\pi r_0^2 l_1} x(x - \tau_0)^{\frac{1}{m}}} dx = t.$$

Из последнего соотношения получаем зависимость полного перемещения текучести от времени. Результаты сравнительного анализа расчетного и экспериментального значения, относительной погрешности представлены в табл. 1.

Результаты сравнительного анализа

№	1	2	3	4	5	6	7
Время, с	2	5	10	15	20	25	30
Расчетное значение перемещения, мм	5,11	5,56	6,27	6,92	7,53	8,10	8,63
Экспериментальное значение перемещения, мм	5,13	5,43	5,69	5,99	6,28	6,42	6,48
Относительная погрешность, %	0,4	2,4	10,2	15,5	19,9	26,1	33,1

Заключение

Приближенное решение квазистатической задачи о сжатии цилиндрического образца и разработанная методика моделирования текучести удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными при малых временах деформирования. Более точное описание предполагает аналитическое решение задачи о сжатии цилиндрического образца и учета изменения параметров упруговязкопластической модели в процессе текучести.

Разработанный подход может быть использован в инженерных методиках расчета параметров формоизменения элементов узлов трения из нелинейных упруговязкопластических материалов.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проекты T10CO-033, Ф10-240).

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
2. Огибалов, П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязкопластических сред. – М.: МГУ, 1977. – 373 с.
3. Новацкий, В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
4. Гавриленко, С.Л., Шилько, С.В., Васин, Р.А. Определение характеристик вязко-пластического материала в условиях течения Куэтта // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – № 3. – С. 502–508.
5. Гавриленко, С.Л., Шилько С.В. Идентификация модели нелинейного вязкопластического материала при статическом растяжении с учетом изменения площади поперечного сечения образца // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2009. – Т. 14, № 1. – С. 22–27.

РАСЧЕТ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ЗАДАННОЙ НАЧАЛЬНОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ ЕГО ДВИЖЕНИЯ

Локтионов А.В., Сеньков С.А.

Витебский государственный технологический университет, Витебск

Difficult movement of an elliptic pendulum is considered. Are made and solved the differential equations describing movements of a slider and a ball. In work it is accepted, that during the initial moment an angle of rotation of an arrow of a pendulum from a vertical and speed of a slider are equal to zero, angle speed of rotation of an arrow are not equal to zero. With the account accepted initial conditions the equations of movement of a slider and small fluctuations of a pendulum are received.

В работе [1] получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня. При этом используется координатный способ задания движения ползуна и шарика. Вертикальная ось проведена через начальное положение центра тяжести системы, который движется ввиду отсутствия горизонтальных внешних сил по вертикали. Принято, что в начальный момент ползун находится в покое, угловая скорость вращения шарика $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0$, угол отклонения $\varphi = \varphi_0 \neq 0$.

Рассмотрим эллиптический маятник, который состоит из ползуна I, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и шарика II, подвешенного к ползуну I нерастяжимым стержнем (рис. 1). Масса ползуна I равна M , масса шарика – m , длина нерастяжимого стержня – l , момент инерции шарика относительно точки $O_1 - J$.

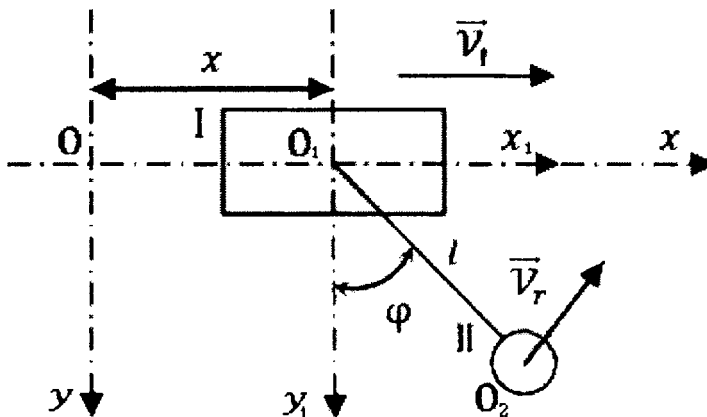


Рис. 1. Расчетная схема движения эллиптического маятника

По расчетной схеме рис. 1 принимаем, что в начальный момент угол $\varphi = \varphi_0 = 0$, а угловая скорость $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \neq 0$. Найдем закон движения ползуна и шарика в зависимости от заданных начальных условий, при которых $\dot{\varphi}_0 = \omega_0 \neq 0$.

Для решения воспользуемся уравнением Лагранжа. Принимаем, что на маятник не действуют силы тяжести и потенциальная энергия системы $\Pi = 0$. Система обладает двумя степенями свободы, а значит двумя обобщенными координатами x и φ . Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (2)$$

Рассчитаем кинетическую энергию T системы:

$$T = T_I + T_{II},$$

где T_I – кинетическая энергия первого тела, T_{II} – кинетическая энергия второго тела.

Кинетическая энергия ползуна определяется из выражения

$$T_I = \frac{M}{2} v_I^2 \text{ или } T_I = \frac{M \dot{x}^2}{2}.$$

Так как центр массы шарика не совпадает с осью подвеса, то кинетическая энергия второго тела определится по формуле [2]

$$T_{II} = \frac{1}{2} m v_I^2 + m \vec{v}_I \vec{v}_r + T_r,$$

где T_r – кинетическая энергия шарика в его движении относительно поступательно перемещающихся осей $x_1 O_1 y_1$.

$$T_r = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, \quad (3)$$

$$\vec{v}_I \vec{v}_r = v_I v_r \cos \varphi = \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi. \quad (4)$$

С учетом (3) и (4) кинетическая энергия шарика определяется из выражения:

$$T_{II} = \frac{1}{2} m v_I^2 + m l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

Рассмотрим уравнение (1), найдем частные производные кинетической энергии по координате и скорости:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} + m(\dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi), \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в уравнение (1), получим

$$\frac{d}{dt} (M \dot{x} + m \dot{x} + m l \dot{\varphi} \cos \varphi) = 0. \quad (7)$$

Интегрируя уравнение (7) будем иметь

$$(M + m) \dot{x} + m l \dot{\varphi} \cos \varphi = C_1. \quad (8)$$

С учетом принятых начальных условий при $t = t_0 = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ из уравнения (8) получим: $C_1 = m l \dot{\varphi}_0$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$(M + m) \dot{x} + m l \dot{\varphi} \cos \varphi = m l \dot{\varphi}_0. \quad (9)$$

Из равенства (9) скорость движения ползуна определяется из выражения

$$\dot{x} = \frac{m l (\dot{\varphi}_0 - \dot{\varphi} \cos \varphi)}{M + m}. \quad (10)$$

Уравнения (10) выражает зависимость скорости ползуна от угловой скорости вращения и угла отклонения стержня l от вертикальной оси.

Интегрируя (10), получим

$$(M + m)x + ml \sin \varphi = ml\dot{\varphi}_0 t + C_2. \quad (11)$$

С учетом принятых начальных условий при $t = t_0 = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ из уравнения (11) получим $C_2 = 0$.

Тогда уравнение (11) примет вид

$$x = \frac{ml(\dot{\varphi}_0 t - \sin \varphi)}{M + m}. \quad (12)$$

Уравнение (12) выражает закон движения ползуна в зависимости от угла отклонения стержня l от вертикальной оси, угловой скорости и времени.

Рассмотрим уравнение (2), найдем частные производные кинетической энергии по координате и скорости:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml\dot{x} \cos \varphi + J\dot{\varphi}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -ml\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в уравнение (2), получим

$$\frac{d}{dt} [ml\dot{x} \cos \varphi + J\dot{\varphi}] + ml\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi = 0. \quad (15)$$

Подставив в (15) выражение (10) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{(ml)^2}{M + m} \dot{\varphi}_0 \cos \varphi - \frac{(ml)^2}{M + m} \dot{\varphi} \cos^2 \varphi + J\dot{\varphi} \right] + \frac{(ml)^2}{M + m} \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi} \sin \varphi - \\ - \frac{(ml)^2}{M + m} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначая $\frac{(ml)^2}{M + m} = B$, интегрируя уравнение (10), будем иметь

$$\begin{aligned} -B\dot{\varphi}_0 \dot{\varphi} \sin \varphi - B(\ddot{\varphi} \cos^2 \varphi - \dot{\varphi}^2 2 \cos \varphi \sin \varphi) + J\ddot{\varphi} + B\dot{\varphi}_0 \dot{\varphi} \sin \varphi - \\ - B\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

После преобразований получим дифференциальное уравнение маятника в виде:

$$-B\ddot{\varphi} \cos^2 \varphi + B\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + J\ddot{\varphi} = 0. \quad (17)$$

Для решения дифференциального уравнения (17) понизим порядок уравнения путем замены $p = \dot{\varphi}$, тогда

$$\ddot{\varphi} = \frac{dp}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = p \frac{dp}{d\varphi}. \quad (18)$$

С учетом (18) уравнение (17) примет вид

$$-Bp \frac{dp}{d\varphi} \cos^2 \varphi + \frac{B}{2} p^2 \sin 2\varphi + Jp \frac{dp}{d\varphi} = 0. \quad (19)$$

Сократив каждое из слагаемых уравнения (19) на p , получим

$$\frac{dp}{d\varphi} (J - B \cos^2 \varphi) + \frac{B}{2} p \sin 2\varphi = 0. \quad (20)$$

Разделяя переменные уравнения (20), будем иметь

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{B \sin 2\varphi}{2 B \cos^2 \varphi - J} d\varphi. \quad (21)$$

Рассмотрим интеграл правой части уравнения (21). Так как

$$d(B \cos^2 \varphi - J) = B 2 \cos \varphi (-\sin \varphi) d\varphi = -B \sin 2\varphi d\varphi.$$

Следовательно,

$$B \sin 2\varphi d\varphi = -d(B \cos^2 \varphi - J).$$

Тогда

$$\int -\frac{d(B \cos^2 \varphi - J)}{2(B \cos^2 \varphi - J)} = -\frac{1}{2} \ln|B \cos^2 \varphi - J|. \quad (22)$$

Подставляя (22) в уравнение (21) и учитывая, что $\int \frac{dp}{p} = \ln|p|$, получим:

$$\ln|p| = -\frac{1}{2} \ln|B \cos^2 \varphi - J| + \ln C_3. \quad (23)$$

Из уравнения (23) следует, что

$$p = \frac{C_3}{\sqrt{B \cos^2 \varphi - J}}.$$

Учитывая, что $p = \dot{\varphi}$, получим

$$\dot{\varphi} = \frac{C_3}{\sqrt{B \cos^2 \varphi - J}}. \quad (24)$$

С учетом принятых начальных условий при $t = t_0 = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$ из уравнения (24) получим $C_3 = \dot{\varphi}_0 \sqrt{B - J}$.

Тогда уравнение (24) примет вид

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}_0 \sqrt{B - J}}{\sqrt{B \cos^2 \varphi - J}} = \frac{\dot{\varphi}_0 \sqrt{B - J}}{\sqrt{B - B \sin^2 \varphi - J}}.$$

С учетом равенства $B = \frac{(ml)^2}{M + m}$ последнее примет вид

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \sqrt{\frac{(ml)^2 - J(M + m)}{(ml)^2 - (ml)^2 \sin^2 \varphi - J(M + m)}}. \quad (25)$$

Уравнения (25) выражает зависимость угловой скорости вращения маятника от угла отклонения стержня l от вертикальной оси и заданной начальной угловой скорости.

Из уравнения (25) найдем закон движения эллиптического маятника, считая угол φ малым. Так как для малых углов $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, тогда $\sin^2 \varphi = \varphi^2$ (справедливо в диапазоне от -20° до 20°). Тогда уравнение (25) примет вид

$$\sqrt{1 - \frac{(ml)^2 \varphi^2}{(ml)^2 - J(M + m)}} d\varphi = \dot{\varphi}_0 dt. \quad (26)$$

Введем замену $(ml)^2 / [(ml)^2 - J(M + m)] = a$, тогда уравнение (26) примет вид:

$$\sqrt{1 + a\varphi^2} d\varphi = \dot{\varphi}_0 dt. \quad (27)$$

Для решения уравнения (27) воспользуемся заменой $\sqrt{1 + a\varphi^2} = p$. Получим

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{a}(p^2 - 1)}, \text{ а } d\varphi = d\sqrt{\frac{1}{a}(p^2 - 1)} = p / \sqrt{a(p^2 - 1)} dp.$$

Тогда уравнение (27) примет вид

$$\int p \frac{p}{\sqrt{a(p^2 - 1)}} dp = \int \dot{\varphi}_0 dt. \quad (28)$$

Рассмотрим левую часть уравнения (28):

$$\int p \frac{p}{\sqrt{a(p^2 - 1)}} dp = \sqrt{\frac{1}{a}} \int \frac{p^2}{\sqrt{p^2 - 1}} dp. \quad (29)$$

Введем замену $\sqrt{p^2 - 1} = t$ тогда $p = \sqrt{t^2 + 1}$, а $dp = (t/\sqrt{t^2 + 1})dt$.

Тогда уравнение (29) примет вид

$$\sqrt{\frac{1}{a}} \int \frac{t^2 + 1}{t} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \sqrt{\frac{1}{a}} \int \sqrt{t^2 + 1} dt. \quad (30)$$

Введем замену $t = \operatorname{tg} x$ тогда $\sqrt{t^2 + 1} = 1/\cos x$, а $dt = (1/\cos^2 x) dx$.

Тогда уравнение (30) примет вид

$$\sqrt{\frac{1}{a}} \int \frac{1}{\cos x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \sqrt{\frac{1}{a}} \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \sqrt{\frac{1}{a}} \int \frac{\cos x}{(\cos^2 x)^2} dx = \sqrt{\frac{1}{a}} \int \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2 x)^2}. \quad (31)$$

Введем замену $\sin x = \cos y$. Тогда уравнение (31) примет вид

$$\sqrt{\frac{1}{a}} \int \frac{d \cos y}{(1 - \cos^2 y)^2} = - \sqrt{\frac{1}{a}} \int \frac{\sin y dy}{(\sin^2 y)^2} = - \sqrt{\frac{1}{a}} \int \frac{1}{\sin^3 y} dy. \quad (32)$$

Так как для малых углов $\sin y \approx y$, то $\sin^3 y \approx y^3$. Тогда уравнение (32) примет вид

$$- \sqrt{\frac{1}{a}} \int \frac{1}{y^3} dy = - \sqrt{\frac{1}{a}} \int y^{-3} dy = \sqrt{\frac{1}{a}} \frac{1}{2y^2}. \quad (33)$$

Введем обратную замену:

$$y \approx \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \cos x.$$

Тогда уравнение (33) примет вид

$$\sqrt{\frac{1}{a}} \frac{1}{2 \cos^2 x} = \sqrt{\frac{1}{a}} \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 x). \quad (34)$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} x = t$, а $t = \sqrt{p^2 - 1}$, где $p^2 = 1 + a\varphi^2$, из (29) и (34) будем иметь

$$\int p \frac{p}{\sqrt{a(p^2 - 1)}} dp = \sqrt{\frac{1}{a}} \frac{1}{2} (1 + a\varphi^2). \quad (35)$$

С учетом (35) уравнение (28) примет вид

$$\sqrt{\frac{1}{a}} \frac{1}{2} (1 + a\varphi^2) = \dot{\varphi}_0 t + C_4. \quad (36)$$

С учетом принятых начальных условий при $t = t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$ из уравнения

$$(36) \text{ получим } C_4 = \sqrt{\frac{1}{a}} \frac{1}{2}.$$

Тогда уравнение (36) примет вид

$$\sqrt{\frac{1}{a}} \frac{1}{2} (1 + a\varphi^2) = \dot{\varphi}_0 t + \sqrt{\frac{1}{a}} \frac{1}{2}. \quad (37)$$

Подставляя в равенство (37) $a = (ml)^2 / [(ml)^2 - J(M + m)]$ получим

$$\varphi = \sqrt{\sqrt{\frac{4[(ml)^2 - J(M + m)]}{(ml)^2 \varphi}} \dot{\varphi}_0 t} . \quad (38)$$

Уравнение (38) выражает закон движения малых колебаний эллиптического маятника.

Подставляя уравнения (38) в (12) получим закон движения ползуна в зависимости от времени и заданной начальной угловой скорости вращения маятника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: в 2 т. / А. А. Яблонский. – М.: Высшая школа, 1971. – Т.2: Динамика. – 488 с.
2. Бутенин, В. Н. Курс теоретической механики: в 2 т. / В. Н. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М.: Наука, 1971. – Т.2: Динамика. – 464 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ

Громько О.В., Царева А.А.

Белорусский государственный университет, Минск

In this paper the problem of mathematical and computer simulation of the kinematics of a complex mechanism on the example of solving the direct and inverse problems of the kinematics of the manipulator Fanuc M-710iC/20L is considered. The results of calculations in package Mathematica for the mechanism are obtained.

При исследовании механики роботов важным аспектом является автоматизация расчетов и качественная визуализация, как самой твердотельной модели, так и полученных результатов. В такой ситуации наиболее рационально применение различных программных комплексов компьютерной математики и механики, таких как *Mathematica*, ADAMS, Visual Nastran, ANSYS WorkBench. Каждый из этих пакетов в отдельности позволяет пользователям провести всесторонний анализ и получить достоверные и наглядные результаты, однако наибольшей эффективности можно достичь при совместном использовании данных программных комплексов. Рассмотрим подробнее моделирование в пакетах ADAMS, ANSYS WorkBench, Visual Nastran и Pro/Engineer. Так в настоящей работе рассматриваются основные результаты анализа кинематики манипулятора Fanuc M-710iC/20L представленного на рис. 1 в среде пакета *Mathematica*.

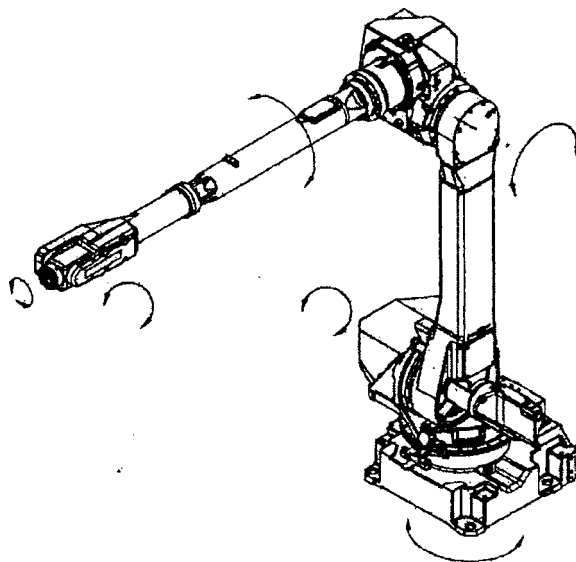


Рис. 1. Манипулятор Fanuc M-710iC/20L

Одной из наиболее важных задач на сегодняшний день является исследование кинематики манипулятора. При этом прямая задача кинематики: определение положения и ориентации рабочего органа манипулятора по заданным обобщенным координатам, - является более простой для исследования, так как имеет однозначное и единственное решение, в отличие от обратной задачи кинематики: отыскание конфигурации робота по заданному положению рабочего органа манипулятора, - которая требует более громоздких и нетривиальных решений. Поэтому при решении данных задач были использованы возможности системы компьютерной математики *Mathematica*.

Для модели M-710iC/20L, имеющей структурную формулу RRRRRR, системы координат, связанные со звеньями были выведены следующим образом [3]:

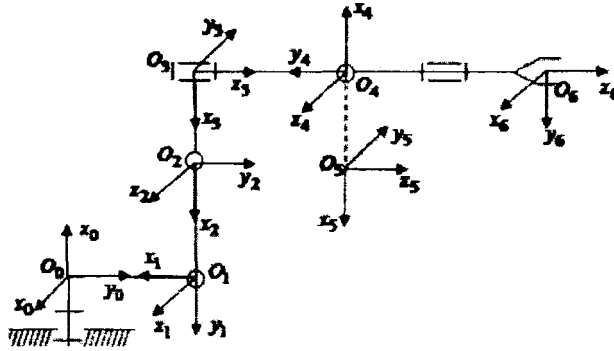


Рис 2. Системы координат, связанные со звеньями манипулятора M-710iC/20L

Соответствующая таблица параметров Денави-Хартенберга преобразования $(i-1)$ -й системы координат в i -ю имеет вид

N	Тип	$N_{\text{звена}}$	θ	S	a	α
1	R	1	q_1	0	$-O_0O_1$	$-\pi/2$
2	R	2	q_2	0	$-O_1O_2$	0
3	R	3	q_3	0	$-O_2O_3$	$-\pi/2$
4	R	4	q_4	O_3O_4	0	$-\pi/2$
5	R	5	q_5	0	0	$-\pi/2$
6	R	6	q_6	O_4O_6	0	0

где $N_{\text{звена}}$ – номер звена, $\theta = q_i, i = \overline{1,6}$ – углы поворота между осью x_{i-1} и лучом, проведенным из точки O_{i-1} параллельно оси x_i (в данном случае обобщенные координаты), S_i – перенос вдоль оси z_{i-1} до тех пор, пока оси x_{i-1} и x_i не окажутся на одной прямой, a_i – перенос вдоль оси x_{i-1} до тех пор, пока не совпадут точки O_{i-1} и O_i , α_i – поворот вокруг оси x_i до совмещения систем $(i-1)$ и i .

Решением прямой задачи кинематики манипулятора, является матрица $A_{6,0} = A_{1,0}A_{2,1}A_{3,2}A_{4,3}A_{5,4}A_{6,5}$, которая определяет положения и ориентации рабочего органа по заданной конфигурации манипулятора. Данная матрица является результатом последовательного перемножения матриц преобразования вида

$$A_{i,i-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, i = \overline{1,6}.$$

В силу громоздкости полученного решения $A_{6,0}$, приведем только четвертый столбец данной матрицы, так как его значения понадобятся дальше для нахождения матрицы Якоби:

$$\begin{aligned} & (-h_5 S_1 S_4 S_5 - C_1 (h_1 + C_2 (h_2 + C_3 h_3 + h_4 S_3 - C_5 h_5 S_3 + C_3 C_4 h_5 S_5) + S_2 (C_3 (h_4 - C_5 h_5) - \\ & - S_3 (h_3 + C_4 h_5 S_5))), -S_1 (h_1 + S_2 (C_3 h_4 - C_3 C_5 h_5 - h_3 S_3) + C_2 (h_2 + C_3 h_3 + h_4 S_3 - C_5 h_5 S_3)) + \\ & + h_5 (-C_2 C_3 C_4 S_1 + C_4 S_1 S_2 S_3 + C_1 S_4) S_5, S_2 (h_2 + C_3 h_3 + h_4 S_3 - C_5 h_5 S_3 + C_3 C_4 h_5 S_5) + \\ & + C_2 (-C_3 h_4 + C_3 C_5 h_5 + h_3 S_3 + C_4 h_5 S_3 S_5), 1)^T. \end{aligned}$$

Аналитическое решение обратной задачи связано с решением системы шести нелинейных уравнений с n неизвестными, поэтому при ее решении используем известный алгоритм [3]. Для упрощения расчетов в качестве опорной выберем систему $O_5x_6y_6z_6 = \bar{R}_6$, оси которой параллельны осям системы $R_6 = O_6x_6y_6z_6$, а начало находится в точке O_6 . Данный прием имеет место, поскольку M-710iC/20L заканчивается тремя вращательными парами, оси которых пересекаются в одной точке. С учетом этого получим, что во всех матрицах $A_{i,j}$, $-O_4O_6 = 0$. Зададим матрицу:

$$B_{6,0} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x^* \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & y^* \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & z^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица, соответствующая системе $O_5x_6y_6z_6 = \bar{R}_6$ запишется в виде.

$$\tilde{B}_{6,0} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & -\alpha_{13}h_5 + x^* \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & -\alpha_{23}h_5 + y^* \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & -\alpha_{33}h_5 + z^* \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Все элементы данной матрицы являются известными и задают положение и ориентацию рабочего органа в базовой системе координат. Для решения обратной задачи воспользуемся формулами для расчета обратных матриц $A_{i,i-1}^{-1}$, которые описывают переход из $(i-1)$ -й системы координат в i -ю:

$$A_{i,i-1}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & -a_i \\ -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & -s_i \sin \alpha_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -s_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

соответствующие параметрам Денави-Хартенберга, заданными выше.

Вычисляя поочередно матрицы $\tilde{B}_{6,i} = A_{i,i-1}^{-1} \tilde{B}_{6,i}$, $i = \overline{1,6}$ и сравнивая соответствующие элементы матриц $\tilde{A}_{6,i}$, $i = \overline{1,6}$, полученных из матриц $A_{6,1}$, $i = \overline{1,6}$ при $-O_4O_6 = 0$ получим следующее решение обратной задачи кинематики для манипулятора M-710iC/20L (нужно отметить, что полное решение задачи получено на третьем шаге при $i = 3$):

$$S_1 = \frac{\varepsilon_1 t_{24}}{\sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2}},$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 t_{14}}{\sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2}},$$

$$S_2 = \frac{(2h_2 t_{34} (h_2^2 - h_3^2 - h_4^2 + (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2) - 2h_2 (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24}) \times \sqrt{4h_2^2 (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + 4h_2^2 t_{34}^2 - (h_2^2 - h_3^2 - h_4^2 + (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2) \varepsilon_2}) / 4h_2^2 ((h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2)}{2h_2^2 ((h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2)},$$

$$C_2 = \frac{-(h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24}) (h_2^2 - h_3^2 - h_4^2 + (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2) + t_{34} \sqrt{4h_2^2 (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + 4h_2^2 t_{34}^2 - (h_2^2 - h_3^2 - h_4^2 + (h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2) \varepsilon_2}}{2h_2^2 ((h_1 + C_1 t_{14} + S_1 t_{24})^2 + t_{34}^2)},$$

$$S_3 = \frac{(-h_2 h_4 + S_2 (h_1 h_3 + h_4 t_{34} + h_3 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \varepsilon_1) - C_2 (h_1 h_4 - h_3 t_{34} + h_4 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \varepsilon_1)) / (h_3^2 + h_4^2)}{h_3^2 + h_4^2},$$

$$C_3 = \frac{(-C_2 h_1 h_3 + h_2 h_3 + h_1 h_4 S_2 + C_2 h_4 t_{34} - h_3 S_2 t_{34} + C_2 h_3 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \varepsilon_1 + h_4 S_2 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \varepsilon_1) / (h_3^2 + h_4^2)}{h_3^2 + h_4^2},$$

$$C_5 = C_1 C_3 S_2 t_{13} + C_1 C_2 S_3 t_{13} + C_3 S_1 S_2 t_{23} + C_2 S_1 S_3 t_{23} + C_2 C_3 t_{33} - S_2 S_3 t_{33},$$

$$S_5 = \varepsilon_3 \sqrt{1 - C_5^2},$$

$$C_4 = (-C_1 C_2 C_3 t_{13} + C_1 S_2 S_3 t_{13} - C_2 C_3 S_1 t_{23} + S_1 S_2 S_3 t_{23} + C_3 S_2 t_{33} + C_2 S_3 t_{33}) / S_5,$$

$$S_4 = (-S_1 t_{13} + C_1 t_{23}) / S_5$$

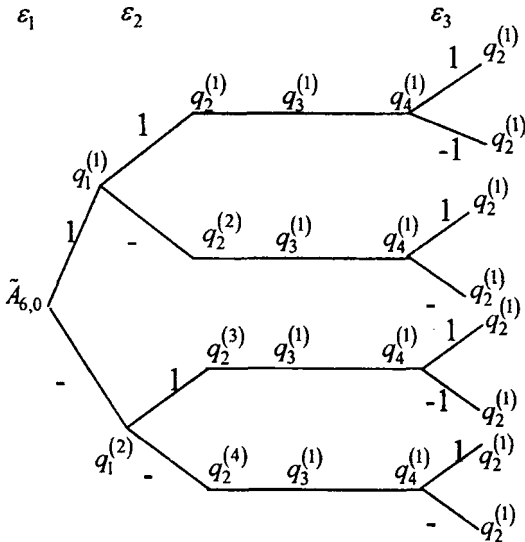
$$C_6 = (C_1 C_3 S_2 t_{11} + C_1 C_2 S_3 t_{11} + C_3 S_1 S_2 t_{21} + C_2 S_1 S_3 t_{21} + C_2 C_3 t_{31} - S_2 S_3 t_{31}) / S_5$$

$$S_6 = (-C_1 C_3 S_2 t_{12} - C_1 C_2 S_3 t_{12} - C_3 S_1 S_2 t_{22} - C_2 S_1 S_3 t_{22} - C_2 C_3 t_{32} + S_2 S_3 t_{32}) / S_5$$

где $\varepsilon_{1,2,3} = \pm 1$ и для краткости $C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$, $i = \overline{1,6}$. При этом в ходе решения были получены ограничения на элементы матрицы $\tilde{A}_{6,2}$

$$4(O_1 O_2)^2 \left(-O_0 O_1 + \varepsilon_1 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \right)^2 + 4(O_1 O_2)^2 t_{34}^2 - ((O_2 O_3)^2 + (O_3 O_4)^2 - t_{34}^2 - \\ - \left(-O_0 O_1 + \varepsilon_1 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2} \right)^2 - (O_1 O_2)^2)^2 \geq 0.$$

Как видно, из-за присутствия параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1$, решение обратной задачи не является однозначным и имеет восемь возможных исходов. Можно построить дерево решений, которое позволяет выполнить проверку полученных результатов:



Выполнив проверку полученных результатов, мы получили, что обратная задача решена верно.

Для вычисления матрицы Якоби рассчитаем элементы $U_{6i} \tilde{a}_4 = \frac{\partial A_{6,0}}{\partial q_i} (0; 0; 0; 1)^T$,

$i = \overline{1,6}$, которые представляют собой продифференцированный по q_i четвертый столбец матрицы $A_{6,0}$:

$$U_{61} \tilde{a}_4 = (h_1 S_1 + C_2 h_2 S_1 + C_2 C_3 h_3 S_1 + C_3 h_4 S_1 S_2 - C_3 C_5 h_5 S_1 S_2 + C_2 h_4 S_1 S_3 - C_2 h_5 S_1 S_3 - h_3 S_1 S_2 S_3 + \\ + C_2 C_3 C_4 h_5 S_1 S_5 - C_4 h_5 S_1 S_2 S_3 S_5 - C_1 h_5 S_4 S_5, -C_1 h_1 - C_1 C_2 h_2 - C_1 C_2 C_3 h_3 - C_1 C_3 h_4 S_2 + \\ + C_1 C_3 C_5 h_5 S_2 - C_1 C_2 h_4 S_3 + C_1 C_2 C_5 h_5 S_3 + C_1 h_3 S_2 S_3 - C_1 C_2 C_3 C_4 h_5 S_5 + C_1 C_4 h_5 S_2 S_3 S_5 - h_5 S_1 S_4 S_5, \\ 0, 1)^T$$

$$U_{62} \tilde{a}_4 = (C_1 h_2 S_2 + C_1 C_3 h_3 S_2 - C_1 C_2 C_3 h_4 + C_1 C_2 C_3 C_5 h_5 + C_1 h_4 S_2 S_3 - C_1 C_5 h_5 S_2 S_3 + C_1 C_2 h_3 S_3 + \\ + C_1 C_3 C_4 h_5 S_2 S_5 + C_1 C_2 C_4 h_5 S_3 S_5, h_2 S_1 S_2 + C_3 h_3 S_1 S_2 - C_2 C_3 h_4 S_1 + C_2 C_3 C_5 h_5 S_1 + h_4 S_1 S_2 S_3 - \\ - C_5 h_5 S_1 S_2 S_3 + C_2 h_3 S_1 S_3 + C_3 C_4 h_5 S_1 S_2 S_5 + C_2 C_4 h_5 S_1 S_3 S_5, C_3 h_4 S_2 - C_3 C_5 h_5 S_2 + C_2 h_2 + \\ + C_2 C_3 h_3 - h_3 S_2 S_3 + C_2 h_4 S_3 - C_2 C_5 h_5 S_3 + C_2 C_3 C_4 h_5 S_5 - C_4 h_5 S_2 S_3 S_5, 1)^T$$

$$U_{63}\bar{a}_4 = (C_1C_2h_3S_3 + C_1h_4S_2S_3 - C_1C_5h_5S_2S_3 - C_1C_2C_3h_4 + C_1C_2C_3C_5h_5 + C_1C_3h_3S_2 + \\ + C_1C_2C_4h_5S_3S_5 + C_1C_3C_4h_5S_2S_5, C_2h_3S_1S_3 + h_4S_1S_2S_3 - C_5h_5S_1S_2S_3 - C_2C_3h_4S_1 + \\ + C_2C_3C_5h_5S_1 + C_3h_3S_1S_2 + C_2C_4h_5S_1S_3S_5 + C_3C_4h_5S_1S_2S_5, C_2h_4S_3 - C_2C_5h_5S_3 - h_3S_2S_3 + \\ + C_2C_3h_3 + C_3h_4S_2 - C_3C_5h_5S_2 - C_4h_5S_2S_3S_5 + C_2C_3C_4h_5S_5, 1)^T$$

$$U_{64}\bar{a}_4 = (C_1C_2C_3h_5S_4S_5 - C_1h_5S_2S_3S_4S_5 - C_4h_5S_1S_5, C_2C_3h_5S_1S_4S_5 - h_5S_1S_2S_3S_4S_5 + C_1C_4h_5S_5, \\ - C_3h_5S_2S_4S_5 - C_2h_5S_3S_4S_5, 1)^T$$

$$U_{65}\bar{a}_4 = (-C_1C_3h_5S_2S_5 - C_1C_2h_5S_3S_5 - C_1C_2C_3C_4C_5h_5 + C_1C_4C_5h_5S_2S_3 - C_5h_5S_1S_4, \\ - C_3h_5S_1S_2S_5 - C_2h_5S_1S_3S_5 - C_1C_3C_4C_5h_5S_1 + C_4C_5h_5S_1S_2S_3 + C_1C_5h_5S_4, \\ - C_2C_3h_5S_5 + h_5S_2S_3S_5 + C_3C_4C_5h_5S_2 + C_2C_4C_5h_5S_3, 1)^T$$

$$U_{66}\bar{a}_4 = (0, 0, 0, 1)^T$$

Векторы $A_{i,0}\bar{a}_3 = A_{i,0}(0; 0; 1; 0)^T$, $i = \overline{0,5}$ представляют собой третьи столбцы матриц $A_{i,0}$, получим

$$A_{0,0}\bar{a}_3 = (0, 0, 1, 0)^T$$

$$A_{1,0}\bar{a}_3 = (-S_1, C_1, 0, 0)^T$$

$$A_{2,0}\bar{a}_3 = (-S_1, C_1, 0, 0)^T$$

$$A_{3,0}\bar{a}_3 = (-C_1C_3S_2 - C_1C_2S_3, -C_3S_1S_2 - C_2S_1S_3, -C_2C_3 + S_2S_3, 0)^T$$

$$A_{4,0}\bar{a}_3 = (C_4S_1 - C_1C_2C_3S_4 + C_1S_2S_3S_4, -C_1C_4 - C_2C_3S_1S_4 + S_1S_2S_3S_4, \\ C_3S_2S_4 + C_2S_3S_4, 0)^T$$

$$A_{5,0}\bar{a}_3 = (C_1C_3C_5S_2 + C_1C_2C_5S_3 - C_1C_2C_3C_4S_5 + C_1C_4S_2S_3S_5 - S_1S_4S_5, \\ C_3C_5S_1S_2 + C_2C_5S_1S_3 - C_2C_3C_4S_1S_5 + C_4S_1S_2S_3S_5 + C_1S_4S_5, \\ C_2C_3C_5 - C_5S_2S_3 + C_3C_4S_2S_5 + C_2C_4S_3S_5, 0)^T$$

Таким образом, получим матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} U_{61}\bar{a}_4 & U_{62}\bar{a}_4 & U_{63}\bar{a}_4 & U_{64}\bar{a}_4 & U_{65}\bar{a}_4 & U_{66}\bar{a}_4 \\ A_{0,0}\bar{a}_3 & A_{1,0}\bar{a}_3 & A_{2,0}\bar{a}_3 & A_{3,0}\bar{a}_3 & A_{4,0}\bar{a}_3 & A_{5,0}\bar{a}_3 \end{pmatrix}$$

Задачи кинематики манипуляторов становятся все более и более актуальными при исследовании современных робототехнических комплексов. Применение мощных пакетов компьютерной механики и математики позволяют автоматизировать расчеты и оптимизировать время, затраченное на получение достоверных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. – М.: Наука, 1976. 103 с.
2. Wolfram, St. The Mathematica Book. Fourth Edition. – Cambridge: Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.
3. Механика промышленных роботов: учеб. пособие для вузов: в 3 кн./ под ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. – Кн. 1: Кинематика и динамика / Е. И. Воробьев, С. А. Попов, Г. И. Шевелева. – М.: Высш. шк., 1988. – 304 с.
4. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах // Специальные главы механики / М.И.Бать; под редакцией Г.Ю.Джанелидзе – М.: Наука, 1973. – Т. 3. – 488 с.

ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ НА МНОГОСЛОЙНОЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Круподеров А.В.

Белорусский государственный университет, Минск

The problem of act of normal loading on transversely isotropic half-space consisted from horizontal layers in is solved. The layers are unbounded. Problem is solved in 3D. The method of solution is based on using of Fourier transform. The cubature formulae are obtained for the following types of problem: resting of elastic layer on inflexible and elastic half-space, resting of two elastic layers on elastic half-space. The examples of calculations are represented. Also comparison of obtained results with numerical results is represented.

Изучение поведения слоистых упругих материалов имеет широкую область приложений в инженерии, механике грунтов и геофизике. В инженерии это изучение поведения композитных материалов. Что касается механики грунтов и геофизики, то породный массив зачастую представляет собой несколько горизонтально залегающих слоев из различных материалов. Однако, упругие свойства материала могут быть различными для различных направлений, т.е. материал может быть анизотропным. Материал, имеющий ось, поворот вокруг которой не вызывает изменений упругих свойств называется трансверсально-изотропным. Именно такой анизотропией свойств зачастую обладают грунты.

Изучение напряженно деформированного состояния трансверсально-изотропного слоя, покоящегося на жестком основании было выполнено Лехницким [1]. Изучением плоского и антиплоского напряженно-деформированного состояния многослойного трансверсально-изотропного полупространства занимались такие авторы как Гарг Синг, Шарма и Куо. Хадхури и Бовал расширили их результаты, предполагая неоднородность свойств [2]. Они предполагали экспоненциальное изменение свойств с глубиной.

В данной работе предлагается метод изучения объемного напряженно-деформированного состояния многослойного трансверсально-изотропного полупространства, вызванного воздействием нормальной нагрузки, распределенной по его поверхности. Основой метода является использование преобразования Фурье.

Итак, будем рассматривать многослойное трансверсально-изотропное упругое полупространство. Будем предполагать, что выполняются условия идеального силового контакта на границах слоев:

$$u_i^j |_{z=h_j} = u_i^{j+1} |_{z=h_j}, \sigma_{i3}^j |_{z=h_j} = \sigma_{i3}^{j+1} |_{z=h_j}.$$

Здесь индексом « j » обозначены напряжения и перемещения в верхнем относительно границы контакта слое, индексом « $j+1$ » – в нижнем относительно границы контакта слое. В дальнейшем индекс j будем опускать, предполагая, что речь идет о конкретном слое.

Уравнения равновесия записываются в виде [3]

$$\begin{aligned} \left(c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= 0, \\ (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(c_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= 0, \\ (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(c_{44} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + c_{33} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $(c)_{ij}, i, j = \overline{1,6}$ – матрица упругих констант, связывающая напряжения с деформациями т.е. компоненты напряжений $\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{13}, \sigma_6 = \sigma_{12}$ с деформациями $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$.

Для нахождения решения поставленной задачи воспользуемся методом, описанным в [3]. Для этого представляем перемещения в следующем виде (здесь приводим выражения для более общего случая $s_1 \neq s_2$, противоположный случай получается из него предельным переходом)

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}, \\ v &= \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \\ w &= \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i}, \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя выражения (2) в (1), найдем, что каждая из функций φ_i должна удовлетворять уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) \varphi_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тогда пользуясь свойствами указанного преобразования получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для трансформант функций φ_i . В данном случае указанная система распадается на независимые уравнения.

$$\frac{d^2 \varphi_i^F}{dz^2} = s_i^2 w^2 \varphi_i^F, \quad \text{где } w^2 = w_1^2 + w_2^2,$$

$$s_i = \sqrt{\frac{(C - c_{13})(C + c_{13} + 2c_{44})}{4c_{33}c_{44}}} + (-1)^{i+1} \sqrt{\frac{(C + c_{13})(C - c_{13} - 2c_{44})}{4c_{33}c_{44}}}, \quad i = \overline{1,2},$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}}, \quad C = \sqrt{c_{11}c_{33}}, \quad \alpha_i = \frac{c_{11} - c_{44}s_i^2}{(c_{13} + c_{44})s_i^2}, \quad z_i = s_i z.$$

Имеем уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этих уравнений можно записать в следующем виде (здесь опять возвращаемся к индексу j т.к. для каждого слоя константы свои):

$$\varphi_i^j = C_{1i}^j e^{s_i w} + C_{2i}^j e^{-s_i w} \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) сначала в формулы (2), учитывая уравнения связи напряжений с деформациями и деформаций с перемещениями, получаем следующую систему линейных уравнений относительно C_{li}^j .

Решая данную систему, находим константы C_{li}^j , а вместе с ними и преобразованное по Фурье Решение задачи. Воспользовавшись интегралами Фурье находим само решение. Аналитическое вычисление этих интегралов является достаточно затруднительной процедурой, поэтому более эффективным представляется воспользоваться известными численными методами для получения решения при конкретных начальных параметрах.

В качестве примера, а также проверки полученного решения, рассмотрим прикладную задачу определения НДС в слое грунта (трансверсально-изотропный слой), расположенного на мощном породном основании (гладкое бесконечное основание). На слой оказывает давление насыпь больших размеров (солеотвал). Ее форма приведена на рисунке 1. Вертикальную нагрузку на слой, вызванную давлением насыпи, принимаем в таком виде:

$$q(x, y) = \frac{\rho g h_e}{a} (H(y+b) - H(y-b)) ((x+a)H(x+a) - 2xH(x) + (x-a)H(x-a)),$$

где ρ – плотность насыпи, a, b, h_e – соответственно ширина, длина и высота насыпи, g – ускорение свободного падения, H – функция Хевисайда.

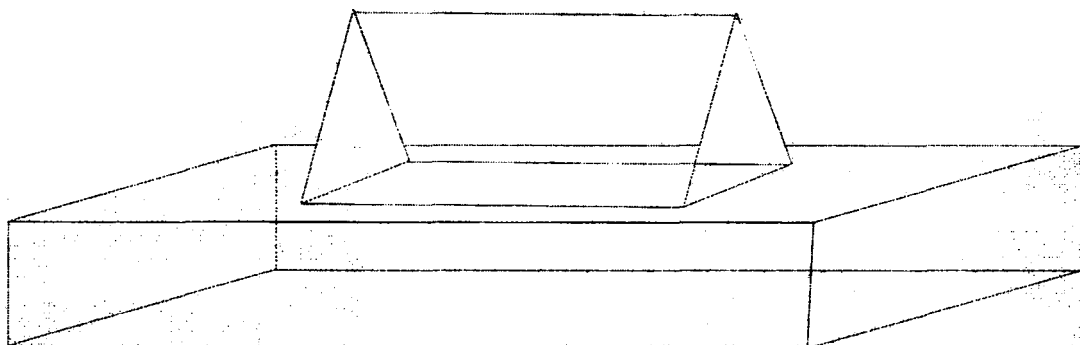


Рис. 1. Форма насыпи

Для проведения численных расчетов возьмем следующие значения входных параметров: $E_1 = E_2 = 5 \text{ ГПа}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $G_2 = 0.28462 \text{ ГПа}$, $a=10 \text{ м}$, $b=50 \text{ м}$, $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, $h_e = 10 \text{ м}$, $h=20 \text{ м}$.

Для проверки построенного аналитического решения были выполнены сравнительные расчеты тестовой задачи в соответствии с данным решением и на основе расчетной схемы метода конечных элементов.

В качестве иллюстрации на рис.1 приведены графики напряжений σ_{zz}, σ_{xx} на оси z . На приведенных рисунках сплошная кривая – построенное аналитическое решение, пунктирная – решение, полученное методом конечных элементов.

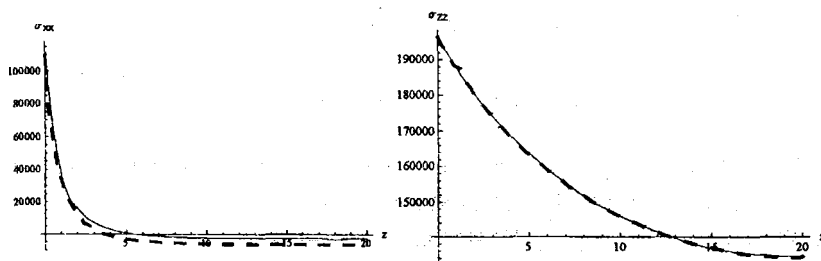


Рис. 2. Результаты расчетов

В качестве примера для многослойного полупространства рассмотрим задачу о воздействии однородной нагрузки, распределенной по единичному квадрату. Толщина слоя $h=0.5 \text{ м}$. Упругие свойства слоя соответствуют свойствам бетона

(считаем материал изотропным): $E = 10^{10}$ Па, $\nu = 0.2$. Упругие свойства полупространства: $E_1 = E_2 = 5$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $G_2 = 0.28462$ ГПа .

На рис. 3 представлены графики напряжений соответственно σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xz} в плоскости xOz .

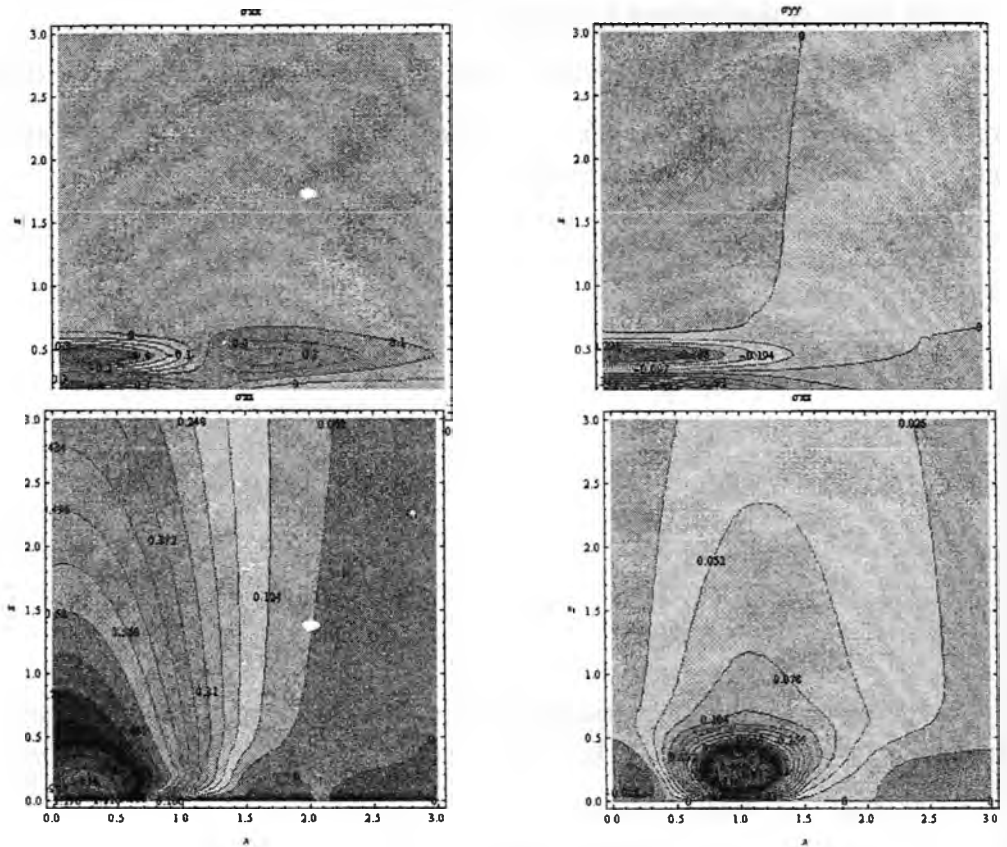


Рис. 3. Контурные графики напряжений

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты// Прикладная механика и математика. – Т.26, №4.-1962. – С.687-696.
2. Garg N.R. Displacements and stresses at any point of a transversely isotropic multi-layered half-space due to strip loading// Indian. J. pure appl. Math. – 22(10), 1991.– P.859-87
3. Ding H., Chen W., Zhang L. Elasticity of transversely isotropic body – Springer, 2006. – 442p.

МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ И НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ В СУСТАВАХ ЧЕЛОВЕКА

Чигарев А.В.¹, Борисов А.В.²

*Белорусский национальный технический университет, Минск¹
филиал ГОУ ВПО «Московский энергетический институт
(Технический университет)», Смоленске²*

The approach permitting modeling the work of a human joint as interacting surfaces with allowance of the change of physical-mechanical properties and damage accumulation in tissues, participating in motion in a joint is offered. The obtained results demonstrate changes going on in a site of a contact during ageing process.

Описанию работы суставов человека и их патологий посвящено большое количество медицинской литературы. Исследованы патологии суставов, приводящие к тотальному эндопротезированию и описываются модели эндопротезов и дальнейшего наблюдения их эксплуатации [4, 8, 13, 15, 17, 21]. Авторы основное внимание уделяется анализу эмпирических данных. В работе [1] показано, что воспалительные процессы позвоночника приводят к изменению его механических свойств и в итоге к разрушению. Развитие заболевания моделируется постепенным уменьшением модуля Юнга для материала межпозвоночного диска от 10^8 до 0 Па. Имеются работы по моделированию механических свойств человеческого организма [19, 16], в которых рассматриваются модели на основе численного метода конечных элементов. Есть исследования, в которых определяются характеристики контакта при силовом взаимодействии твердых упругих тел [2, 3, 5, 12, 18, 22], основное внимание уделяется нахождению перемещения в центре, давления, размера площадки контакта, без учета процессов разрушения. В [10] рассматриваются модели износа цилиндрических тел, с учетом параметров качества поверхности и наличия покрытий на базе соотношений теории упругости и ползучести. Моделирование процессов разрушения проведено в работах [6, 9, 14].

Исследований описывающих разрушения суставов человека на базе теоретических положений механики деформируемого твердого тела, практически не имеется.

Разработано достаточное количество моделей, для которых вычислены характеристики контакта различных конфигураций поверхностей для материалов неживой природы. Однако отсутствуют методики расчета по моделям суставов человека, т.е. по органическим материалам. Материалы, работающие в условиях контактного взаимодействия и трения скольжения, обладают способностью трансформации исходной структуры. Переход от исходного состояния поверхности к эксплуатационному и последующему разрушению сопровождается сложными физико-механическими и структурными превращениями в приповерхностных слоях, которые целесообразно учитывать при расчете параметров контакта. В органических структурах этот процесс более сложен, так как с износом происходит и восстановление тканей. Но этот процесс ограничен временными рамками.

В данной работе предложен вариант учета износа и разрушения в органического вещества, позволяющий моделировать контакт пар трения в суставе человека с учетом процессов накопления повреждений и изменения физико-механических свойств в поверхностном слое контактирующих тел.

Триботехнические характеристики определяются не только исходными свойствами материалов, но и конкретным состоянием поверхностного слоя компонентов узла трения, структура которого может считаться однородной лишь ус-

ловно, с различной степенью идеализации. Элементами ее могут быть микроповреждения сустава, являющиеся следствием жизнедеятельности человека и возрастных изменений. В процессе эксплуатации сустава это инициирует рост концентрации повреждений, приводя в конечном итоге, к макроскопическим повреждениям.

В качестве модели выберем неоднородный изотропный слой, описываемый законом Гука. Будем предполагать, что он представляет собой композит, состоящий из n компонентов, характеризующихся упругими модулями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Каждый компонент описывается K_i, μ_i – объемным и сдвиговым модулем упругости соответственно. Распределение K_i, μ_i в исходном состоянии представляет собой композицию δ -функций (сплошная линия на рис. 1):

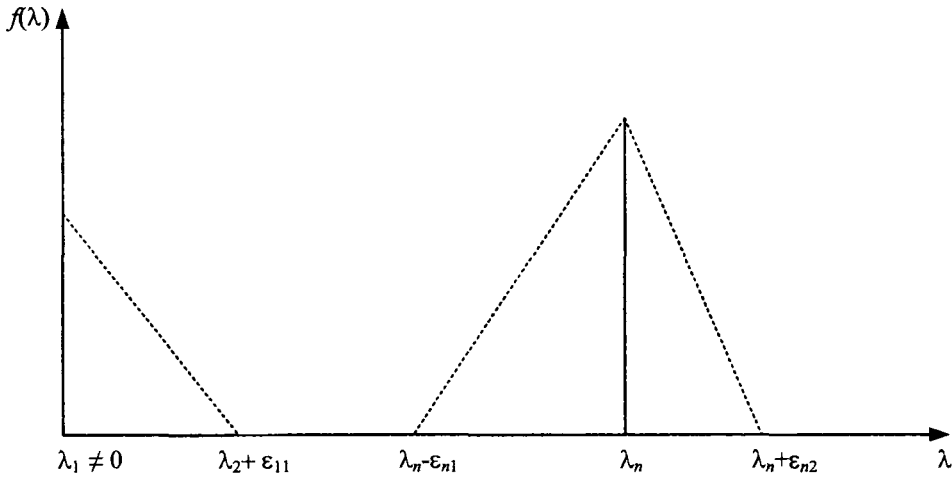


Рис. 1. Распределение упругих модулей в гетерогенном n -компонентном слое

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_i \delta(\lambda - \lambda_i), \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1. \quad (1)$$

В процессе эксплуатации происходит накопление повреждений в рабочем слое, представляющее собой деградацию физико-механических и геометрических свойств материала. Это обуславливает изменение упругих, теплопроводных, пластических и триботехнических характеристик во времени. Поэтому исходная функция (1), согласно данным работы [20], через определенный промежуток времени трансформируется в распределение, например, следующего вида (пунктирная линия на рис. 1):

$$f(\lambda) = \begin{cases} S_i^{(\lambda)} \left(1 + \frac{\lambda - \lambda_i}{\varepsilon_{i1}} \right), & \lambda \in [\lambda_i - \varepsilon_{i1}, \lambda_i] \\ S_i^{(\lambda)} \left(1 + \frac{\lambda - \lambda_i}{\varepsilon_{i2}} \right), & \lambda \in [\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon_{i1}] \\ 0, & \lambda \notin [\lambda_i - \varepsilon_{i1}, \lambda_i] \cup [\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon_{i1}] \end{cases} \quad (2)$$

$$S_i = \frac{2c_i}{\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}}, \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Функция плотности вероятности (2) описывает параметры материала, в котором исходные физико-механические характеристики λ_i изменились, т.е. появились разброс свойств. При наличии пор в исходном состоянии считаем, что $\lambda_2 = 0$, $c_2 \neq 0$.

Макроскопические характеристики поверхностного слоя λ_0 , согласно методу самосогласования, вычисляются из условия равенства нулю средней поляризуемости, что соответствует равномерному распределению в среде повреждений [23]:

$$\langle \gamma \rangle = \left\langle \frac{\lambda - \lambda_0}{1 + I^{(\lambda)}(\lambda - \lambda_0)} \right\rangle = 0, \quad (3)$$

$$I^{(K)} = \frac{1}{K_0 + \frac{4}{3}\mu_0}; \quad I^{(\mu)} = \frac{2(K_0 + 2\mu_0)}{5\left(K_0 + \frac{4}{3}\mu_0\right)}. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) с учетом (2) примут вид

$$I^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^n S_i^{(\lambda)} \sum_{\beta=1}^2 \frac{A_{0i}^{(\lambda)} + (-1)^\beta \varepsilon_{i\beta}^{(\lambda)}}{\varepsilon_{i\beta}^{(\lambda)}} \ln \frac{A_{0i}^{(\lambda)} + (-1)^\beta \varepsilon_{i\beta}^{(\lambda)}}{A_{0i}^{(\lambda)}}; \quad A_{0i}^{(\lambda)} = \lambda - \lambda_0 + \frac{1}{I^{(\lambda)}}, \quad \lambda = K, \quad (5)$$

$\mu.$

При $\varepsilon_{ij}^{(\lambda)} \rightarrow 0$, $f(\lambda)$ переходит в распределение (1), а уравнения (5) – в уравнения самосогласованного поля для K_0 , μ_0 , n – компонентной композиционной среды [23]:

$$\sum_{i=1}^n c_i \frac{(\lambda_i - \lambda_0)}{1 + I^{(\lambda)}(\lambda - \lambda_0)} = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим однородный материал с упругими коэффициентами K_1 , μ_1 , объемной концентрацией c_1 и порами, характеризуемыми $c_2 = c = 1 - c_1$, $K_2 = 0$, $\mu_2 = 0$. Будем описывать изменение концентрации повреждений в процессе эксплуатации кинетическими уравнениями, например Качанова, Работнова, Голуба:

$$\frac{d(1-c)}{dt} = -A \left(\frac{\sigma}{1-c} \right)^N, \quad (7)$$

$$\frac{dc}{dt} = A \sigma^N (1-c)^{-N}, \quad (8)$$

$$\frac{dc}{dt} = A \left(\frac{\sigma}{1-c^N} \right) \left(\frac{1}{1-c} \right)^{\Omega(\sigma)}, \quad \Omega(\sigma) = \frac{\int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_b} \varphi_0(\varepsilon) d\varepsilon}{\int_{\varepsilon_a}^{\varepsilon_b} [\varphi_0(\varepsilon) - \sigma] d\varepsilon} - (2 + N). \quad (9)$$

Численный расчет по формулам (5) обладает тем недостатком, что при $\varepsilon_{21} \rightarrow 0$ правая часть становится неопределенностью (типа 0/0), поэтому для малых ε_{21} решение неустойчиво.

Вычисления удобно вести на основе уравнения, полученного из соотношений (5) разложением правой части в ряд Маклорена, избавившись от неопределенности. Интегрируя уравнения (7), (8) или (9) и подставляя $c(t)$ в полученные выражения для поврежденного слоя ($\lambda_2 = 0$, $\varepsilon_{21} = 0$, $i = 1, 2$), обладающего битреугольным распределением свойств, получим систему двух нелинейных уравнений для расчета изменения эффективных упругих модулей за счет накопления повреждений:

$$I^{(\lambda)} = [1 - c(t)] \left[\frac{1}{A_{01}^{(\lambda)}} + \frac{\varepsilon_{11}^{(\lambda)} - \varepsilon_{12}^{(\lambda)}}{(A_{01}^{(\lambda)})^2} \right] + c(t) \left[\frac{1}{A_{01}^{(\lambda)} - \lambda_1} + \frac{\varepsilon_{22}^{(\lambda)}}{(A_{01}^{(\lambda)} - \lambda_1)^2} \right]. \quad (10)$$

Приведя это выражение к более удобному для вычислений виду, получим систему двух уравнений относительно K_0 и μ_0 :

$$K_0 = \frac{\left(\frac{4}{3}\mu_0\right)^2 \left(K_1 + \frac{4}{3}\mu_0\right)^2}{[1 - c(t)] \left(K_1 + \frac{4}{3}\mu_0 + \varepsilon_{11}^{(k)} - \varepsilon_{12}^{(k)}\right) \left(\frac{4}{3}\mu_0\right)^2 + c(t) \left(\frac{4}{3}\mu_0 - \varepsilon_{22}^{(k)}\right) \left(K_1 + \frac{4}{3}\mu_0\right)^2} - \frac{4}{3}\mu_0, \quad (11)$$

$$\mu_0 = \frac{5}{4}\mu_0 \left(K_0 + \frac{4}{3}\mu_0\right) P - c(t) Q \frac{5}{4}\mu_0 \left(K_0 + \frac{4}{3}\mu_0\right) - \frac{1}{2}K_0,$$

$$P = \frac{1}{A_{01}^{(\mu)}} + \frac{\varepsilon_{11}^{(\mu)} - \varepsilon_{12}^{(\mu)}}{(A_{01}^{(\mu)})^2},$$

$$Q = -\frac{\mu_1}{A_{01}^{(\mu)}(A_{01}^{(\mu)} - \mu_1)} + \frac{\varepsilon_{11}^{(\mu)} - \varepsilon_{12}^{(\mu)}}{(A_{01}^{(\mu)})^2} + \frac{\varepsilon_{22}^{(\mu)}}{(A_{01}^{(\mu)} - \mu_1)^2}.$$

При $\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$ уравнения (11) переходят в уравнения самосогласованного поля для K_0 и μ_0 двухкомпонентной композиционной среды:

$$I^{(\lambda)} = \frac{[1 - c(t)]}{A_{01}^{(\lambda)}} + \frac{c(t)}{A_{01}^{(\lambda)} - \lambda_1}. \quad (12)$$

или в явном виде после преобразований:

$$K_0 = \frac{4\mu_0 K_1 [1 - c(t)]}{4\mu_0 + 3c(t)K_1}, \quad (13)$$

$$8\mu_0^2 + [9K_1 - 3K_1c(t) + 20\mu_1c(t) - 8\mu_1]\mu_0 - 9K_1\mu_1[1 - 2c(t)] = 0. \quad (14)$$

Как следует из формул (10) – (11), на зависимость $\lambda_0(t)$ влияет несимметричность разброса, то есть величина $\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}$. Наличие разброса ε_{22} , обусловленное пористостью, позволяет получить зависимость эффективных упругих модулей λ_0 от t для всех значений $0 \leq c \leq 1$. Для поврежденной среды без учета ε_{22} самосогласованный метод [8] дает обращение λ_0 в нуль при $c = 1/2$. В терминах теории протекания это означает слияние пор в магистральную трещину.

Если в пределе взятое распределение переходит в комбинацию δ -функций (1), то, соответственно, расчетные уравнения переходят в известные уравнения n -компонентной среды, получаемые методом самосогласования.

Рассмотрим модифицированную задачу Герца, позволяющую исследовать влияние накопления повреждений в контактирующих телах на характеристики площадки контакта. Заменяем в известных расчетных формулах упругие постоянные их эффективными значениями, рассчитанными на основе моделей (10)–(12):

$$\alpha(t) = \frac{P\eta(t)}{a} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1+\xi)(k^2+\xi)}}, \quad (15)$$

$$A(t) = \frac{P\eta(t)}{a} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1+\xi)\sqrt{\xi(1+\xi)(k^2+\xi)}}, \quad (16)$$

$$B(t) = \frac{P\eta(t)}{a} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(k^2+\xi)\sqrt{\xi(1+\xi)(k^2+\xi)}}. \quad (17)$$

$$\text{Здесь } \xi = \frac{\lambda}{a^2}, \frac{b}{a} = k, \eta(t) = \frac{3P}{8\pi} \left[\frac{1 - \nu_0^+(t)}{\mu_0^+(t)} + \frac{1 - \nu_0^-(t)}{\mu_0^-(t)} \right].$$

Каждый из интегралов представляет собой функцию отношения осей эллиптической площадки контакта k . Обратимся теперь к рассмотрению случаев, когда интегралы в формулах вычисляются аналитически.

Решим задачу о контакте в суставе в виде двух сфер с радиусами R^+ и R^- , которые приводятся в соприкосновение и прижимаются друг к другу нагрузкой p . Уравнение сферы в окрестности точки O запишем в виде [11]

$$Z = \frac{r^2}{2R}, \quad (18)$$

$$Z^+ = \frac{x^2}{2R^+} + \frac{y^2}{2R^+}, \quad (19)$$

$$Z^- = \frac{x^2}{2R^-} + \frac{y^2}{2R^-}. \quad (20)$$

Следовательно,

$$A = B = A^+ + A^- = \frac{R^+ + R^-}{2R^+R^-}. \quad (21)$$

Так как в суставе одинаковые материальные, в том числе и упругие константы

$$\frac{1 - \nu_0^-(t)}{\mu_0^-(t)} = \frac{1 - \nu_0^+(t)}{\mu_0^+(t)} = \frac{3K_0(t) + 4\mu_0(t)}{2\mu_0(t)[3K_0(t) + \mu_0(t)]}. \quad (22)$$

Тогда с учетом формул (15) – (17) получим:

$$\eta(t) = \left(\frac{3}{8\pi} \right) \frac{3K_0(t) + 4\mu_0(t)}{\mu_0(t)[3K_0(t) + \mu_0(t)]}. \quad (23)$$

$$\alpha(t) = [2\pi^2 p^2 \eta^2(t) A]^{\frac{1}{3}}. \quad (24)$$

Перейдем к численному анализу полученной модели. Выразим из уравнения (4.4.14) μ_0 . Получаем следующие корни:

$$\left\{ \left\{ \mu_0 \rightarrow \frac{1}{16} \left(-9k_1 + 3ctk_1 + 8\mu_1 - \sqrt{20ct\mu_1 - \sqrt{288(1-2ct)k_1\mu_1 + (9k_1 - 3ctk_1 - 8\mu_1 + 20ct\mu_1)^2}} \right) \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \mu_0 \rightarrow \frac{1}{16} \left(-9k_1 + 3ctk_1 + 8\mu_1 - 20ct\mu_1 + \sqrt{288(1-2ct)k_1\mu_1 + (9k_1 - 3ctk_1 - 8\mu_1 + 20ct\mu_1)^2} \right) \right\} \right\}$$

Подставляем полученные корни и уравнение (13) в уравнения (23) и (24). После подстановки в уравнения остаются только следующие параметры, которые мы примем равными соответствующим средним характеристикам, определенным для человека [4, 7].

Модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^9$ Па;

Коэффициент Пуассона $\sigma = 0,332$;

Связь объемного и сдвигового модулей упругости с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона имеет вид [11]:

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \quad (25)$$

Контактное давление. $p = 1.8136 \cdot 10^7$ Па. Размеры: $R^+ = 0,015$ м; $R^- = 0,014$ м.

Зададим концентрацию повреждений линейной зависимостью так, чтобы

значения $c(t)$ содержались в отрезке $[0, 1/2]$, т.к. при превышающем значении поры сливаются в магистральную трещину и происходит фактическое разрушение и прекращение активной эксплуатации сустава. Предполагаем время жизни человека 100 лет: $c(t) = t/200$. Тогда, для первого корня μ_0 , графики имеют вид:

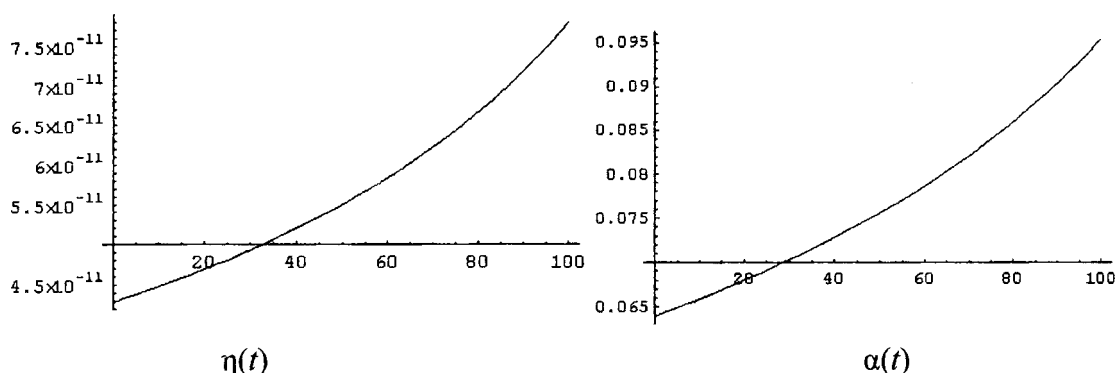


Рис. 2. Изменение характеристик площадки контакта в суставе вследствие деградации материала: а – $\alpha(t)$; б – $\eta(t)$

Для второго корня μ_0 , графики имеют вид, показанный на рис. 3.

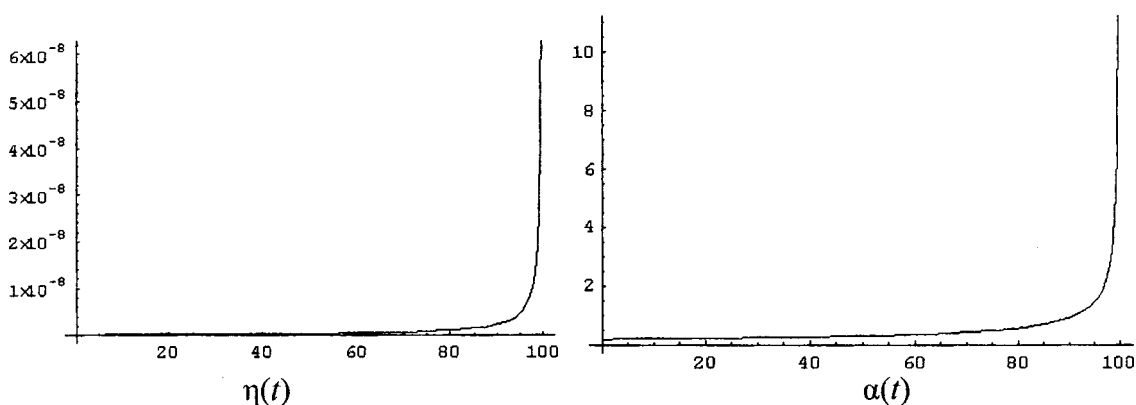


Рис. 3. Изменение характеристик площадки контакта в суставе вследствие деградации материала: $\eta(t)$; $\alpha(t)$

На рис. 2 и 3 линиями представлены расчетные зависимости $\eta(t)$, $\alpha(t)$, полученные согласно соотношений (23), (24). Сравнивая с результатами, полученными в рамках классической задачи Герца, следует вывод о том, что расчет характеристик площадки контакта в суставе по предложенной методике дает более реальные результаты, указывающие на изменение условий контакта. Как следует из рис. 1 и 2, площадка контакта в данной модели в отличие от предлагаемых ранее и изменяется во времени и при $t = 100$ лет наступает процесс разрушения. Таким образом, долговечность контактирующих поверхностей сустава, свойства которых изменяются во времени в зависимости от величины прилагаемых полей напряжений, температуры и других факторов, которые могут быть включены в кинетические уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афонин, П.Н. Методы и средства компьютерной диагностики позвоночника человека: дис. д-ра. техн. наук. – М., 2003. – 276 с.
2. Воронин, Н. А. Инженерный метод решения контактной задачи о взаимодействии цилиндрического штампа с упругим двухслойным полупространством // Трение и износ, 14. – 1994. – № 5. – С. 754-763.

3. Воронин, Н. А. Применение теории упругого контакта Герца к расчету напряженно-деформированного состояния слоистого упругого тела // Трение и износ, 14. – 1993. – № 2. – С. 250-258.
4. Гаврюшенко Н.С. Материаловедческие аспекты создания эрозионностойких узлов трения искусственных суставов человека: дис. ... д-ра техн. наук. – М., 2000. – 234 с.
5. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Наука, 1989.
6. Дрозд, С.Г. Контактное взаимодействие сферических пар трения с учетом накопления повреждений и изменения физико-механических свойств в поверхностном слое // Том 17, № 2 Трение и износ. Март-апрель. – 1996
7. Дубровский, В.И., Федорова, В.Н. Биомеханика. – М.: Владос-Пресс, 2003. – 672с.
8. Жилиев, А.А. Биомеханические и электрофизиологические критерии оценки функционального состояния опорно-двигательного аппарата нижних конечностей: дис. ... д-ра техн. наук. – М., 2003. – 177 с.
9. Коноваленко, И.С. Теоретическое исследование деформации и разрушения пористых материалов медицинского назначения и биомеханических конструкций: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2007.
10. Кравчук А.С., Чигарев А.В. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. – Минск: Технопринт, 2000. – 196 с.
11. Ландау, Л.Д., Лившиц, Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
12. Можаровский, В. В. Плоские контактные задачи для анизотропных покрытий с учетом трения // Трение и износ, 13. – 1992, № 5, 825-836
13. Пасынкова, И.В. разработка моделей и алгоритмов дифференциальной диагностики патологии коленного сустава: дис. ... канд. техн. наук. – Воронеж, 2005. – 108 с.
14. Романова, В.А. Моделирование процессов деформации и разрушения в трехмерных структурно-неоднородных материалах: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Томск, 2008. – 298 с.
15. Рыбалко, Д.Ю. Строение менисков коленного сустава человека и их фиксирующего аппарат в зрелом, пожилом и старческом возрастах: автореф. дис. ... канд. мед. наук. – Уфа, 2006. – 22 с.
16. Скворчевский, К.А. Волоконно-оптические измерительные системы в задачах биомеханики: дис. ... д-ра техн. наук. – М., 2004. – 184 с.
17. Сотин, А.В. Механика взаимодействия ножки эндопротеза тазобедренного сустава с кортикальным слоем бедренной кости: дис. ... канд. техн. наук. – Пермь, 2005. – 109 с.
18. Суслов, А.Г., Горленко, А.О. Контактное взаимодействие сферических пар трения // Трение и износ. – 15 (1994), № 4, 595-601
19. Тиманин, Е.М. Теоретические и экспериментальные основы виброакустической вискоэластографии мягких биологических тканей: дис. ... д-ра техн. наук. – Нижний Новгород, 2006. – 265 с.
20. Чигарев, А. В., Чигарев, Ю. В. Самосогласованный метод вычисления эффективных коэффициентов неоднородных сред с непрерывным распределением физико-механических свойств // Доклады АН СССР, 313 (1990), № 2, 292-295
21. Шатаева, Е.В. Биомеханические основы диагностики функционального состояния системы «эндопротез-кость»: дис. ... д-ра техн. наук. – СПб.:2003. – 208 с.
22. Matthewson, M. J. Axi-symmetric contact on thin complain coatings // J. Mech. Phys., 29 (1981), No 2, 89.
23. Kroner, F. Elastic moduli of perfectly disordered composite materials // J. Mech. And Phys. Solids, 15 (1967), No 5, 319-324.

ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ БИОМЕХАНИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ФИКСАЦИИ ПЕРЕЛОМА С ПОМОЩЬЮ ПЛАСТИНЫ ОСТЕОСИНТЕЗА

Никитин А.В., Михасев Г.И.

Белорусский государственный университет, Минск

The article represents study on peri-articular implant. In this paper, we focused on design of orthopedic implant that fits a maximum percentage of the proximal bone shape. The finite element analysis is performed to analyze the biomechanical performance of the bone/implant construct. The mechanical behavior of left tibia is compared for different implant's placements.

Постановка проблемы

Перелом большеберцовой кости, в особенности ее проксимальной части, приводит к довольно нестабильному состоянию пациента [5], [17]. Такой вид перелома больше чем остальные поражает наружный и внутренний мыщелки, что в свою очередь сопровождается дегенерацией мениска и хрящевых поверхностей коленного сустава. Многие авторы приходят к заключению, что дистальный перелом голени является наиболее трудным с точки зрения прогнозирования результатов лечения [4], [6], [7], [8], [10]. Так же основаниями плохих клинических результатов по восстановлению первоначальной анатомии кости, являются сопутствующие при этом поражения мягких тканей, нестабильность фиксации и плохое выравнивание мыщелков [11]. Стабильная фиксация отломков и осколков – основной принцип остеосинтеза. При фиксации перелома кости имплантатом на отломки действуют сгибающие силы, силы кручения и смещения. Необходимо отметить, что при оскольчатых переломах, величина сил действующих непосредственно на имплантат возрастает. Поэтому учитывая классификацию перелома, врач должен определить какой метод фиксации будет достаточным для удержания отломков и осколков в заданном положении до момента образования костной мозоли [21]. Основной причиной неблагоприятного исхода лечения считается неудачная попытка первичной фиксации, что в большинстве случаев приводит к варусной деформации нижних конечностей и нестабильности коленного сустава [2], [6], [8]. Если перелом голени происходит со смещением фрагментов мыщелков, в таком случае необходимо хирургическое вмешательство и фиксирование перелома с помощью пластины остеосинтеза [1], [3], [8]. Многие исследования показали, что только хирургическая фиксация отломков обеспечивает оптимальные условия для консолидации ОПДКК и профилактики местных осложнений [22], [23], [24]. При внутрисуставных переломах этот принцип является основополагающим, так как именно от точности репозиции отломка зависит тенденция к развитию вторичного остеоартроза, который приведет к боли при движении в суставе и как следствие к стойкой хромоте конечности [21].

Метод конечных элементов в настоящее время становятся все более широко используемым средством для математического анализа биомеханики костно-мышечной системы человека [9]. Огромное внимание уделяется компьютерному моделированию для достижения результатов совпадающих с клинической практикой [13], [17]. Много приведено исследований, описывающих биомеханическую систему кость/имплантат, в зависимости от различных видов пластин [16], [15], [18], [20]. Для моделирования внутренней структуры кости в последнее время очень часто используют неоднородные свойства материала, описывающие зависимость механических свойств от плотности кости, полученных при анализе компьютерной томографии [9], [12], [19].

Организация и методика исследования

Данные полученные при компьютерной томографии нижних конечностей пациента, были обработаны в программе AMIRA и получена трехмерная модель поверхности левой большеберцовой кости с полым костномозговым каналом. Дополнительно, кость была рассечена двумя плоскостями: одна плоскость, проходя под углом 15 градусов, отделяет проксимальную часть от тела большеберцовой кости, а вторая плоскость отделяет наружный мышцелок (рис.1). Такая фрагментация кости соответствует перелому типа 41-C2 по А.О. групповой классификации, характеризующий повреждение верхней суставной поверхности, охватывающее внутренний и наружный мышцелки (рис.2).

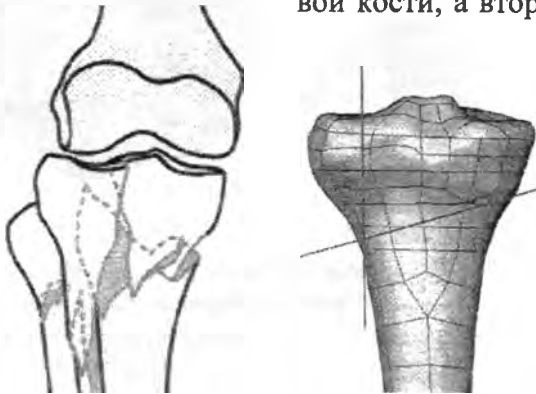


Рис. 1. Моделирование перелома типа 41-C2. Тип перелома по А.О. групповой классификации определяемый как 41-C2 и задний вид проксимальной части большеберцовой кости, описывающий расположение двух секущих плоскостей

В дальнейшем, программное обеспечение ABAQUS было выбрано для обработки модели и создание в ее объеме сетки, состоящей из 81891 конечного элемента, каждый из которых представляет собой "10-node quadratic tetrahedron" (C3D10). Для каждого элемента были присвоены отдельные механические свойства в соответствии с плотностью кости, полученной при исследовании снимков компьютерной томографии. Основой такого метода является шкала Хаунсфилда (значения HU от -1024 до +3071) которая описывает ослабление рентгеновского излучения проходящего через ткани человека, что в свою очередь отображается черно-белым спектром на томограмме. Визуально, чем плотнее кость, тем больше интенсивность пикселя на снимке. Следующая формула описывает зависимость модуля упругости от плотности кости [25].

$$E = 11,42 \cdot \rho^{1,49}, \quad (1)$$

где E – модуль упругости, ГПа; ρ – относительная плотность кости, г/см^3 .

В результате расчета модулей упругости было установлено 75 различных характеристик материала в диапазоне значений от 4,6 до 17,1 ГПа. Коэффициент Пуассона для каждого элемента был принят равным 0,3. Такие механические свойства модели довольно реалистично описывают внутреннее строение кости, различая кортикальный и губчатый слой.

Трехмерная модель имплантата, представляющего собой пластину остеосинтеза изготовленного из титанового сплава Ti6Al4V, была также разделена на 43712 конечных элементов "10-node quadratic tetrahedrons". Шесть винтов были описаны 284 "quadratic beams" которые жестко закреплены в материале кости и самого имплантата. Модуль упругости для всех конечных элементов представляющих пластину и винты был принят равным $E = 110$ ГПа с коэффициентом Пуассона 0,3.



Рис. 2. Трехмерная модель голени с проксимальной частью, разделенной на внутренний и наружный сегменты

Коэффициент трения 0,6 описывает взаимодействие системы кость/кость и 0,4 для системы кость/имплантат.

Общая нагрузка в 1600 Н (двойной вес тела) неравномерно распределена по верхней суставной поверхности большеберцовой кости [26]. При этом 60% от общей нагрузки, охватывающей поверхность площадью 468 мм² приходится на внутренний мыщелок и остальные 40% нагрузки приложено к площади 297 мм² – наружного мыщелка (рис. 3). Согласно такому закону распределению нагрузки, к 42 узлам наружного мыщелка прилагается нагрузка в 15 Н и 73 узла внутреннего мыщелка испытывают нагрузку в 13 Н. Три узла дистальной части голени были жестко зафиксированы для создания граничных условий конечно-элементной модели.



Рис. 3. Условия нагружения. Распределение нагрузки в 1600 Н по верхней суставной поверхности: 960Н на поверхности внутреннего мыщелка (73 узла) и 640Н – наружного мыщелка (42 узла)

Для моделирования предварительного натяжения винтов, которое создает давление между фрагментами кости, способствующее скорейшему восстановлению костной ткани, к трем винтам в проксимальной части голени была применена нагрузка «BOLT LOAD» величина которой составляла 1 Н.



Рис. 4. Граничные условия лодыжки: 3 узла дистальной части голени жестко зафиксированы

Используя такую методику, было построено четыре конечно-элементные модели. Так как пластина остеосинтеза была спроектирована для проксимальной части голени, то ее форма схожа с анатомией большеберцовой кости. Поэтому первоначальная модель описывает положение имплантата в его положении наибольшего прилегания. Специальный алгоритм был использован для определения оптимального положение имплантата, который минимизирует расстояние между поверхностью пластины и поверхностью кости. В трех остальных случаях пластина была смещена на 2 мм вниз, затем на 2 мм смещена вниз и назад и в четвертом положение пластина поворачивалась на 5 градусов вокруг нижнего отверстия. Расчет четырех моделей методом конечных элементов был выполнен в программе ABAQUS.

Результаты исследований

В результате проведенных исследований было установлено, что значения максимального главного напряжения рассчитанное для винтов было близко по своему значению к напряжению по Мизесу для модели Г, когда имплантат был повернут на 5° (табл.1). Отсюда следует что вертикальное расположение пластины улучшает распределение напряжений винтов. Максимальное главное напряжение, рассчитанное в объеме пластины, превысило значение максимального напряжения по Мизесу во всех случаях. Однако только в модели Г, оба вида напряжения имели одинаковое положение. Для сравнения максимальное главное напряжение для моделей А, Б, В, находились в дистальной части имплантата в то время как максимальное напряжение по Мизесу было найдено в его дистальной части. Вращение и отклонение имплантата от его вертикального расположения

приводит к ухудшению распределения нагрузки в пластине и винтах. Также было установлено что максимальное главное напряжение имело наибольшее значение в 72 МПа для модели Б, когда имплантат был смещен вниз на 5мм. Предположительно, такая ситуация сложилась как следствие уменьшения контакта винт/кость. Последующее смещение пластины назад привело к увеличению контакта и уменьшению максимального главного напряжения до 37 МПа. Не смотря на это напряжение сдвига между фрагментами кости увеличился на 50% в сравнении с моделями А и Б. Минимальное напряжение сдвига 0,36 МПа было рассчитано для модели Г, что скорей всего было вызвано расположением винтов непосредственно под коленной нагрузкой.

Таблица 1

Результаты, полученные при расчете конечно-элементных моделей, в программе ABAQUS. max S, Mises – максимальное значение напряжения по Мизесу; max P, Stress - максимальное главное напряжение. Случай А- оптимальное положение имплантата, случай Б- имплантат сдвинут вниз на 5мм, случай В –имплантат сдвинут вниз и назад на 5мм, Г- имплантат повернут на 5 градусов вокруг нижнего отверстия

	А	Б	В	Г
max S, Mises, МПа	410.8	380.1	376.4	301.4
max P, Stress, МПа	311.2	267.2	238.8	277.5
Разность S-P, МПа	99.6	112.9	137.6	23.9

Принимая во внимание все полученные результаты можно сделать выводы, что:

1. При проектировании пластин остеосинтеза необходимо максимально возможно приблизить форму имплантата к поверхности большеберцовой кости.
2. При фиксации анатомической пластины желательно задавать ей вертикальное положение при этом проксимальная часть пластины должна максимально покрывать поверхность проксимального отдела голени
3. Дистальная часть пластины должна направлять винты в переднюю грань большеберцовой кости.

Имплантат, удовлетворяющий этим условиям, в случае наилучшего прилегания, будет обеспечивать оптимальную фиксацию перелома.

ЛИТЕРАТУРА

1. Apley AG. Fractures of the tibial plateau. Orthop Clin North Am 1979;10:61—74.
2. Dias, J.J., Stirling, A.J., Finlay, D.B., Gregg, P.J., 1987. Computerised axial tomography for tibial plateau fractures. Journal of Bone and Joint Surgery 69B, 84–88.
3. Schatzker J, McBroom R, Bruce D. Tibial plateau fractures. The toronto experience 1968—1975. Clin Orthop 1979;138: 94—104.
4. Lansinger O, Bergman B, Korner L, Andersson GB. Tibial condylar fractures. A twenty-year follow-up. J Bone Joint Surg Am 1986;68(1).
5. Moore, T.M., 1981. Fracture dislocation of the knee. Clinical Orthopaedics and Related Research 156, 128–140.

6. Bhattacharyya, T., McCarty 3rd, L.P., Harris, M.B., Morrison, S.M., Wixted, J.J., Vrahas, M.S., Smith, R.M., 2005. The posterior shearing tibial plateau fracture: treatment and results via a posterior approach. *Journal of Orthopaedic Trauma* 19, 305–310.
7. De Boeck, H., Opdecam, P., 1995. Posteromedial tibial plateau fractures: operative treatment by posterior approach. *Clinical Orthopaedics and Related Research* 320, 125–128.
8. Papagelopoulos, P.J., Partsinevelos, A.A., Themistocleous, G.S., avrogenis, A.F., Korres, D.S., Soucacos, P.N., 2006. Complications after tibia plateau fracture surgery. *Injury* 37, 475–484.
9. Fulvia Taddei, Enrico Schileo, Benedikt Helgason, Luca Cristofolini, Marco Viceconti. The material mapping strategy influences the accuracy of CT-based finite element models of bones: An evaluation against experimental measurements. *Medical Engineering & Physics*, Volume 29, Issue 9, November 2007, Pages 973-979.
10. Cong-Feng Luo, Rui Jiang, Cheng-Fang Hu, Bing-Fang Zeng. Medial double-plating for fracture dislocations involving the proximal tibia. *The Knee*, Volume 13, Issue 5, October 2006, Pages 389-394.
11. Luo, C.F., Jiang, R., Hu, C.F., Zeng, B.F., 2006. Medial double-plating for fracture dislocations involving the proximal tibia. *The knee* 13, 389–394.
12. Benedikt Helgason, Egon Perilli, Enrico Schileo, Fulvia Taddei, Sigurður Brynjólfsson, Marco Viceconti. Mathematical relationships between bone density and mechanical properties: A literature review *Clinical Biomechanics*, Volume 23, Issue 2, February 2008, Pages 135-146.
13. Zhang YY, Liu PY, Lu Y, Davies KM, Dvornyk V, Recker RR, Deng HW. Race and sex differences and contribution of height: a study on bone size in healthy Caucasians and Chinese. *Am J Hum Biol.* 2005 Sep-Oct;17(5):568-75.
14. Viceconti M, Taddei F. Automatic generation of finite element meshes from computed tomography data. *Crit Rev Biomed Eng* 2003;31(1/2):27–72.
15. Georg N. Duda, Francesco Mandruzzato, Markus Heller, Jörg Goldhahn, Ruedi Moser, Markus Hehli, Lutz Claes, Norbert P. Haas. Mechanical boundary conditions of fracture healing: borderline indications in the treatment of unreamed tibial nailing *Journal of Biomechanics*, Volume 34, Issue 5, May 2001, Pages 639-650
16. Eran Peleg, Rami Mosheiff, Meir Liebergall, Yoav Mattan. A short plate compression screw with diagonal bolts—A biomechanical evaluation performed experimentally and by numerical computation. *Clinical Biomechanics*, Volume 21, Issue 9, November 2006, Pages 963-968.
17. Viceconti M, Davinelli M, Taddei F, Cappello A. Automatic generation of accurate subject-specific bone finite element models to be used in clinical studies. *J Biomech* 2004;37(10):1597–605.
18. Y. González, M.E. Zeman, M. Rupcich, O. Falcón. Design and FEM analysis of a new osteotomy angled-plate for the orthopedic treatment in childrens affected by cerebral palsy.
19. Enrico Schileo, Fulvia Taddei, Andrea Malandrino, Luca Cristofolini, Marco Viceconti. Subject-specific finite element models can accurately predict strain levels in long bones *Journal of Biomechanics*, Volume 40, Issue 13, 2007, Pages 2982-2989.
20. Hsin-Yi Kathy Cheng, Chun-Li Lin, Yu-Hao Lin, Alvin Chao-Yu Chen. Biomechanical evaluation of the modified double-plating fixation for the distal radius fracture *Clinical Biomechanics*, Volume 22, Issue 5, June 2007, Pages 510-517.
21. Ягников С.А., Кулшов Я.А., Матвеев А.В. Базовые принципы накостного остеосинтеза.

**ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ**

Гончарова С.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In article the operational method of the decision of system of the differential equations of thermoelasticity is considered.

Представим дифференциальные уравнения термоупругости [1]

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + X_i = \rho \ddot{u}_i + \gamma \Theta_{,i}, \tag{1}$$

$$\Theta_{,jj} - (1/\chi) \dot{\Theta} - \eta \dot{e} = -Q/\chi, \tag{2}$$

в более удобном для дальнейших рассуждений операторном виде

$$L_{ij}(u_j) + L_{i4}(\Theta) = -F_i, \tag{3}$$

$$L_{4i}(u_i) + L_{44}\Theta = -Q/\chi, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$L_{ij} \equiv \square_2^2 \delta_{ij} + a \partial_i \partial_j, \quad L_{i4} \equiv -\gamma_0 \partial_i, \quad L_{4i} \equiv -\eta \partial_i \partial_i, \quad L_{44} \equiv \square_3^2,$$

$$F_i \equiv X_i / \mu, \quad \gamma_0 \equiv \gamma / \mu, \quad a \equiv (\lambda + \mu) / \mu.$$

Уравнения (3) и (4) можно записать также в виде следующей таблицы, составленной из операторов и свободных членов:

	u_1	u_2	u_3	Θ	
I	$\square_2^2 + a \partial_1^2$	$a \partial_1 \partial_2$	$a \partial_1 \partial_3$	$-\gamma_0 \partial_1$	$-F_1$
II	$a \partial_2 \partial_1$	$\square_2^2 + a \partial_2^2$	$a \partial_2 \partial_3$	$-\gamma_0 \partial_2$	$-F_2$
III	$a \partial_3 \partial_1$	$a \partial_3 \partial_2$	$\square_2^2 + a \partial_3^2$	$-\gamma_0 \partial_3$	$-F_3$
IV	$-\eta \partial_i \partial_1$	$-\eta \partial_i \partial_2$	$-\eta \partial_i \partial_3$	\square_3^2	$-Q/\chi$

Введем четыре функции χ_i ($i = 1, 2, 3, 4$), связанные с перемещениями и температурой следующим образом:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \begin{vmatrix} \chi_1 & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ \chi_2 & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ \chi_3 & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ \chi_4 & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix}, & u_2 &= \begin{vmatrix} L_{11} & \chi_1 & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & \chi_2 & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & \chi_3 & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & \chi_4 & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix}, \\
 u_3 &= \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \chi_1 & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & \chi_2 & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & \chi_3 & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & \chi_4 & L_{44} \end{vmatrix}, & \Theta &= \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \chi_1 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \chi_2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \chi_3 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & \chi_4 \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Остановимся более подробно на нахождении u_1 . Раскладывая определитель по первому столбцу, запишем

$$U_1 = \begin{vmatrix} L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} X_1 - \begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} X_2 + \begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} X_3 -$$

$$- \begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{32} & L_{33} & L_{34} \end{vmatrix} X_4$$

Прежде, чем вычислить эти определители установим зависимость между \square_2^2 и \square_1^2 . Имеем $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$; $c_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho} = \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\rho} = (\alpha+1)c_2^2$ или $c_2^2 = \frac{c_1^2}{\alpha+1}$ где $\alpha = \frac{\lambda+\mu}{\mu}$, тогда

$$\square_2^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c_2^2} \partial_t^2 = \nabla^2 - \frac{\alpha+1}{c_1^2} \partial_t^2 = \nabla^2 + \alpha \nabla^2 - \frac{\alpha+1}{c_1^2} - \alpha \nabla^2 = (\alpha+1) \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2} \right) - \alpha \nabla^2 = (\alpha+1) \square_1^2 - \alpha \nabla^2.$$

Таким образом $\square_2^2 = (\alpha+1) \square_1^2 - \alpha \nabla^2$ или $\square_2^2 + \alpha \nabla^2 = (\alpha+1) \square_1^2$.

Найдем эти определители, рассматривая операторы, как числа. Это даст следующие выражение для перемещения u_1 :

$$u_1 = (\Omega - \partial_1^2 \Gamma) \varphi_1 - \partial_1 \partial_2 \Gamma \varphi_2 - \partial_1 \partial_3 \Gamma \varphi_3 + \gamma_0 \partial_1 \square_2^2 \varphi_4.$$

Используя симметрию операторов по аналогии устанавливаем другие соотношения:

$$u_2 = -\partial_2 \partial_1 \Gamma \varphi_1 - (\Omega - \partial_2^2 \Gamma) \varphi_2 - \partial_2 \partial_3 \Gamma \varphi_3 + \gamma_0 \partial_2 \square_2^2 \varphi_4, \quad (7)$$

$$u_3 = -\partial_3 \partial_1 \Gamma \varphi_1 - \partial_3 \partial_2 \Gamma \varphi_2 - (\Omega - \partial_3^2 \Gamma) \varphi_3 + \gamma_0 \partial_3 \square_2^2 \varphi_4,$$

$$\Theta = \eta \partial_t \partial_1 \square_2^2 \varphi_1 + \eta \partial_t \partial_2 \square_2^2 \varphi_2 + \eta \partial_t \partial_3 \square_2^2 \varphi_3 + (1+a) \square_1^2 \square_2^2 \varphi_4.$$

Здесь

$$\Omega \equiv (1+a) \square_1^2 \square_3^2 - \gamma_0 \eta \partial_t \nabla^2, \quad \Gamma \equiv a \square_3^2 - \gamma_0 \eta \partial_t.$$

Введем обозначение $\psi \equiv \square_2^2 \varphi_4$ и запишем соотношения (7) в более компактном виде

$$u_i = (\Omega \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \Gamma) \varphi_j + \gamma_0 \partial_i \psi, \quad (8)$$

$$\Theta = \eta \partial_t \partial_j \square_2^2 \varphi_j + (1+a) \square_1^2 \psi, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

или в векторной форме

$$\vec{u} = \Omega \vec{\varphi} - \text{grad div}(\Gamma \varphi) + \gamma_0 \text{grad } \psi, \quad \Theta = \eta \partial_t \text{div} \square_2^2 \vec{\varphi} + (1+a) \psi. \quad (9)$$

Функции \vec{u} и Θ выражаются через векторную функцию $\vec{\varphi}$ и скалярную функцию ψ , функцию $\vec{\varphi}$ можно рассматривать как обобщение на динамические задачи термоупругости векторной функции Галеркина. Подставляя соотношения (7) и (8) (или (9)) в уравнения (3) и (4) (или (5)), после преобразований получим систему четырех уравнений

$$\square_2^2 [\square_1^2 \square_3^2 - m \eta \partial_t \nabla^2] \varphi_i + X_i / (c_1^2 \rho) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

$$[\square_1^2 \square_3^2 - m \eta \partial_t \nabla^2] \psi + Q \mu / (\chi c_1^2 \rho) = 0. \quad (11)$$

К уравнениям (10), (11) следует добавить тепловые краевые условия, краевые условия для перемещений или напряжений и начальные условия. Решение уравнений (10), (11) существенно упрощается в случае неограниченной термоупругой среды. Здесь нет краевых условий в точном смысле этого слова; вместо них выдвигается постулат обращения в ноль напряжений и температуры на бесконечности, если массовые силы и тепловые источники действуют в ограниченной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий, В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ РЕОНОМНОГО СТЕРЖНЯ С МАССОЙ НА КОНЦЕ

Холодарь Б.Г.

Брестский государственный технический университет, Брест

Considered is the development in time of stresses and strains in the straight rod with a rigid mass ($M > 0$) at the free end during an impact with an absolute-rigid motionless barrier of infinite weight. Material of the rod is a rheonomic elastic-plastic body described by Maxwell's equation with nonlinear viscosity.

В [1,2] рассмотрена задача об ударе жесткой массой по свободному торцу прямого закрепленного стержня из реономного упруго-пластического материала без упрочнения с вязкостью, экспоненциально зависящей от достигнутого уровня напряжений. Проанализированы некоторые особенности изменения во времени напряженно-деформированного состояния стержня в зависимости от соотношения масс стержня и ударника, скорости соударения, реологических свойств материала.

В настоящей работе рассматривается поведение стержня с массой на конце ($x=0$), который своим другим концом ($x=L$) наносит удар по абсолютно-жесткой неподвижной пре-граде бесконечной массы. При $t < 0$ скорости всех точек стержня и массы M одинаковы. При $M=0$ получаем задачу об ударе только самим стержнем. Методика решения задачи совпадает с использованной в [1].

Связь напряжений и деформаций в материале описывается уравнением Максвелла

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{Edt} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (1)$$

где σ , ε – напряжение и деформация; t – время, E – модуль упругости; $\eta = \eta_0 \exp(-\beta|\sigma|)$ – вязкость материала; η_0 , β – реологические параметры (константы).

Уравнения движения системы “стержень-масса” вдоль оси x имеют вид

$$v'_0 = \frac{\mu}{\beta E} p_0, \quad p'' + \chi(1 + \text{abs}(p)) \exp(\text{abs}(p)) p' - p''_{\xi} = 0, \quad (2)$$

где дополнительно обозначено $v=V/c$, $V, \text{м/с}$ – скорость массы M (индексом “0” отмечены значения переменных на торце с прикрепленной массой), $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость звука в стержне, ρ – плотность материала, $\mu = m/M$, $m = \rho AL$ – масса стержня, A и L – его длина и площадь, $\chi = \frac{L\sqrt{E\rho}}{\eta_0}$, $p = \beta\sigma$, p''_{ξ} – вторая производная по безразмерной продольной координате $\xi = x/L$, штрихами обозначены производные по безразмерному времени $\tau = t \frac{c}{L}$.

Числовые значения констант уравнений соответствуют использованным в [1]: $E = 2e11 \text{Па}$, $\eta_0 = 1e11 \text{Па/с}$, $\beta = 5e-8 \text{Па}^{-1}$, $\rho = 7.8e3 \text{Кг/м}^3$, $d = 5e-3 \text{м}$ (диаметр стержня). Для $M = 1 \text{Кг}$, $L = 1 \text{м}$ имеем $\mu \approx 0.153$.

В целом, поведение стержня аналогично рассмотренному в [1], но наличие у точек исходной кинетической энергии приводит к возрастанию влияния реологических факторов на поведение механической системы. В связи с большим количеством параметров, контролирующих развитие напряженно-деформированного со-

стояния при ударе, невозможно однозначно определить роль каждого. Зависимость напряжений в материале от скорости деформирования не позволяет также свести задачу к изучению только роли исходного количества движения и кинетической энергии системы.

При решении задачи граничные условия после отскока стержня от преграды не изменялись, поэтому соответствующий участок движения на рисунках имеет иллюстративный характер.

Удар начинается нагружением свободного конца стержня. При $M=0$ на всем времени первого прохода волны по стержню для малых скоростей ($V_0 < 1$) напряжение на фронте волны практически не меняет свой уровень, поскольку при использованном в расчетах значении начальной вязкости $\eta_0 = 1 \text{ е11 Па/с}$ затухание невелико. Роль затухания сказывается не столько на уровне σ и ϵ , сколько на крутизне фронта волны, движущейся вдоль стержня. Если скорость соударения V_0 увеличивать, то проявления реономности материала становятся заметными уже на первом проходе – напряжения на ударяемом торце непропорциональны скорости соударения и непосредственно после удара падают, вызывая на кривой $\sigma(\epsilon)$ появление “зуба текучести”, хотя сам процесс соударения, как и при упругом подходе, заканчивается при $\tau = 2$. При дальнейшем нарастании скорости V_0 смена знака напряжений происходит при $\tau > 2$.

При $M \neq 0$ место реализации максимума напряжений зависит от скорости соударения — с ростом V_0 максимум от ударяемого торца переходит на торец с прикрепленной массой, что является общим моментом с задачей [1]. Влияние скорости V_0 на уровень реализующегося максимума напряжений σ_{max} при заданных реологических параметрах иллюстрируется кривой 1 на рис.1, а влияние величины прикрепленной массы – кривой 2. Как и в [1], зависимость $\sigma_{\text{max}}(V_0)$ не является монотонной. Отклонения от монотонности соответствуют изменениям числа проходов волн по стержню до момента достижения σ_{max} . Число этих проходов в реономном материале весьма ограничено, и после достижения напряжениями на торцах максимальных значений имеет место спад напряжений с последующим выходом материала на участок текучести.

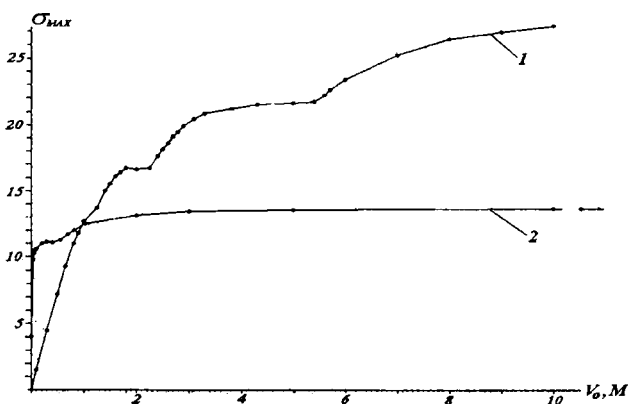


Рис. 1. Зависимость максимальных напряжений в стержне от скорости соударения V_0 и прикрепленной массы M . $\eta_0 = 1 \text{ е11}$. Кривая 1 – $\sigma_{\text{max}}(V_0)$, $M=1$; кривая 2 – $\sigma_{\text{max}}(M)$, $V_0=1$

Если масса M невелика сравнительно с массой стержня, процессы отражения волнового фронта от торцов влияют на изменение напряженно-деформированного состояния в течение значительного числа проходов волн по стержню (без учета нарушения связей на торцах стержня). Наличие рассеяния энергии приводит к тому, что с ростом скорости соударения V_0 роль отражений уменьшается и появляется продолжительный по времени неволновой участок движения, на котором

идет накопление пластических деформаций при постепенном снижении напряжений до нуля.

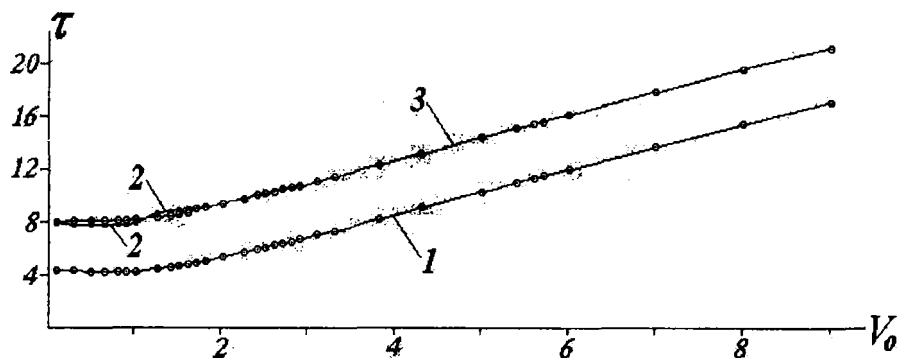


Рис. 2. Зависимость времени смены знака скорости массы $M=1$ (кривая 1) и напряжений на торцах $\xi=0$ и $\xi=1$ стержня (кривые 2,3 соответственно) от скорости соударения

В проведенных расчетах смена знака скорости массы M происходит раньше, чем смена знака напряжений на ударяемом торце. Изменение знака напряжений соответствует нарушению связей стержня с преградой или массой и его отскоку от преграды с последующей сменой характера движения. Переход напряжений через нуль на торце с прикрепленной массой может наступить даже раньше, чем на ударяемом торце (рис.2). Начиная с некоторого значения V_0 уровень напряжений $\sigma = 0$ на обоих торцах стержня достигается практически одновременно. Промежуток времени между моментом смены знака скорости массы M и моментом разрушения связей на торцах стержня остается далее одинаковым и близким кратному числу проходов волн напряжений по стержню, увеличиваясь с ростом прикрепленной массы и уменьшаясь с ростом длины стержня ($\Delta\tau = 3$ для $L=2$, $\Delta\tau = 4$ для $L=1$ при $M=1$, $\eta_0=1e11$). В момент времени нарушения связей скорость массы M всегда противоположна начальной, а потому будет иметь место отскок стержня от преграды.

В качестве примера на рис. 3 показано развитие напряженно-деформированного состояния на торцах и в средней точке стержня при нескольких значениях начальной вязкости η_0 , скорости соударения V_0 и массы M . Из этих рисунков видно, что получаемые для разных точек стержня зависимости $\sigma(\epsilon)$ достаточно сложны и разнообразны по форме и не повторяют друг друга. "Зубцы" на кривых $p(\epsilon)$ соответствуют моментам отражения волн от торцов стержня. С ростом V_0 и M волновые процессы сказываются на форме кривых $\sigma(\epsilon)$ все в меньшей степени, сами кривые становятся более гладкими, однако даже для аperiodического режима нагружения (рис.3, г) они по форме не совпадают с кривыми, построенными в режимах неударных испытаний ($d\epsilon/dt = const$ или $d\sigma/dt = const$). Поскольку деформации $\epsilon(x, t)$ в опытах получают не в точке, а на некоторой конечной базе, то соответствующие им скорости деформаций $\partial\epsilon(x,t)/\partial t$ будут меньше фактических, а потому последующее восстановление напряжений по реологическим уравнениям не позволит определить все особенности искомой связи $\sigma(\epsilon, x)$.

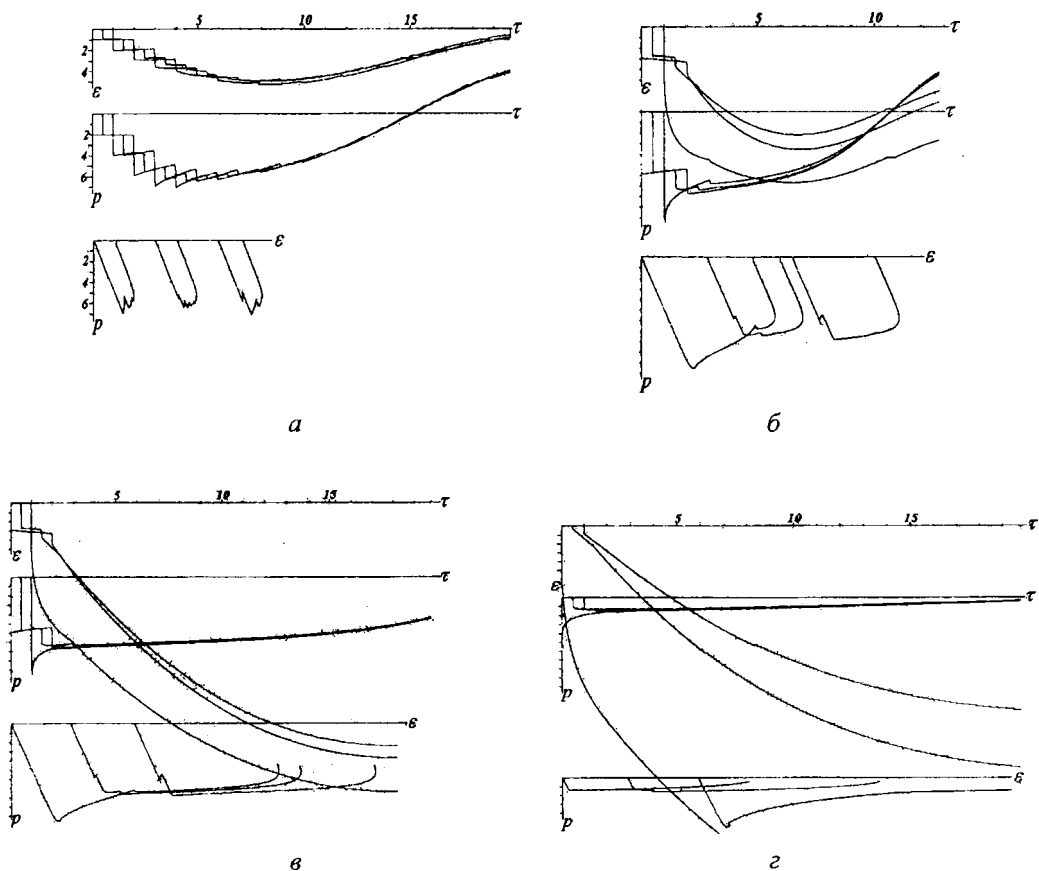


Рис. 3. Зависимости $p(\tau)$, $\varepsilon(\tau)$ и $p(\varepsilon)$ в торцевых и среднем сечениях стержня ($\tau \leq 20$).
 а: $\eta_0 = 1e11$, $M=3$, $V_0=1$; б: $\eta_0 = 1e11$, $M=1$, $V_0=3$; в: $\eta_0 = 1e11$, $M=3$, $V_0=3$; г: $\eta_0 = 1e8$, $M=1$, $V_0=3$. Кривые $p(\varepsilon)$ для $\xi=1.0$, $\xi=0.5$, $\xi=0.0$ (слева направо). Масштаб деформаций $\varepsilon_* = \varepsilon \cdot 5000$

Распределение деформаций по длине стержня неравномерно. При малых V_0 уровень достигнутых полных деформаций вдоль всего стержня примерно одинаков, но с ростом скорости удара уровни деформаций на торцах расходятся между собой тем значительнее, чем больше скорость и масса M . По времени ε_{\max} достигается всегда прежде, чем скорость груза меняет знак, а для стержня без груза – в момент смены знака напряжений на ударяемом торце ($\tau \geq 2$). На рис.4 показано распределение деформаций вдоль оси стержня (случай $M=0$) в фиксированные моменты времени (упругая компонента деформаций на графиках не исключена).

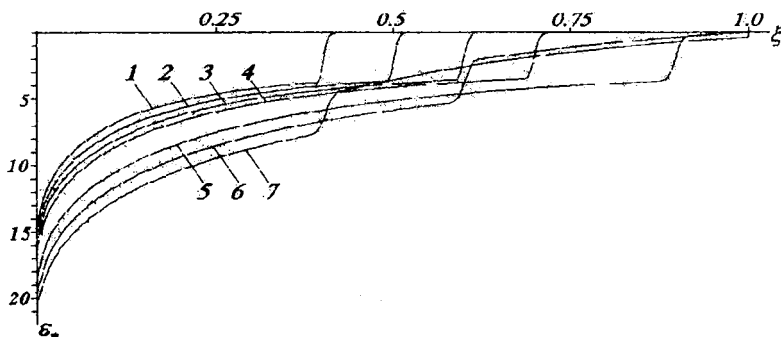


Рис. 4. Распределение полных деформаций по длине стержня. Обозначено: кривые 1–7 – зависимости $\varepsilon(\xi, \tau)$ при $\tau \approx 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 1.1, 1.4, 1.6$ соответственно ($\eta_0 = 1e11$, $V_0=6$). Масштаб деформаций $\varepsilon_* = \varepsilon \cdot 5000$

Сравнение приведенных на рис.4 кривых $\varepsilon(x, t)$ с экспериментальными [3, 4] показывает их качественное соответствие. Поскольку задача об описании опытных данных специально не ставилась, подбор параметров уравнений с целью приближения расчета к эксперименту не производился, и поэтому на сделанное сравнение следует смотреть только как на подтверждение принципиальной применимости исходных реологических уравнений к описанию ударных процессов.

Представление о зависимости достигаемых полных деформаций в стержне от скорости соударения дается рис. 5.

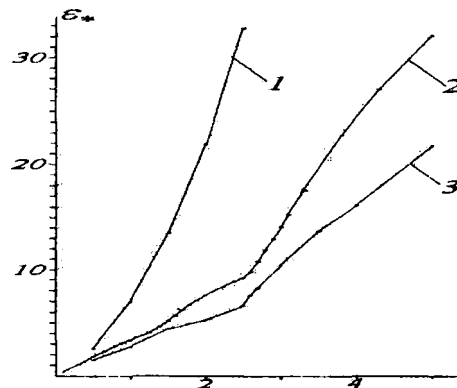


Рис. 5. Зависимость максимальных деформаций от скорости соударения. $M=1$; кривая 1 – $\eta_0=1e8, L=2$; кривая 2 – $\eta_0=1e11, L=1$; кривая 3 – $\eta_0=1e11, L=2$. Масштаб деформаций $\varepsilon_* = \varepsilon \cdot 5000$

Влияние длины стержня на характер движения системы можно проанализировать, учитывая, что параметры μ и χ ей пропорциональны, однако в связи с нелинейным характером исходных уравнений целесообразно использование результатов непосредственного численного решения. Это замечание относится и к случаям заметного изменения других параметров задачи.

Для рассматриваемой задачи имеет место апериодическое решение (см. рис. 3г). Возможность его появления контролируется тем же комплексным параметром, что и в [1], так как этот параметр вытекает из уравнений движения (2) и не зависит от начальных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.Г. Холодарь. Продольный удар по стержню из реономного материала. Сборник статей XVI Международного научно-методического семинара 28-30 мая 2009г. "Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь". Брест, 2009, стр. 191-196.
2. Б.Г. Холодарь. Ударное нагружение стержня из реономного упруго-пластического материала. The Third International Conference Deformation & Fracture of Materials and Nanomaterials DFMN2009 Moscow 2009. Сборник материалов Третьей международной конференции "Деформация и разрушение материалов и наноматериалов", Москва, 12-15 октября 2009. Под общей редакцией академика О.А.Банных. – М.: Интерконтакт Наука, том 2, 407с. (в 2 т.). Тезисы доклада, том 2. – С. 397-398.
3. П. Пэжина. Основные вопросы вязкопластичности / пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 175 с.
4. Дж.Ф. Белл. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел: в 2 ч.: пер. с англ. – М.: Наука, 1984. – Ч. II: Конечные деформации. – 432 с.

ВЛИЯНИЕ УГЛА УСТАНОВКИ НОЖКИ ЭНДОПРОТЕЗА ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА НА НДС СИСТЕМЫ «КОСТЬ-ИМПЛАНТАТ»

Куриленко А.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In this article the setting angle of the leg prosthesis of the hip joint in the bone has been under consideration.

Возникновение нежелательных явлений при установке эндопротеза тазобедренного сустава может привести к ряду осложнений, таких как развитие вывихов эндопротеза, интенсивный износ компонентов узла трения протеза, формированию нестабильности и его безотказной работы.

Данная работа посвящена изучению влияния угла установки ножки эндопротеза тазобедренного сустава на распределение нагрузки в системе «кость-имплантат». Полученные результаты позволят прогнозировать поведение системы «кость-имплантат» и определить оптимальные условия для установки ножки эндопротеза. Вызывает интерес нахождение зоны опасного сечения, где будут возникать наибольшие значения напряженно-деформированного состояния (НДС) системы «кость-имплантат».

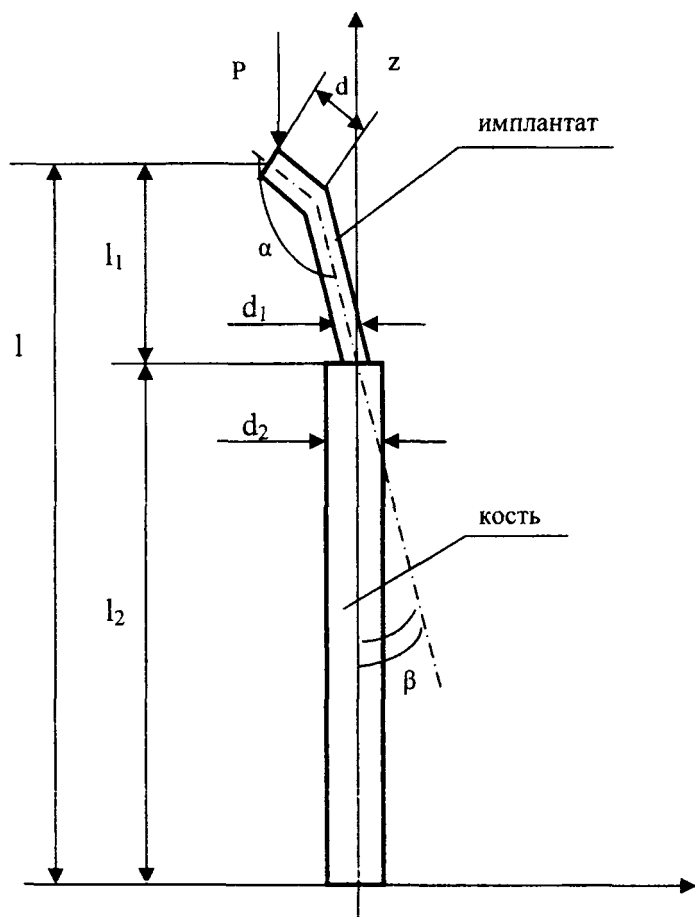


Рис. 1. Схема установки имплантата

Запишем физико-механические и геометрические характеристики кости и имплантата. Кость: $E_1 = 10^{10}$ Па, $I_1 = 2,5\text{см}^4$, $l_1 = 45\text{см}$, $d_1 = 2,7\text{см}$; имплантат: $E_2 = 1,1 \cdot 10^{11}$ Па, $I_2 = 0,14\text{см}^4$, $l_2 = 15\text{см}$, $d_2 = 1,3\text{см}$. Задачу о влиянии угла установки ножки эндопротеза β на НДС системы «кость-имплантат» рассмотрим при $P = 700$ Н, $d = 6$ см, $\alpha = 132^\circ$ (рис. 1)

В [1] была найдена функциональная зависимость погибов, которая имеет следующий вид:

$$y = \begin{cases} [0,058d \sin(\alpha - \beta) + l_2 \sin \beta] \sin 2,24z & \text{при } 0 \leq z \leq \frac{3}{4}l, \\ [d \sin(\alpha - \beta) + l_2 \sin \beta](0,606 \sin 2,98z + 0,112 \cos 2,98z - 0,57) & \text{при } \frac{3}{4}l \leq z \leq l, \end{cases} \quad (1)$$

где $l = l_1 + l_2$ – длина эндопротеза и тазобедренной кости вместе; α , d – фиксированные параметры эндопротеза; β – угол установки ножки эндопротеза (см. рис. 1).

С учетом $\alpha > \beta$ выражение в квадратных скобках в формуле (1) будет максимальным при $\beta = \arctg\left(\frac{l_2}{d} \operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha\right)$, численно $\beta \approx 1$ рад $\approx 57^\circ$.

Проводим исследование на определение опасного сечения по высоте z . В первой строке формулы (1) имеется сомножитель – функция $\sin 2,24z$, который достигнет максимального значения при $z = \frac{3}{4}l$ м, так как функция $\sin z$ является возрастающей в первой четверти. Аналогично, при исследовании на экстремум второй строки уравнения, выясняем, что максимум функции достигается также при $z = \frac{3}{4}l = 0,45$ м. Отсюда делаем вывод, что наиболее опасное сечение будет в месте соединения имплантата и кости.

Проведем расчеты во всем диапазоне z для оценки влияния угла установки ножки эндопротеза тазобедренного сустава на НДС системы «кость-имплантат». Из врачебной практики известно, что реальное значение угла установки ножки эндопротеза тазобедренного сустава β не превышает 15° . Подставив в (1) исходные данные получим:

$$y = \begin{cases} 0,033 \sin 2,24z & \text{при } 0 \leq z \leq \frac{3}{4}l, \\ 0,0573(0,606 \sin 2,98z + 0,112 \cos 2,98z - 0,57) & \text{при } \frac{3}{4}l \leq z \leq l. \end{cases} \quad (2)$$

Используя формулу $EIy''(z) = -M(z)$ найдем изгибающий момент в произвольном сечении $M(z)$, где EI – жесткость модели при изгибе [3]. Имеем:

$$y'' = \begin{cases} -2,24^2 \cdot 0,033 \sin 2,24z & \text{при } 0 \leq z \leq \frac{3}{4}l \\ -2,98^2 \cdot 0,0573(0,606 \sin 2,98z + 0,112 \cos 2,98z) & \text{при } \frac{3}{4}l \leq z \leq l \end{cases} \quad (3)$$

По формуле $\sigma_{\max} = \frac{M(z)}{W}$ определим максимальное нормальное напряжение, где

$W = \frac{I}{d/2}$ – момент сопротивления.

Проведем расчет значений прогибов, моментов и напряжений с шагом 0,1 м со стыковкой в опасном сечении при $z = \frac{3}{4}l = 0,45$ м.

Полученные результаты сведем в табл. 1 для $\beta = 15^\circ$.

Таблица 1

z, м	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45		0,5	0,6
y, м	0,0007	0,0014	0,0021	0,0026	0,0028	0,0026	0,0025	-0,0001
y'', м	0,0037	0,0072	0,0104	0,0130	0,0141	0,3132	0,3119	0,2889
M, Н·м	0,9	1,8	2,6	3,2	3,5	48,2	48,0	44,5
σ , МПа	0,5	1,0	1,4	1,7	1,9	2,2	2,2	2,1

Построим эпюры прогибов, моментов и напряжений (рис. 2).

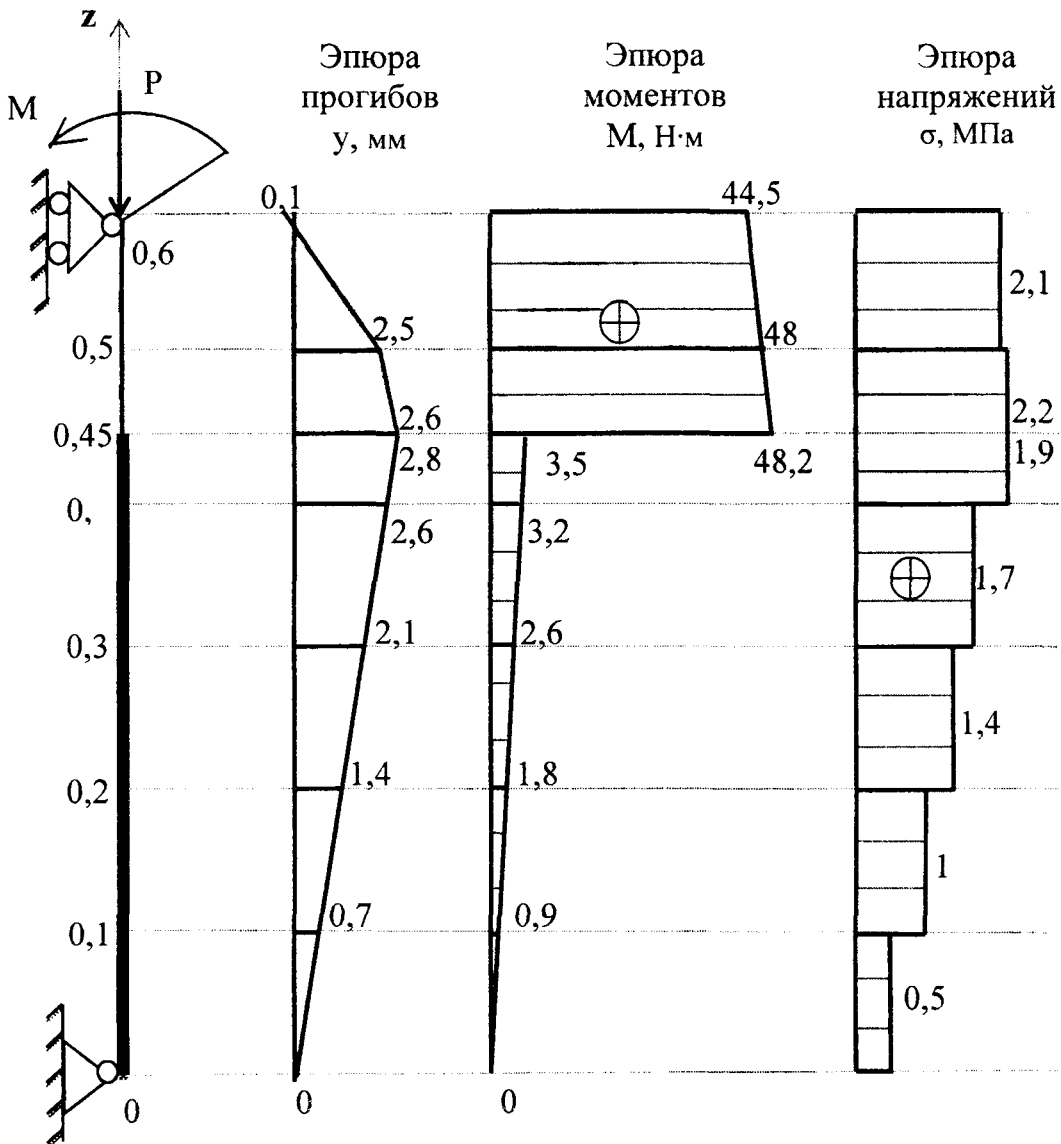


Рис. 2. Эпюры прогибов, моментов и напряжений

Полученные значения подтверждают то, что наиболее опасным, является сечение в месте соединения кости и имплантата и не превышают допустимых для кости $[\sigma]_{\text{доп. кости}} = 20 \text{ МПа}$. Таким образом, разработан алгоритм нахождения места опасного сечения в системе «кость-имплантат» и определения НДС в нем при различных углах установки ножки эндопротеза тазобедренного сустава.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куриленко, А.В. Влияние геометрических характеристик эндопротеза на устойчивость и работоспособность системы «кость - имплантат» // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ, 2010 – Вып. 25. – С. 273–275.
2. Бегун, П.И. Шукейло, Ю.А. Биомеханика: учебник для вузов. – СПб.: Политехника, 2000. – 463с.
3. Сопротивление материалов: учебное пособие по выполнению расчетно-проектировочных работ для студентов всех специальностей и форм обучения. Ч. 2 / Н. Б. Левченко. – СПбГАСУ. СПб., 2001. – 109 с.

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И КОМПЛЕКСА
ПРОГРАММ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ
ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТИ И БЕЗОПАСНОСТИ
ТРУБОПРОВОДНОГО ТРАНСПОРТА НЕФТИ**

Кузьминский Ю.Г.

*Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого
НАН Беларуси, Гомель*

Введение

Технологический процесс трубопроводного транспорта нефти характеризуется высокой энергоемкостью; производительностью, близкой к предельно допустимой; риском аварий, обусловленных ошибками в управлении технологическим режимом, несанкционированным доступом к трубопроводу и последствиями коррозионных повреждений труб вследствие эксплуатации, превышающей амортизационные сроки [1-3]. Частые изменения состояния основного оборудования требуют оперативного управления параметрами энергоэффективности и безопасности. Следовательно, актуальна оценка состояния оборудования в реальном масштабе времени, включая прогнозирование гидродинамических и энергетических параметров в стационарных и переходных режимах.

Проблема в том, что магистральные трубопроводы, строившиеся в 60-е годы, не оснащались средствами мониторинга в виде датчиков напряженного и коррозионного состояния труб, а в настоящий момент такое оснащение трубопроводов считается дорогостоящим мероприятием, не обеспечивающим значительного роста эффективности транспорта нефти. Поэтому прогнозирование безопасности рассматриваемого технологического процесса возможно только на основе математического моделирования с использованием текущих значений гидродинамических параметров, контролируемых имеющимися АСУ ТП.

Представляется, что интеграция средств мониторинга, моделей гидродинамических процессов, деформационно-прочностного анализа и возможностей автоматизированных информационных систем позволяет реализовать наиболее эффективные и безопасные режимы эксплуатации магистральных нефтепроводов.

Цель настоящей работы заключается в разработке математических моделей гидродинамических процессов, характерных для трубопроводного транспорта нефти, и реализация на их основе программного комплекса для прогнозирования параметров технологических режимов и идентификации состояния основного оборудования.

Описание моделируемого процесса

Технология трубопроводного транспорта нефти характеризуется преобразованием потребляемой мощности в напор перекачиваемой нефти, который расходуется на преодоление вязкого трения в трубе с гладкими стенками и при дросселировании на заслонках систем автоматического регулирования. Технологический режим может быть *раздельным* (закрыты все перемычки); *полностью гидравлически связанным* (открыты все станционные перемычки) и *частично связанным* (открыты, например, входные перемычки станции в целях ликвидации низких, кавитационно опасных, давлений). Ударная волна при распространении переходного процесса проходит по всем трубопроводам, связанным перемычками.

Системы регулирования изменяют положения заслонок, системы защит отключают отдельные насосы или станции; возможен также порыв труб на трассе. Для течения нефти в трубопроводе типична турбулизация потока, что приводит к существенному увеличению гидродинамического сопротивления.

Как показано в [4-9], указанные возмущающие факторы приводят к непрерывному и существенному изменению характера течения, что усложняет его математическое описание и приводит к необходимости разработки нескольких взаимосвязанных моделей.

Описание моделей

Модель статике технологического процесса включает блоки моделирования насосных агрегатов и систем автоматического регулирования, расчета распределения потоков по связанным трубопроводам, производительности перекачки и потерь напора в трубопроводах,

Основной параметр, определяемый в *модели производительности* в статике, а именно, объемная скорость потока q , определяется из уравнения баланса энергии, левая часть которого представляет сумму напора, развиваемого насосными агрегатами, а правая – сумму потерь напора в трубопроводах. При этом должны выполняться граничные условия для давлений в виде ограничения по давлению приема и выхода систем регулирования на станциях. Повреждение трубы моделируется истечением нефти из отверстия. Решение уравнения баланса энергии производится методом половинного деления за несколько (до шести) итераций.

Модель противотурбулентных присадок включает коэффициенты α и β обобщенной формулы Лейбензона при турбулентном течении нефти в зоне труб с гладкими стенками:

$$\Delta h = \beta \frac{v^\alpha q^{2-\alpha}}{d^{5-\alpha}} l + z_{\text{кон}} - z_{\text{нач}},$$

где названные коэффициенты зависят от степени ламинаризации потока x и граничных значений числа Рейнольдса для переходной зоны течения нефти по формулам [4, 5]:

$$\alpha(x) = 0,25 + x \cdot (1 - 0,25)$$

$$\beta(x) = \frac{(0,2572(\text{Re}_2 - x \cdot (\text{Re}_2 - \text{Re}_1))^{\alpha(x)-0,25}}{4^{\alpha(x)} \pi^{2-\alpha(x)}}.$$

Степень ламинаризации потока линейно зависит от концентрации присадок, коэффициенты соответствующей зависимости устанавливаются экспериментально. Существует предел концентрации присадок, выше которой рост ламинаризации потока не проявляется. В частности, на рис. 1 приведен экспериментально установленный график изменения степени ламинаризации потока на перегоне Гомель - Защелье нефтепровода «Дружба». Отличие второго перегона от остальных состоит в наличии лупинга на водном переходе через р. Днепр.

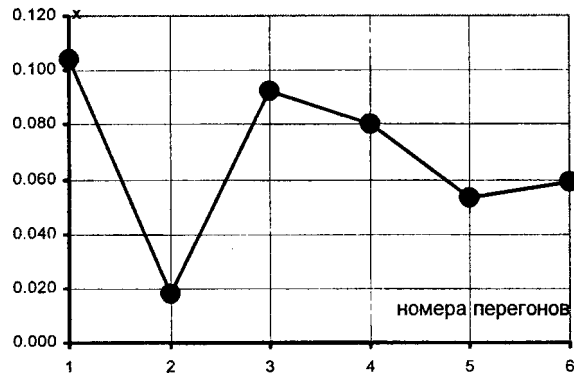


Рис. 1. Изменение степени ламинаризации в зависимости от расстояния от точки впрыска

Модель системы регулирования, обеспечивающей заданные давления на входе и выходе станции, устанавливает зависимость потерь напора на местном сопротивлении поворотной заслонки от степени открытия λ , сечения и величины потока

$$\Delta h = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{q}{S_0} \right) \cdot \left(\frac{1}{0.62 \frac{S_\lambda}{S_0} - 0.117 \left(\frac{S_\lambda}{S_0} \right)^2 + 0.328 \left(\frac{S_\lambda}{S_0} \right)^3} - 1 \right)^2,$$

$$\frac{S_\lambda}{S_0} = 1 - \cos \left(\lambda \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

и обратную зависимость степени открытия заслонки от величины дросселирования.

Модель распределения потоков по гидравлически связанным трубопроводам включает формулы расчета эквивалентного диаметра дополнительной трубы (лупинга) и вставки, распределения потоков по двум трубопроводам при равенстве давлений на границах связанных труб, а также для распространенного способа регулирования потока прикрытием задвижек на перемычке

$$\frac{P_1 \cdot 10^5}{\rho \cdot g} - 0,0247 \frac{x^{1,75} q^{1,75} v^{0,25}}{d_1^{4,75}} l = \frac{(P_1 - \Delta P) \cdot 10^5}{\rho \cdot g} - 0,0247 \frac{(1-x)^{1,75} q^{1,75} v^{0,25}}{d_2^{4,75}} l.$$

Блок идентификации эквивалентного диаметра основан на нижеприведенной зависимости искомого диаметра от скорости и характера течения, давлений на границе участка, перепада высот, дросселирования на принимающей станции, плотности и вязкости нефти

$$d_e = \left[\frac{\left(\frac{v}{10^6} \right)^{0,25} \cdot \left(\frac{Q}{3600} \right)^{1,75} \cdot (l_{кон} - l_{нач}) \cdot 0,0247 \cdot 10^3}{\left[P_{нач} - P_{кон} + \frac{(P_{НПС-2}^к - P_{НПС-2}^о) \cdot (l_{кон} - l_{нач})}{2 \cdot (l_{НПС-2} - l_{НПС-1})} \right] \cdot 10^5 + (z_{нач} - z_{кон})} \right]^{\frac{1}{4,75}} \cdot 10^3.$$

Модель насосного агрегата основана на применении параболической аппроксимации паспортных характеристик зависимостей напора и потребляемой

мощности от подачи насоса, исходные коэффициенты которых определяются классическими методами решения систем линейных алгебраических уравнений и сведены в базу данных.

Идентификация характеристик путем расчета коэффициентов параболических аппроксимаций по текущим значениям давления, потока и мощности включает определение коэффициентов k_h и k_N изменения напорной и мощностной характеристик из уравнений с учетом изменения плотности нефти, напряжения и частоты питающего тока

$$\begin{cases} k_h^2 a + k_h b q + c q^2 = \Delta h \\ k_N^3 a_e + k_N^2 b_e q + k_N c_e q^2 = N \end{cases}$$

Коэффициент изменения зазора щелевого уплотнения насоса k_b определяется, исходя из коэффициента изменения напорной характеристики k_h , дифференциального давления, скорости потока и геометрических размеров зазора по формуле

$$k_b = (k_h - 1) \frac{q}{2\pi d b \frac{1}{\sqrt{\frac{0.06l}{2d} + 1.5}} \sqrt{2 \frac{\Delta P}{\rho}}}$$

Модель систем защит на основании двухуровневых пределов стационарных давлений (минимум на входе, максимумы до и после системы регулирования) и соответствующих временных задержек описывает по первому уровню пределов давлений отключение первого работающего насоса, а по второму – останов всей станции.

Модель динамики переходных процессов использует основные блоки статической модели и дополнительно блоки циклических (таймерных) перерасчетов параметров, моделирования систем защит и распространения ударных волн, включая определение начальных значений параметров.

Модель распространения ударной волны по связанным трубопроводам определяет скорость распространения волны по формуле

$$c = \left[\rho \left(\frac{1}{K_o} + \frac{(d_y - 2\delta)}{2\delta K_s} \right) \right]^{\frac{1}{2}},$$

а степень гашения волны давления – по формуле Жуковского для связи напора в исходной точке и на расстоянии x , скорректированной с учетом фактических данных

$$|\Delta h_x| = |\Delta h_0| \cdot \left(e^{-k_h \frac{\beta \sqrt{\alpha} q^{2-\alpha}}{d^{5-\alpha}}}{c} \right)^x$$

Уточнение коэффициента k_h необходимо для повышения точности волновой локализации мест несанкционированного отбора нефти. Кроме того, модель распространения волны устанавливает связь амплитуд волн напора и объемной скорости потока по второй уточненной формуле Жуковского

$$|\Delta q_x| = |\Delta h_x| \cdot k_q \cdot \frac{\pi d^2}{4 \cdot 10^5 c}$$

Общая длительность моделируемого переходного процесса ограничена временем, достаточным для прохождения прямой и обратной волны.

Блок начальных параметров волны определяет амплитуды и знаки давления для задаваемых (пуск/останов насосов, открытие/закрытие задвижек, порывы трубопроводов) и генерируемых (изменение положения заслонок систем регулирования, реакции систем защит, порывы трубопроводов) переходных процессов в начальной точке.

Модель телемеханики, необходимая при создании стенда отладки программ АСУ ТП, должна передавать от объекта моделирования к АСУ группы телеизмерений (циклическим образом), группы телесигнализации при изменении сигналов (спорадическим образом), группу любых параметров по запросу, принимать для исполнения команды изменения состояний задвижек и насосов.

Для прогнозирования энергопотребления взята обобщенная формула Лейбенса

$$E = \frac{k_E G}{\eta_{MA} \eta_{собств} \eta_{НПС} \eta_d \eta_t \eta_T \eta_q} \cdot \left(k_m \beta \frac{v(t)^\alpha \left(\frac{G}{T \rho(t)} \right)^{2-\alpha}}{d^{5-\alpha}} l + (h_K - h_H) + k_p \frac{\Delta p_{НПС} + p_K - p_H}{\rho(t)} \right),$$

где E – расчетное потребление электроэнергии, G – планируемая производительность, T – длительность работы участка, t – температура, $\rho(t)$ – плотность, $v(t)$ – вязкость, h_H , h_K и p_H , p_K – геодезические высоты и давления в начале и конце участка соответственно, $\Delta p_{НПС}$ – суммарные потери давления на НПС участка, α и β – функции, характеризующие вид течения.

Влияющие параметры: $\eta_{НПС}$ – коэффициент учета отклонений потерь давления на НПС, η_t – коэффициент отклонений температуры, η_T – коэффициент изменения расчетного периода, η_d – коэффициент изменения эквивалентного диаметра, η_q – коэффициент перераспределения потоков. Несмотря на нелинейность влияния указанных параметров, в существующем узком диапазоне их изменения может быть использован линейная аппроксимация.

Дискретными параметрами моделирования определены состояния насосных агрегатов, задвижек труб, а также систем регулирования и защит. Аналоговыми параметрами являются гидравлические параметры (плотность и кинематическая вязкость нефти, давления и объемная скорость течения), топография объектов (расстояния и высоты), параметры энергопотребления (потребляемые мощности, напряжения, сила тока), диаметры трубопроводов, параметры систем регулирования (диаметры и предельные положения заслонок), пределы давлений систем регулирования и защит, пределы рабочих давлений на трассе, коэффициенты аппроксимаций характеристик насосных агрегатов.

Исходными являются топографические параметры; параметры качества нефти; диаметры труб, характеристики насосных агрегатов, уровень нефти в резервуарах, пределы давлений, параметры систем регулирования, параметры порывов трубопровода, состояние задвижек и насосных агрегатов. Результатирующими параметрами являются давления и объемные скорости течений в контрольных точках, потребляемые мощности для насосных агрегатов, состояния флагов систем регулирования и защит. Интегральными результирующими параметрами являются производительность участка нефтепровода, расход электроэнергии за сутки и удельный расход электроэнергии КПД насосных агрегатов.

Пример использования модели

На стадии проекта реконструкции участков нефтепроводов Унеча – Мозырь и Мозырь – Адамова застава с помощью моделирования статических и динамических режимов получены рекомендации по: местам прокладки дополнительных ниток трубопроводов; заменам насосов, двигателей, трансформаторов; параметрам защит и регулирования; результирующим изменениям производительности энергопотребления и энергоэффективности; локализации нарушений пределов рабочих давлений на трассе при развитии переходных процессов в целях замены труб в этих точках.

В оперативной практике диспетчерского управления моделирование статических режимов названных участков позволяет прогнозировать изменения параметров при ремонтах, а моделирование переходных процессов использовалось в процессе подготовки диспетчеров. Фрагмент сопоставления давлений исходного статического режима и развивающегося переходного процесса приведен на рис. 2.

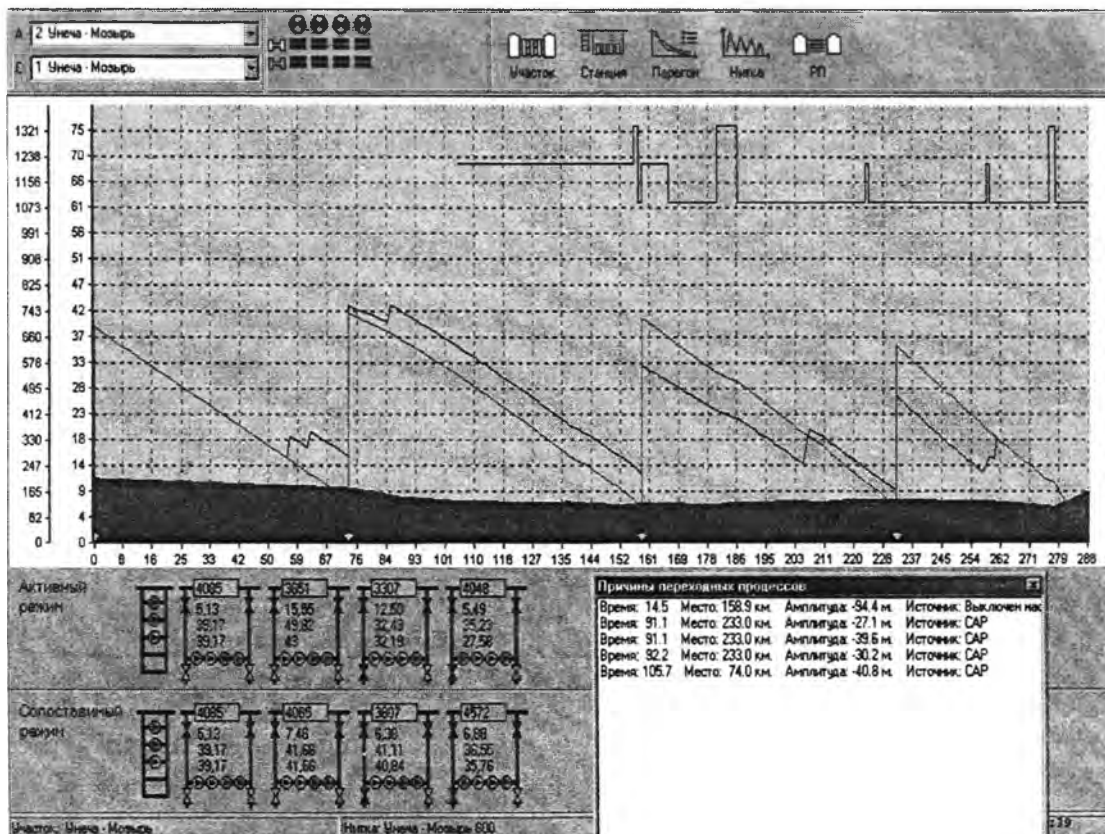


Рис. 2. Результаты моделирования переходного процесса останова насоса и реакции системы регулирования

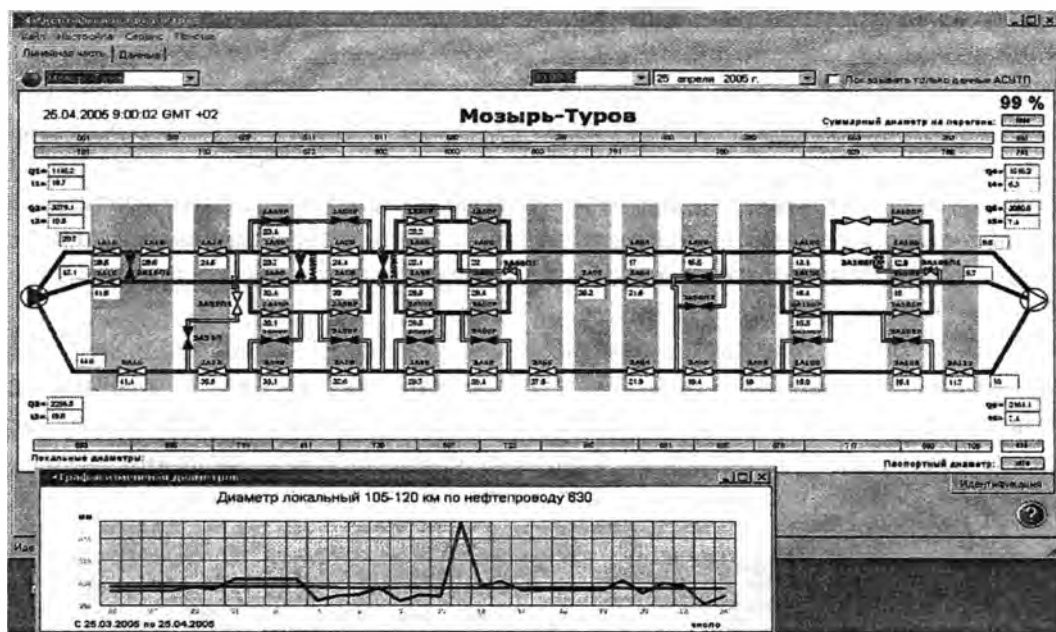


Рис. 3. Данные программы идентификации эквивалентного диаметра

Таблица 1
Соотношение паспортных и идентифицированных диаметров

Параметр	Перегоны						
	106 км Гомель	Гомель Защелье	Зашелье Мозырь	Мозырь Туров	Туров Пинск	Пинск Кобрин	Кобрин 441 км
Пасп. D	1174 мм	1189	1176	1070	1073	1078	1070
Идент. D	1166	1165	1155	1055	1061	1063	1065
Соотношение	99,3 %	98,0	98,2	98,6	98,9	98,6	99,5

Таблица 2
Сводные характеристики пропусков очистных устройств

Участок	Дата	Сопоставление с предыдущим равным периодом	
		Производительность	Уд. расход энергии
Мозырь-Адамова Застава	10-14.01.2005	100,7%	100,9%
	21-25.01.2005	99,9%	99,4%
	04-08.02.2005	101,8%	103,2%
	18-22.02.2005	100,2%	99,9%
	03-07.03.2005	110,2%	101,8%
	Среднее	102,1%	100,6%

Автономные системы расчета эквивалентных диаметров и характеристик насосов по архивным данным дают их оценки во времени (рис. 3), позволяя, с учетом паспортных значений (таблицы 1-3), дать рекомендации по периодичности очистки и выделению наиболее существенных факторов снижения энергоэффективности.

Таблица 3
Параметры энергоэффективности насосных агрегатов

Насос	k_h	k_N	$k_{КПД}$	КПД
Гом ³ ₁	0,99	1,02	0,9	73,7
Гом ⁴ ₁	1,0	1,03	0,93	75,6
Гом ² ₂	0,92	0,96	0,9	75,4
Гом ⁴ ₂	0,97	1,0	0,93	78,4

Насос	k_h	k_N	$k_{кпд}$	КПД
Заш ² ₁	0,96	1,01	0,84	69,8
Заш ⁴ ₁	0,96	1,03	0,81	66,8
Заш ⁴ ₂	0,96	0,98	0,98	82,0

Дана также оценка потерь энергоэффективности вследствие отклонения от распределения потоков по многоточным гидравлически связанным трубопроводам, имеющая вид

$$\eta_q = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + k_1 \left(\frac{(1 - x_q(d_1, d_2) \cdot k_q)^{2,75}}{d_2^{4,75}} + \frac{(x_q(d_1, d_2) \cdot k_q)^{2,75}}{d_1^{4,75}} \right) \frac{x_q(d_1, d_2)^{1,75}}{d_1^{4,75}}} \right)$$

где x_q – доля потока по первому из двух трубопроводов, k_1 – доля длины трубопровода с нарушением распределения потоков, k_q – коэффициент изменения распределения потока.

Так, при объемной фактической скорости 1100 м³/ч по трубопроводу $D_y = 630$ м перегона Мозырь–Туров участка Мозырь–Адамова Застава, потери электроэнергии составят 1,1 % в сравнении с режимом теоретической скорости 1500 м³/ч.

Результаты прогноза энергопотребления участка Мозырь–Адамова Застава на 2006 год приведены в табл. 4 и отличаются от фактических значений на 0,5 %. Прогнозы показали целесообразность применения присадок при тарифе за электроэнергию 0,1 \$/кВтч.

Таблица 4

Исходные параметры Влияющие параметры Результаты прогнозирования

D	1,076	м	Базовые значения	D_d	-0,01	м	Поправки	$\eta_{\text{собст}}$	97,7 %	Влияние поправок	0,217	Стоимость млн \$
L	444	км		T_d	-9	дни		$\eta_{\text{НПС}}$	93,81 %		0,585	
G	40000000	т		t_d	-2,1	град		η_T	96,40 %		0,341	
T	365	дни		$\Delta P_{\text{НПС}}$	6	кг/см ²		η_i	98,79 %		0,114	
t	20	град		k_1	0,25			η_d	96,34 %		0,346	
$h_{\text{нач}}$	158	м		k_{q1}	0,73			η_q	98,92 %		0,102	
$h_{\text{кон}}$	165	м		d_1	0,612	м		E	188961551		кВт·ч	
$\Delta P_{\text{НПС}}$	6	кг/см ²		d_2	0,974	м		Стоимость	9,448		млн \$	
$P_{\text{нач}}$	0,5	кг/см ²		q_{d1}	0,221			A	10,64		кВт·ч/м·1000км	
$P_{\text{кон}}$	9	кг/см ²										
$\eta_{\text{собст}}$	97,7 %											
$\eta_{\text{МА}}$	75 %											
Тариф	0,05	\$/кВтч										
ρ	858,8	кг/м ³										
ν	13,2	сСт										

Волновая локализация места отбора [7] требует расчета плотности и вязкости по температуре, скорости звука, гидравлического уклона, степени гашения волны давления по формуле Жуковского с поправочным коэффициентом. Расстояние до места отбора x , находящегося между точками замеров x_1 и x_2 находится в волновом методе из уравнения, полученного на основании формулы Жуковского для гашения амплитуды волны в трубопроводе

$$\Delta p_1 \cdot k_{gash}^{x_1-x} = \Delta p_2 \cdot k_{gash}^{x-x_2},$$

где Δp_1 и Δp_2 амплитуды скачков давления в точках замеров, k_j коэффициент гашения

$$k_{gash} = e^{-k_p \frac{i}{c}}.$$

Гидравлический уклон i определяется по обобщенной формуле Лейбензона или формуле Альтшуля. В приведенных зависимостях Δp – амплитуда скачков давления, c – скорость распространения волны.

Заключение

Разработана гидродинамическая модель трубопроводного транспорта нефти и программный комплекс, позволяющие прогнозировать параметры технологического режима и идентифицировать состояние основного оборудования в реальном масштабе времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гумеров, А.Г. Эксплуатация оборудования нефтеперекачивающих станций / А.Г. Гумеров, Р.С. Гумеров, А.Н. Акбердин. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр». – 2001.
2. Вайншток, С.М. Трубопроводный транспорт нефти: в 2 т. / С.М. Вайншток. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», –2004.
3. Вязунов Е.В. Методика расчета перегрузок трубопровода по давлениям в переходных процессах // Нефтяное хозяйство. – 1973. – № 9. – С. 45-47.
4. Кузьминский, Ю.Г. Математическое моделирование влияния противотурбулентных присадок на производительность участка нефтепровода / Ю.Г. Кузьминский, С.В. Шилько, В.И. Вьюн // Трение и износ. – 2004. – № 3. – С. 238-243.
5. Шилько С.В., Кузьминский Ю.Г. Моделирование гидродинамического трения: аналогия системы кровообращения и трубопроводного транспорта нефти // Совр. информ. и телемед. технол. для здравоохранения (АІТТН'2008): матер. 2-й Междун. конф. ОИПИ.– Минск.– 1-3 окт. 2008 г. – С. 338–343.
6. Шилько С.В., Кузьминский Ю.Г. Роль мониторинга технического состояния магистральных нефтепроводов в системе предупреждения и ликвидации чрезвычайных ситуаций // Чрезв. ситуации: образов. и наука. – 2006. –№ 1. – С. 17–24.
7. Кузьминский, Ю.Г. Идентификация модели переходных процессов течения нефти в магистральных трубопроводах (реальный масштаб времени) / Ю.Г. Кузьминский, С.В. Шилько, В.И. Вьюн // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2006. – Т.11, № 2. – С. 15-21.
8. Кузьминский, Ю.Г. Расчет гидравлических характеристик путем идентификации моделей насосных агрегатов и перекачивающих станций магистральных нефтепроводов / Ю.Г. Кузьминский, С.В. Шилько, В.И. Вьюн // Механика машин, механизмов и материалов. – 2008. – № 2. – С. 58-63.
9. Кузьминский, Ю.Г. Математическая модель технологического процесса трубопроводного транспорта нефти / Ю.Г. Кузьминский, С.В. Шилько // Информатика. – 2009. – № 1. – С.25-34.

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА ГАЗООХЛАЖДАЕМОГО БЫСТРОГО ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

Довга Ю.А. Куликов И.С.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In this article the algorithm of a finding of distribution of fuel element temperature of gas-cooled nuclear reactor has been under consideration.

Рассмотрим достаточно длинный стержневой твэл с технологическим газовым зазором между топливом и оболочкой, заполненным на начало компании чистым гелием. В качестве топлива берется керментная композиция. Распределение температуры в сердечнике и оболочке считается осесимметричным, плотность делений – равномерной по сечению твэла. Ввиду малости градиентов плотности деления и температуры по высоте твэла отдельные сечения элемента (рис. 1), находящиеся вдали от торцов, рассматриваются независимо друг от друга в условиях обобщенной плоской деформации ($\varepsilon_{zz} = \text{const}$).

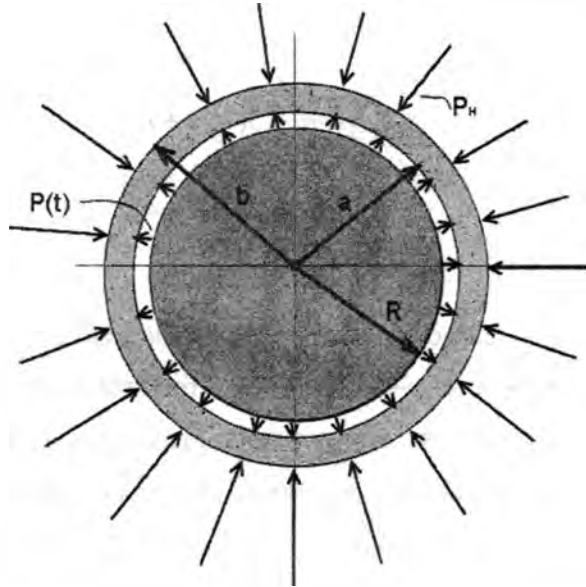


Рис. 1. Поперечное сечение стержневого твэла при наличии газового зазора между топливом и оболочкой

Уравнение теплопроводности в полярных координатах для осесимметрично нагретого цилиндра бесконечной длины с внутренними источниками тепла будет иметь вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_v, \quad (1)$$

где c – удельная теплоемкость, ρ – плотность материала, q_v – объемное тепловыделение, λ – коэффициент теплопроводности материала.

Будем решать уравнение (1) методом конечных разностей. Его суть заключается в замене дифференциальных коэффициентов уравнения на разностные коэффициенты, что позволяет свести решение дифференциального уравнения к решению его разностного аналога, т.е. построить его конечно-разностную схему. Используя неравномерную сетку, где $h_j = r_{j+1} - r_j$ – шаг по радиусу твэла, $h_n = t_{n+1} - t_n$ – шаг по времени, распишем разностные отношения для производных:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{h_j}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_j^n - T_j^{n-1}}{h_n},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\lambda_{j+1}^n r_{j+1} \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h_{j+1}} - \lambda_j^n r_j \frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{h_j}}{0.5(h_{j+1} + h_j)}. \quad (2)$$

Тогда разностная схема для сердечника запишется следующим образом:

$$c_R \rho_R \frac{T_j^n - T_j^{n-1}}{h_n} = \frac{\lambda_{j+1}^n r_{j+1} \frac{T_{j+1}^n - T_j^n}{h_{j+1}} - \lambda_j^n r_j \frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{h_j}}{0.5(h_{j+1} + h_j)} + q_{vj} \quad (3)$$

или, после приведения,

$$\frac{\lambda_{j+1}^n r_{j+1} h_j h_n T_{j+1}^n - (\lambda_{j+1}^n r_{j+1} h_j h_n + \lambda_j^n r_j h_{j+1} h_n + c_R \rho_R) T_j^n + \lambda_j^n r_j h_{j+1} h_n T_{j-1}^n}{r_j h_{j+1} h_j h_n 0.5(h_{j+1} + h_j)} + \left(q_{vj} + c_R \rho_R \frac{T_j^{n-1}}{h_n} \right) = 0. \quad (3')$$

Здесь $j = \overline{1, J_R}$, J_R – число отрезков разбиения для сердечника, c_R – удельная теплоемкость сердечника, ρ_R – плотность материала сердечника.

Оболочка твэла не содержит внутренних источников тепла ($q_{vj} = 0$), поэтому соответствующие уравнения для оболочки будут иметь вид

$$\frac{\lambda_{j+1}^n r_{j+1} h_j h_n T_{j+1}^n - (\lambda_{j+1}^n r_{j+1} h_j h_n + \lambda_j^n r_j h_{j+1} h_n + c_o \rho_o) T_j^n + \lambda_j^n r_j h_{j+1} h_n T_{j-1}^n}{r_j h_{j+1} h_j h_n 0.5(h_{j+1} + h_j)} + c_o \rho_o \frac{T_j^{n-1}}{h_n} = 0. \quad (4)$$

Здесь $j = \overline{J_R + 1, J_O}$, J_O – число отрезков разбиения для оболочки, c_o – удельная теплоемкость оболочки, ρ_o – плотность материала оболочки.

Граничные условия для твэла запишутся следующим образом:

1) Условие в центре сердечника ($r = 0$):

$$\frac{\partial T(0,0)}{\partial r} = 0; \quad (5)$$

- тепловой поток в центре сердечника равен нулю.

Перепишем условие (5) с помощью разностных отношений:

$$\frac{\partial T(0,0)}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow \frac{T_1^0 - T_0^0}{h_1} = 0 \Leftrightarrow T_1^0 = T_0^0 \quad (6)$$

2) Условие на границе сердечника и газа ($r = R$):

Будем считать, что теплопередача между сердечником и газом в зазоре осуществляется по закону Ньютона [4], тогда

$$\frac{\partial T(R,0)}{\partial r} = -\frac{\alpha'}{\lambda} (T_R - T_a), \quad (7)$$

где α' – тепловая проводимость зазора. $\frac{Bm}{\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$

Согласно [2] тепловую проводимость зазора можно вычислить по формулам

$$\alpha' = \frac{0,1167\sqrt{T_g} - 2,36}{100\frac{\delta}{R}} + 0,6391\frac{B}{1+B} + 0,0321, \quad (8)$$

$$T_g = T_{J_{R+1}} + 273 + 0,2723\left(1 + 8\frac{\delta}{R}\right)q,$$

$$B = e^{-7-360\frac{\delta}{R}+0,035q},$$

где q – линейная тепловая мощность твэла $\left(\frac{\text{Вт}}{\text{см}}\right)$.

В разностных отношениях, условия (7)–(8) примут вид

$$\frac{T_{J_R}^0 - T_{J_{R-1}}^0}{h_{J_R}} = -\frac{\alpha'}{\lambda_{J_R}} (T_{J_R}^0 - T_{J_{R+1}}^0)$$

или

$$\alpha' h_{J_R} T_{J_{R+1}}^0 - (\lambda_{J_R} + \alpha' h_{J_R}) T_{J_R}^0 + \lambda_{J_R} T_{J_{R-1}}^0 = 0, \quad (9)$$

где

$$\alpha' = \frac{0,1167\sqrt{T_g} - 2,36}{100\frac{\delta}{R}} + 0,6391\frac{B}{1+B} + 0,0321,$$

$$T_g = T_{J_{R+1}} + 273 + 0,2723\left(1 + \frac{\delta}{R}\right)q. \quad (10)$$

3) Условие на границе оболочки и среды ($r = b$):

$$\frac{\partial T(b,0)}{\partial r} = -\frac{\alpha}{\lambda_{жс}} (T_b^0 - T_{жс}^0). \quad (11)$$

Представляя условие (11) в разностных отношениях, получим

$$\frac{T_{J_R+J_{ab}}^0 - T_{J_R+J_{ab}-1}^0}{h_{J_R+J_{ab}}} = -\frac{\alpha}{\lambda_{ср}} (T_{J_R+J_{ab}}^0 - T_{ср}^0)$$

или

$$(\lambda_{жс} + \alpha h_{J_R+J_{ab}}) T_{J_R+J_{ab}}^0 - \lambda_{ср} T_{J_R+J_{ab}-1}^0 + \alpha h_{J_R+J_{ab}} T_{ср}^0 = 0. \quad (12)$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$1) T_1^0 = T_0^0;$$

$$2) \frac{1}{r_1} \frac{\lambda_2^0 r_2 \frac{T_2^0 - T_1^0}{h_2} - \lambda_1^0 r_1 \frac{T_1^0 - T_0^0}{h_1}}{0.5(h_{21} + h_1)} + q_{V1} = 0;$$

$$3) \frac{1}{r_2} \frac{\lambda_3^0 r_3 \frac{T_3^0 - T_2^0}{h_3} - \lambda_2^0 r_2 \frac{T_2^0 - T_1^0}{h_2}}{0.5(h_3 + h_2)} + q_{V2} = 0;$$

...

$$J_R) \frac{1}{r_{J_R-1}} \frac{\lambda_{J_R}^0 r_{J_R} \frac{T_{J_R}^0 - T_{J_R-1}^0}{h_{J_R}} - \lambda_{J_R-1}^0 r_{J_R-1} \frac{T_{J_R-1}^0 - T_{J_R-2}^0}{h_{J_R-1}}}{0.5(h_{J_R} + h_{J_R-1})} + q_{V J_R-1} = 0;$$

$$J_{R+1}) \alpha' h_{J_R} T_{J_R+1}^0 - (\lambda_{J_R} + \alpha' h_{J_R}) T_{J_R}^0 + \lambda_{J_R} T_{J_R-1}^0 = 0,$$

$$\alpha' = \frac{0,1167 \sqrt{T_g} - 2,36}{100 \frac{\delta}{R}} + 0,6391 \frac{B}{1+B} + 0,0321,$$

$$T_g = T_{J_R+1} + 273 + 0,2723 \left(1 + 8 \frac{\delta}{R} \right) q, B = e^{-7-360 \frac{\delta}{R} + 0,035q};$$

$$J_{R+2}) \lambda_{J_R+2}^0 r_{J_R+2} h_{J_R+1} T_{J_R+2}^0 - (\lambda_{J_R+2}^0 r_{J_R+2} h_{J_R+1} + \lambda_{J_R+1}^0 r_{J_R+1} h_{J_R+2}) T_{J_R+1}^0 + \lambda_{J_R+1}^0 r_{J_R+1} h_{J_R+2} T_{J_R}^0 = 0;$$

...

$$J_R + J_{ab}) \lambda_{J_R+J_{ab}}^0 r_{J_R+J_{ab}} h_{J_R+J_{ab}-1} T_{J_R+J_{ab}}^0 - (\lambda_{J_R+J_{ab}}^0 r_{J_R+J_{ab}} h_{J_R+J_{ab}-1} + \lambda_{J_R+J_{ab}-1}^0 r_{J_R+J_{ab}-1} h_{J_R+J_{ab}}) T_{J_R+J_{ab}-1}^0 + \lambda_{J_R+J_{ab}-1}^0 r_{J_R+J_{ab}-1} h_{J_R+J_{ab}} T_{J_R+J_{ab}-2}^0 = 0;$$

$$J_R + J_{ab} + 1) (\lambda_{\text{жс}} + \alpha h_{J_R+J_{ab}}) T_{J_R+J_{ab}}^0 - \lambda_{\text{жс}} T_{J_R+J_{ab}-1}^0 + \alpha h_{J_R+J_{ab}} T_{\text{жс}}^0 = 0.$$

Таким образом, мы получили нелинейную систему $J_R + J_{ab} + 1$ уравнений с $J_R + J_{ab} + 1$ неизвестными, решая которую численными методами, можно получить распределение температуры по твэлу в любой момент времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов И.С., Тверковкин Б.Е. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / под ред. В.Б. Нестеренко. – Мн.: Наука и техника, 1984. – 104 с.
2. Куликов И.С., Нестеренко В.Б., Тверковкин Б.Е. Прочность элементов конструкций при облучении. – Минск: Наука и техника, 1990. – 144 с.: ил.
3. Куликов, И.С. // Вести АН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 1997. – №3. – С. 102-107.
4. Лыков, А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 600с.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ОРТОТРОПНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕЛИНЕЙНО УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Протуро И.И.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Cylindrical bending of a three-layer orthotropic plate with a nonlinear elastic filler is considered. For the kinematics description of carryings layers accepted the Kirchhoff hypotheses. To describe kinematics of pack of the plate hypotheses of the broken normal are accepted. We obtain the system of equilibrium equations, and applied Ilyushin's experimental-theoretic method to solve it.

Введение

В области малых упругопластических деформаций [1] изгиб трехслойных стержней и круговых пластин был изучен в [2, 3]. Изгиб упругих прямоугольных ортотропных трехслойных пластин исследован в [4, 5]. Здесь рассмотрен цилиндрический изгиб ортотропной прямоугольной пластины с нелинейно упругим наполнителем.

Постановка задачи

Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная ортотропная прямоугольная пластина с жестким наполнителем (работающим в тангенциальном направлении). Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя. Для описания кинематики пакета использована гипотеза «ломаной» нормали: в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол относительно осей координат $\psi_x(x, y), \psi_y(x, y)$. Деформации малые.

На внешний слой стержня действует распределенная силовая нагрузка $p_x(x, y), p_y(x, y), q(x, y)$. Через $w(x, y)$ и $u_x(x, y), u_y(x, y)$ обозначен прогиб и продольное перемещение средней плоскости наполнителя соответственно. Так как материалы всех слоев несжимаемы в поперечном направлении, то прогиб в остальных точках нормали к срединной поверхности совпадает с $w(x, y)$. По контуру предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости.

Толщина k -го слоя ($k = 1, 2, 3$) обозначена через h_k , при этом $h_3 = 2c$. С помощью введенных геометрических гипотез, продольные перемещения в слоях выражаются через пять искомых функции $w(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y)$:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= u_x + c\psi_x - zw_{,x}, \quad (c \leq z \leq c + h_1); \quad u_x^{(3)} = u_x + z\psi_x - zw_{,x}, \quad (-c \leq z \leq c); \\ u_x^{(2)} &= u_x - c\psi_x - zw_{,x}, \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \quad u_y^{(1)} = u_y + c\psi_y - zw_{,y}, \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_y^{(3)} &= u_y + z\psi_y - zw_{,y}, \quad (-c \leq z \leq c); \quad u_y^{(2)} = u_y - c\psi_y - zw_{,y}, \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости наполнителя. Запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения равновесия трёхслойной пластины получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta W = \delta A, \quad (2)$$

где $\delta W, \delta A$ – вариации работ внутренних усилий и внешних сил соответственно.

При определении работы внешних сил считаем, что к срединной поверхности наполнителя приложены произвольные распределённые нагрузки, а по контуру

пластины – распределённые по кромкам сторон силы и моменты.

После некоторых преобразований из выражения (2) получим систему уравнений равновесия рассматриваемой пластины в усилиях:

$$\begin{aligned} N_{x^2x} + Q_{xy^2y} + p_x = 0; \quad N_{y^2y} + Q_{xy^2x} + p_y = 0; \quad M_{xx^2xx} + M_{yy^2yy} + 2M_{xy^2xy} + q - q_r = 0; \\ H_{xx^2x} + H_{xy^2y} - Q_{xx} = 0; \quad H_{yy^2y} + H_{xy^2x} - Q_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь суммарные внутренние усилия и моменты введены соотношениями:

$$\begin{aligned} N_x = \sum_{k=1}^3 N_x^{(k)}; \quad N_y = \sum_{k=1}^3 N_y^{(k)}; \quad M_y = \sum_{k=1}^3 M_y^{(k)}; \quad M_x = \sum_{k=1}^3 M_x^{(k)}; \quad M_{xy} = \sum_{k=1}^3 M_{xy}^{(k)}; \\ Q_{xy} = \sum_{k=1}^3 Q_{xy}^{(k)}; \end{aligned}$$

$$H_{xx} = c(N_x^{(1)} - N_x^{(2)}) + M_{xx}^{(3)}; \quad H_{yy} = c(N_y^{(1)} - N_y^{(2)}) + M_{yy}^{(3)}; \quad H_{xy} = c(Q_{xy}^{(1)} - Q_{xy}^{(2)}) + M_{xy}^{(3)}. \quad (4)$$

Так как материалы слоёв пластины ортотропны, соотношения между деформациями и напряжениями представимы в форме [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(k)} = \frac{1}{E_x^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} - \frac{\nu_{xy}^{(k)}}{E_y^{(k)}} \sigma_{yy}^{(k)} - \frac{\nu_{xz}^{(k)}}{E_z^{(k)}} \sigma_{zz}^{(k)}, \quad \varepsilon_{yy}^{(k)} = -\frac{\nu_{yx}^{(k)}}{E_x^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} + \frac{1}{E_y^{(k)}} \sigma_{yy}^{(k)} - \frac{\nu_{yz}^{(k)}}{E_z^{(k)}} \sigma_{zz}^{(k)}, \\ \varepsilon_{zz}^{(k)} = -\frac{\nu_{zx}^{(k)}}{E_x^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} - \frac{\nu_{zy}^{(k)}}{E_y^{(k)}} \sigma_{yy}^{(k)} + \frac{1}{E_z^{(k)}} \sigma_{zz}^{(k)}, \\ \varepsilon_{xy}^{(k)} = \frac{1}{G_{xy}^{(k)}} \sigma_{xy}^{(k)}, \quad \varepsilon_{yz}^{(k)} = \frac{1}{G_{yz}^{(k)}} \sigma_{yz}^{(k)}, \quad \varepsilon_{zx}^{(k)} = \frac{1}{G_{zx}^{(k)}} \sigma_{zx}^{(k)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где E_i, ν_{ij}, G_{ij} – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига материала соответствующего слоя.

Применив (5), (1), соотношения Коши, выразим внутренние усилия и моменты, входящие в (3), через искомые функции $u_x(x, y), u_y(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y), w(x, y)$. В итоге получим систему уравнений равновесия прямоугольной ортотропной трехслойной пластины в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{x^2yy} + a_2 u_{y^2xy} + a_3 u_{x^2xx} + a_4 \psi_{x^2yy} + a_5 \psi_{y^2xy} + a_6 \psi_{x^2xx} - a_7 w_{,xxx} - a_8 w_{,xyy} + p_x = 0; \\ a_1 u_{y^2xx} + a_9 u_{x^2xy} + a_{10} u_{y^2yy} + a_4 \psi_{y^2xx} + a_{11} \psi_{x^2xy} + a_{12} \psi_{y^2yy} - a_{13} w_{,yyy} - a_{14} w_{,xyy} + p_y = 0; \\ a_7 u_{x^2xxx} + a_{13} u_{y^2yyy} + a_{15} u_{x^2xyy} + a_{16} u_{y^2xxy} + a_{17} \psi_{x^2xxx} + a_{18} \psi_{y^2yyy} + \\ + a_{19} \psi_{x^2xyy} + a_{20} \psi_{y^2xxy} - a_{21} w_{,xxx} - a_{22} w_{,yyy} - a_{23} w_{,xyy} + q = 0; \\ a_6 u_{x^2xx} + a_5 u_{y^2xy} + a_4 u_{x^2yy} + a_{24} \psi_{x^2xx} + a_{25} \psi_{y^2xy} + a_{30} \psi_{x^2yy} - a_{26} w_{,xyy} - a_{27} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \psi_x = 0; \\ a_{12} u_{y^2yy} + a_{11} u_{x^2xy} + a_4 u_{y^2xx} + a_{28} \psi_{y^2yy} + a_{29} \psi_{x^2xy} + a_{30} \psi_{y^2xx} - a_{31} w_{,yxx} - a_{32} w_{,yyy} - G_{yz}^{(3)} c \psi_y = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты a_i выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоёв [5].

Решение линейной задачи.

Рассмотрим несимметричную по толщине упругую прямоугольную трехслойную ортотропную пластину, достаточно длинную в направлении оси Oy . Она нагружена постоянной в направлении этой оси поперечной нагрузкой $p = p(x)$, $q = q(x)$. Вдоль оси Ox нагрузка может меняться произвольно.

Уравнения равновесия в перемещениях прямоугольной трехслойной ортотропной пластины при цилиндрическом изгибе следуют из уравнений (6), если

положить $u_y = \psi_y = 0$ и производные по y равными нулю:

$$\begin{aligned} a_3 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} + p &= 0; \\ a_7 u_{,xxx} + a_{17} \psi_{,xxx} - a_{21} w_{,xxx} + q &= 0; \\ a_6 u_{,xx} + a_{24} \psi_{,xx} - a_{17} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \psi &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь нижний индекс « x » в продольном перемещении, относительном сдвиге и в продольной силе опущен.

После однократного интегрирования первого из уравнений в (7) и исключения из третьего уравнения с помощью остальных продольного перемещения $u(x)$ и прогиба $w(x)$ получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение для нахождения функции сдвига $\psi(x)$:

$$\psi_{,xx} - \beta^2 \psi = g(x). \quad (8)$$

Здесь

$$g(x) = \gamma_2 p + \gamma_1 \left(\int q dx + C_1 \right), \quad (9)$$

где C_1 – константа интегрирования,

$$\beta^2 = \frac{a_3 G_{xz}^{(3)} c \cdot \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2} > 0, \quad \gamma_1 = \frac{a_3 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_{21} = \frac{a_6 \alpha_2 - a_7 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2},$$

$$\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2 \neq 0, \quad \alpha_1 = a_3 a_{17} - a_6 a_7, \quad \alpha_2 = a_3 a_{21} - a_7^2, \quad \alpha_3 = a_3 a_{24} - a_6^2, \quad a_{33} = c G_{xz}^{(3)}.$$

Общее решение $\psi_0(x)$ однородного дифференциального уравнения второго порядка, соответствующего неоднородному уравнению (8) можно выписать в виде:

$$\psi_0 = A \operatorname{sh}(\beta x) + B \operatorname{ch}(\beta x),$$

где $\operatorname{sh}(\beta x)$, $\operatorname{ch}(\beta x)$ – функции гиперболического синуса и косинуса.

Решение данного неоднородного уравнения получено методом вариации произвольных постоянных:

$$\psi(x) = A(x) \operatorname{sh}(\beta x) + B(x) \operatorname{ch}(\beta x).$$

Параметры $A(x)$ и $B(x)$ определяются из системы уравнений:

$$A_{,x} \operatorname{sh}(\beta x) + B_{,x} \operatorname{ch}(\beta x) = 0; \quad A_{,x} \beta \operatorname{ch}(\beta x) + B_{,x} \beta \operatorname{sh}(\beta x) = g(x).$$

Тогда

$$A(x) = \frac{1}{\beta} \int g(x) \operatorname{ch}(\beta x) dx + C_2; \quad B(x) = -\frac{1}{\beta} \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx + C_3. \quad (10)$$

Подставив полученные выражения (10) в (9) получим относительный сдвиг в заполнителе $\psi(x)$. Прогиб $w(x)$ и продольное перемещение $u(x)$ найдем из остальных уравнений системы (7).

В результате имеем аналитическое решение задачи о цилиндрическом изгибе трехслойной ортотропной пластины под действием нагрузки $q(x)$ и $p(x)$, распределенной по всей поверхности:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int g(x) \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx \right]; \\ w(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi dx - a_7 L_3^{-1}(p) + a_3 L_4^{-1}(q) + \frac{a_3 C_1}{6} x^3 \right] + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x + C_6; \\ u(x) &= \gamma_3 \psi + \frac{1}{\alpha_2} \left[-a_{21} L_2^{-1}(p) + a_7 L_3^{-1}(q) + \frac{a_7}{2} C_1 x^2 \right] + C_7 x + C_8, \end{aligned} \quad (11)$$

где L_1^{-1} , L_2^{-1} , L_3^{-1} – обозначены линейные интегральные операторы

$$L_1^{-1}(f) = \int f dx; \quad L_2^{-1}(f) = \iint f dx dx; \quad L_3^{-1}(f) = \iiint f dx dx dx.$$

Константы интегрирования C_1, \dots, C_8 определяются из граничных условий.

Для шарнирно опертой по обеим сторонам ($x = 0, x = l$) пластины граничные условия принимают вид:

$$x = 0, x = l: u = \psi = w = M = 0. \quad (12)$$

В случае жесткой заделки левого конца пластины ($x = 0$) при свободном правом ($x = l$) (консольное опирание) граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad w = w_{,x} = \psi = u = 0; \\ x = l: \quad M = M_{,x} = N = \psi = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае жесткой заделки обоих концов:

$$x = 0, x = l: w = w_{,x} = \psi = u = 0. \quad (14)$$

Постановка и решение нелинейной задачи

Рассмотрим случай, когда наружные несущие слои пластины, выполнены из упругого ортотропного материала, а несжимаемый по толщине изотропный наполнитель – нелинейно-упругий. Для материала наполнителя используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(3)} &= 2G_3 f^{(3)} \vartheta_{ij}^{(3)} = 2G_3 (1 - \omega^{(3)}) \vartheta_{ij}^{(3)}, \\ \sigma^{(3)} &= 3K_3 3\varepsilon^{(3)} \quad (i, j = x, y, z). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $s_{ij}^{(3)}, \sigma^{(3)}$ и $\vartheta_{ij}^{(3)}, \varepsilon^{(3)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций в наполнителе, G_3, K_3 – модули сдвиговой и объемной деформации, $f^{(3)}, \omega^{(3)}$ – универсальные функции, описывающие физическую нелинейность наполнителя:

$$f^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_i^{(3)} \leq \varepsilon_{i0}^{(3)}, \\ 1 - \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}), & \varepsilon_i^{(3)} > \varepsilon_{i0}^{(3)}, \end{cases}$$

где $\varepsilon_i^{(3)}$ – интенсивность деформаций; $\varepsilon_{i0}^{(3)}$ – предельная интенсивность деформаций, до которой сохраняется физическая линейность (аналог предела текучести).

Рассмотрим методику решения поставленной краевой задачи. Напомним, что силовые уравнения равновесия (3) и граничные условия были получены независимо от физических уравнений состояния. Поэтому мы можем воспользоваться ими и в рассматриваемом случае. Если во внутренних силовых факторах, входящих в уравнения (3), выразить напряжения через деформации, используя соотношения (15), а затем деформации через три линейно независимые функции $u(x), \psi(x), w(x)$, то в результате получим систему нелинейных дифференциальных уравнений. О точном ее решении в данном случае говорить не приходится. Поэтому воспользуемся методом «упругих» решений Ильюшина, который распространим на исследуемую конструкцию.

Компоненты тензора напряжений в третьем слое, используя (15), представим через девиатор и шаровую часть тензора деформаций в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(3)} &= s_x^{(3)} + \sigma^{(3)} = 2G_3 \vartheta_x^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} - 2G_3 \vartheta_x^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}), \\ \sigma_{xz}^{(3)} &= s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} - 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}). \end{aligned}$$

Выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «e») и неупругие (с индексом «ω») слагаемые:

$$\sigma_x^{(3)} = \sigma_x^{(3)e} - \sigma_x^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(3)e} &= 2G_3 \vartheta_x^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)}, \quad \sigma_x^{(3)\omega} = 2G_3 \vartheta_x^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}), \\ \sigma_{xz}^{(k)\omega} &= 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)}), \quad \sigma_{xz}^{(3)e} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (8), получим

$$N^{(3)} = N^{(3)e} - N^{(3)\omega}, \quad M^{(3)} = M^{(3)e} - M^{(3)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \quad (17)$$

Упругие (с индексом «e») и неупругие (с индексом «ω») составляющие в (17) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} N^{(3)e} &= \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)e} dz, & N^{(3)\omega} &= \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)\omega} dz, & M^{(3)e} &= \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)e} z dz, \\ M^{(3)\omega} &= \int_{-c}^c \sigma_x^{(3)\omega} z dz, & Q^{(3)e} &= \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)e} dz, & Q^{(3)\omega} &= \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив внутренние усилия (17) в уравнения равновесия (3), приводим систему к виду:

$$N_{,x}^e = -p + N_{,x}^{(3)\omega}, \quad H_{,x}^e - Q^e = M_{,x}^{(3)\omega} - Q^{(3)\omega}, \quad M_{,xx}^e = -q + M_{,xx}^{(3)\omega} \quad (19)$$

где $N^e = N^{(1)} + N^{(2)} + N^{(3)e}$, $M^e = M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)e}$, $Q^e = Q^{(3)e}$,

$$H^e = c(N^{(1)} - N^{(2)}) + M^{(3)e}.$$

Окончательные формулы для вычисления неупругих составляющих в (19) получим, используя соотношения (16) и (18):

$$N^{(3)\omega} = \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \omega_3 \varepsilon_x^{(3)} dz, \quad M^{(3)\omega} = \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \omega_3 \varepsilon_x^{(3)} z dz, \quad Q^{(3)\omega} = 2G_3 \int_{-c}^c \omega_3 \psi dz. \quad (20)$$

Здесь принято обозначение: $\omega_3 = \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)})$.

Систему уравнений для определения искомым перемещений получим, подставив в уравнения равновесия (19) соотношения, выражающие упругие составляющие внутренних усилий через u , ψ и w :

$$\begin{cases} a_3 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} = -p + p_\omega, \\ a_6 u_{,xx} + a_{24} \psi_{,xx} - a_{17} w_{,xxx} - G_3 c \psi = h_\omega, \\ a_7 u_{,xxx} + a_{17} \psi_{,xxx} - a_{24} w_{,xxxx} = -q + q_\omega. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь коэффициенты a_i те же, что и в (6),

$$p_\omega = N_{,x}^{(3)\omega}, \quad h_\omega = (M_{,x}^{(3)\omega} - Q^{(3)\omega}), \quad q_\omega = M_{,xx}^{(3)\omega}. \quad (22)$$

Предположим, что в (21), (22) содержится малый параметр, например функция $\omega_3 < 1$. Тогда возможен метод итераций, при котором для любого n -го приближения получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_3 u_{,xx}^{(n)} + a_6 \psi_{,xx}^{(n)} - a_7 w_{,xxx}^{(n)} = -p + p_\omega^{(n-1)}, \\ a_6 u_{,xx}^{(n)} + a_{24} \psi_{,xx}^{(n)} - a_{17} w_{,xxx}^{(n)} - G_3 c \psi^{(n)} = h_\omega^{(n-1)}, \\ a_7 u_{,xxx}^{(n)} + a_{17} \psi_{,xxx}^{(n)} - a_{24} w_{,xxxx}^{(n)} = -q + q_\omega^{(n-1)}. \end{cases} \quad (23)$$

Величины $p_\omega^{(n-1)}$, $h_\omega^{(n-1)}$, $q_\omega^{(n-1)}$, соответствующие неупругим составляющим (20), на первом шаге ($n = 1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название *дополнительных «внешних» нагрузок*. Они служат поправками на физическую нелинейность материала заполнителя:

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n-1)} &= N_{,x}^{(3)\omega(n-1)}, & h_\omega^{(n-1)} &= (M_{,x}^{(3)\omega(n-1)} - Q^{(3)\omega(n-1)}), & q_\omega^{(n-1)} &= M_{,xx}^{(3)\omega(n-1)}, \\ N^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} \int_{h_3} G_3 \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} dz, & M^{\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} \int_{h_3} G_3 \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} z dz, \\ Q^{\omega(n-1)} &= 2 \int_{h_3} G_3 \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \psi^{(n-1)} dz. \end{aligned} \quad (24)$$

Применение указанного метода последовательных приближений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче

теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

Процедура получения решения системы уравнений (23) не отличается от примененной для соответствующей задачи теории упругости (7)–(11). В результате получаем искомое решение в рекуррентном виде:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) &= C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u^{(n)}(x) &= \gamma_3 \psi^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} \left[-a_{21} L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2 \right] \\ &\quad + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}, \\ w^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_3 L_4^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} a_3 C_1^{(n)} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и линейные интегральные операторы $L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$ определены в (9)–(11). Константы интегрирования $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$ определяются из условий закрепления пластины.

Численные результаты

Для численной реализации решений (25), удовлетворяющих граничным условиям (14) создана компьютерная программа, использующая пакет Maple. С ее помощью проведен анализ параметров напряженно-деформированного состояния рассматриваемой трехслойной нелинейно упругой пластины с материалами слоев УВЭС–фторопласт–УВЭС. Механические характеристики материалов приведены в [2, 4].

Величина внешней нагрузки q принимались таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов проявились в достаточной степени в каждом из слоев, а деформации не выходили за рамки теории малых упругопластических деформаций. Толщины слоев $c = 0,09, h_1 = h_2 = 0,03$; интенсивности нагрузок $p = 0, q = -15$ МПа.

Рис. 1 иллюстрирует практическую сходимость процесса последовательных приближений. Номер кривой соответствует номеру итерации. Здесь второе приближение отличается от первого примерно на 10 % для прогиба и сдвига. За искомое решение принято 6-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %. Если продолжать итерационный процесс, то разность между последующим и предыдущим приближениями уменьшается и стремится к нулю.

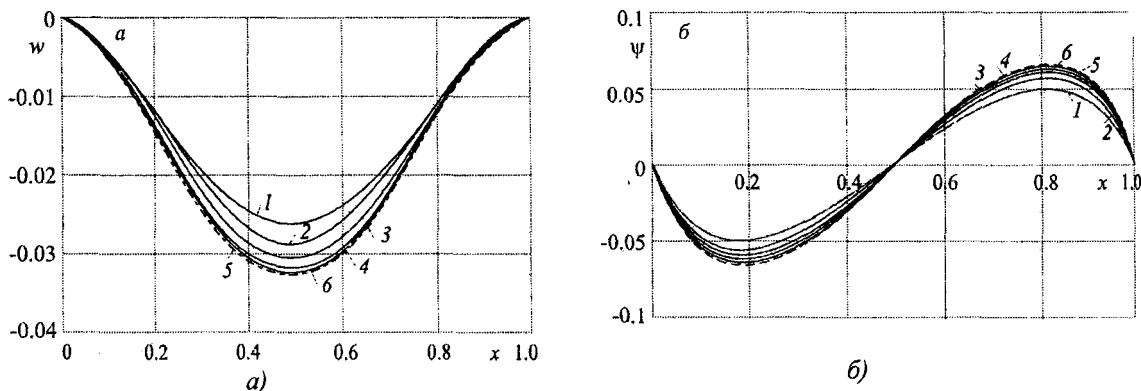


Рис. 1. Сходимость метода последовательных приближений
а – прогиба w , б – относительного сдвига ψ

Выводы

Приведенное решение позволяет с достаточной точностью описывать перемещения в трехслойных ортотропных пластинах с физически нелинейным наполнителем при цилиндрическом изгибе. Его можно использовать для соответствующих инженерных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. – 280 с.
2. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.
3. Плескачевский Ю. М., Старовойтов, Э. И., Яровая, А. В. Деформирование металлополимерных систем. – Минск: Беларуская навука, 2004. – 342 с.
4. Старовойтов Э. И., Протуро И. И. Напряженно-деформированное состояние прямоугольной трехслойной композитной пластины // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – № 1 (18). – С. 34–38.
5. Протуро И.И. Изгиб прямоугольной трехслойной ортотропной пластины // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2010. – Т. 15. – №1. – С. 9–13.
6. Амбарцумян, С. А. Некоторые вопросы теории анизотропных оболочек // Изв. АН АрмССР. – 1947. – № 9. – С. 48–54.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕКОНСТРУИРОВАННОГО СРЕДНЕГО УХА, ПОДВЕРГНУТОГО ТИМПАНОСТАПЕДОПЛАСТИКЕ И ПЕРФОРАЦИИ ПОДНОЖНОЙ ПЛАСТИНЫ СТРЕМЕНИ

Славашевич И.Л., Михасев Г.И., Петрова Л.Г.

Белорусский государственный университет, Минск

Biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanostapedoplasty and the stapes footplate perforation is proposed. The basic goal of this study is to clear up the influence of the tangential displacements in an eardrum at modes and fundamental frequencies of the reconstructed middle ear. The reconstructed tympanic membrane is modeled as an isotropic elastic annular plate.

Механические повреждения барабанной перепонки, патологические изменения ее механических свойств, вызванные воспалительными процессами в среднем ухе, могут привести к перфорации барабанной перепонки, повреждению слизистой оболочки, слухового нерва. Тимпаноластика – это операция, направленная на ликвидацию воспалительного (гнойного) процесса в ухе, закрытие перфорации барабанной перепонки и восстановление трансмиссионного механизма слуховых косточек. Ограничение подвижности цепи звукопроводящих косточек при отосклеротическом анкилозе может привести к частичной или полной фиксации стремени. При данной патологии в клинической практике часто прибегают к стапедопластике, которая предполагает фенестрацию овального окна, заключающуюся в высверливании отверстия в подножной пластинке стремени, через которое вводится ствол протеза в улитку внутреннего уха [1]. Наиболее сложным является случай тотальной реконструкции, предполагающий одновременно тимпаноластику и стапедопластику с фенестрацией подножной пластинки [2]. В данном случае основание введенного протеза типа TORP [3] упирается в восстановленную барабанную перепонку, а конец покоится в кохлеарной жидкости улитки.

Целью работы является построение динамической модели звукопроводящей системы реконструированного среднего уха с учетом тангенциальных деформаций ТМ и, соответственно мембранных усилий. Излишние напряжения в ТМ приводят к смещению спектра собственных частот восстановленной колебательной системы [4]. Степень искажения собственных частот может быть значительной и приводить к заметной потере порога восприимчивости звукового сигнала.

Восстановленную колебательную систему среднего уха будем моделировать как систему, состоящую из тонкой (толщиной h) круглой пластинки (с модулем упругости Юнга E и коэффициентом Пуассона ν) радиуса a , изготовленной из хрящевого имплантата, и сопряженного с ней твердого тела, моделирующего протез типа TORP (рис. 1). Данный протез состоит из круглой недеформированной пластинки, (основания) радиуса b и стержня, жестко сопряженного с ней под некоторым углом γ (рис. 2).

Постановка задачи. Разрешающие уравнения

В работах [5, 6] показано, что наиболее предпочтительной технологией установки протеза, с точки зрения минимизации начальных напряжений, является такая технология, когда основание протеза размещается на восстановленной тимпанальной мембране (ТМ) как можно ближе к центру.

Рассмотрим здесь случай, когда центры восстановленной ТМ и основания протеза совпадают. Будем считать, что основание протеза и хрящевой имплантат жестко склеены, при этом пластину рассматриваем как кольцевую с внутренним радиусом b и внешним радиусом a .

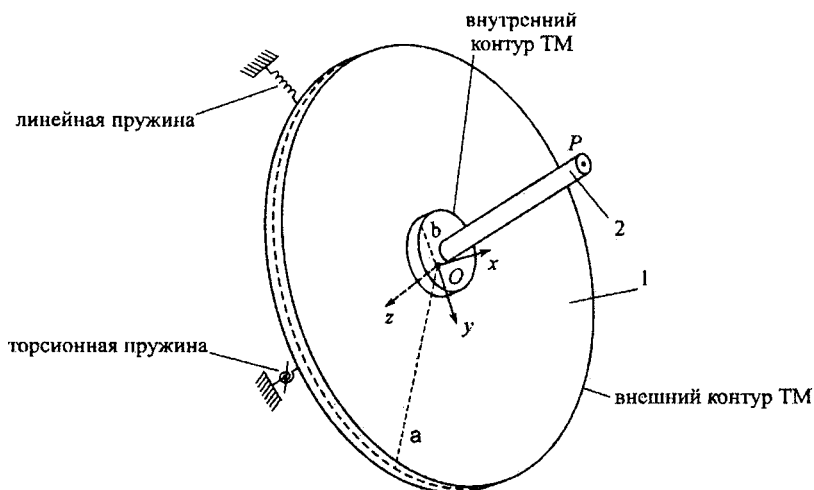


Рис. 1. Реконструированная ТМ радиуса a (1) и протез типа TORP (2)

Состояние равновесия реконструированной колебательной системы описывается уравнениями равновесия пластины и протеза. Введем глобальную декартову систему координат (СК) $Oxyz$, связанную с центром пластины (рис. 1).

Уравнение колебаний кольцевой изотропной пластинки, моделирующей реконструированную ТМ, имеет вид [7]:

$$D\Delta^2 W(r,t) + \rho h \frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

$$r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где $T_1 = K \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\nu}{r} U + \frac{\nu}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$, $T_2 = K \left(\nu \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$,

$S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} V + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)$ – мембранные усилия,

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ – жесткости пластины,

E – модуль упругости Юнга,

ν – коэффициент Пуассона,

h – толщина пластины,

w, u, v – нормальное, радиальное и касательное смещения точек пластины соответственно,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат r, φ .

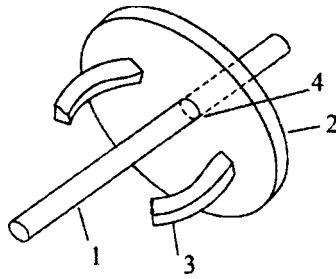


Рис. 2. Ствол протеза, введенный в отверстие подножной пластинки стремени:
 1 – восстановленная тимпанальная мембрана; 2 – подножная пластинка;
 3 – остатки ножек стремени; 4 – отверстие в подножной пластинке

Рассмотрим случай радиально-симметричных колебаний пластинки, тогда граничные условия на внутреннем контуре сопряжения пластины с основанием протеза при $r = b$ в случае жесткой заделки примут вид

$$W|_{r=b} = W_p, \quad \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0. \quad (3)$$

$$U|_{r=b} = -U_p \cos \varphi, \quad V|_{r=b} = U_p \sin \varphi. \quad (4)$$

где U_p, W_p – перемещение центра внутреннего контура вдоль осей Or, Oz соответственно.

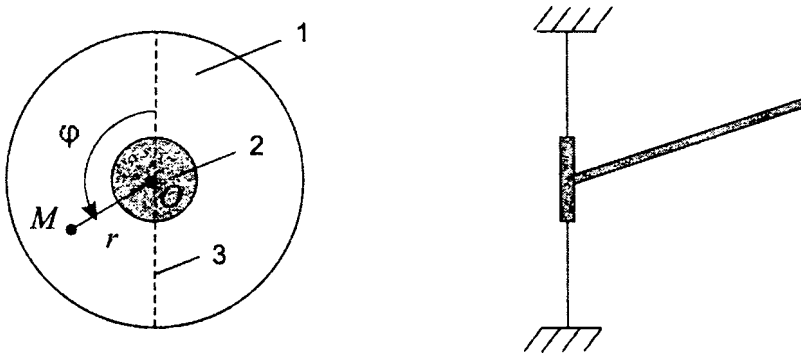


Рис. 3. Полярная система координат с центром в точке: 1 – ТМ;
 2 – основание протеза; 3 – линия, вдоль которой происходит тангенциальное смещение основания протеза

На внешнем контуре восстановленной ТМ рассмотрим условия упругой заделки [7]:

$$(k_l W + Q)|_{r=a} = 0, \quad \left(k_t \frac{\partial W}{\partial r} + M_1\right) \Big|_{r=a} = 0; \quad (5)$$

$$U|_{r=a} = 0, \quad V|_{r=a} = 0, \quad (6)$$

где k_l, k_t – коэффициенты линейной и торсионной жесткости внешнего края. Значения k_l, k_t для нижней и верхней частей мембранного кольца, найденные экспериментально для среднего уха в норме, приведены в работе [8]. Здесь [7]

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right), \quad (7)$$

$$M_1 = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) -$$

перерезывающая сила и изгибающий момент соответственно, действующие в срединной поверхности пластинки.

Будем считать, что стержень совершает лишь поступательные движения. В случае радиально-симметричных колебаний пластинки, уравнение движения присоединенного стержня имеет вид

$$Q_p - F_{st} \cos \gamma - R \sin \gamma = m \frac{\partial^2 W_p}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$T_p - F_{st} \sin \gamma + R \cos \gamma = m \frac{\partial^2 U_p}{\partial t^2},$$

где Q_p – равнодействующая перерезывающих сил, возникающих вдоль внутреннего контура $r = b$ со стороны ТМ, а

$$F_{st} = k\delta \quad (9)$$

– сила, являющаяся мерой взаимодействия внутреннего уха и основания стремени и возникающая в результате деформации мембраны круглого (рис. 4),

$\delta = w_p / \cos \gamma$ – смещение стержня, $k = 8\pi T_0 (S/S_0)^2$ – коэффициент «жесткости» системы «кохлеарная жидкость – мембрана круглого окна» [9], $S_0 = \pi R_0^2$ – площадь мембраны круглого окна, T_0 – сила натяжения мембраны круглого окна.

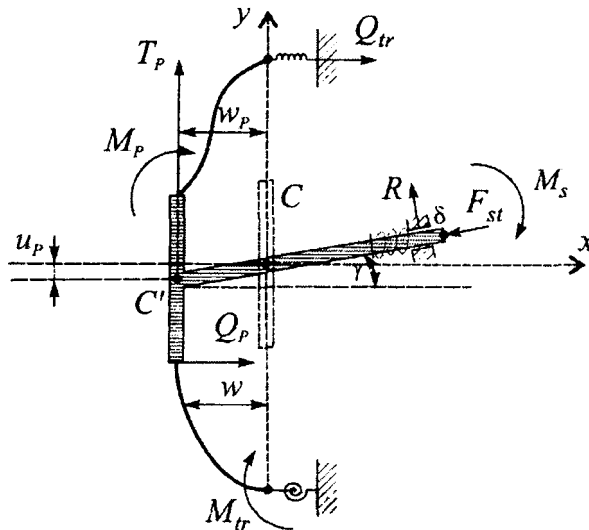


Рис. 4. Механическая модель колебательной системы ТМ-протез

Найдем равнодействующие сил, действующих на протез со стороны ТМ. Данные величины находятся путем интегрирования обобщенной перерезывающей силы и соответствующих моментов, приходящихся на единицу длины края, по всему внутреннему контуру ТМ:

$$Q_p = \int_0^{2\pi} [Q_1 b]_{r=b} d\varphi, \quad T_p = b \int_0^{2\pi} [T_1 \cos \varphi + S \sin \varphi]_{r=b} d\varphi. \quad (10)$$

Решение краевой задачи

Проведем разделение переменных по формулам:

$$W = w(r, t) \cos \omega t, \quad W_p = w_p(r, t) \cos \omega t. \quad (11)$$

$$U = u(r, \varphi) \cos \omega t, \quad V = v(r, \varphi) \cos \omega t, \quad (12)$$

$$U_p = u_p(r, \varphi) \cos \omega t,$$

где ω – искомая частота колебаний.

При подставке (11) в (1), (3) и (5) уравнение (1) сводится к дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\right)^2 w - \lambda^4 w = 0 \quad (13)$$

относительно нормального прогиба пластины w с граничными условиями

$$\begin{aligned} \left(k_1 w(r) + \frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial w(r)}{\partial r} - a \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} - a^2 \frac{\partial^3 w(r)}{\partial r^3}\right)\right) \Big|_{r=a} &= 0, \\ \left(k_1 \frac{\partial w(r)}{\partial r} + \frac{D}{a} \left(a \frac{\partial^2 w(r)}{\partial r^2} + v \frac{\partial w(r)}{\partial r}\right)\right) \Big|_{r=a} &= 0, \\ w(b) = w_p, \quad \frac{\partial w(r)}{\partial r} \Big|_{r=b} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\lambda^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D}$.

Перейдем к рассмотрению системы уравнений (2). При исследовании низкочастотных изгибных колебаний пластинки, силами инерции тангенциальных перемещений протеза можно пренебречь. Тогда, используя выражения мембранных усилий через тангенциальные смещения u и v , и учитывая (11), получим систему уравнений

$$\begin{cases} r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} u + \frac{1-v}{2r} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} - \frac{3-v}{2r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{1-v}{2} r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1-v}{2r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{3-v}{2r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Полученная система с учетом уравнения (1) описывает радиально-симметричные изгибно-плоскостные колебания пластины. Граничные условия полученной системы дифференциальных уравнений имеет вид (4),(6) с заменой U, V, U_p на u, v и u_p соответственно:

$$\begin{aligned} u|_{r=b} &= -u_p \cos \varphi, \quad v|_{r=b} = v_p \sin \varphi. \\ u|_{r=a} &= 0, \quad v|_{r=a} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, имеем краевую задачу (13), (15) с граничными условиями (14), (16), и системой уравнений (8).

Задача (13), (14) имеет решение в виде

$$w = \frac{w_p}{|M|} [\bar{M}_{11} J_0(\lambda r) + \bar{M}_{12} Y_0(\lambda r) + \bar{M}_{13} I_0(\lambda r) + \bar{M}_{14} K_0(\lambda r)], \quad (17)$$

где M – матрица размерности 4×4 с элементами:

$$\begin{aligned} M_{11} &= J_0(\lambda b), \quad M_{12} = Y_0(\lambda b), \quad M_{13} = I_0(\lambda b), \quad M_{14} = K_0(\lambda b), \\ M_{21} &= J'_0(\lambda b), \quad M_{22} = Y'_0(\lambda b), \quad M_{23} = I'_0(\lambda b), \quad M_{24} = K'_0(\lambda b), \\ M_{31} &= k_1 J_0(\lambda a) + \frac{D}{a^2} J'_0(\lambda a) - \frac{D}{a} J''_0(\lambda a) - D J''''_0(\lambda a), \\ M_{32} &= k_1 Y_0(\lambda a) + \frac{D}{a^2} Y'_0(\lambda a) - \frac{D}{a} Y''_0(\lambda a) - D Y''''_0(\lambda a), \\ M_{33} &= k_1 I_0(\lambda a) + \frac{D}{a^2} I'_0(\lambda a) - \frac{D}{a} I''_0(\lambda a) - D I''''_0(\lambda a), \end{aligned}$$

$$M_{34} = k_l K_0(\lambda a) + \frac{D}{a^2} K_0'(\lambda a) - \frac{D}{a} K_0''(\lambda a) - DK_0'''(\lambda a)$$

$$M_{41} = k_l J_0'(\lambda a) + DJ_0''(\lambda a) + \frac{D\nu}{a} J_0'(\lambda a),$$

$$M_{42} = k_l Y_0'(\lambda a) + DY_0''(\lambda a) + \frac{D\nu}{a} Y_0'(\lambda a),$$

$$M_{43} = k_l I_0'(\lambda a) + DI_0''(\lambda a) + \frac{D\nu}{a} I_0'(\lambda a),$$

$$M_{44} = k_l K_0'(\lambda a) + DK_0''(\lambda a) + \frac{D\nu}{a} K_0'(\lambda a),$$

J_0, Y_0 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка, а \overline{M}_{1j} ($j=1, \dots, 4$) – соответствующие миноры матрицы \mathbf{M} .

С учетом граничных условий для тангенциальных перемещений (16), решение уравнений (15) будем искать в виде:

$$u = u_0(r) + u_0^c(r) \cos \varphi + u_0^s(r) \sin \varphi, \quad (18)$$

$$v = v_0(r) + v_0^c(r) \cos \varphi + v_0^s(r) \sin \varphi.$$

Частные решения уравнений (15) имеют вид:

$$u_0(r) = C_{0,1}r + C_{0,2} \frac{1}{r}, \quad v_0(r) = C_{0,3}r + C_{0,4} \frac{1}{r},$$

$$u_0^c(r) = (1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1-\nu^2) - C_{1,4},$$

$$v_0^c(r) = -(5+\nu)C_{1,5}r^2 - C_{1,6} \frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r + 2C_{1,7}(1+\nu) - C_{1,8}, \quad (19)$$

$$u_0^s(r) = (1-3\nu)C_{1,5}r^2 + C_{1,6} \frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,7}(1-\nu^2) - C_{1,8},$$

$$v_0^s(r) = (5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4}.$$

Подставляя соотношения (19) в граничные условия (16), получим значения неизвестных постоянных C_{ij} , которые в силу громоздкости не приводятся. Полученные решения описывают деформацию реконструированной тимпанальной мембраны.

Подстановка (17), (18) в систему (8) позволяет получить трансцендентное уравнение относительно искомой частоты ω свободных колебаний системы реконструированного среднего уха:

$$\begin{aligned} & 2\pi b D \frac{1}{|M|} \left[\frac{\partial^3}{\partial r^3} \left(\overline{M}_{11} J_0(\lambda r) + \overline{M}_{12} Y_0(\lambda r) + \overline{M}_{13} I_0(\lambda r) + \overline{M}_{14} K_0(\lambda r) \right) \right]_{r=b} + \\ & + \frac{1}{b} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\overline{M}_{11} J_0(\lambda r) + \overline{M}_{12} Y_0(\lambda r) + \overline{M}_{13} I_0(\lambda r) + \overline{M}_{14} K_0(\lambda r) \right) \Big|_{r=b} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\overline{M}_{11} J_0(\lambda r) + \right. \\ & \left. + \overline{M}_{12} Y_0(\lambda r) + \overline{M}_{13} I_0(\lambda r) + \overline{M}_{14} K_0(\lambda r) \right) \Big|_{r=b} \Big] + k - m\omega^2 + t\gamma \left[kt\gamma - mt\gamma\omega^2 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{bK\pi(3\nu-1)}{2bw_p} \left((1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1-\nu^2) - C_{1,4} \right) \Big|_{r=b} - \\
& -\frac{bK\pi(3\nu-1)}{2bw_p} \left((5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4} \right) \Big|_{r=b} - \\
& -bK\pi \frac{1}{w_p} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1+\nu) - C_{1,4} \right] \right) \Big|_{r=b} + \\
& + \frac{bK\pi(\nu-1)}{2w_p} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left[(5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2} \frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4} \right] \right) \Big|_{r=b} \Big] = 0
\end{aligned}$$

Полученное уравнение позволяет определить собственные частоты системы, соответствующие радиально-симметричным изгибно-плоскостным колебаниям, при различных входящих в задачу геометрических и физических параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hüttenbrink, К.-В. Mechanical aspects of middle ear reconstruction / К.-В. Hüttenbrink // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, К.-В., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. Вульштейн, Х. Слухулучшающие операции/ Х. Вульштейн. – М: Медицина, 1972.
3. <http://www.kurz.med.com/>
4. Любина, Е.А. Влияние сил натяжения восстановленной барабанной перепонки, вызванных введением протеза, на собственные частоты колебательной системы реконструированного среднего уха / Е.А. Любина, Г.И. Михасев // Механика-2007: Сб. науч. тр. III Белорусского конгресса по теорет. и прикл. механике (под общ. ред. акад. М.С. Высоцкого), Минск, 16-18 окт., 2007г. – Минск: ОИМ НАН Беларуси, 2007. – С. 339–405.
5. Ермоченко, С.А. Расчет напряженно-деформированного состояния среднего уха при его тотальной реконструкции с учетом влияния остатков тимпанальной мембраны / С.А. Ермоченко, Г.И. Михасев, Л.Г. Петрова // Российский журнал биомеханики. – 2008. – Т.12, №3 (41). – С. 24–36.
6. Mikhasev, G. On the strain–stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus–incus prosthesis/ G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Mathematical Medicine and Biology, Nov 2009; doi:10.1093 /imammb/dqp020. - P. 1 - 24.
7. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы/ Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 290 с.
8. Wada, H. Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear / H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, К.-В., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 76–81.
9. Чигарев, А.В. Биомеханика: Учебник/ А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, А.В. Борисов. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.

ВИБРОЗАЩИТА ВЫСОКОТОЧНОГО МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОГО ОБОРУДОВАНИЯ ОТ ВИБРАЦИЙ ВНЕШНИХ ИСТОЧНИКОВ

Кудин В.В., Астахов Э.И., Кудин М.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Kinematic external disturbance vibration-registered equipment and is represented as a Fourier series. The schemes vibroprotection machines and their analysis on the efficiency of vibration protection.

Техническое перевооружение современных машиностроительных предприятий предъявляет повышенные требования к допустимым уровням вибрации несущих конструкций, фундаментов рабочих площадок, предназначенных под монтаж высокоточного машиностроительного оборудования.

Вибрационная активность рабочих площадок отрицательно влияет на точность, надежность и долговечность монтируемого оборудования. Кроме того, снижается надежность работы систем автоматического управления, а также ухудшаются условия работы обслуживающего персонала.

Таким образом, неудовлетворительные показатели виброактивности машиностроительного оборудования требует виброзащитных мероприятий, являющихся весьма актуальными задачами на современном этапе развития машиностроения.

Известно, что на станину машины (станка), наряду с силовым воздействием от внутренних источников неуравновешенных роторов и отдельных механизмов, действуют кинематические возмущения со стороны опорных поверхностей. При этом как силовые, так и кинематические возмущения являются колебательными процессами.

Силовое воздействие, вызванное неуравновешенностью звеньев, обычно кратно основной частоте вращения ротора машины, а амплитуда пропорциональна квадрату угловой скорости.

Кинематическое возмущение, воспринимаемое корпусом машины со стороны фундамента не является периодическим, закон его изменения во времени носит нерегулярный, хаотический характер.

Основными причинами хаотичности является большое число независимых источников вибрации и нерегулярность физических процессов, вызывающих появление вибрационной активности источников, расположенных на значительном расстоянии от объекта виброзащиты.

Вибрация от источника передается через грунт, обладающий упруго-диссипативными свойствами. Поэтому кинематическое возмущение на входе объекта виброзащиты представляет случайный характер. Невозможно точно учесть все факторы, влияющие на характер вибрационного воздействия. Сложность представления вибрационных кинематических воздействий в виде явных функций от времени привело к тому, что характеристики вибрационного процесса $x(t)$ заменяются функционалами $\Phi(u_1, u_2 \dots u_i)$, зависящими от некоторых параметров (u_i) [1].

Используя преобразование Фурье на бесконечном интервале $x(t)$, вибрационное воздействие представляем комплексной функцией от ω , т. е.

$$X(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = U_1(\omega) - iV_1(\omega), \quad (1)$$

$$\text{где } U_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt, \quad V_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt,$$

ω – круговая частота колебательного процесса.

Кинематическое возмущение включает в себя виброперемещение, виброскорость и виброускорение соответствующих точек опорной поверхности. Кинематическое возмущение – это величина, выражающая суммарное воздействие всех работающих машин и оборудования, расположенных как в непосредственной близости от объекта виброзащиты, так и на достаточно значительном удалении с учетом упругих и диссипативных характеристик окружающей среды, являющейся проводником колебательной энергии.

Вибрационное возмущение рабочей площадки предлагается получить инструментальным методом, т.е. с помощью виброизмерительной аппаратуры, например, виброметр «Октава 101В» для общей и локальной вибрации. Виброметр оснащен трехкомпонентным датчиком виброускорения, обеспечивающим измерение и хранение в памяти значений виброускорения как общей, так и локальной вибраций с целью диагностики состояния промышленного оборудования. Виброметр может быть подключен к персональному компьютеру ПК. Информация, полученная экспериментальным измерением, переносится на ПК в виде $F(t)$ специального файла, в котором хранится информация о значениях виброускорения по трем взаимноперпендикулярным направлениям на достаточно большом интервале времени.

Значения файла $F(t)$, характеризующие виброускорение точек опорной поверхности, представляем в виде ряда Фурье с периодом T

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t, \quad (2)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – круговая частота на основной первой гармонике кинематического возмущения.

Тогда амплитуда A_k и начальная фаза φ_k равны:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k},$$

где $a_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos k\omega t dt$, $b_k = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin k\omega t dt$ – коэффициенты ряда Фурье на k -й гармонике.

Решение задачи спектрального анализа функции $F(t)$, заданной специальным файлом на ПК, выполняется в численном процессоре Mathcad при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье [5].

Этот алгоритм реализован встроенной функцией Mathcad, как например, $fft(y)$ – вектор прямого преобразования Фурье, либо $FFT(y)$ – вектор прямого преобразования в другой нормировке, где y – вектор действительных данных, взятых через определенные промежутки значений аргумента.

Вектор y или аргумент прямого «Фурье-преобразования» должен иметь ровно 2^n элементов (где n – целое число). В таком случае, результатом является вектор с $1 - 2^{n-1}$ элементами. В случае, если число данных вектора y не совпадает со степенью 2, то необходимо дополнить недостающие элементы нулями.

Таким образом, спектральный анализ функции $F(t)$ позволяет получить значения частоты, амплитуды и начальной фазы, характеризующих кинематическое возмущение опорных точек рабочей площадки и на их базе построить амплитудный и фазовый спектры, которые и используются в расчете виброзащитной системы.

Виброзащита машины осуществляется по следующим схемам:

а) опорная схема (рис. 1), при которой виброизолирующее устройство 2 располагают непосредственно под корпусом (станиной) изолируемой машины (объекта виброзащиты) 1.

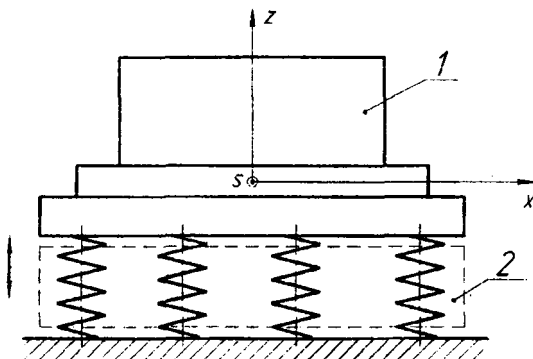


Рис. 1. Опорная схема виброизоляции

б) опорная схема с постаментом (фундаментным блоком) (рис. 2). Такая схема применяется в случае, когда корпус машины имеет недостаточную жесткость и центр масс находится достаточно высоко от опорной поверхности, либо когда объект виброзащиты состоит из нескольких отдельных машин, расположенных на общей опорной поверхности;

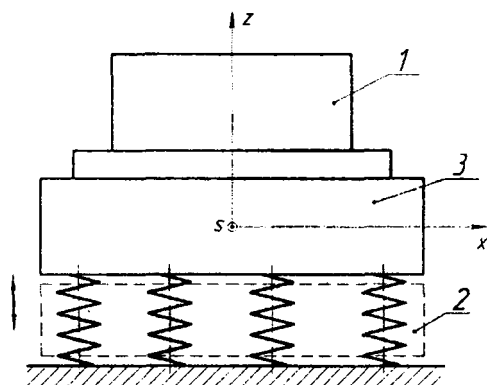


Рис. 2. Опорная схема с постаментом

в) подвесная схема с фундаментным блоком (рис. 3). В этой схеме виброзащиты предусматривается вариант, когда виброизолирующее устройство 2 закрепляется выше подошвы фундаментного блока 3, а сам объект виброзащиты 1 вместе с постаментом 3 подвешен на виброизоляторах 2, работающих как на растяжение, так и на сжатие.

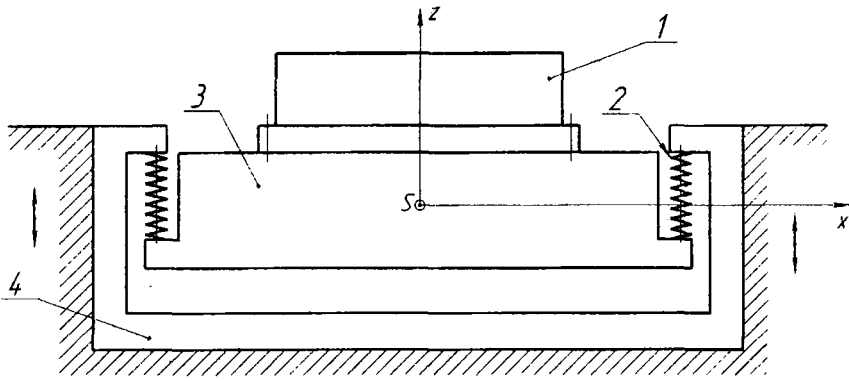


Рис. 3. Подвесная схема виброизоляции

г) подвесная тросо-рычажная схема виброзащиты (рис. 4). Применяется для виброзащиты объекта с преобладающими горизонтальными возмущениями источника.

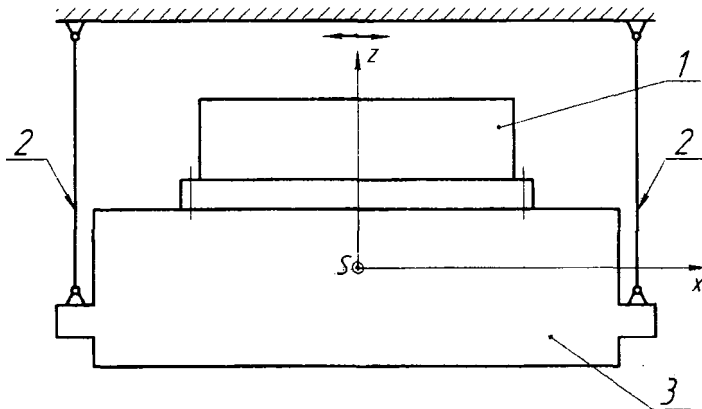


Рис. 4. Тросорычажная схема виброзащиты

С помощью рычагов (тросов) 2 объект 1 виброзащиты вместе с постаментом 3 подвешивается к несущим конструкциям здания. Эту схему рекомендуют применять и в случае, когда горизонтальные колебания имеют низкочастотный спектр, при которых виброзащитные устройства на пружинах или резиновых виброизоляторах практически неэффективны.

Наличие в виброзащитных схемах постамента (фундаментного блока) связано с увеличением общей массы объекта виброзащиты, что обусловлено снижением амплитуды вынужденных колебаний объекта с одной стороны, и с другой стороны снижается частота собственных колебаний, т.к. на высоких частотах виброизолирующие устройства должны обладать высокой податливостью. Однако известно, что при высокой податливости упругих элементов появляются трудно устраняемые перекосы объекта от случайных статических нагрузок. Кроме того, выбор формы постамента влияет на относительное положение центра масс объекта и линии действия возмущающей силы. Оптимальное их расположение минимизирует амплитуды вращательных колебаний объекта.

При виброзащите объекта по схемам а, б и в, приведенным на рис. 1–3, необходимо, чтобы в направлении оси Z отношение частот

$$\alpha_z = \frac{\omega}{\omega_{zo}} \geq 4, \quad (3)$$

а по двум другим осям были бы больше 2,5. Известно, что изготовление виброизоляторов, обеспечивающих частоту собственных колебаний объекта меньше 2 Гц, сопряжено со значительными техническими трудностями, то при частотах меньше 5 Гц допускается, как исключение, значение отношения $\alpha_z \geq 3$ [3]. При этом требуемые значения частот собственных колебаний ω_{zo} , ω_{yo} , ω_{xo} вычисляются из решения частотного уравнения [1].

В случае виброзащиты по схеме «г» (см. рис. 4) необходимо, чтобы отношения частот по осям x и y было больше 4. По оси z отношение α_z не обязательно ограничивать, т.к. отсутствуют значительные вертикальные кинематические возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вибрации в технике: справочник в 6 т. / под ред. К.В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 6. Защита от вибраций и ударов / под ред. К.В. Фролова, 1981. – 456 с.
2. Кудипов, В.А. Динамика станков. – М.: Машиностроение, 1967. – 359 с.
3. Руководство по проектированию виброизоляции машин и оборудования / ЦИНИСК им. В.А. Кучеренко. – М.: Стройиздат, 1972. – 160 с.
4. Средства защиты в машиностроении. Расчет и проектирование: Справочник / С.В. Белов [и др.]; под ред. С.В. Белова. – М.: Машиностроение, 1989. – 368 с.
5. Кирьянов, Д.В. Mathcad 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 608 с.

ВЫБОР ЗНАЧЕНИЙ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛЗУНА КУЗНЕЧНО-ПРЕССОВОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Гурвич Ю.А., Бойко Б.С., Макаревич А.П.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In this article the decision of problem about a choice by many criteria of the constructive parameters of the punch of forge equipment is considered. The software product for the decision of this problem is described and the calculation example is given.

В литературе (в том числе в [1–13]) отсутствуют методики выбора конструктивных параметров пар скольжения: «ползун–направляющие», «поршень–цилиндр», «втулка–вал» и т.д., по различным критериям. Это заставляет конструкторов параметры пар скольжения на практике определять путём многочисленных и трудоёмких экспериментальных исследований.

В данной работе сделана попытка определить оптимальные значения параметров ползуна на стадии проектирования кузнечнопрессового оборудования, движущегося с малым значением ускорения (статика). Для этого разработана методика и программа в интегрированной среде Borland Delphi 7, в которой использован простейший метод оптимизации – метод сеток (или метод перебора значений всех параметров [14–16]). Поэтому задача определения оптимальных параметров пары скольжения «ползун–направляющие», которые обеспечивают гарантированное скольжение одного тела по другому телу, является актуальной.

Постановка задачи: к ползуну пресса в форме параллелепипеда весом P и шириной b через невесомую консоль приложена сила Q , которую можно перемещать по консоли. Коэффициент трения между ползуном и направляющими f (все остальные размеры показаны на рис.1.). Произвести расчет оптимальных параметров ползуна по критериям (причем, первые два критерия взяты из [1, 2]):

$$\begin{aligned} W_1 = W_L &= \left(1 - \frac{L \cdot 2f \cdot \left(1 + \frac{b}{d}\right)}{h \cdot \left(1 + \frac{P}{Q}\right)} \right) \cdot 100\% \rightarrow \max, \\ W_2 = W_C &= \left(1 - \frac{C \cdot 2f \cdot \left(1 + \frac{d}{b}\right)}{h \cdot \left(1 + \frac{P}{Q}\right)} \right) \cdot 100\% \rightarrow \max, \\ W_3 &= (W_L + W_C) / 2 \rightarrow \max, \\ W_4 &= \sqrt{W_L \cdot W_C} \rightarrow \max. \end{aligned} \tag{1}$$

Программная реализация.

Рассмотрим критерии:

$$W_j = W_j(b, d, h, f, P/Q), (j = \overline{1,4}). \quad (2)$$

Задаем предельные значения каждого из параметров в (2):

$$b_{\min} < b < b_{\max},$$

$$d_{\min} < d < d_{\max},$$

$$h_{\min} < h < h_{\max},$$

$$f_{\min} < f < f_{\max},$$

$$P/Q_{\min} < P/Q < P/Q_{\max}$$

и делим эти интервалы на n равных частей.

При запуске программы появляется окно ввода исходных данных (рис. 2), которое содержит: предельные значения параметров; шаг λ ; L и C - координаты точки приложения силы Q по осям X и Y .

Результаты расчетов приведены в таблице на рис. 3, которая содержит 10^5 вычислений в соответствии с формулой:

$$N = n^m,$$

где N - число расчетных точек (узлов); n - число разбиений каждого из варьируемых параметров; m - количество оптимизируемых параметров системы (при условии, что число разбиений каждого из параметров одинаково).

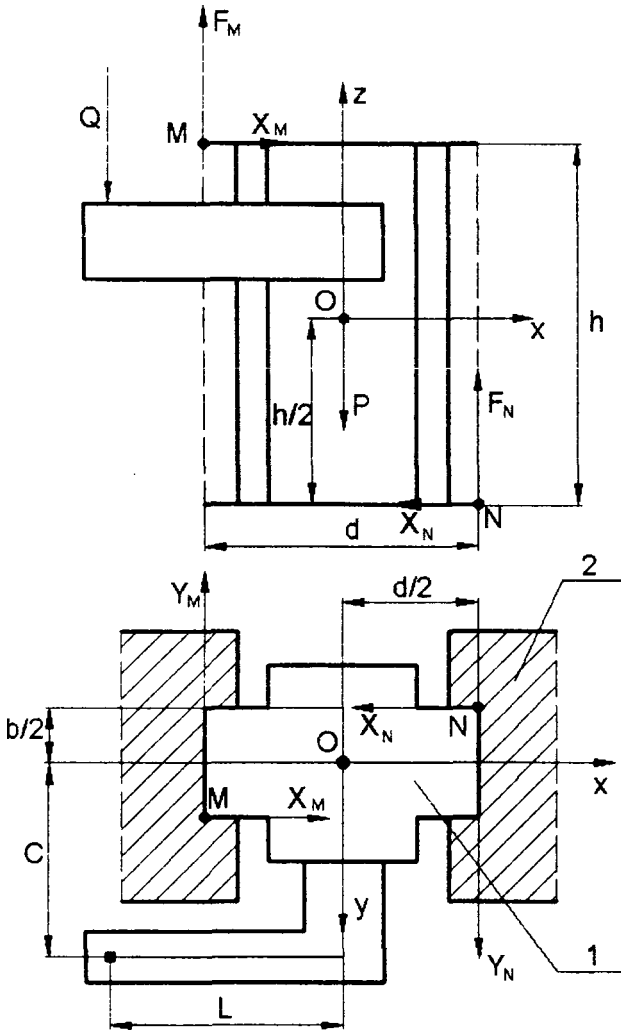


Рис. 1. Ползун кузнечнопрессового оборудования: 1 - ползун; 2 - направляющие

Исходные данные	Чертеж	Таблица расчётов		
Конструктивные параметры ползуна:				
Параметр	Описание параметра	Предельное минимальное значение параметра (min)	Предельное максимальное значение параметра (max)	Шаг, λ
b , м.	Линейный размер ползуна по оси Y , ширина.	0,2	0,8	0,067
d , м.	Линейный размер ползуна по оси X , длина.	0,3	0,9	0,067
h , м.	Линейный размер ползуна по оси Z , высота.	0,15	1,0	0,094
f .	Коэффициент трения в паре трения "ползун-направляющие".	0,1	0,7	0,067
P/Q .	Отношение веса ползуна к силе, прикладываемой к ползуну.	0,01	0,6	0,054
<input type="button" value="Рассчитать шаг разбиения"/>				
Параметры приложения силы Q к ползуну:				
Параметр	Описание параметра	Значение величины параметра		
L , м.	Координата точки приложения силы Q по оси Y .	1,26		
C , м.	Координата точки приложения силы Q по оси X .	1,15		

Рис. 2. Окно ввода исходных данных и расчёта шага разбиения

Многокритериальный выбор параметров ползуна прессы в направляющих

Исходные данные | Чертеж | Таблица расчётов

Расчет производится по критериям $W(L)$ и $W(C)$, где $W(L)$ - это величина запаса гарантированного скольжения по оси X, $W(C)$ - это величина запаса гарантированного скольжения по оси Y.

Р П/П.	b, м.	d, м.	h, м.	f.	P/Q.	C, м.	L, м.	W(L), %	W(C), %	(W(L)+W(C))/2	(W(L)*W(C))^(1/2), %
12598	0,267	0,433	0,622	0,700	0,391	1,250	1,150	-200,470	-430,710	-----	-----
12599	0,267	0,433	0,622	0,700	0,446	1,250	1,150	-189,150	-410,720	-----	-----
12600	0,267	0,433	0,622	0,700	0,500	1,250	1,150	-178,650	-392,190	-----	-----
12601	0,267	0,433	0,717	0,100	0,010	1,250	1,150	48,671	9,337	29,004	21,317
12602	0,267	0,433	0,717	0,100	0,064	1,250	1,150	51,296	13,974	32,635	26,773
12603	0,267	0,433	0,717	0,100	0,119	1,250	1,150	53,666	18,160	35,913	31,218
12604	0,267	0,433	0,717	0,100	0,173	1,250	1,150	55,816	21,958	38,887	35,008
12605	0,267	0,433	0,717	0,100	0,228	1,250	1,150	57,775	25,418	41,597	38,322
12606	0,267	0,433	0,717	0,100	0,282	1,250	1,150	59,568	28,585	44,077	41,265
12607	0,267	0,433	0,717	0,100	0,337	1,250	1,150	61,215	31,494	46,354	43,908
12608	0,267	0,433	0,717	0,100	0,391	1,250	1,150	62,733	34,175	48,454	46,302
12609	0,267	0,433	0,717	0,100	0,446	1,250	1,150	64,137	36,654	50,395	48,486
12610	0,267	0,433	0,717	0,100	0,500	1,250	1,150	65,438	38,953	52,196	50,488
12611	0,267	0,433	0,717	0,167	0,010	1,250	1,150	14,451	-51,105	-----	-----
12612	0,267	0,433	0,717	0,167	0,064	1,250	1,150	18,827	-43,376	-----	-----

Упорядочение по: № ПП

Рис. 3. Окно таблицы вычислений

Отрицательные значения критериев W_L и W_C соответствуют заклиниванию ползуна в направляющих, а нулевые значения показывают, что точка приложения силы Q совпадает с границей гарантированного скольжения. Для отрицательных и нулевых значений критериев W_L и W_C расчёт по критериям $(W_L + W_C)/2$ и $(W_L \cdot W_C)^{1/2}$ не производится, что показано штриховой линией на рис.3.

Упорядочение значений критериев (1) или (2) производится при нажатии кнопки «Упорядочение по» (см. рис. 3) и осуществляется по убыванию значений этих критериев, начиная с их максимальных значений (рис. 4-7).

Р П/П.	b, м.	d, м.	h, м.	f.	P/Q.	C, м.	L, м.	W(L), %	W(C), %	(W(L)+W(C))/2	(W(L)*W(C))^(1/2), %
9910	0,200	0,900	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	81,259	8,333	44,796	26,022
8910	0,200	0,833	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	80,987	13,889	47,438	33,538
7910	0,200	0,767	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	80,667	19,444	50,056	39,605
9909	0,200	0,900	1,000	0,100	0,446	1,250	1,150	80,553	4,881	42,717	19,829
6910	0,200	0,700	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	80,286	25,000	52,643	44,801
8909	0,200	0,833	1,000	0,100	0,446	1,250	1,150	80,271	10,646	45,458	29,232
19910	0,267	0,900	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	80,123	27,083	53,603	46,583
7909	0,200	0,767	1,000	0,100	0,446	1,250	1,150	79,939	16,410	48,174	36,219
5910	0,200	0,633	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	79,825	30,556	55,190	49,387
9908	0,200	0,900	1,000	0,100	0,391	1,250	1,150	79,792	1,158	40,475	9,613

Рис. 4. Фрагмент окна таблицы вычислений, упорядоченных по критерию W_L

Р П/П.	b, м.	d, м.	h, м.	z.	P/Q.	C, м.	L, м.	W(L), %	W(C), %	(W(L)+W(C))/2	(W(L)*W(C))^(1/2), %
90910	0,800	0,300	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	43,778	77,083	60,431	58,091
80910	0,733	0,300	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	47,185	76,515	61,850	60,086
90909	0,800	0,300	1,000	0,100	0,446	1,250	1,150	41,660	76,220	58,940	56,350
70910	0,667	0,300	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	50,593	75,833	63,213	61,940
91910	0,800	0,367	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	51,212	75,694	63,453	62,261
80909	0,733	0,300	1,000	0,100	0,446	1,250	1,150	45,196	75,631	60,413	58,465
90908	0,800	0,300	1,000	0,100	0,391	1,250	1,150	39,377	75,290	57,333	54,449
60910	0,600	0,300	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	54,000	75,000	64,500	63,640
81910	0,733	0,367	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	54,000	75,000	64,500	63,640
70909	0,667	0,300	1,000	0,100	0,446	1,250	1,150	46,732	74,923	61,827	60,425

Рис. 5. Фрагмент окна таблицы вычислений, упорядоченных по критерию W_C

Р П/П.	b, м.	d, м.	h, м.	z.	P/Q.	C, м.	L, м.	W(L), %	W(C), %	(W(L)+W(C))/2	(W(L)*W(C))^(1/2), %
97910	0,800	0,767	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,667	67,361	68,014	68,011
86910	0,733	0,700	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,603	67,424	68,014	68,011
75910	0,667	0,633	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,526	67,500	68,013	68,011
64910	0,600	0,567	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,431	67,593	68,012	68,011
53910	0,533	0,500	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,311	67,708	68,010	68,009
42910	0,467	0,433	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,154	67,857	68,005	68,005
31910	0,400	0,367	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	67,939	68,056	67,997	67,997
20910	0,333	0,300	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	67,630	68,333	67,981	67,981
98910	0,800	0,833	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	69,947	65,972	67,959	67,930
87910	0,733	0,767	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	70,000	65,909	67,955	67,924

Рис. 6. Фрагмент окна таблицы вычислений, упорядоченных по критерию $(W_L+W_C)/2$

Р П/П.	b, м.	d, м.	h, м.	z.	P/Q.	C, м.	L, м.	W(L), %	W(C), %	(W(L)+W(C))/2	(W(L)*W(C))^(1/2), %
75910	0,667	0,633	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,526	67,500	68,013	68,011
86910	0,733	0,700	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,603	67,424	68,014	68,011
97910	0,800	0,767	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,667	67,361	68,014	68,011
64910	0,600	0,567	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,431	67,593	68,012	68,011
53910	0,533	0,500	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,311	67,708	68,010	68,009
42910	0,467	0,433	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	68,154	67,857	68,005	68,005
31910	0,400	0,367	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	67,939	68,056	67,997	67,997
20910	0,333	0,300	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	67,630	68,333	67,981	67,981
96910	0,800	0,700	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	67,143	68,750	67,946	67,942
98910	0,800	0,833	1,000	0,100	0,500	1,250	1,150	69,947	65,972	67,959	67,930

Рис. 7. Фрагмент окна таблицы вычислений, упорядоченных по критерию $(W_L \cdot W_C)^{1/2}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурвич Ю.А., Бойко Б.С., Макаревич А.П. Расчет величины зоны и запаса устойчивого скольжения ползуна пресса в направляющих, Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2010. – Вып. 25. – С. 287–294.
2. Гурвич Ю.А., Бойко Б.С., Макаревич А.П. Методика определения зоны и запаса устойчивого скольжения ползуна кузнечно-прессового оборудования // Научные труды международной научно-практической конференции ученых МАДИ(ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ, 17–18 июня 2010 г. – Т. 6: Естественные

- и технические науки. : МАДИ(ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ; редкол.: Е.Г. Лисовская [и др.]. – М.: – Луганск, 2010. – С. 94–99.
3. Крагельский И.В. Трение и износ. – М.: Машиностроение, 1968. – 415 с.
 4. Крагельский И.В., Щедров В.С. Развитие науки о трении. – М., Изд-во АН СССР, 1956. – 280 с.
 5. Яворский П.М., Селезнёв Ю.А., Справочное руководство по физике. – М.: Наука, 1989. – 512 с.
 6. Решетов Д.Н. Детали машин. – М., 1961. – 489 с.
 7. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М., Наука. – 639 с.
 8. Яблонский А.А., Никифорова В.М., Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2004. – Ч. 1. – 764 с.
 9. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1984. – Ч. 2. – 422 с.
 10. Дальский А.М., Косилова А.Г., Мещеряков Р.К. Справочник технолога-машиностроителя. – М.: Машиностроение, 2003. – Т. 1, 2. – 553 с.
 11. Анурьев, И.В. Справочник конструктора-машиностроителя. – М.: Машиностроение, 1979. – 730 с.
 12. Ачеркан, Н.С. Справочник машиностроителя: 6 т. – М.: Машиностроение, 1961. – Т. 1. – 592 с.
 13. Панов А.А. Справочник металлиста. – М.: Машиностроение, 1985, – 512 с.
 14. Лебедева Г.И., Микулик Н.А. Прикладная математика. – Минск: Асар, 2009.
 15. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. – Минск: Дизайн ПРО, 2004. – 639 с.
 16. Аоки М. Введение в методы оптимизации. – М.: НАУКА, 1977. – 343 с.

ПОСТРОЕНИЕ ЗАМКНУТОЙ ФОРМЫ РЕШЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Акимов В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In article the operational approach to a problem of construction of the closed form of the decision of one private system of the algebraic equations is considered.

Обратимся к бесконечной системе вида

$$a_n - \frac{2n}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\operatorname{th} \frac{k\pi}{2}}{n^2 - k^2} [1 - (1)^{k+n}] = b_n, \quad (1)$$

Заменим (1) функциональным и соотношением от аргумента с непрерывным спектром значений. Запишем разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \cos kx. \quad (2)$$

После сравнения коэффициентов Фурье левой и правой частей равенства (2) приходим к уравнению (1), устанавливая тем самым равноценность (1) и (2). Применим формализм операторного метода [1]. Берем операторы

$$D_1(d_x) = \frac{d_x \operatorname{sh} \pi d_x}{n^2 + d_x^2} - \text{ для четных членов, содержащих } \cos kx,$$

$$D_1(d_x) = \frac{\operatorname{sh} \pi d_x}{n^2 + d_x^2} - \text{ для нечетных членов, содержащих } \sin kx,$$

где $d_x = \frac{d}{dx}$.

Так как здесь $a_0 = 0$, то оператор $D_0 = \frac{\operatorname{sh} \pi d_x}{d_x}$ применять не надо.

Запишем соотношения

$$\frac{\sin nx}{n^2 + d_x^2} = -\frac{x \cos nx}{2n} + A \sin nx + B \cos nx, \quad \frac{\cos nx}{n^2 + d_x^2} = \frac{x \sin nx}{2n} + C \sin nx + D \cos nx,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \pi d_x [x \cos nx] &= \operatorname{sh} \pi d_x [d_n \sin nx] = d_n \operatorname{sh} \pi d_x [\sin nx] = d_n (\sin \pi n \cos nx) = \\ &= \pi \cos \pi n \sin nx + x \sin \pi nx \cos nx = (-1)^n \pi \sin nx. \end{aligned}$$

Аналогично рассуждая, мы получим

$$\begin{aligned} d_x \operatorname{sh} \pi d_x [x \cos nx] &= (-1)^n \pi n \cos nx; \\ d_x \operatorname{sh} \pi d_x [x \sin nx] &= (-1)^n \pi n \sin nx. \end{aligned}$$

Представим второе справа слагаемое в виде двойного ряда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \cos kx &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin mx}{m^2 - k^2} [1 - (-1)^{m+k}] = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_k \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \frac{m \sin mx}{m^2 - k^2} [1 - (-1)^{m+k}]. \end{aligned}$$

Применение оператора D_1 приведет нас к исходной системе (1). Таким образом, мы видим, что использование оператора D_1 соответствует способу Фурье для тригонометрических рядов.

Для достижения поставленной цели будем использовать понятие обратного оператора. Итак,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2} \right) \sin kx$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2} \right)^{-1} \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx.$$

Так как $\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \cos kx = \operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2} \sin kx$ и т.к. $\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \sin kx = -\operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2} \cos kx$;

с учетом

$$\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2}} = 1 + \operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi d_x}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{\pi d_x}{2} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi d_x}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{\pi d_x}{2} + \dots \right) + \operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi d_x}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{\pi d_x}{2} + \dots \right)$$

где

$$\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi d_x}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{\pi d_x}{2} + \dots \right) [\sin kx] = \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{k\pi}{2}} \sin kx;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi d_x}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{\pi d_x}{2} + \dots \right) [\sin kx] = \frac{\operatorname{th} \frac{k\pi}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{k\pi}{2}} \cos kx;$$

а также используем тождества

$$\operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2} \sin kx = \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \cos kx, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2} \cos kx = -\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \sin kx. \quad (4)$$

Находим

$$\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi d_x}{2} \right)^{-1} [\sin kx] = \frac{\operatorname{th} \frac{k\pi}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{k\pi}{2}} \cos kx + \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{k\pi}{2}} \sin kx.$$

Преобразовывая коэффициенты при $\cos kx$ и $\sin kx$ будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \operatorname{th} \frac{k\pi}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{k\pi}{2}} &= \frac{1}{2} \operatorname{th} \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{th} k\pi; \\ \frac{(1 + \operatorname{th}^2 \frac{k\pi}{2}) - \operatorname{th}^2 \frac{k\pi}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{k\pi}{2}} &= 1 - \frac{\operatorname{th}^2 \frac{k\pi}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{k\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{th} k\pi \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} = \frac{2 \operatorname{ch} k\pi \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2} - \operatorname{sh} k\pi \operatorname{sh} \frac{k\pi}{2}}{2 \operatorname{ch} k\pi \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} = \\ \frac{2 \operatorname{ch} k\pi \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{ch} k\pi \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2} - \operatorname{sh} k\pi \operatorname{sh} \frac{k\pi}{2}}{2 \operatorname{ch} k\pi \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} &= \frac{\operatorname{ch} k\pi \operatorname{ch} k\pi + \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}}{2 \operatorname{ch} k\pi \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch} k\pi} \right); \end{aligned} \quad (5)$$

В результате получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch} k\pi} \right) \sin kx + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{th} k\pi \cos kx.$$

Если левую и правую часть равенства (5) умножить на $\sin kx$ и проинтегрировать от 0 до π , то окончательно находим:

$$a_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{ch} k\pi} \right) b_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\operatorname{th} k\pi}{n^2 - k^2} [1 - (-1)^{n+k}]. \quad (6)$$

Построенное решение необходимо проверить.

Подействуем почленно оператором $\left(1 - tg \frac{\pi dx}{2}\right)$ на левую и правую часть решения (5), учитывая при этом (3), (4). После выполнения несложных операций приходим к исходной форме разложения (2), эквивалентной системе (1), при этом нужно учесть тождества

$$1 + \frac{1}{ch k\pi} + th k\pi th \frac{k\pi}{2} \equiv 2,$$
$$th k\pi - th \frac{k\pi}{2} - \frac{1}{ch k\pi} th \frac{k\pi}{2} \equiv 0.$$

Таким образом, решение (3) удовлетворяет системе (1).

Отметим, что рассматриваемая бесконечная система (1) имеет отношение к одной задаче теории фильтрации, поэтому справедливо указать на прикладное значение полученного результата. Кроме того в этой статье впервые был найден и применен обратный оператор $\left(1 - tg \frac{\pi dx}{2}\right)^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. – Минск: Технопринт, 2003. – 101 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В РЯД ПО КОРНЯМ ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ

Акимов В.А.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In the given work use of classical integrals at decomposition of functions in not orthogonal number on roots of the transcendental equations is shown.

При решении задачи о растяжении (сжатии) упругого квадрата в точной постановке при выполнении краевых условий необходимо разложить заданную функцию в неортогональный ряд по корням трансцендентного уравнения $\text{sh } \lambda a + \lambda a = 0$ [1]. Исследуем некоторые малоизученные на сегодняшний день некоторые характерные аспекты данного разложения.

Представим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{sh } \lambda_n x, \quad (1)$$

где λ_n – корни уравнения $\text{sech } \lambda a + \lambda a = 0$.

Первоначально определим коэффициенты этого разложения операторным методом. Для достижения этой цели подействуем на обе части равенства (1) оператором $D(d_x) = \frac{\text{sh } a d_x + a d_x}{d_x^2 - \lambda_n^2}$, где $d_x = \frac{d}{dx}$.

При таком подходе приходится решать задачу об обратном операторе вида

$$D_2^{-1} = d_x^2 - \lambda_n^2 f(x) = \frac{f(x)}{d_x^2 - \lambda_n^2}.$$

Решение этой задачи рассмотрено в [2]. Здесь, кроме этого, укажем на другой, теперь уже чисто классический случай. Итак, запишем $\frac{f(x)}{d_x^2 - \lambda_n^2} = g(x)$. Найдим $g(x)$ из соотношения $d_x^2 - \lambda_n^2 g(x) = f(x)$. Сперва решим однородное уравнение $d_x^2 - \lambda_n^2 g(x) = 0$. Получим: $\bar{g}(x) = C_1 \text{sh } \lambda_n x + C_2 \text{ch } \lambda_n x$. Частное решение $g^*(x)$ ищем методом вариации произвольных постоянных Лагранжа [3]. В результате получим $g(x) = \bar{g}(x) + g^*(x)$.

$$\frac{f(x)}{d_x^2 - \lambda_n^2} = C_1 \text{sh } \lambda_n x + C_2 \text{ch } \lambda_n x + \frac{1}{\lambda_n} \int_{x_0}^x f(\xi) \text{sh } \lambda_n (x - \xi) d\xi. \quad (2)$$

Сделаем по поводу формулы (2) одно замечание. Заметим, что переменная x входит в правую часть двояким образом. Во-первых, x является верхним пределом интеграла, во-вторых, она входит под знак интеграла не как переменная интегрирования, а как добавочный параметр, который считается постоянным при интегрировании. Далее нетрудно показать, что частное решение удовлетворяет нулевым начальным условиям при $x = x_0$, то есть $g^*(x)|_{x=x_0} = 0$, $(g^*(x))'|_{x=x_0} = 0$. Первое из этих равенств непосредственно вытекает из (2), так что при $x = x_0$ верхний предел интеграла совпадает с нижним, интеграл равен нулю. Чтобы проверить второе равенство, определим $g'(x)$, помня, что производная интегралов данного типа равна подынтегральной функции при верхнем пределе плюс интеграл от производной подынтегральной функции [3]. Тогда получим

$(g^*(x))' = \int_{x_0}^x f(\xi) \operatorname{ch} \lambda_n(x - \xi) d\xi$ откуда непосредственно и вытекает второе утверждение.

Что касается оператора $D_1 = \operatorname{sh} a d_x + a d_x$, состоящего стоящего в числителе оператора $D = \frac{D_1}{D_n}$, то для него можно использовать соотношение вида

$$(\operatorname{sh} a d_x + a d_x)[f(x)] = \left[\frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}) + a d_x \right] [f(x)] = \frac{1}{2}[f(x+a) - f(x-a)] + a(f(x)); \quad (3)$$

так как для произвольных функций верно соотношение $e^{ax} f(x) = f(x+a)$.

Если взять, например, $f(x) = \operatorname{sh} \lambda_n x$, то на основании (3) можно получить формулу, установленную в [2] операторным методом:

$$D[\operatorname{sh} \lambda_n x] = \frac{a}{\lambda_n} (\operatorname{ch} \lambda_n x + 1) \operatorname{ch} \lambda_n x. \quad (4)$$

В свою очередь соотношение (4) проверяется непосредственным интегрированием [1,2]

$$\int_0^a \operatorname{sh} \lambda_n x \operatorname{sh} \lambda_m (a-x) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \frac{a}{2} (\operatorname{ch} \lambda_n a + 1) \end{cases}$$

Итак, для исследования разложения функций в ряд по корням трансцендентных уравнений, наряду с операторным методом показано применение известных классических интегральных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крушевский А.Е. Введение в аналитическую механику упругих тел. – Минск: БНТУ, 2004. – 335 с.
2. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. – Минск: Технопринт, 2003. – 101 с.
3. Смирнов, И.С. Курс высшей математики. – 21-е изд., стереотип. – М., 1974. – Т. 2. – 656 с.

О СТРУКТУРЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

Астахов Э.И., Кудин В.В., Гурин А.Н.

Белорусский национальный технический университет, Минск

For flat mechanisms with the higher steams (gear, cam and similar) classification with allocation of groups with $w=0$, containing the higher steams is offered. In most cases such groups are one-links (with $n=1$, $P_n=1$, $P_B=1$), and two-links ($c n=3$, $P_l=2$, $P_h=2$).

В теории механизмов и машин (ТММ) классификация плоских рычажных механизмов с низшими кинематическими парами подробно разработана в работах Ассура Л.В., Артоболевского И.И. и изложена во всех отечественных учебниках. Для классификации плоских механизмов с высшими парами Артоболевским И.И. использован метод замены высших кинематических пар цепями с низшими парами [1], что является, по нашему мнению, не совсем удобным, так как вводятся условные довольно громоздкие и сложные заменяющие механизмы. В работе [2] Семёнова М.В. выделялись структурные группы с высшими парами. Ранее на одном из республиканских методических семинаров преподавателей «теории механизмов и машин» авторами была предложена структурная классификация плоских механизмов с высшими парами с выделением однозвенных структурных групп с одной высшей парой. Такая классификация неоднократно использовалась авторами на практических занятиях по ТММ в учебном процессе и является, по мнению авторов, более простой и эффективной. Задачей данной работы является расширение и более подробное изложение предыдущей предложенной структурной классификации механизмов с высшими парами для использования в учебном процессе по ТММ.

Как известно, структурная классификация плоских (да и пространственных) механизмов по Ассуру-Артоболевскому основана на понятии о нулевых структурных группах (или группах Ассура), т. е. кинематических цепях нулевой степени свободы $W=0$. Для идеальных плоских рычажных механизмов с низшими парами без избыточных связей ($q=0$) и лишних степеней свободы это уравнение структурной группы записывается следующим равенством:

$$W = 3n - 2P_n = 0, \quad (1)$$

где n – число подвижных звеньев,

P_n – число низших кинематических пар 5-го класса.

Отсюда получаем в целых числах $3n = 2P_n$ или $P_n = \frac{3}{2}n$, т.е. число n подвижных звеньев в таких структурных группах должно быть чётным, а число пар $P_n = P_5$ – кратно трём.

Аналогично получим для плоских механизмов с низшими и высшими (число которых $P_g = P_4$) кинематическими парами 4-го класса:

$$W = 3n - 2P_n - P_g = 0. \quad (2)$$

Варианты возможных сочетаний n , P_n , P_B в структурных группах, обеспечивающих решение уравнения (2) в целых числах приведены в табл. 1.

n_2	1	1	2	2	3	...
$P_{н2}$	1	0	2	1	4	...
$P_{в2}$	1	3	2	4	1	...

Покажем наиболее используемые в технике варианты решения структурного уравнения (2).

Вариант 1. При $n = 1$ из формулы (2) получаем

$$W = 3 - 2P_n - P_v = 0, \text{ или } P_n = \frac{3 - P_v}{2}, \quad (3)$$

т.е. нужно, чтобы $P_n = P_5 = 1$, $P_v = P_4 = 1$. Такая однозвенная структурная группа представляет одно звено ($n = 1$) с одной низшей ($P_n = P_5 = 1$) и одной высшей ($P_v = P_4 = 1$) кинематическими парами. Примеры таких однозвенных структурных групп показаны на рис.1 в наиболее распространённых зубчатых (а), кулачковых (б), поводковых (в) механизмах с подвижным звеном 2.

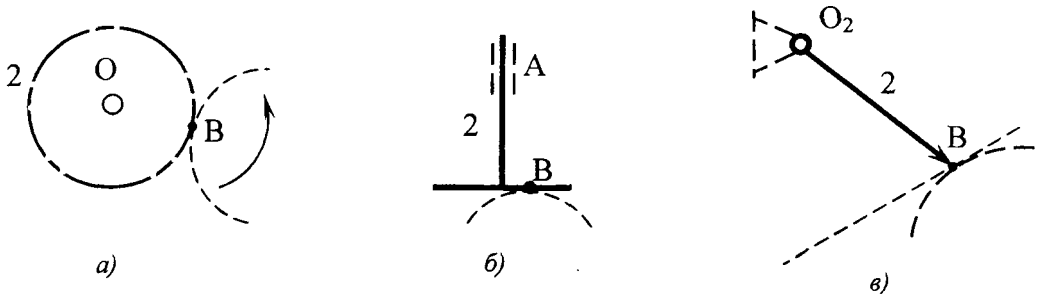


Рис. 1. Однозвенные группы с высшими парами; А, О - низшая пара, В - высшая пара

Так как низшими парами 5-ого класса в плоских механизмах являются вращательная и поступательная, а высшие пары 4-го класса по работе [1] дают 4 возможных сочетания элементов контакта (кривая-кривая, кривая-плоскость, кривая-точка, плоскость-точка), то можно выделить 8 разновидностей однозвенных групп с высшими парами, которые показаны на рис.2.

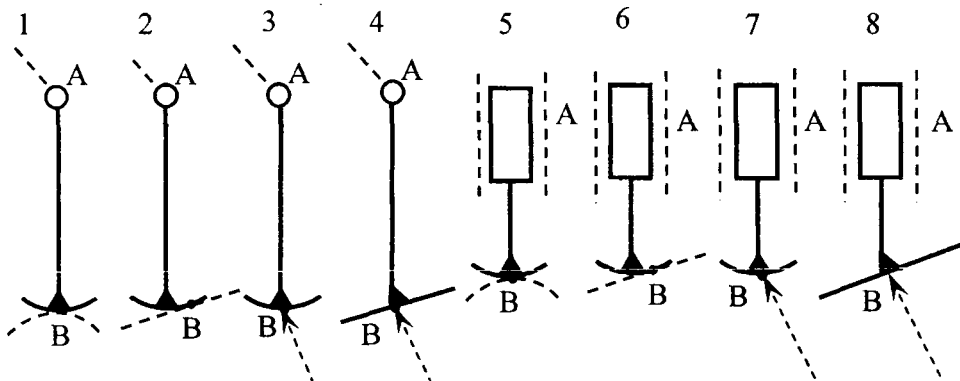


Рис. 2. Восемь видов однозвенных групп с высшими парами

Вариант 2. При $n = 2$ из формулы (2) получаем

$$W = 3 \cdot 2 - 2P_n - P_g = 0, \text{ или } P_n = \frac{6 - P_g}{2}. \quad (4)$$

Такие двухзвенные структурные группы должны иметь 2 низшие пары и 2 высшие. Примеры таких структурных групп показаны на рис.3 (на рис.3б, в в зубчатых механизмах с водилом Н и зубчатыми колёсами 2 с вращательными парами O_2, O_H).

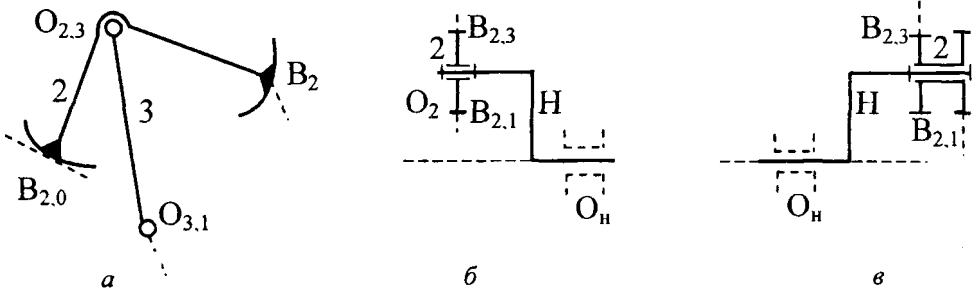


Рис. 3. Двухзвенные структурные группы с высшими парами B_{ij}

При структурном синтезе плоских идеальных механизмов из однозвенных групп на рис.1, присоединяя их начальному (входному) звену 1 и стойке 0 получаются механизмы 2-го класса (рис.4), а из двухзвенных групп на рис.3 получаются механизмы 3-го класса (по классификации Артоболевского И.И.).

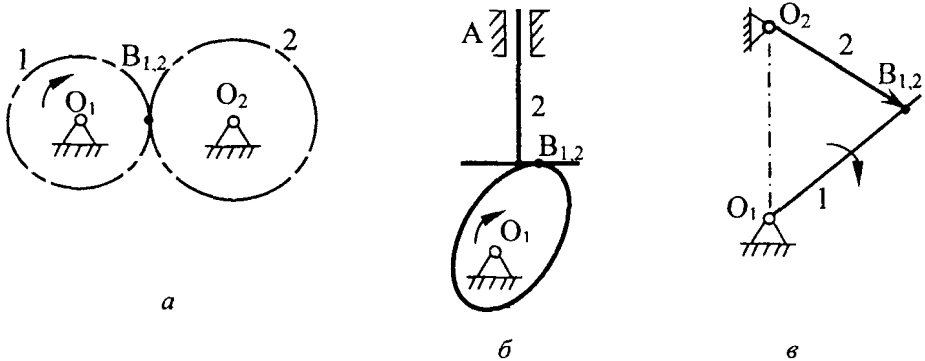


Рис. 4. Плоские механизмы 2-го класса с однозвенными группами с высшими парами: а – зубчатый; б – кулачковый; в – поводковый

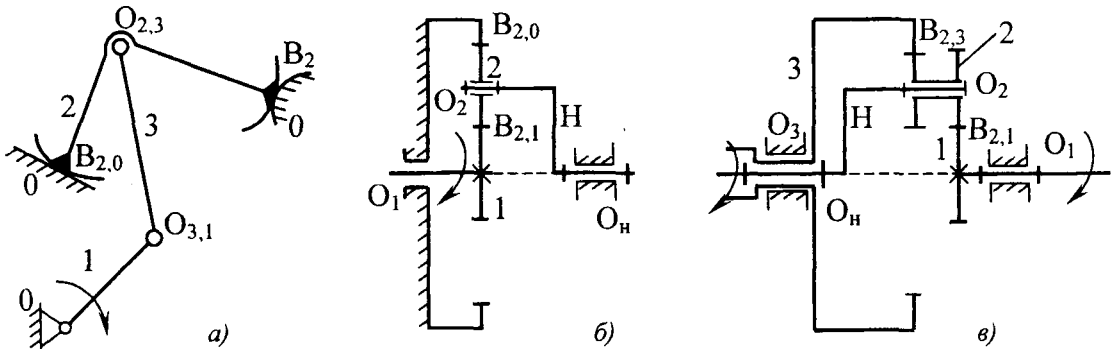


Рис. 5. Плоские механизмы 3-го класса с двухзвенными группами с высшими парами B_{ij}

Формула строения механизмов на рис. 4 со степенью свободы $W = 1$:

$$I(0,1) \rightarrow II(2)B_{1,2} \quad (5)$$

т.е. к механизму 1-го класса из стойки 0 и начального (входного) звена 1 присоединена однозвенная группа 2-го класса $II(2)B_{i,j}$, состоящая из звена 2 с высшей парой $B_{i,j}$. Для плоских механизмов на рис. 5 с двухзвенными структурными группами формулы строения записываются в следующем виде.

Для кулачкового механизма на рис.5, а с $W=1$ (т. к. $n = 3, P_n = 3, P_g = 2$)

$$I(0,1) \rightarrow III(2,3)_{B_{3,0}}^{B_{2,0}} \quad (6)$$

т.е. к механизму 1-го класса из стойки 0 начального кривошипа 1 присоединена двухзвенная группа 3-го класса $III(2,3)_{B_{3,0}}^{B_{2,0}}$ из звеньев 2, 3 с двумя высшими парами $B_{2,0}$ и $B_{3,0}$.

Для зубчатого планетарного механизма на рис.5б с $W = 1$ ($n = 3, P_n = 3, P_g = 2$)

$$I(0,1) \rightarrow III(2,H)_{B_{2,1}}^{B_{2,0}}, \quad (7)$$

где H – рычаг, водило.

Для зубчатого дифференциального механизма на рис.5в с $W = 2$ ($n = 4, P_n = 4, P_g = 2$)

$$I(0,1) \rightarrow III(2,H)_{B_{2,3}}^{B_{2,1}} \leftarrow I(0,3), \quad (8)$$

т.е. к двум механизмам 1-го класса из стойки 0 и входных звеньев 1, 3 присоединяется двухзвенная группа 3-го класса $III(2,3)_{B_{2,3}}^{B_{2,1}}$ с двумя высшими парами $B_{2,1}$ и $B_{2,3}$.

Для известного зубчатого механизма замкнутого дифференциала на рис. 6 с $n = 5, P_n = 5, P_g = 4$ и $W = 1$ формула строения.

$$\begin{array}{ccccc}
 W = +1 & & W = 0 & & \Sigma W = 1 \\
 \rightarrow I(0,1) & \rightarrow & III(2,H) & \rightarrow & \\
 & & \downarrow & & \uparrow \\
 & & II(3)_{B_{2,3}} & \rightarrow & II(4)_{B_{4,0}} \\
 W = 0 & & W = 0 & &
 \end{array} \quad (8)$$

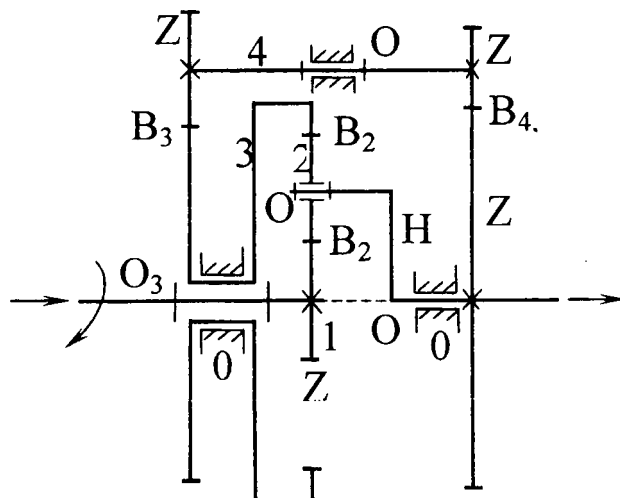


Рис. 6. Структурная схема зубчатого механизма замкнутого дифференциала

Из формулы строения (8) следует, что к механизму 1-го класса (с $W = +1$) из стойки 0 и входного зубчатого колеса 1 присоединена двухзвенная группа ($W = 0$) 3-го класса $\text{III}(2, H)_{B_{2,3}}^{B_{1,2}}$ из сателлита 2 и водила Н с высшими зубчатыми парами $B_{1,2}$ и $B_{2,3}$, и от этой группы вращение передаётся на выход, т.е. на водило Н. Параллельно к этой группе присоединена группа из колеса 3 с вращательной парой $O_{3,1}$ и высшей парой $B_{2,3}$, имеющая $W = 0$, а к этой группе присоединена другая замыкающая группа с колесом 4 и высшими зубчатыми парами $B_{3,4}$ и $B_{4,5}$, в которой $W = 0$, и от колеса 4 через колесо Z_5 вращение передаётся параллельно на выход, т.е. на водило Н.

Таким образом, структурная группа формулы строения показывает не только последовательность присоединения звеньев, кинематических цепей с $W = 0$, но и указывает в дальнейшем на последовательность кинематического анализа и силового расчёта. А введение структурных (статически определяемых) групп с высшими парами с $W = 0$ позволяет как упростить структурные схемы механизмов (не вводить условные громоздкие заменяющие механизмы), так и структурный анализ и структурный синтез механизмов, а далее кинематический анализ и кинето-статический расчёт.

В данной работе анализировались идеальные плоские механизмы с высшими парами без избыточных связей и местных подвижностей. Далее возможно обобщение на реальные (в большинстве пространственные) механизмы с числом связей $q \neq 0$, которые уже во многом разработаны в работах Решетова Л.Н., [3], авторов из МВТУ [4] и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1975. – 640 с.
2. Семёнов М.В. Структура механизмов. – М.: Физматгиз, 1959. – 287 с.
3. Решетов Л.Н. Конструирование рациональных механизмов. – М.: Машиностроение, 1972. – 256 с.
4. Теория механизмов и машин.: учебник для вузов / К.В. Фролов [и др.]; под ред. К.В. Фролова. – М.: Высшая школа, 1987. – 496 с.

Коваль Ю.Г., Томило Е.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The decision of a problem of Hertz on interaction of two hemispheres analytically and by means of program complex ANSYS 12 is presented. Static and dynamic problems are solved.

При решении технических контактных проблем машиностроения широко используется задача Герца. При расчёте современных машин и механизмов пятно контакта принимают в виде линии либо прямоугольной площадки. Т.е. контактирующие поверхности имеют форму цилиндров. Однако вследствие погрешностей при изготовлении, сборке, монтаже, а также в результате износа часто имеет место точечный контакт взаимодействующих тел. В этом случае при моделировании используется задача взаимодействия двух сфер.

Постановка задачи

Необходимо рассмотреть деформации и напряжения в области соприкосновения двух шаров, прижатых друг к другу силами $P = 1000$ Па. Радиусы кривизны 30 мм и 60 мм, Модули Юнга $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,3$.

Аналитическое решение задачи

Возьмём две точки A_1 и A_2 на поверхности шаров, находящихся на расстоянии ρ от оси z , проходящей через центры шаров (рис. 1). Расстояние между этими точками до деформации равно:

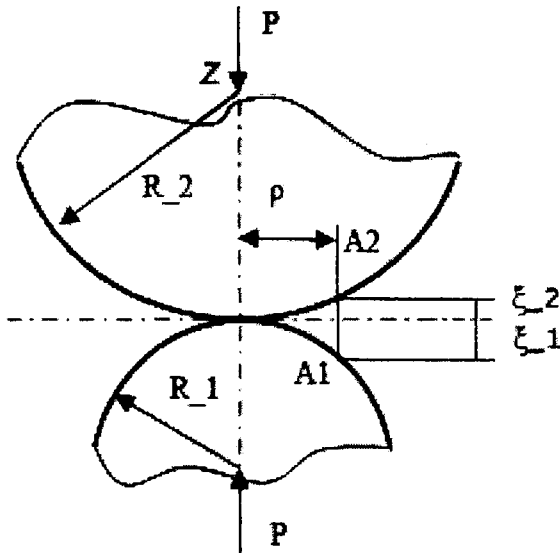


Рис. 1. Схематическое изображение контактирующих полусфер

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{\rho^2}{2R_1} + \frac{\rho^2}{2R_2} = \beta \rho^2,$$

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1 R_2}.$$

Под действием нагрузки P шары сплющатся в месте соприкосновения, образовав плоскость контакта в форме круга радиуса a , и центры их сблизятся на величину δ . Если $a \geq \rho$, то точки A_1 и A_2 совместятся.

$$u_z^1 + u_z^2 = \delta - \beta \rho^2,$$

где u_z^1 и u_z^2 – вертикальные проекции перемещений точек A_1 и A_2 .

Считая шары приближённо за упругие полупространства, можно найти вертикальные проекции перемещений:

$$u_z^1 = \iint \frac{1 - \sigma_i^2}{\pi E_i} * \frac{p(r)}{s} dF,$$

где $p(r)$ – удельное давление на расстоянии r от оси z , s – расстояние от точки A_i , где определяется прогиб, до точки приложения нагрузки.

Составив сумму вертикальных проекций перемещений получим интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right) \iint \frac{p(r)}{s} dF = \delta - \beta \rho^2,$$

Решив это уравнение, Герц нашёл, что:

$$p(r) = \frac{p_{max}}{a} \sqrt{a^2 - r^2},$$

$$p_{max} = \frac{3P}{2\pi a^2},$$

$$a = \sqrt{\frac{3PR_1R_2}{4(R_1 + R_2)} \left(\frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right)},$$

$$\delta = \left(\frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right) \frac{\pi a}{2} p_{max}.$$

Наибольшее сжимающее напряжение – в центре площадки контакта: здесь материал работает в условиях всестороннего сжатия. Наибольшее растягивающее напряжение – на контуре площадки контакта и при наших условиях оно составляет $Z_{z=0} = 0,133p_{max}$

Далее приведём решение задачи Герца для нашего случая в пакете Mathcad

$$\begin{aligned} r1 &:= 30 \cdot 10^{-3} & \sigma &:= 0.3 \\ r2 &:= 60 \cdot 10^{-3} & \sigma1 &:= \sigma \\ & & \sigma2 &:= \sigma \\ E &:= 2 \cdot 10^{11} & P &:= 1000 \\ E1 &:= E \\ E2 &:= E \end{aligned}$$

$$a := \sqrt{\left[\left(\frac{1 - \sigma1^2}{E1} + \frac{1 - \sigma2^2}{E2} \right) \cdot \frac{3 \cdot P \cdot r1 \cdot r2}{4 \cdot (r1 + r2)} \right]} \rightarrow 0.00051488576345776852711$$

$$PM := \frac{3 \cdot P}{2 \cdot \pi \cdot a^2} \rightarrow 1.80102449191095017482622e9$$

$$\delta\delta := \left(\frac{1 - \sigma1^2}{E1} + \frac{1 - \sigma2^2}{E2} \right) \cdot \frac{\pi \cdot a}{2} \cdot PM \rightarrow 0.0000132553674705744581962608$$

$$Z0 := 0.133 \cdot PM \rightarrow 2.39536257424156373251887e8$$

Моделирование в программном комплексе ANSYS 12

Решение производилось методом конечных элементов, реализованном в программном пакете ANSYS 12. Он позволяет быстро, наглядно и достаточно точно произвести данный расчёт.

В первую очередь следует построить модели в SolidWorks (рис. 2).

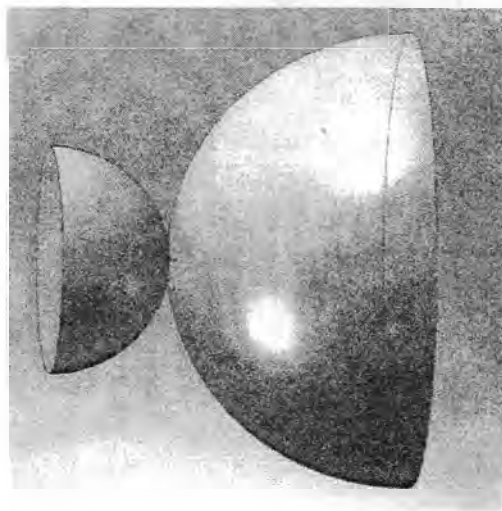


Рис. 2. Твёрдая модель

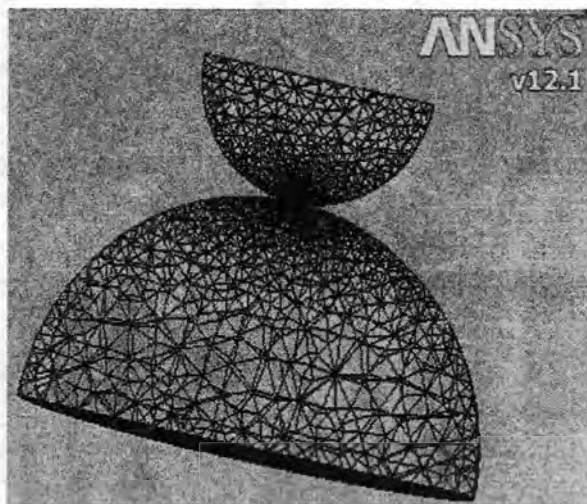


Рис. 3. Сеточная модель контактирующих полусфер

За модель взяты две касающиеся полусферы радиусами 30 и 60 мм. Далее модель импортируется в ANSYS 12 и разбивается на конечные элементы с угущением сетки в области контакта (рис. 3).

Непосредственное решение задачи производится в модуле Explicit Dynamics (ANSYS).

Здесь прикладываются сжимающие силы по 1000 Па к каждой полусфере (рис. 4).

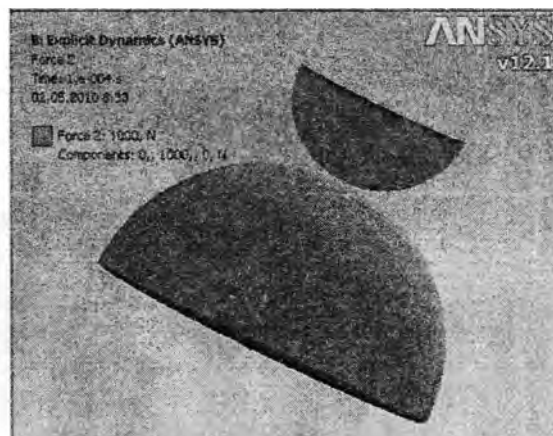
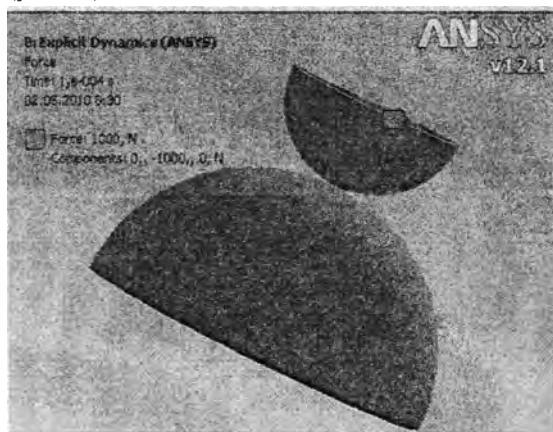


Рис. 4. Приложение нагрузок

Расчёт производился на промежутке времени 0,0001 с.

В результате решения имеем максимальные деформации $1,2201 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ (рис. 5). Погрешность решения в программном комплексе ANSYS 12 7,9 %, что вполне допустимо.

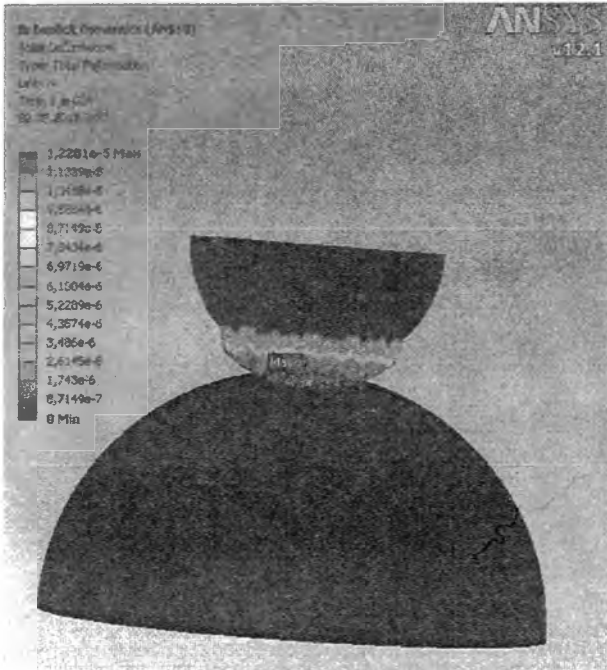


Рис. 5. Распределение деформаций

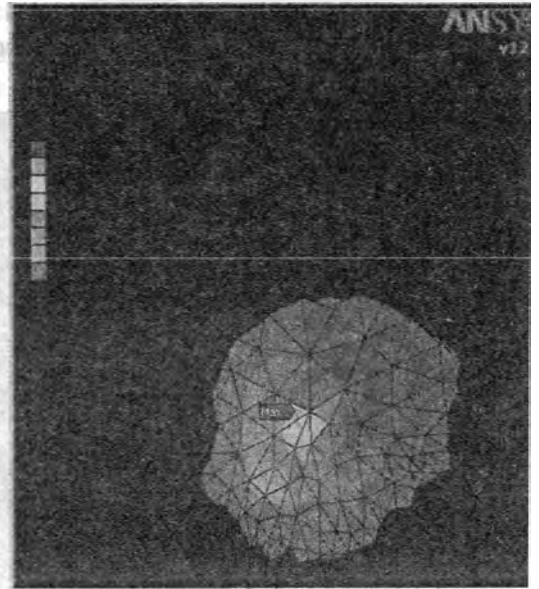


Рис. 6. Распределение напряжений

Напряжения на контуре площадки составили $2,48 \cdot 10^8 \text{ Па}$ (рис. 6.). Погрешность решения 3,5 %, что допустимо.

Более сложной является задача взаимодействия двух сфер, движущихся на встречу друг другу с высокими скоростями.

Рассмотрим два шара, движущихся на встречу со скоростями $v_1 = v_2 = 100 \text{ м/с}$. Радиусы кривизны 30 и 60 мм, Модули Юнга $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,3$.

В первую очередь производим построение модели в SolidWorks и импорт её в ANSYS (рис. 7).

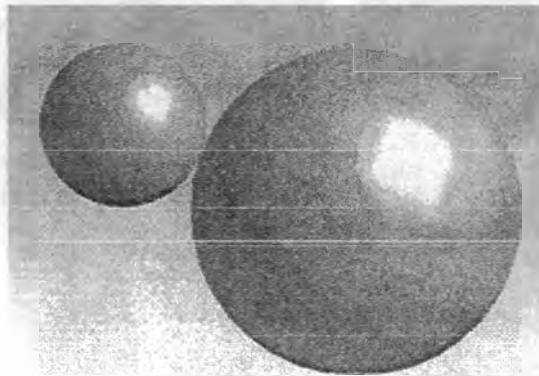


Рис. 7. Твёрдотельная модель

Затем разбиваем модель на конечные элементы и прикладываем скорости в каждому из шаров (рис. 8)

Расчёт будет производиться на промежутке времени 0,000015 с.

В результате решения были получены максимальные деформации 0,0015028 м и напряжения $1,456 \cdot 10^8$ Па (рис. 9).

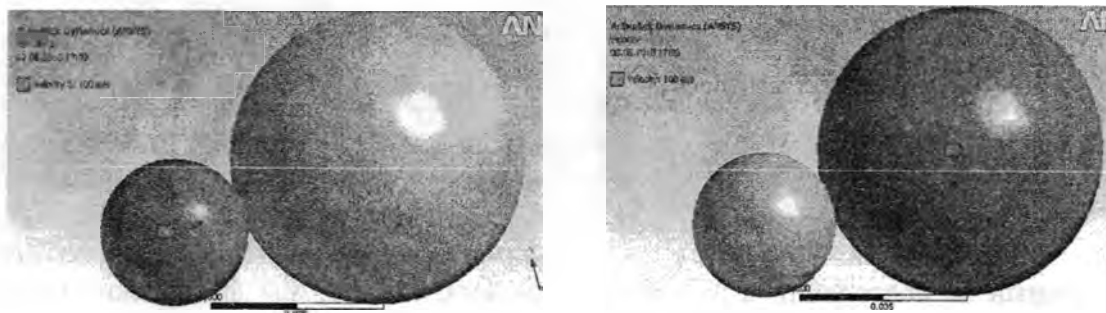


Рис. 8. Приложение скоростей

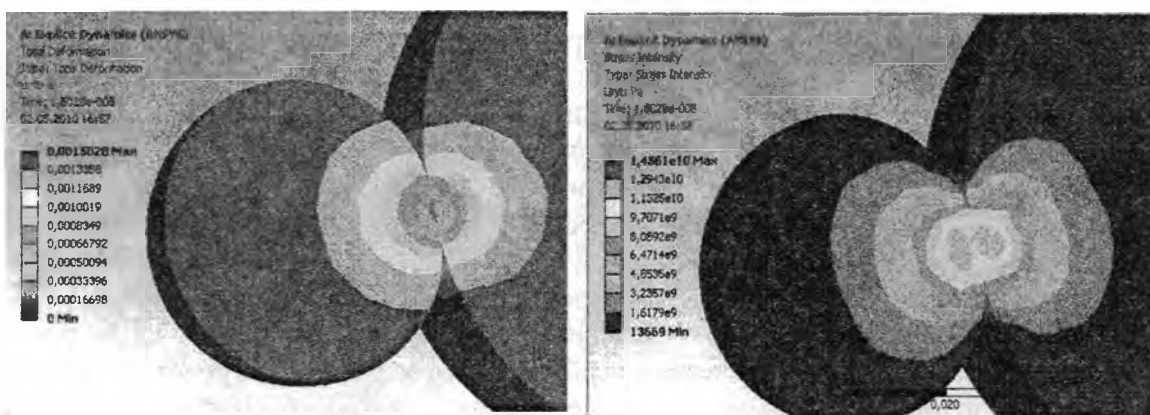


Рис. 9. Распределение деформаций

Вывод

В результате решения задачи Герца при взаимодействии двух полусфер аналитически и решения этой же задачи методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS получена погрешность для деформаций 7,9 % и для напряжений 3,5 %. Выбранный способ расчёта при достаточной точности позволяет значительно снизить время трудоёмкость расчётов, а также решать более сложные динамические задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров. – М.: Машиностроение, 2004. – 506 с.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИСКУССТВЕННЫХ ДВУХСТВОРЧАТЫХ И ТРЕХСТВОРЧАТЫХ КЛАПАНОВ СЕРДЦА С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА ANSYS 12

Орловская А.А., Коваль Ю.Г.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In the given work possibilities of use of the modern software for the decision of problems of biomechanics are considered. Calculation of two-folding and three-folding valves of heart is made. Proceeding from results, a clear advantage the three-folding valve possesses.

Моделирование – метод исследования явлений, процессов и систем, основанный на построении и изучении их математических или физических моделей. Математическое моделирование биологических объектов представляет собой аналитическое описание идеализированных процессов и систем, адекватных реальным. Физическое моделирование основано на воспроизведении физическими способами биологических структур, функций или процессов.

Моделирование органов и структур человеческого организма дает возможность предсказать критические ситуации, выяснить механизмы формирования патологий, находить области допустимых изменений формы, механических свойств и характера функционирования этих биологических объектов. Это в свою очередь расширяет сферу применения диагностических методов и устройств и является предпосылкой для создания автоматизированных средств диагностики.

Насосная деятельность сердца нарушается, когда его клапаны не функционируют должным образом. Патологические звуки в сердце, которые обычно возникают при пороках клапанов сердца, называются шумами. Эти звуки вызваны аномальным градиентом давления и турбулентным характером кровотока во время сердечного цикла. Ряд методов исследования, начиная от простой аускультации (выслушивание звуков сердца) до эхокардиографии и катетеризации полостей сердца, используется для получения информации о природе и степени нарушения функции сердца. Вследствие этого в критических ситуациях проводятся операции по имплантации искусственных клапанов сердца.

На сегодняшний день двустворчатые искусственные клапаны сердца являются наиболее популярными в кардиохирургии. Типичный двустворчатый протез состоит из двух полукружных створок, которые открываются и закрываются в проходном отверстии седла корпуса (рис. 1). С наружной стороны корпуса имеется канавка для пришивной манжеты. Маленькие «ушки» на створках искусственного клапана сердца вставляются в специальные пазы (углубления) с внутренней стороны корпуса протеза. Форма этих пазов, напоминающих «бабочку», определяет движение створок на открытие и закрытие. Створки вращаются вокруг своей оси, позволяя потоку крови омывать шарниры («ушки» створок и «бабочки»), что помогает минимизировать накопление тромбов в пределах этих областей. Материалом для изготовления створок служит пиролитический углерод.

Трехстворчатый клапан представляет собой титановый корпус, в котором шарнирно закреплены три створки. При полном открывании створок на угол - (87-89)° обеспечивается осевой кровоток через клапан, при этом в плоскости проходного сечения отсутствуют какие-либо элементы, оказывающие сопротивление потоку, следовательно, отсутствуют потери энергии.



Рис.1. Искусственный клапан сердца Планикс-Д и его схема

Это свойство отличает трехстворчатый клапан от всех механических клапанов, применяемых в мировой практике в настоящее время (рис. 2).

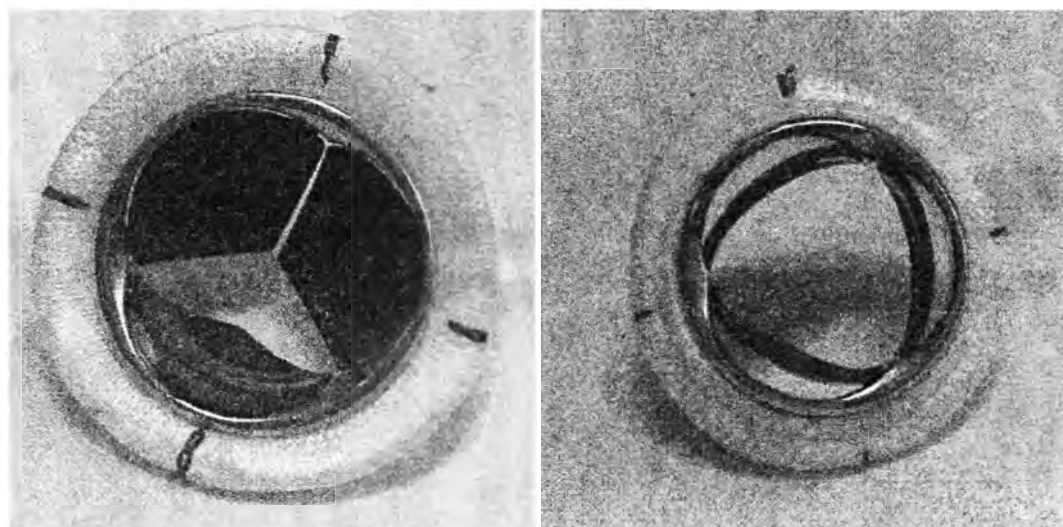


Рис. 2. Трехстворчатый клапан «ТРИКАРДИКС»

Циркуляция крови через сердце. Малый круг кровообращения проходит через правое предсердие, правый желудочек, лёгочную артерию, сосуды лёгких, лёгочные вены. Большой круг проходит через левые предсердие и желудочек, аорту, сосуды органов, верхнюю и нижнюю полые вены. Направление движения крови регулируется клапанами сердца.

В процессе сжатия сердца течение крови имеет сложный характер, в нем возникают турбулентные потоки, которые попытаемся смоделировать приведенной ниже расчетной схемой.

Для расчетов изначально моделируем течение крови из сердца, для этого строим модель желудочка с участком аорты (рис. 3 и 4).



Рис. 3. Геометрическая модель

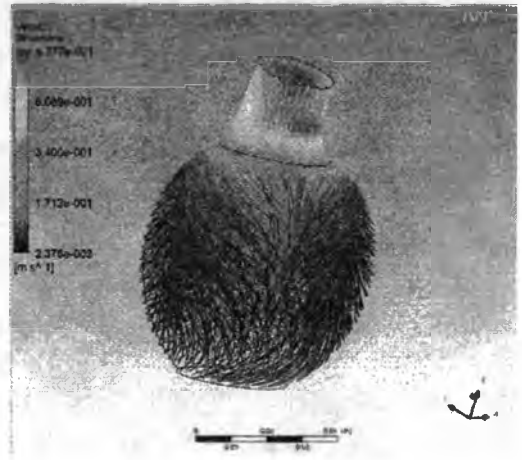


Рис. 4. Смоделированное течение кров.

Для расчета были взяты следующие модели, в которых положение лепестков искусственного клапана соответственно равны 0, 10, 30, 60, 75, 89 градусам (рис. 5).

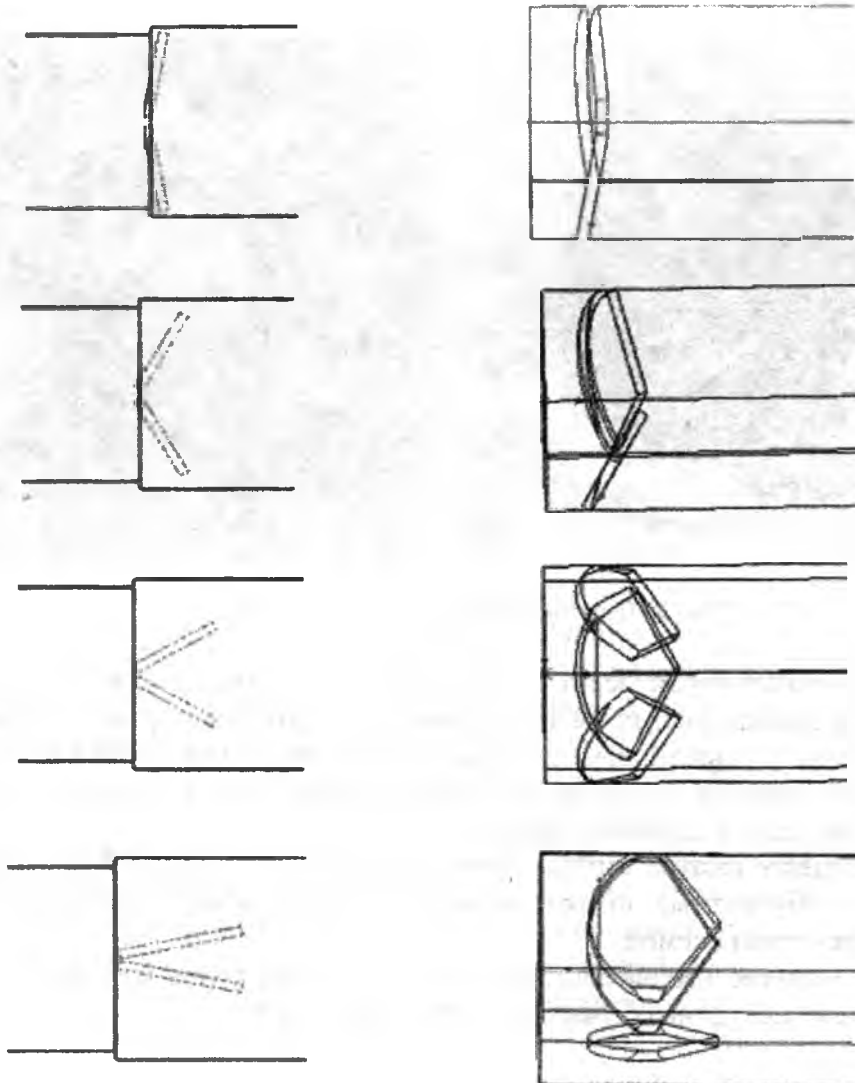


Рис. 5. Геометрические модели клапанов сердца

Входные параметры расчета.

Давление на выходе из клапана, Па	Плотность, г/мм ³	Вязкость, г/мм с
0	1,0	0,0046

Максимально возможное положение клапанов 75 и 89 градусов соответственно (рис. 6).

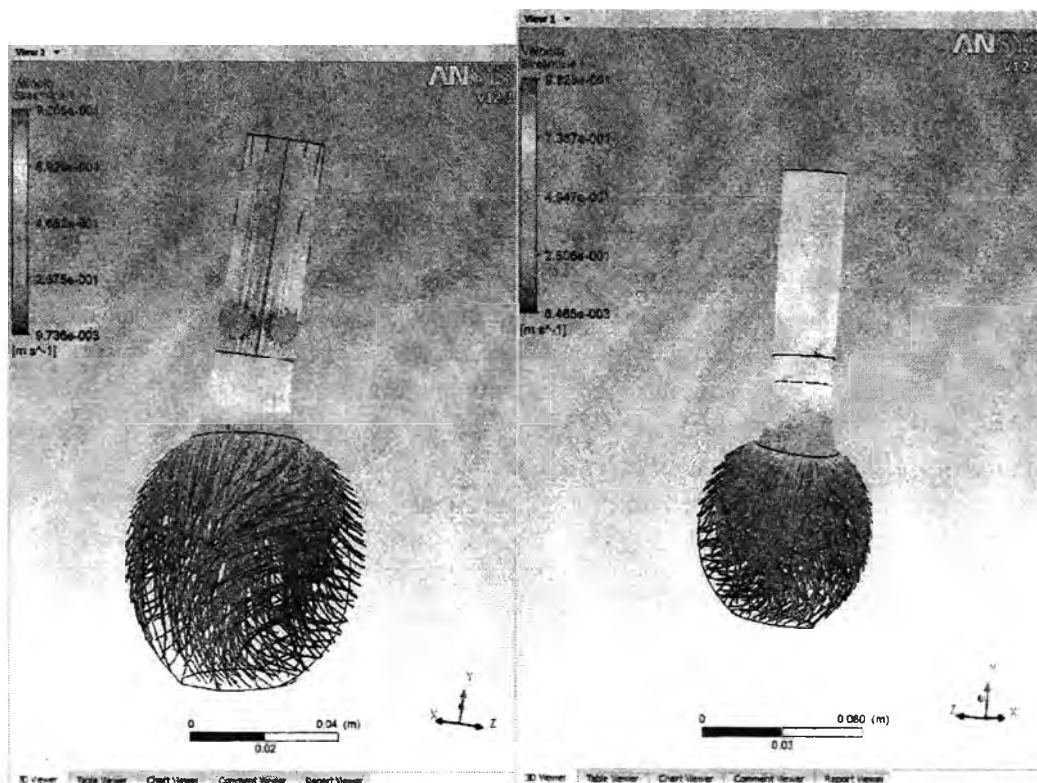


Рис. 6. Скорость течения крови через искусственные клапаны сердца

Таблица 2

Результаты расчета

	10°	30°	60°	75°	89°
V _{max2} (м/с)	3.59	2	1	0.98	-
V _{max3} (м/с)	13	3.36	1.5	-	0.9
P _{max2} (Па)	1.2·10 ⁴	2.6·10 ³	596	389	-
P _{max3} (Па)	1.48·10 ³	7.3·10 ³	979	-	431
Градиент давления 2 (кг/м ² с ²)	6.1·10 ⁵	9.3·10 ⁵	1.4·10 ⁵	1.32·10 ⁵	-
Градиент давления 3 (кг/м ² с ²)	2.3·10 ⁴	6·10 ⁵	1.6·10 ⁵	-	3.9·10 ⁴

В данной работе был произведен расчет искусственного двухстворчатого клапана сердца «Планикс-Т» белорусского производства и трехстворчатого «ТРИКАРДИКС», которые используются для замены биологического клапана сердца. Решив поставленную задачу и проанализировав полученные результаты, данные клапаны сердца имеют хорошие гидродинамические свойства. Однако у «ТРИКАРДИКС» есть свои преимущества по сравнению с «Планикс-Т». При замене, вследствие патологии клапана сердца, биологического клапана искусственным клапаном при начальном положении клапана мене 30 градусов (от поперечного сечения аорты) происходит образование завихрений крови возле створок, что может привести к разрушению компонентов крови. Также принцип конструкции трехстворчатого клапана более совершенен, в нем больший угол открывания створок и при этом отсутствуют конструктивные элементы в русле течения крови.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бегун П.И.,Афонин П.Н. Моделирование в биомеханике,
2. Орловский П.И.,Гриценко В.В.,Юхнев А.Д. Искусственные клапаны сердца.
3. Морман Д., Хеллер Л. Физиология сердечнососудистой системы,

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ МНОГОСЛОЙНЫХ СФЕР К ЧИСЛЕННЫМ РАСЧЕТАМ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ТАЗОБЕДРЕННОМ СУСТАВЕ ЧЕЛОВЕКА

Чигарев А.В.¹, Борисов А.В.²

*Белорусский национальный технический университет, г. Минск¹
филиал ГОУ ВПО «Московский энергетический институт
(Технический университет)», Смоленск²*

In practice it is often necessary to carry out the analysis of systems, where there are multilayer objects and each layer has which it's own properties. In the article the deformations and pressure inside a system consisting of arbitrary final quantity of thick-walled orbs are investigated. The relations of pressure on the limits of orbs, stress tensors and deformations inside orbs are obtained.

В экспериментальных работах в Центральном институте травматологии и ортопедии РФ [1] установлено, что головка тазобедренного сустава является практически идеальной сферой, за исключением шейки бедра.

В работах гомельских ученых [2–4] показано, что смазка в суставе является жидкокристаллической и обеспечивает практически нулевое трение в зоне контакта и сглаживание всех несовершенств поверхности: шероховатостей, асферичности, неровностей и других отклонений поверхности от идеальной сферы. Эта смазка обеспечивает практически равномерное гидростатическое давление в суставе. Также имеет место внутреннее давление костного мозга на элементы сустава.

В исследовании учитывается многослойность и многокомпонентность структуры головки тазобедренного сустава: наличие надкостницы, кости, внутреннего губчатого вещества.

В процессе жизни человека в суставе происходят изменения, связанные с множеством причин. В результате этих изменения возникают отклонения формы от идеальной сферической, появляются шероховатости поверхности и неравномерности распределения давления. В дальнейшем мы исследуем эти случаи.

Создадим математические модели для различных приближений к реальному суставу или протезу, учитывающие различное количество слоев, из которых он состоит. Каждое решение для определенной модели является законченным и им можно непосредственно пользоваться при расчетах в реальных ситуациях, возникающих в практике [5-7].

Рассмотрим в качестве первого приближения, модель полого шара, внешним радиусом R_1 и внутренним R_2 , находящегося под действием внешнего давления p_1 и внутреннего p_2 (рис. 1).

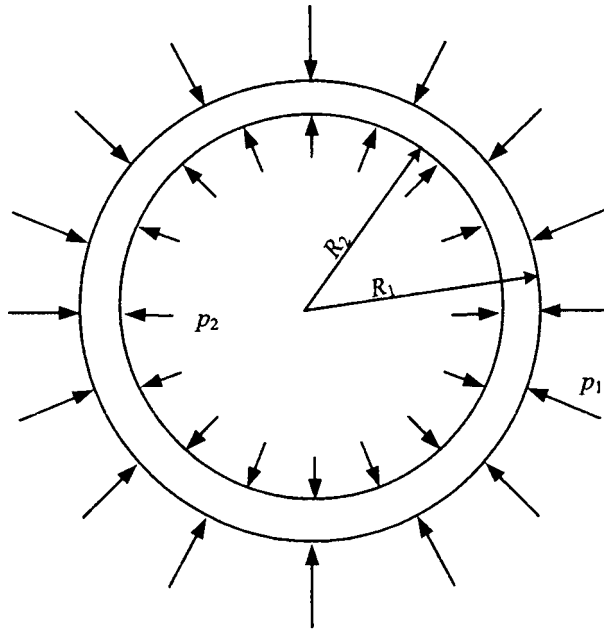


Рис. 1. Модель однослойной сферы, находящейся под действием внешнего и внутреннего давлений

Л.Д. Ландау и Е.М. Лившиц [8] в определении деформации полого шара приводят только одно решение данной задачи для однослойной оболочки. Ими получены компоненты тензора деформации в сферических координатах:

$$u_{rr} = a - 2b/r^3, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + b/r^3 \quad (1)$$

и радиальное напряжение

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}] = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}. \quad (2)$$

Постоянные a и b определены ими из граничных условий: $\sigma_{rr} = -p_2$ при $r = R_2$ и $\sigma_{rr} = -p_1$ при $r = R_1$:

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{2E}. \quad (3)$$

Авторы ограничились этим решением. Но оно открывает путь к решению более сложных задач, в том числе дает возможность описать аналитически предложенную нами модель.

Исходя из предложенной Л.Д. Ландау и Е.М. Лившицем результатов, мы можем записать формулы распределения напряжений по толщине шарового слоя для рассматриваемой однослойной сферы

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{R_2^3 - R_1^3} \left(p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3 - \frac{R_1^3 R_2^3}{r^3} (p_1 - p_2) \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R_2^3 - R_1^3} \left(p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3 + \frac{R_1^3 R_2^3}{2r^3} (p_1 - p_2) \right),$$

где $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ – угловые компоненты тензора напряжений.

Аналогично, подставляя формулы (3) в формулы (1) получаем компоненты тензора деформаций.

$$u_{rr} = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{1}{r^3} \cdot \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \quad (5)$$

$$u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Рассмотрим вариант, более приближенный к биологическому прототипу, одной оболочки и шар внутри – двухслойной модели (рис. 2). Система находится под действием внешнего давления p_1 . Под его действием происходит деформация оболочки, она сжимается, оказывая действие на шар, находящийся внутри нее с давлением p_2 . Шар на нее действует с тем же давлением.

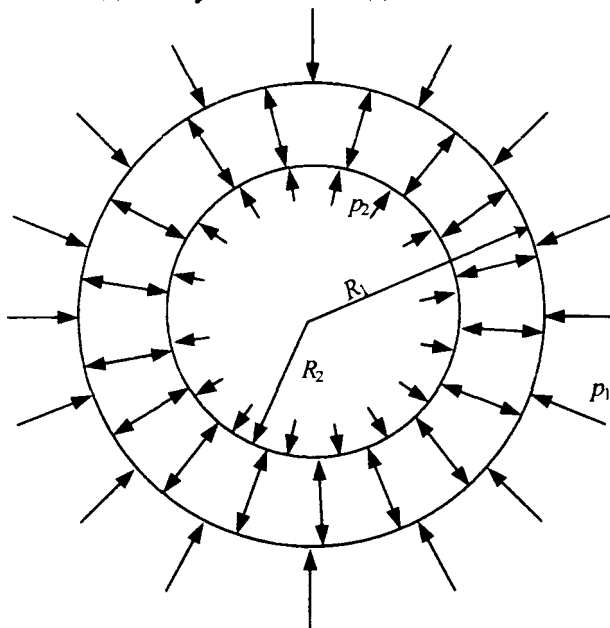


Рис. 2. Модель сферы и шара внутри нее, находящейся под действием внешнего давления

Цели решения данной задачи:

- 1) найти давление, которое оказывает внешняя сфера на шар внутри нее, считая внешнее давление известным;
- 2) найти совместную деформацию сферы и шара.

Полагая в формуле (5) $r = R_2$, где под R_2 понимается внутренний радиус внешней сферы, из радиальной компоненты тензора деформации получаем уравнение, линейное относительно неизвестного давления p_2 . Предположим, что упругие модули σ и E одинаковы для всех материалов модели.

$$\frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_1^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = -p_2 \frac{1-2\sigma}{E}. \quad (6)$$

Решая это уравнение, находим, что $p_2 = p_1$, т. е. как для однородного шара. Это естественный результат, подтверждающий правильность математического описания модели. В реальности модули Юнга E материалов и σ различны, что и наблюдается в реальном суставе человека. Это будет учитываться при рассмотрении уравнения (6) при помощи индексов. Для внешней оболочки индекс 1, для шара – 2.

$$\frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma_1}{E_1} - \frac{R_1^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma_1}{E_1} = -p_2 \frac{1-2\sigma_2}{E_2}. \quad (7)$$

Введем обозначения $\frac{1-2\sigma_i}{E_i} = a_i$, $\frac{1+\sigma_i}{E_i} = b_i$, $R_i^3 = d_i$, ($i = 1, 2$), $\frac{1}{R_{i+1}^3 - R_i^3} = c_i$ ($i=1$).

В результате введенных выше обозначений, уравнение (7) принимает вид

$$c_1 a_1 (p_1 d_1 - p_2 d_2) - d_1 c_1 b_1 (p_1 - p_2) = -p_2 a_2. \quad (8)$$

Перепишем данное уравнение в стандартном виде:

$$p_2(d_1c_1b_1 - d_2c_1a_1 + a_2) = p_1(d_1c_1b_1 - d_1c_1a_1). \quad (8')$$

Решая полученное линейное уравнение относительно неизвестного p_2 , находим давление внутри сферы на шар.

$$p_2 = p_1 \frac{d_1c_1(b_1 - a_1)}{d_1c_1b_1 - d_2c_1a_1 + a_2}. \quad (9)$$

Если ввести обозначения $h_2 = d_1c_1b_1 - d_2c_1a_1 + a_2$ и $g_1 = d_1c_1a_1 - d_1c_1b_1$, уравнение (8') и его решение (9) запишутся в компактном виде:

$$p_2h_2 = -p_1g_1, \quad p_2 = -p_1 \frac{g_1}{h_2}. \quad (9')$$

Подставляя найденные значения давления на среднюю сферу и шар в формулу (5), получаем распределения деформаций внутри внешней сферы и шара соответственно. Ввиду громоздкости получаемых выражений, мы их здесь не приводим. Построим графики при значениях, соответствующих значениям реальных констант в тазобедренном суставе человека.

Усложним теперь модель и рассмотрим сферу внутри сферы. Внешняя сфера будет соответствовать хрящу, внутренняя – надкостнице и кости. Внутри предполагаем, имеется некоторое небольшое давление губчатого вещества и костного мозга.

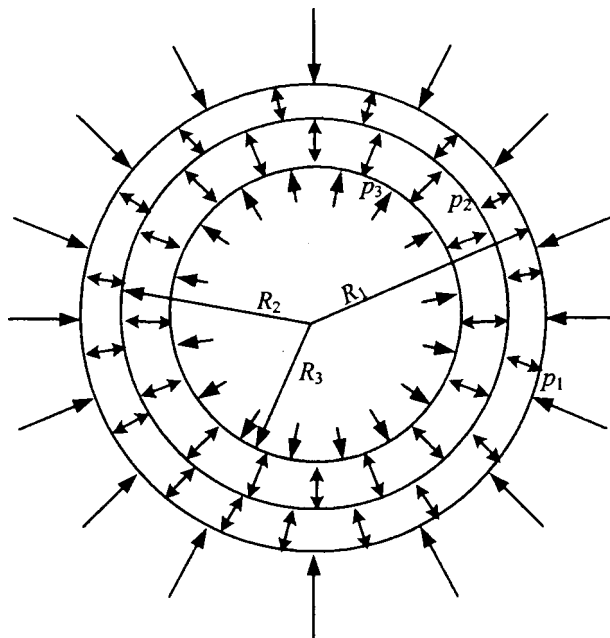


Рис. 3. Модель двух сфер и шара внутри, находящихся под действием внешнего давления

Рассмотрим две оболочки и шар внутри. Они находятся под внешним давлением p_1 . Под его действием происходит деформация оболочки, она сжимается, оказывая действие на среднюю сферу p_2 . Средняя сфера, в соответствии с третьим законом Ньютона действует на внешнюю сферу с тем же по модулю давлением p_2 . В свою очередь, средняя сфера, под действием давления p_2 действует на шар, находящийся внутри нее с давлением p_3 . Шар на нее действует с тем же давлением.

Полагая в формуле (5) $r = R_i$, ($i = 2, 3$) где под R_i понимается внутренний радиус внешней и средней сфер, из радиальной компоненты тензора деформации получаем систему двух уравнений, линейных относительно неизвестных давлени-

ний p_2 и p_3 .

$$\begin{cases} \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_1^3(p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = \\ = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_3^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\ \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_2^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = -p_3 \frac{1-2\sigma}{E}. \end{cases} \quad (10)$$

Учтем, при рассмотрении системы уравнений то, что модули Юнга материалов и σ различны с помощью индексов: для внешней оболочки индекс 1, для внутренней – 2, для шара – 3.

Тогда система уравнений (10) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma_1}{E_1} - \frac{R_1^3(p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma_1}{E_1} = \\ = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_3^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma_2}{E_2}, \\ \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_2^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma_2}{E_2} = -p_3 \frac{1-2\sigma_3}{E_3}. \end{cases} \quad (11)$$

Введем аналогично обозначения: $\frac{1-2\sigma_i}{E_i} = a_i$, $\frac{1+\sigma_i}{E_i} = b_i$, $R_i^3 = d_i$, ($i = 1, 2, 3$),

$$\frac{1}{R_{i+1}^3 - R_i^3} = c_i \quad (i=1, 2).$$

В введенных выше обозначениях, система уравнений (11) принимает вид:

$$\begin{cases} c_1 a_1 (p_1 d_1 - p_2 d_2) - d_1 c_1 b_1 (p_1 - p_2) = \\ = c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_3 c_2 b_2 (p_2 - p_3), \\ c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_2 c_2 b_2 (p_2 - p_3) = -p_3 a_3. \end{cases} \quad (12)$$

Так как давление, прикладываемое к внешней сфере p_1 , известно, перепишем систему уравнений (12), линейную относительно неизвестных давлений p_2 и p_3 в стандартной форме записи.

$$\begin{cases} p_2 (d_1 c_1 b_1 - d_2 c_1 a_1 - d_2 c_2 a_2 + d_3 c_2 b_2) + p_3 (d_3 c_2 a_2 - d_3 c_2 b_2) = p_1 (d_1 c_1 b_1 - d_1 c_1 a_1), \\ p_2 (d_2 c_2 a_2 - d_2 c_2 b_2) + p_3 (d_2 c_2 b_2 - d_3 c_2 a_2 + a_3) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Далее решаем данную линейную систему уравнений по формулам Крамера, находим неизвестные давления p_2 и p_3 :

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} p_1 (d_1 c_1 b_1 - d_1 c_1 a_1) & d_3 c_2 a_2 - d_3 c_2 b_2 \\ 0 & d_2 c_2 b_2 - d_3 c_2 a_2 + a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 c_1 b_1 - d_2 c_1 a_1 - d_2 c_2 a_2 + d_3 c_2 b_2 & d_3 c_2 a_2 - d_3 c_2 b_2 \\ d_2 c_2 a_2 - d_2 c_2 b_2 & d_2 c_2 b_2 - d_3 c_2 a_2 + a_3 \end{vmatrix}}, \quad (14)$$

$$p_3 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 c_1 b_1 - d_2 c_1 a_1 - d_2 c_2 a_2 + d_3 c_2 b_2 & p_1 (d_1 c_1 b_1 - d_1 c_1 a_1) \\ d_2 c_2 a_2 - d_2 c_2 b_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d_1 c_1 b_1 - d_2 c_1 a_1 - d_2 c_2 a_2 + d_3 c_2 b_2 & d_3 c_2 a_2 - d_3 c_2 b_2 \\ d_2 c_2 a_2 - d_2 c_2 b_2 & d_2 c_2 b_2 - d_3 c_2 a_2 + a_3 \end{vmatrix}}.$$

Систему уравнений (13) и ее решение (14) можно представить в более компактном виде, если ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} e_i &= d_{i-1}c_{i-1}b_{i-1} + d_{i+1}c_i b_i - d_i c_{i-1} a_{i-1} - d_i c_i a_i, \\ f_i &= d_i c_{i-1} a_{i-1} - d_i c_{i-1} b_{i-1}, \\ g_i &= d_i c_i a_i - d_i c_i b_i, \\ h_i &= d_{i-1} c_{i-1} b_{i-1} - d_i c_{i-1} a_{i-1} + a_i, \end{aligned} \quad (*)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда система (13) принимает вид

$$\begin{cases} p_2 e_2 + p_3 f_3 = -p_1 g_1, \\ p_2 g_2 + p_3 h_3 = 0. \end{cases} \quad (13')$$

А ее решение (14) запишется так:

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} -p_1 g_1 & f_3 \\ 0 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 \\ g_2 & h_3 \end{vmatrix}}, \quad p_3 = \frac{\begin{vmatrix} e_2 & -p_1 g_1 \\ g_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 \\ g_2 & h_3 \end{vmatrix}}. \quad (14')$$

Подставляя найденные значения давления на среднюю сферу и шар в формулу (5), получаем распределения деформаций внутри внешней сферы, внутренней и шара соответственно. Ввиду громоздкости получаемых выражений, мы их здесь не приводим.

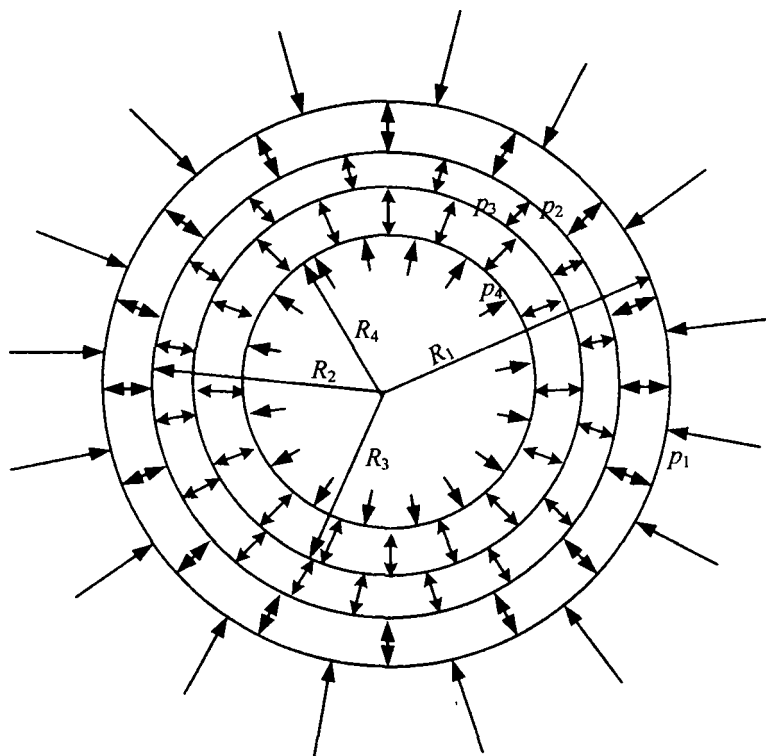


Рис. 4. Модель трех сфер и шара внутри, находящихся под действием внешнего давления

Для проверки обобщения усложним еще модель и рассмотрим две сферы внутри сферы, т. е. четыре взаимодействующих тела.

Рассмотрим три оболочки и шар внутри. Они находятся под внешним давлением p_1 . Под его действием происходит деформация оболочки, она сжимается, оказывая действие на среднюю сферу p_2 . Средняя сфера, в соответствии с третьим

законом Ньютона, действует на внешнюю сферу с тем же по модулю давлением p_2 . В свою очередь, средняя сфера, под действием давления p_2 действует на следующую сферу с давлением p_3 , которая действует на шар, находящийся внутри нее с давлением p_4 . Шар на нее действует с тем же давлением.

Полагая в формуле (5) $r = R_i$, ($i = 2, 3, 4$) где под R_i понимается внутренний радиус внешней и средней сфер, из радиальной компоненты тензора деформации получаем систему трех уравнений, линейных относительно неизвестных давлений p_2 , и p_3 и p_4 :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_1^3(p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} &= \\ = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_3^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\ \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_2^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} &= \\ = \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_4^3(p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\ \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_3^3(p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} &= -p_4 \frac{1-2\sigma}{E}. \end{aligned} \right. \quad (10')$$

С учетом различий упругих модулей сфер, система уравнений (10') принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma_1}{E_1} - \frac{R_1^3(p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma_1}{E_1} &= \\ = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_3^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma_2}{E_2}, \\ \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_2^3(p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma_2}{E_2} &= \\ = \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma_3}{E_3} - \frac{R_4^3(p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma_3}{E_3}, \\ \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma_3}{E_3} - \frac{R_3^3(p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma_3}{E_3} &= -p_4 \frac{1-2\sigma_4}{E_4}. \end{aligned} \right. \quad (11')$$

— введем обозначения: $\frac{1-2\sigma_i}{E_i} = a_i$, $\frac{1+\sigma_i}{E_i} = b_i$, $R_i^3 = d_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$),

$$\frac{1}{R_{i+1}^3 - R_i^3} = c_i \quad (i=1, 2, 3).$$

В введенных выше обозначениях, система уравнений (11') принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} c_1 a_1 (p_1 d_1 - p_2 d_2) - d_1 c_1 b_1 (p_1 - p_2) &= c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_2 c_2 b_2 (p_2 - p_3), \\ c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_2 c_2 b_2 (p_2 - p_3) &= c_3 a_3 (p_3 d_3 - p_4 d_4) - d_3 c_3 b_3 (p_3 - p_4), \\ c_3 a_3 (p_3 d_3 - p_4 d_4) - d_3 c_3 b_3 (p_3 - p_4) &= -p_4 a_4. \end{aligned} \right. \quad (12')$$

Так как давление, прикладываемое к внешней сфере p_1 известно, перепишем систему уравнений (12'), линейную относительно неизвестных давлений p_2 и p_3 в стандартной форме записи.

$$\begin{cases} p_2(d_1c_1b_1 + d_3c_2b_2 - d_2c_1a_1 - d_2c_2a_2) + p_3(d_3c_2a_2 - d_3c_2b_2) = \\ = p_1(d_1c_1b_1 - d_1c_1a_1), \\ p_2(d_2c_2a_2 - d_2c_2b_2) + p_3(d_2c_2b_2 + d_4c_3b_3 - d_3c_2a_2 - d_3c_3a_3) + \\ + p_4(d_4c_3a_3 - d_4c_3b_3) = 0, \\ p_3(d_3c_3a_3 - d_3c_3b_3) + p_4(d_3c_3b_3 + a_4 - d_4c_3a_3) = 0. \end{cases}$$

Систему уравнений (13) можно представить в более компактном виде, если ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} e_i &= d_{i-1}c_{i-1}b_{i-1} + d_{i+1}c_ib_i - d_ic_{i-1}a_{i-1} - d_ic_ia_i, \\ f_i &= d_ic_{i-1}a_{i-1} - d_ic_{i-1}b_{i-1}, \\ g_i &= d_ic_ia_i - d_ic_ib_i, \\ h_i &= d_{i-1}c_{i-1}b_{i-1} - d_ic_{i-1}a_{i-1} + a_i, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} p_2e_2 + p_3f_3 = -p_1g_1, \\ p_2g_2 + p_3e_3 + p_4f_4 = 0, \\ p_3g_3 + p_4h_4 = 0. \end{cases}$$

Далее решаем данную линейную систему уравнений по формулам Крамера, находим неизвестные давления p_2 , p_3 и p_4 .

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} -p_1g_1 & f_3 & 0 \\ 0 & e_3 & f_4 \\ 0 & g_3 & h_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 \\ 0 & g_3 & h_4 \end{vmatrix}}, \quad p_3 = \frac{\begin{vmatrix} e_2 & -p_1g_1 & 0 \\ g_2 & 0 & f_4 \\ 0 & 0 & h_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 \\ 0 & g_3 & h_4 \end{vmatrix}}, \quad p_4 = \frac{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & -p_1g_1 \\ g_2 & e_3 & 0 \\ 0 & g_3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 \\ 0 & g_3 & h_4 \end{vmatrix}}.$$

Подставляя найденные значения давления на среднюю сферу и шар в формулу (5), получаем распределения деформаций внутри внешней сферы, внутренней и шара соответственно. Ввиду громоздкости получаемых выражений, мы их здесь не приводим. Построим графики при значениях, соответствующих значениям реальных констант в тазобедренном суставе человека.

Аналогично можно обобщить данное рассмотрение и на большее произвольное конечное количество оболочек n .

Рассмотрим n оболочек и шар внутри. Они находятся под внешним давлением p_1 . Под его действием происходит деформация внешней оболочки, она сжимается, оказывая действие на среднюю сферу p_2 . Средняя сфера, в соответствии с третьим законом Ньютона действует на внешнюю сферу с тем же по модулю давлением p_2 . В свою очередь, средняя сфера, под действием давления p_2 действует на следующую сферу и так далее до тех пор, пока давление не передается с последней сферы на шар. Он находится внутри с давлением p_n . Шар на последнюю сферу действует с тем же давлением.

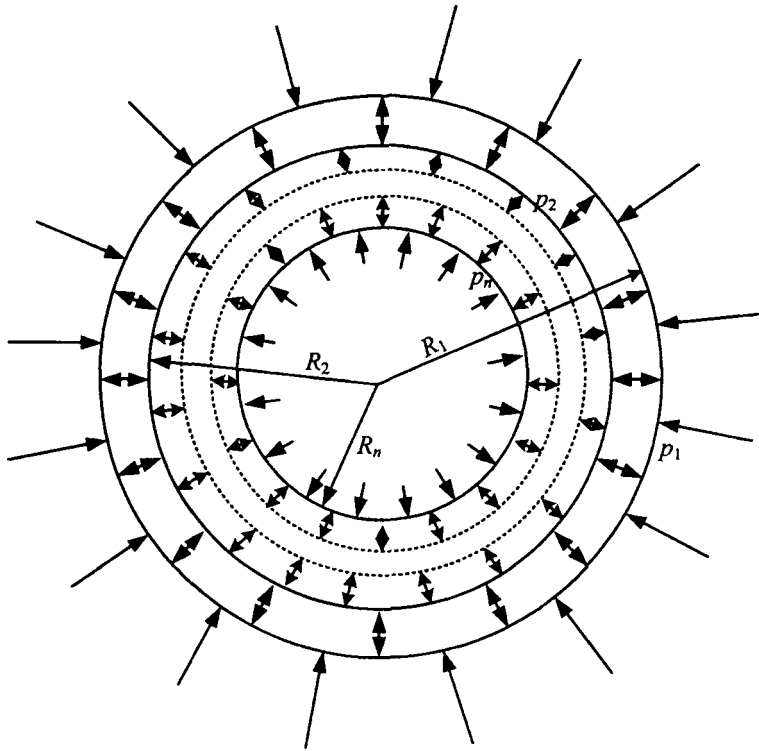


Рис. 5 Модель произвольного количества сфер и шара внутри них, находящихся под действием внешнего давления

Полагая в формуле (5) $r = R_i$, ($i = 2, 3, \dots, n$) где под R_i понимается внутренний радиус внешней и средней сфер, из радиальной компоненты тензора деформации получаем систему n уравнений, линейных относительно неизвестных давлений p_i ($i = 2, 3, \dots, n$).

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_1^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = \\
 & = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_2^3 (p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\
 & \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_2^3 (p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = \\
 & = \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_3^3 (p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\
 & \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_3^3 (p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = \\
 & = \frac{p_4 R_4^3 - p_5 R_5^3}{R_5^3 - R_4^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_4^3 (p_4 - p_5)}{R_5^3 - R_4^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E}, \\
 & \dots \\
 & \frac{p_{n-1} R_{n-1}^3 - p_n R_n^3}{R_n^3 - R_{n-1}^3} \cdot \frac{1-2\sigma}{E} - \frac{R_{n-1}^3 (p_{n-1} - p_n)}{R_n^3 - R_{n-1}^3} \cdot \frac{1+\sigma}{E} = -p_n \frac{1-2\sigma}{E}.
 \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Учитывая различие модулей Юнга и σ материалов, учтем это при рассмотрении системы уравнений при помощи индексов. Для внешней оболочки индекс

1, для внутренней – 2, и так далее, для шара – n .

Тогда система уравнений (15) принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_1}{E_1} - \frac{R_1^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{1 + \sigma_1}{E_1} = \\ & = \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_3^3 (p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1 + \sigma_2}{E_2}, \\ & \frac{p_2 R_2^3 - p_3 R_3^3}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_2}{E_2} - \frac{R_2^3 (p_2 - p_3)}{R_3^3 - R_2^3} \cdot \frac{1 + \sigma_2}{E_2} = \\ & = \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_3}{E_3} - \frac{R_4^3 (p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1 + \sigma_3}{E_3}, \\ & \frac{p_3 R_3^3 - p_4 R_4^3}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_3}{E_3} - \frac{R_3^3 (p_3 - p_4)}{R_4^3 - R_3^3} \cdot \frac{1 + \sigma_3}{E_3} = \\ & = \frac{p_4 R_4^3 - p_5 R_5^3}{R_5^3 - R_4^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_4}{E_4} - \frac{R_5^3 (p_4 - p_5)}{R_5^3 - R_4^3} \cdot \frac{1 + \sigma_4}{E_4}, \\ & \dots \\ & \frac{p_{n-1} R_{n-1}^3 - p_n R_n^3}{R_n^3 - R_{n-1}^3} \cdot \frac{1 - 2\sigma_{n-1}}{E_{n-1}} - \frac{R_n^3 (p_{n-1} - p_n)}{R_n^3 - R_{n-1}^3} \cdot \frac{1 + \sigma_{n-1}}{E_{n-1}} = -p_n \frac{1 - 2\sigma_n}{E_n}. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Введем обозначения: $\frac{1 - 2\sigma_i}{E_i} = a_i$, $\frac{1 + \sigma_i}{E_i} = b_i$, $R_i^3 = d_i$, $\frac{1}{R_{i+1}^3 - R_i^3} = c_i$ ($i = 1, 2,$

3, ..., n).

В введенных выше обозначениях, система уравнений (7) принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & c_1 a_1 (p_1 d_1 - p_2 d_2) - d_1 c_1 b_1 (p_1 - p_2) = c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_3 c_2 b_2 (p_2 - p_3), \\ & c_2 a_2 (p_2 d_2 - p_3 d_3) - d_2 c_2 b_2 (p_2 - p_3) = c_3 a_3 (p_3 d_3 - p_4 d_4) - d_4 c_3 b_3 (p_3 - p_4), \\ & c_3 a_3 (p_3 d_3 - p_4 d_4) - d_3 c_3 b_3 (p_3 - p_4) = c_4 a_4 (p_4 d_4 - p_5 d_5) - d_5 c_4 b_4 (p_4 - p_5), \\ & \dots \\ & c_{n-1} a_{n-1} (p_{n-1} d_{n-1} - p_n d_n) - d_{n-1} c_{n-1} b_{n-1} (p_{n-1} - p_n) = -p_n a_n. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Так как давление, прикладываемое к внешней сфере p_1 известно, перепишем систему уравнений (8), линейную относительно неизвестных давлений p_2, p_3, \dots, p_n в стандартной форме записи.

$$\left\{ \begin{aligned} & p_2 (d_1 c_1 b_1 + d_3 c_2 b_2 - d_2 c_1 a_1 - d_2 c_2 a_2) + p_3 (d_3 c_2 a_2 - d_3 c_2 b_2) = \\ & = p_1 (d_1 c_1 b_1 - d_1 c_1 a_1), \\ & p_2 (d_2 c_2 a_2 - d_2 c_2 b_2) + p_3 (d_2 c_2 b_2 + d_4 c_3 b_3 - d_3 c_2 a_2 - d_3 c_3 a_3) + \\ & + p_4 (d_4 c_3 a_3 - d_4 c_3 b_3) = 0, \\ & p_3 (d_3 c_3 a_3 - d_3 c_3 b_3) + p_4 (d_3 c_3 b_3 + d_5 c_4 b_4 - d_4 c_3 a_3 - d_4 c_4 a_4) + \\ & + p_5 (d_5 c_4 a_4 - d_5 c_4 b_4) = 0, \\ & \dots \\ & p_{n-1} (d_{n-1} c_{n-1} a_{n-1} - d_{n-1} c_{n-1} b_{n-1}) + p_n (d_{n-1} c_{n-1} b_{n-1} - d_n c_{n-1} a_{n-1} + a_n) = 0. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Систему уравнений (13) можно представить в более компактном виде, если ввести следующие обозначения:

$$e_i = d_{i-1} c_{i-1} b_{i-1} + d_{i+1} c_i b_i - d_i c_{i-1} a_{i-1} - d_i c_i a_i,$$

$$\begin{aligned}
 f_i &= d_i c_{i-1} a_{i-1} - d_i c_{i-1} b_{i-1}, \\
 g_i &= d_i c_i a_i - d_i c_i b_i, \\
 h_i &= d_{i-1} c_{i-1} b_{i-1} - d_i c_{i-1} a_{i-1} + a_i,
 \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases}
 p_2 e_2 + p_3 f_3 = -p_1 g_1, \\
 p_2 g_2 + p_3 e_3 + p_4 f_4 = 0, \\
 p_3 g_3 + p_4 e_4 + p_5 f_5 = 0, \\
 \dots \\
 p_{n-1} g_{n-1} + p_n h_n = 0.
 \end{cases} \quad (19)$$

Далее, решаем данную линейную систему уравнений, состоящую из $n - 1$ уравнения с $n - 1$ неизвестным, по формулам Крамера, находим неизвестные давления $p_2, p_3 \dots p_n$:

$$p_2 = \frac{
 \begin{vmatrix}
 -p_1 g_1 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n
 \end{vmatrix}
 }{
 \begin{vmatrix}
 e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n
 \end{vmatrix}
 }, \quad (20)$$

$$p_3 = \frac{
 \begin{vmatrix}
 e_2 & -p_1 g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 g_2 & 0 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n
 \end{vmatrix}
 }{
 \begin{vmatrix}
 e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n
 \end{vmatrix}
 },$$

$$\begin{aligned}
p_4 &= \frac{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & -p_1 g_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & 0 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{vmatrix}}, \\
p_5 &= \frac{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 & -p_1 g_1 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{vmatrix}}, \\
&\dots \\
p_n &= \frac{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & -p_1 g_1 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_2 & f_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & e_3 & f_4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & g_3 & e_4 & f_5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & g_{n-1} & h_n \end{vmatrix}}.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения давления на промежуточные сферы и шар в уравнения (5), получаем распределения деформаций внутри внешней сферы, внутренней, следующей и так далее до шара соответственно. Ввиду громоздкости получаемых выражений, мы их здесь не приводим. Также можно получить и значения напряжений.

Таким образом, получены тензоры деформаций (радиальная компонента) для структуры, состоящей из двух сфер и шара внутри.

Применим полученные теоретические результаты к моделированию тазобедренного сустава человека.

Возьмем модель многослойной толстостенной сферы с произвольным коли-

чеством слоев, разработанную выше и будем фиксировать количество слоев n .

При $n = 1$ имеем заполненный шар внутри. Данная модель не является адекватной реальному человеческому суставу. Но может являться моделью протеза, к примеру, металлического без покрытия полимерными пленками. В этом случае давление везде постоянно и равно внешнему, а распределение напряжения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p_1, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} = -p_1. \end{aligned} \quad (21)$$

где $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}$ – угловые компоненты тензора напряжений.

Аналогично, получаем компоненты тензора деформаций.

$$\begin{aligned} u_{rr} &= -p_1 \cdot \frac{1-2\sigma}{E}, \\ u_{\theta\theta} &= u_{\varphi\varphi} = -p_1 \cdot \frac{1-2\sigma}{E}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из полученных зависимостей (21) и (22) видно, что компоненты тензора деформаций и напряжений являются линейно зависимыми от внешнего давления p_1 .

Построим зависимость деформаций при фиксированном давлении $p_1 = 5000$ Па.

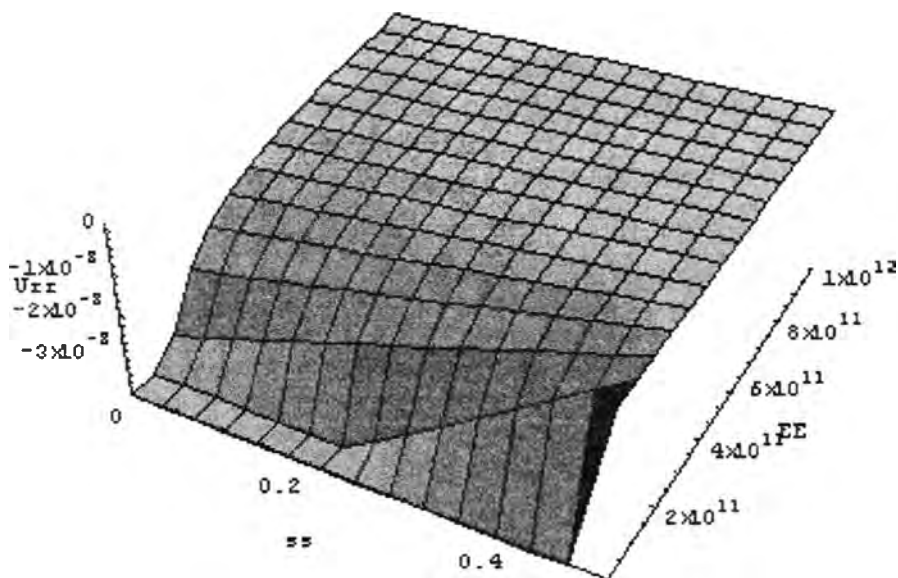


Рис. 6. Зависимость тензора деформаций от модулей упругости материала

Численные расчеты с фиксированными параметрами, взятыми ранее, показывают, что $u_{rr} = u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = -1,68 \cdot 10^{-6}$.

Подобные графики важны при выборе материалов для протезирования и изучении вопросов старения и деградации материалов протезов или опорно-двигательного аппарата человека. На графике сразу качественно видны тенденции убывания тензора деформаций по абсолютной величине при увеличении значения коэффициента Пуассона и увеличении модуля Юнга.

Проведем численные оценки возникающих напряжений и деформаций в этой модели сустава. Для этого используем численные данные, полученные экспериментально на биологическом материале человека [1, 9, 10]. Они имеют сле-

дующие значения:

- модуль Юнга (упругости) кости $E = 10^9$ Па;
- коэффициент Пуассона $\sigma = 0.332$;
- внешний радиус $R_1 = 1,4 \cdot 10^{-3}$ м;
- внутренний радиус $R_2 = 1,3 \cdot 10^{-3}$ м.

На этом этапе моделирования внешнее давление примем равным

$p_1 = 5 \cdot 10^3$ Н, внутреннее $p_2 = 4,2 \cdot 10^5$ Н.

В результате численных расчетов в СКМ Mathematica 6.0.3.¹ получаем зависимости от r .

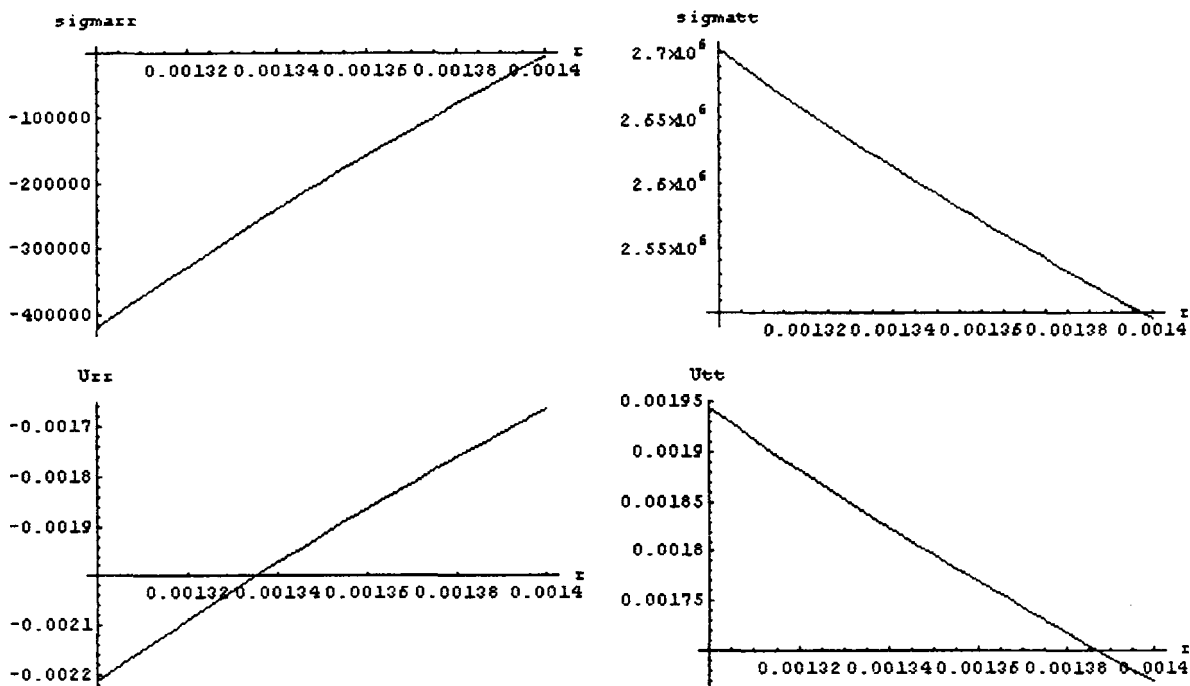


Рис. 7. Численные оценки возникающих напряжений (верхние два графика, слева – радиальные, справа – тангенциальные) и деформаций (нижние два графика, слева – радиальные, справа – тангенциальные) в модели однослойной сферы при заданных числовых характеристиках

Таким образом, видно, что при заданных значениях параметров напряжения в слое сферы достаточно велики, тогда как деформации незначительны, на порядок меньше геометрических размеров модели сустава. Значения радиальных деформаций возрастают от внутренней части к внешней по всему слою сферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврюшенко Н.С. Материаловедческие аспекты создания эрозионнстойких узлов трения искусственных суставов человека: дис. д-ра техн. наук. – М.: 2000. – 234 с.
2. Shilko S.V., Gavrilenko S.L., Khizhenok V.F., Stakan I.N., Salivonchik S.P. A method for defining flow and rheological constants of viscoplastic biomaterials. Part 2 // Russian Journal of Biomechanics. – 2003. – Vol. 7, № 2. – P. 11–23.
3. Шилько С.В., Плескачевский Ю.М. Механика адаптивных композитов и биоматериалов // Материалы, технологии, инструмент. – 2003. – № 4. – С. 5–16.

¹ Лицензионная версия данной программы приобретена за счет средств Гранта Президента Российской Федерации, номер МК-2524.2008.1.

4. Pleskachevsky Yu. M., Shilko S.V., Ermakov S.F. Methods of wear reducing based on bioprototypes of tibiogjoints // *Journal of Synthetic Lubrication*. – 2005. – Vol. 22, № 4. – P. 225–236.
5. Борисов А.В. Приближенные математические модели деформируемых суставов человека и численная оценка возникающих деформаций. // Научные труды международной научно-практической конференции ученых МАДИ(ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ. 17 - 18 июня 2008 года. Том 4. Педагогика и методика. Москва; Луганск: МАДИ (ГТУ), РГАУ-МСХА, ЛНАУ, 2008. – С. 160-171.
6. Borisov A.V., Chigarev A.V. Problems of Strength at Loading Multilayer Bones of the Person. // *Mechanika 2009. Proceedings of the 14th international conference. April 2-3, 2009 Kaunas University of Technology, Lithuania.* – Technologija Kaunas. 2009. – P. 76-79.
7. Борисов А.В. Моделирование опорно-двигательного аппарата человека и применение полученных результатов для разработки модели антропоморфного робота. – М.: Спутник +, 2009:–212 с.
8. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987:–246 с.
9. http://www.rabus.ru/Gordon/СНАРТ_02/СНАРТ_02.HTM, дата обращения 25.05.2010.
10. Maganaris C.N., Paul J.P. Tensile properties of the in vivo human gastrocnemius tendon decade // *J. Biomech.* – 2002. – № 35. – P. 1639-1646.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ПРОЕКТИРОВАНИЮ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Бокун Г.С., Вихренко В.С., Гапанюк Д.В.

Белорусский государственный технологический университет, Минск

Как было показано в [1, 2], для достижения целей курса «Теория механизмов и машин» в части, касающейся изучения методов кинематического и динамического анализа и синтеза механизмов, наиболее целесообразно использование вычислительных пакетов общего назначения, например Mathcad. Имеющееся на кафедре электронные пособия по применению Mathcad позволяют ~ 30% студентам осуществлять проектирование на основании компьютерных технологий [3].

С целью предоставления возможности всем студентам использовать инновационные методы при изучении курса ТММ нами разработан и апробирован в одной из учебных групп компьютерный практикум, состоящий из трех заданий, проверенных в дисплейных классах университета.

На первом занятии осуществляется расчет функций положения и ориентации звеньев в зависимости от угла поворота кривошипа в четырехшарнирном механизме (рис. 1).

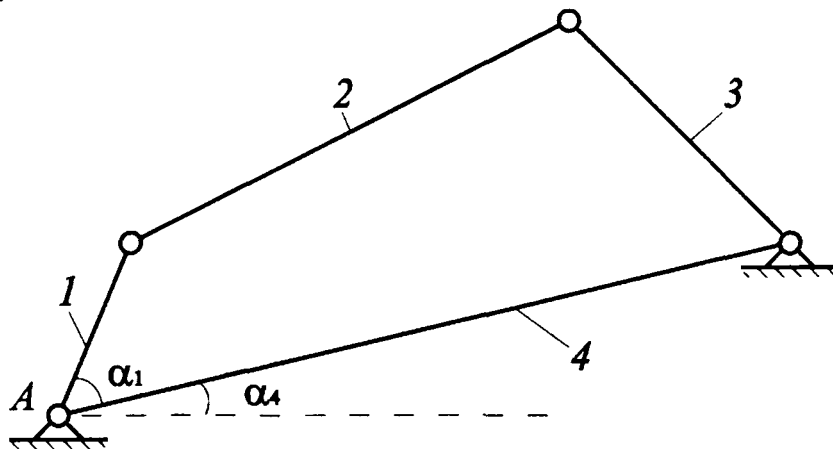


Рис. 1. Схема базового положения механизма

Второе занятие посвящается компьютерному построению схемы механизма, определению его крайних положений и созданию видеофайла, отражающего движение механизма.

На третьем занятии осуществляется расчет передаточных функций, рассматриваются особенности проектирования других четырехзвенных механизмов (рис. 2).

Задачи динамического анализа и синтеза студенты решают уже самостоятельно, используя электронное пособие по проектированию четырехзвенных рычажных механизмов средствами Mathcad. Первая часть этого же пособия используется для проведения компьютерного практикума.

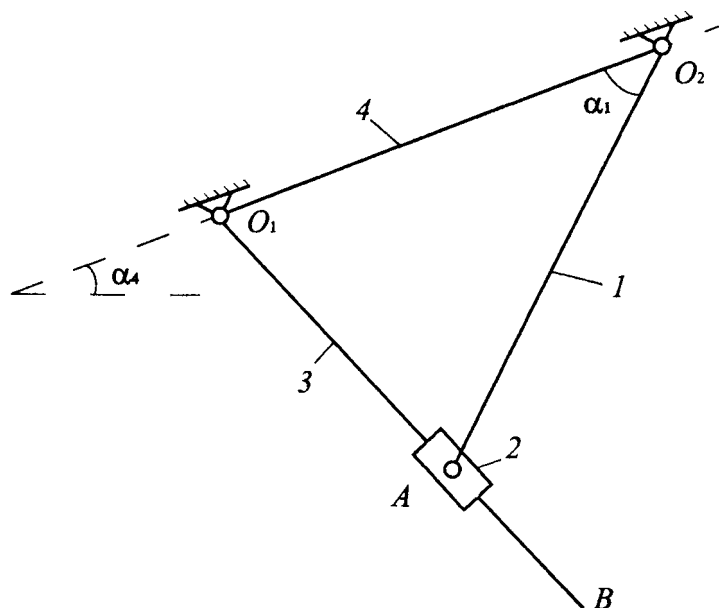


Рис. 2. Параметры α_1 и α_4 для изображения базовых положений кривошипно-ползунного и кривошипно-кулисного механизмов

С целью индивидуализации работы в аудитории задания по проектированию составляются так, чтобы каждый студент исходил из своего базового положения механизма, характеризуемого углами α_1 и α_4 (см. рис. 1). Вычертив схему механизма в базовом положении, необходимо вести углы φ_1 , φ_2 и φ_3 , характеризующие ориентацию звеньев. Для уменьшения углы, задающие ориентацию звеньев, должны удовлетворять дополнительным условиям: быть острыми, отсчитываться против хода часовой стрелки от неподвижных вертикальных либо горизонтальных линий. Выполнение этого требования снимает множество известных проблем и позволяет легко записать систему уравнений для определения функций $\varphi_2(\varphi_1)$ и $\varphi_3(\varphi_1)$. В силу сказанного, система уравнений, возникающая после реализации метода замкнутых контуров, у каждого студента оказывается другой по виду.

Далее обсуждается изложенный в пособии подход к решению полученной системы уравнений с помощью оператора Given, который и будет использоваться на всех этапах проектирования и должен быть усвоен с самого начала.

Программирование здесь сводится лишь к редактированию представленного в пособии фрагмента программы под свои уравнения определяющей системы. Для решения последней необходимо задать начальное приближение для корней. В качестве начального приближения используются величины углов φ_2 и φ_3 , определенные их измерением для базового положения.

После расчета функций $\varphi_2(\varphi_1)$ и $\varphi_3(\varphi_1)$ в форме одномерных массивов для 360 положений механизма решается задача определения функций положения. После определения положения кинематических пар и центров тяжести звеньев, как функций угла поворота кривошипа, осуществляется проверка согласованности полученных результатов, представляемых соответствующими графиками.

На втором занятии обсуждаются компьютерные подходы к построению схемы механизма и созданию видеофильма, отражающего его работу. Этому вопросу уделяется большое внимание, так как относится он к визуализации полученных ранее уравнений движения звеньев и точек механизма. Так что согласованное, реальное движение на экране монитора возникает в случае, когда все уравнения правильно

составлены, решены и отобраны ветви решения, соответствующие одному и тому же варианту сборки механизма. Далее рассматриваются процедуры, используемые для определения крайних положений механизма, а так же переформатирование всех массивов чтобы были выделены отдельно рабочий и холостой ходы.

На заключительном занятии компьютерного практикума производится редактирование фрагментов программ, посвященных расчету первых и вторых передаточных функций. Эти функции рассчитываются двумя способами: путем численного дифференцирования функций положения и в результате решения системы линейных уравнений, образующейся при дифференцировании по времени системы исходных соотношений. С помощью операции GRAF результаты обоих способов расчета сравниваются между собой. В дальнейшем эти результаты необходимо будет сравнить для одного положения механизма с найденными графоаналитическим способом.

В конце занятия необходимо получить решение системы уравнений, описывающих движение другого рычажного механизма (см. рис. 2) и затем уже самостоятельно выполнить его кинетический анализ. Этим представляется возможным более глубоко и результативно использовать компьютерные расчеты, когда от редактирования исходной программы надо перейти к подготовке самостоятельного программного продукта. Эту часть работы студенты выполняют уже на собственных персональных компьютерах, так же как и работу по выполнению на компьютере динамического анализа и синтеза механизмов, используя соответствующие разделы электронного пособия. Для того, чтобы студенты могли видеть результаты, к которым они должны прийти в результате компьютерных расчетов, помимо изложенной технологии, нами реализована еще одна. А именно, с привлечением матричных методов механики разработана программа, которая дает все результаты для всех вариантов, т. е. служит «черным ящиком», куда достаточно ввести исходные данные для α_1 и α_4 и получить все необходимые графики и таблицы.

Основная же технология направлена на то, чтобы при работе на компьютере студент изучал методы теории механизмов и машин. Для этого соответствующим образом адаптированы задания на расчетно-графические работы, где предусмотрено построение двенадцати положений, на основании которых строятся функции положения, получают первые передаточные функции и сравниваются с результатами компьютерного расчета.

Для одного положения механизма предусмотрено построение планов аналогов скоростей и ускорений с последующим сравнением результатов с полученными ранее во время компьютерного практикума.

Как показали результаты апробации практикума им создаются условия для дальнейшей эффективной самостоятельной работы студентов. Задачи динамического синтеза и анализа студенты решали самостоятельно, используя для этого собственные компьютеры. После чего они самостоятельно смогли осуществить динамический синтез и анализ шестизвенных механизмов. Отдельные студенты смогли учесть переменный характер сил производственных сопротивлений и реальную характеристику двигателя [4].

Как и ранее, самостоятельная работа организовывалась на базе двух технологий. В соответствии с первой надо для одного положения механизма провести вывод всех необходимых величин через углы, длины звеньев, аналоги скоростей. Далее, заменяя во всех выражениях простые переменные на элементы соответствующих массивов, выполняется компьютерный расчет для 360 положений.

В основу второй технологии положены методы аналитической механики, где в качестве базовых переменных используются декартовы координаты и проекции

сил. В этом случае все расчеты формализуются и фактически можно обойтись без построения расчетных схем и рисунков. В результате у студентов возникают осознанные представления о том, как устроены современные компьютерные пакеты, которые «сами» составляют и решают уравнения, моделирующие работу разнообразных машин и механизмов.

Можно сделать вывод, что введенный компьютерный практикум позволяет добиться достаточно эффективной инновации курса ТММ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокун, Г. С. Применение информационных технологий для учебного проектирования механизмов / Г. С. Бокун, В. С. Вихренко, С. А. Гляков // Теоретическая и прикладная механика: межведомственный сборник научно-методических статей. – Минск: БНТУ, 2005. – Вып. 18. – С. 215–220.
2. Особенности сближения учебного и реального проектирования механизмов на основе использования современных программных средств / Г. С. Бокун [и др.] // Труды БГТУ. Сер. VIII. Учеб.-метод. работа. – 2005. – Вып. VIII. – С. 63–65.
3. Компьютерная механика. Динамический и кинематический анализ механических систем: курс лекций / С. А. Гляков [и др.]; под ред. М. А. Журавкова. – Минск: БГУ, 2006. – 375 с.
4. Бокун, Г. С. Использование функциональных представлений Mathcad в задачах динамики по курсу ТММ // Теоретическая и прикладная механика: международн. научно-технич. журн. – Минск: БНТУ, 2010. – Вып. 25. – С. 312 – 316.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТОВ MathCAD И NASTRAN ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СХЕМ МЕХАНИЗМОВ И ИХ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Бокун Г.С., Гапанюк Д.В., Козырский Н.В.

Белорусский государственный технологический университет, Минск

Цель данной работы продемонстрировать построение рычажных механизмов с заданной кинематической схемой в Nastran и MathCAD, а также проведение кинематического анализа заданного механизма: вычисление функций положения, определение крайних положений, определение первых и вторых передаточных функций, сравнительный анализ полученных результатов.

Для построения механизма в среде MathCAD необходимо составить системы уравнений, определяющих положение звеньев механизма и координат их центров масс, для чего используем метод замкнутых контуров. Кинематическая схема механизма (рис. 1), длины всех звеньев и величина силы полезных сопротивлений P_{nc} , которая действует только на рабочем ходу, заданы по условию. Для нахождения координат всех необходимых точек (кинематических пар и центров масс каждого звена) в пакете MathCAD составим системы уравнений для каждой группы Ассура.

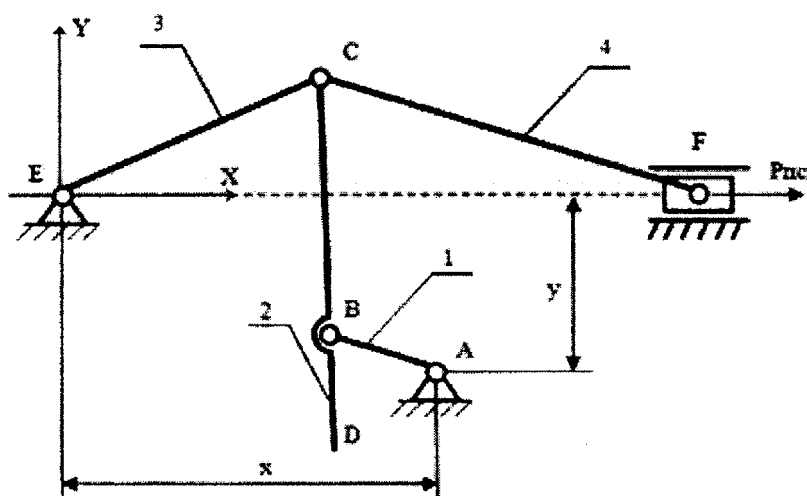


Рис. 1. Кинематическая схема механизма

$$\begin{array}{l}
 i := 0..362 \\
 \text{II}(0,1) \quad \left| \begin{array}{ll}
 xs1_i := x - 0.5 \cdot lab \cdot \sin(fi1_i) & xb_i := x - lab \cdot \sin(fi1_i) \\
 ys1_i := y + 0.5lab \cdot \cos(fi1_i) & yb_i := y + lab \cdot \cos(fi1_i)
 \end{array} \right. \quad (1)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Given} \\
 lec \cdot \cos(fi3) + lcb \cdot \sin(fi2) = xb_i \quad lec \cdot \cos(fi3) + 0.5 \cdot lcd \cdot \sin(fi2) = xs2 \\
 lec \cdot \sin(fi3) - lcb \cdot \cos(fi2) = yb_i \quad lec \cdot \sin(fi3) - 0.5 \cdot lcd \cdot \cos(fi2) = ys2 \\
 \text{II}(2,3) \quad \left| \begin{array}{lll}
 F(i) := \text{Find}(fi2, fi3, xs2, ys2) & fi2_i := F(i)_0 & fi3_i := F(i)_1 \quad xs2_i := F(i)_2 \quad ys2_i := F(i)_3 \\
 xs3_i := 0.5 \cdot lec \cdot \cos(fi3_i) & xc_i := lec \cdot \cos(fi3_i) & xd_i := lec \cdot \cos(fi3_i) + lcd \cdot \sin(fi2_i) \\
 ys3_i := 0.5 \cdot lec \cdot \sin(fi3_i) & yc_i := lec \cdot \sin(fi3_i) & yd_i := lec \cdot \sin(fi3_i) - lcd \cdot \cos(fi2_i)
 \end{array} \right. \quad (2)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Given} \\
 & x_c + lcf \cdot \sin(fi4) = x5 \quad x_c + 0.5 \cdot lcf \cdot \sin(fi4) = xs4 \\
 & y_c - lcf \cdot \cos(fi4) = 0 \quad y_c - 0.5 \cdot lcf \cdot \cos(fi4) = ys4 \\
 & F(i) := Fnd(fi4, x5, xs4, ys4) \\
 & fi4_i := F(i)_0 \quad x5_i := F(i)_1 \quad xs4_i := F(i)_2 \quad ys4_i := F(i)_3
 \end{aligned} \tag{3}$$

По вычисленным координатам кинематических пар и центров масс каждого звена строим механизм в произвольном положении, предварительно составив функциональные зависимости T_x (T_y).

$$\begin{aligned}
 k &:= 0..360 \quad k := \text{FRAME} \quad x_e := 0 \quad y_e := 0 \quad i := 1..7 \\
 T_{x_1} &:= x \quad T_{x_2} := x_{b_k} \quad T_{x_3} := x_{d_k} \quad T_{x_4} := x_{c_k} \quad T_{x_5} := 0 \quad T_{x_6} := x_{c_k} \quad T_{x_7} := x_{5_k} \\
 T_{y_1} &:= y \quad T_{y_2} := y_{b_k} \quad T_{y_3} := y_{d_k} \quad T_{y_4} := y_{c_k} \quad T_{y_5} := 0 \quad T_{y_6} := y_{c_k} \quad T_{y_7} := 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

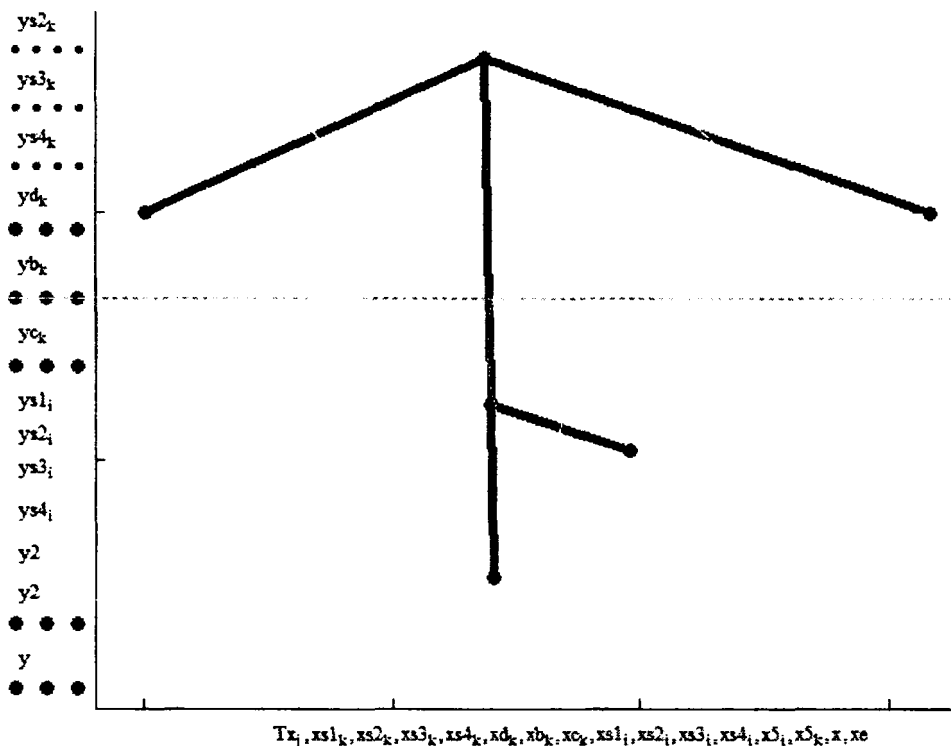


Рис. 2. Схема механизма построенная в MathCAD

Особенностью использования программы Nastran, для моделирования механизмов является то, что она не требует задания каких-либо уравнений, а следует задать лишь свойства, расположение, взаимодействие тел друг с другом и вид моделирования. Также Nastran предоставляет возможность автоматического измерения некоторых физических величин и построения их графиков в зависимости от времени. Средства моделирования Nastran позволяют создавать реалистичные тела и механизмы в четырёхмерном пространстве (X, Y, Z, t), в отличие от пакета MathCAD, где все построения двумерны. Произведём построение механизма с помощью инструментов Cylinder (🔧), Coord (📍), Box (📦), Revolute Motor (⚙️), Revolute Joint (⚙️), Spherical Joint (🔴) и Rigid Joint on Slot (🔧).

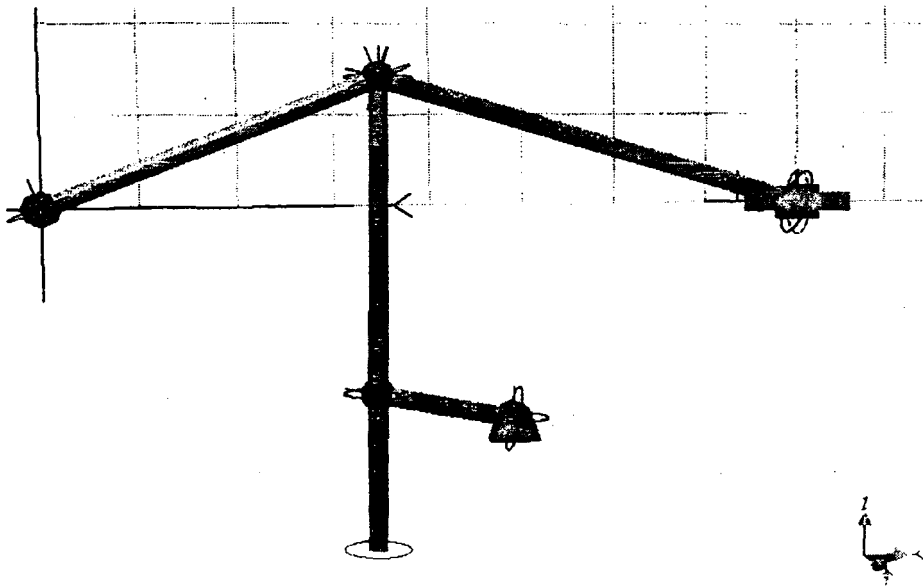


Рис. 3. Объемная модель механизма в программе Nastran

Рассчитаем в программе MathCAD передаточные функции механизма, используя формулу центрированной производной: $dx_i/dy_i = (x_{i+1} - x_{i-1}) / (y_{i+1} - y_{i-1})$, таким образом вычислив первые и вторые производные от координат центров тяжести и углов поворота звеньев механизма. Причём заранее было определено крайнее положение механизма.

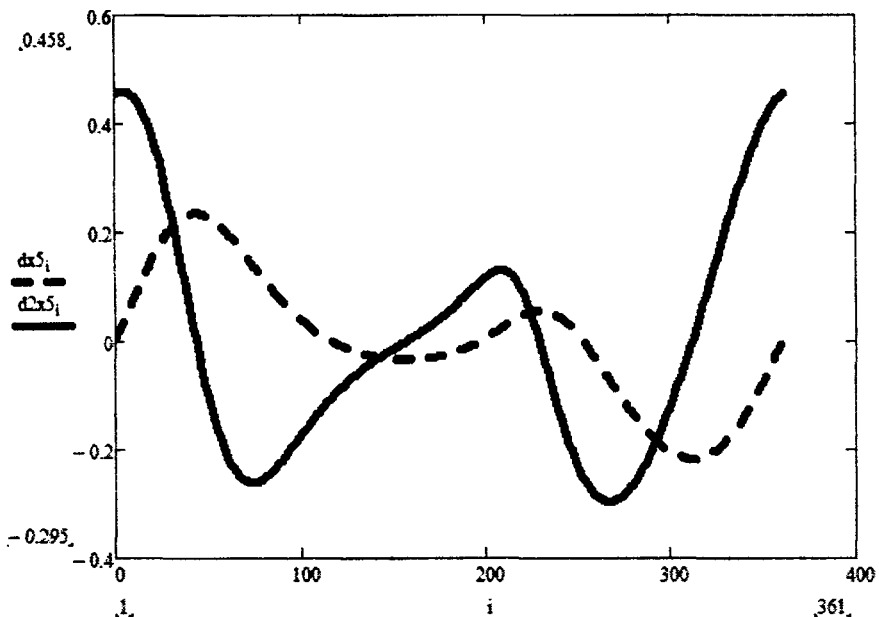


Рис. 4. Первая и вторая передаточные функции ползуна в MathCAD

Ниже приведены передаточные функции пятого звена, полученные при моделировании шестизвенного механизма в пакете Nastran. Причём для построения данных графиков функций не требовалась запись каких-либо уравнений или зависимостей, а были использованы встроенные средства пакета: Velocity и Acceleration. Полученные результаты идентичны в MathCAD и NASTRAN.

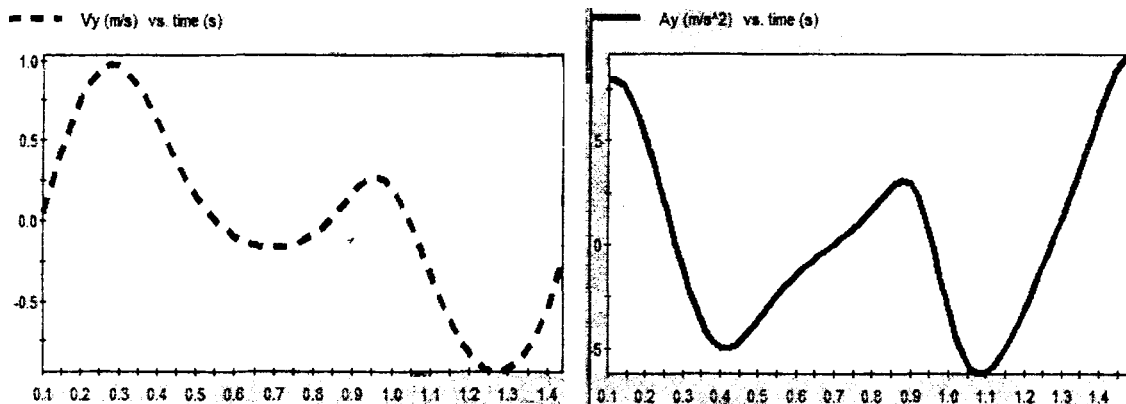


Рис. 5. Первая и вторая передаточные функции ползуна в Nastran

Построения механизмов в обоих пакетах и проведённые вычисления указывают на целесообразность использования как MathCAD, так и Nastran для моделирования рычажных механизмов, их кинематического анализа, а Nastran предоставляет также широкие возможности визуализации в четырёхмерном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокун, Г.С. Применение информационных технологий для учебного проектирования механизмов / Г.С. Бокун, В.С. Вихренко, С.А. Гляков // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – Вып. 18. – С. 215-220.
2. Гляков, С.А. Компьютерная механика. Динамический и кинематический анализ механических систем: курс лекций / С.А. Гляков [и др.]; под ред. М.А. Журавкова. – Минск: БГУ, 2006.
3. Девойно, Г.Н. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / под ред. Г.Н. Девойно. – Минск: Вышш. школа, 1986.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АППАРАТА МАТРИЦ ДЛЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КАРДАННОЙ ПЕРЕДАЧИ

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The feasibility of matrix methods are shown for definition of function of position cardan joint.

В учебной литературе по теории механизмов и машин для определения кинематических характеристик карданной передачи (механизма шарнира Гука) обычно используются методы начертательной геометрии. Вместе с тем для решения этих задач может быть успешно применён аппарат матриц. Использование матричных методов в учебном курсе теории механизмов и машин прежде всего связано с введением нового раздела «Манипуляторы и промышленные роботы». Но возможности этого метода могут быть использованы и в ряде других случаев, в частности для определения функции положения карданной передачи.

На рис. 1, а показана схема карданной передачи в вертикальной плоскости. Передача состоит из двух одинаковых вилок 1 (ведущей) и 3 (ведомой) и крестовины 2. На рис. 1, б показан вид слева на крестовину.

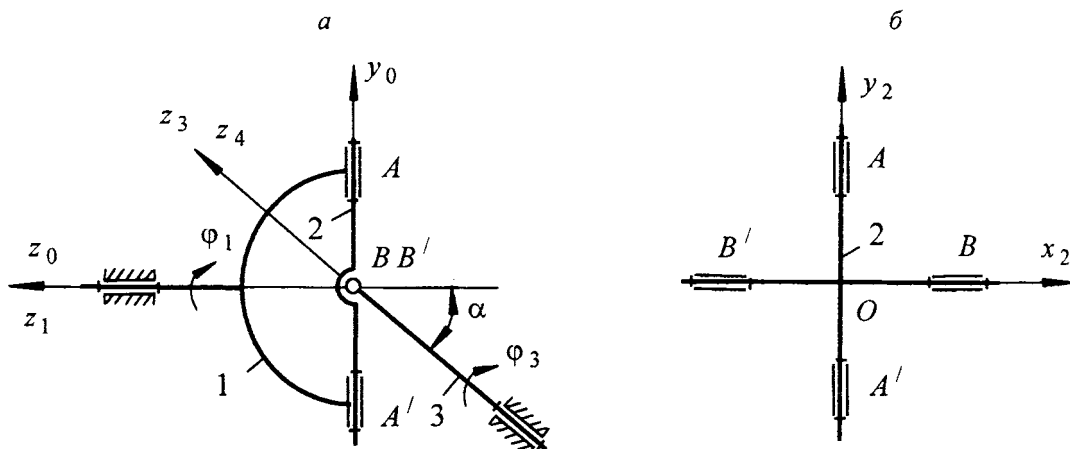


Рис. 1

С каждым звеном связываем систему координат. Системы $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ и $x_3 y_3 z_3$ — подвижные, системы $x_0 y_0 z_0$ и $x_4 y_4 z_4$ — неподвижные. Относительное положение координатных систем характеризуется углами: φ_1 — угол поворота вилки 1 вокруг оси z_1 (z_0), φ_3 — угол поворота вилки 3 вокруг оси z_3 (z_4), φ_{21} — угол относительного поворота крестовины 2 вокруг оси y_2 (y_1), α — угол между осями z_0 и z_4 в вертикальной плоскости. Все системы координат имеют общее начало в точке O . Поэтому для получения уравнений преобразования координат используются только матрицы поворота 3×3 , которые описывают одноосные повороты вокруг соответствующей оси. Выражения этих матриц получают на основании схем относительного положения систем координат, представленных на рис.2. Каждый элемент матриц записывается в соответствии с известными правилами составления матриц поворота при переходе от одной координатной

системы к другой [3]. Например, матрица A_{01} выражает переход от системы координат $x_1 y_1 z_1$ к системе $x_0 y_0 z_0$ при вращении системы $x_1 y_1 z_1$ вокруг общей оси $z_1(z_0)$ (см. рис.2, а) и имеет вид

$$A_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

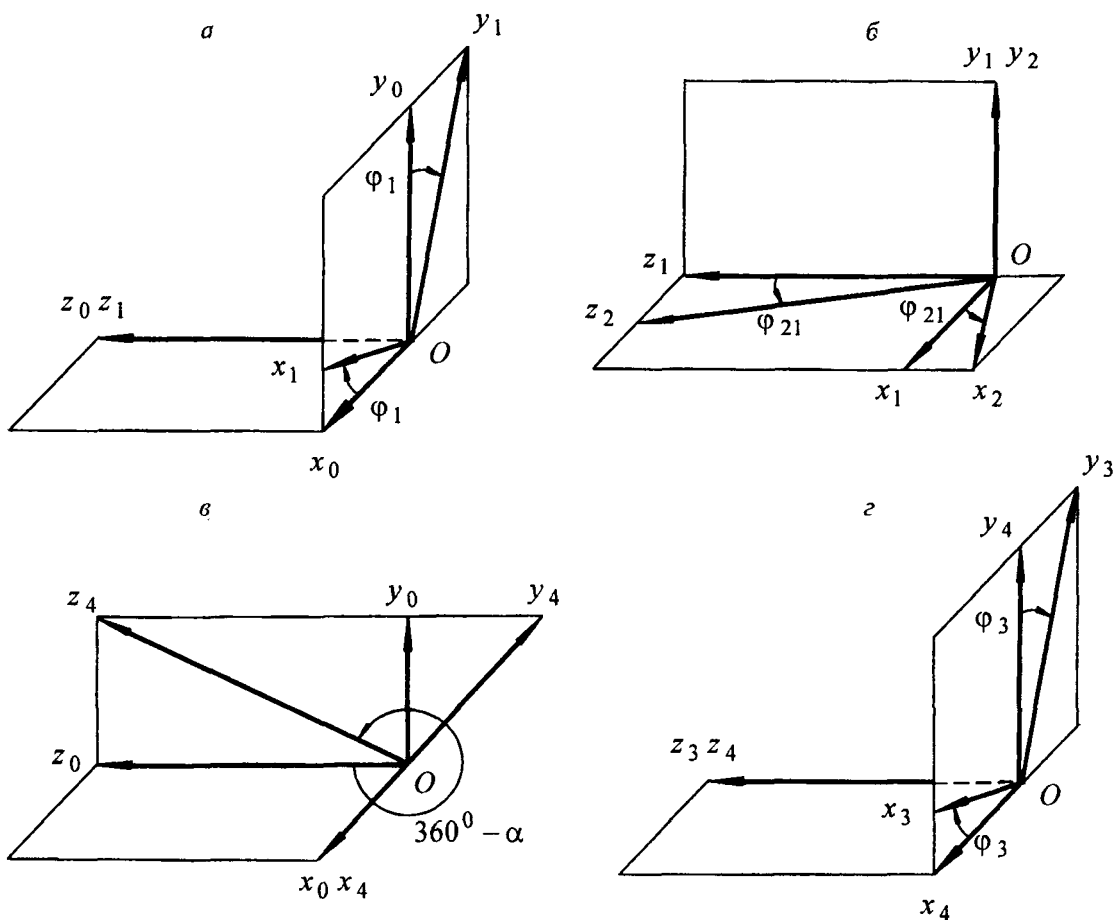


Рис. 2

Аналогичным образом на основании рис.2б, в и г получены и остальные матрицы:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & 0 & \sin \varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_{21} & 0 & \cos \varphi_{21} \end{bmatrix}; \quad A_{04} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix};$$

$$A_{43} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для получения матричного уравнения, выражающего зависимость угловых параметров карданной передачи, воспользуемся методом размыкания замкнутой кинематической цепи механизма в точке B – центре вращательной кинематической пары, связывающей звенья 2 и 3 [2]. Тогда

$$A_{01} A_{12} r_B^{(2)} = A_{04} A_{43} r_B^{(3)}, \quad (1)$$

где $r_B^{(2)}$ и $r_B^{(3)}$ – столбцовые матрицы, составленные из координат точки B соответственно в системах $x_2 y_2 z_2$ и $x_3 y_3 z_3$.

$$r_B^{(2)} = r_B^{(3)} = \begin{bmatrix} l_{OB} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После перемножения матриц в уравнении (1) и приравнивания соответствующих элементов получим

$$l_{OB} \cos \varphi_1 \cos \varphi_{21} = l_{OB} \cos \varphi_3, \quad (2)$$

$$l_{OB} \sin \varphi_1 \cos \varphi_{21} = l_{OB} \cos \alpha \sin \varphi_3, \quad (3)$$

$$-l_{OB} \sin \varphi_{21} = -l_{OB} \sin \alpha \sin \varphi_3. \quad (4)$$

Разделив выражение (3) на выражение (2), получаем соотношения, выражающие функцию положения $\varphi_3(\varphi_1)$ карданной передачи в следующем виде:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\cos \alpha}.$$

Алогичное выражение, полученное геометрическим методом, приводится в учебнике [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
2. Литвин, Ф.Л. Определение функции положения пространственного механизма способом условного размыкания контура / Ф.Л. Литвин // Машиноведение. – 1970. – № 3. – С. 51-57.
3. Филонов, И.П. Теория механизмов, машин и манипуляторов / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. – Минск: Дизайн ПРО, 1998. – 656 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ИНЖЕНЕРНОГО ПАКЕТА ANSYS НДС МАТРИЧНОГО СТЕНТА, ИМПЛАНТИРОВАННОГО В КРОВЕНОСНЫЙ СОСУД

Орловская А.А., Томило Е.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

To investigate by means of engineering package ANSYS the VAT matrix stenta, implanted into a blood vessel.

В наше время сердечнососудистые заболевания являются одной из главных причин смертности населения. Сердце – мощный насос, обеспечивающий циркуляцию крови. Патологическое изменение состояния сосудов неизменно ведет к ухудшению кровоснабжения сердца и, как следствие, к развитию серьезных сердечнососудистых заболеваний. Атеросклероз – наиболее распространенное хроническое заболевание, поражающее артерии. Постепенно растущие на внутренней оболочке сосудистой стенки атеросклеротические бляшки, одиночные или множественные, являются, главным образом, холестериновыми отложениями. Разрастание в артерии соединительной ткани (склероз) и кальциноз стенки сосуда приводят к медленно прогрессирующей деформации, сужению просвета вплоть до полного запустевания (облитерации) артерии и тем самым вызывают хроническую, медленно нарастающую недостаточность кровоснабжения органа, питаемого через пораженную артерию. Ангиопластика – это метод восстановления адекватного просвета суженых коронарных артерий изнутри сосуда с помощью специальных приспособлений – баллонов и стентов, вводимых в артерии под контролем рентгена, под местной анестезией, посредством проколов кожи, без применения больших разрезов, общего наркоза и тем более искусственного кровообращения (рис. 1). Стентом называется протез, вводимый в просвет полого органа (в данном случае артерии) с целью сохранения его просвета.

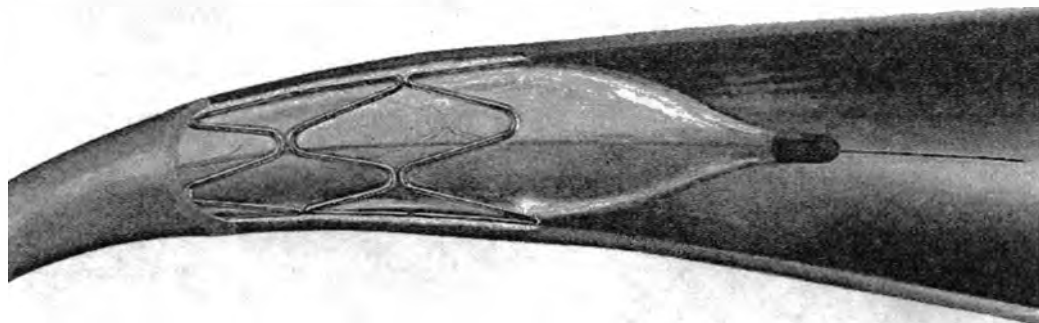


Рис. 1. Установка стента

Сейчас используются самые различные стенты, отличающиеся конструктивными особенностями.

В работе рассмотрен матричный стент с геометрическими параметрами (рис. 2): $a = 0,3$ мм, $b = 0,22$ мм, $c = 1,7$ мм, $d = 0,14$ мм, толщина $h = 0,1$ мм, $f = 0,22$ мм, установочный на баллон диаметр $D = 1,37$ мм.

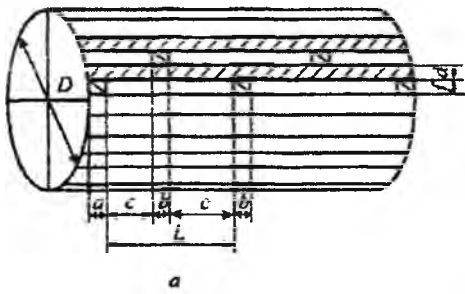


Рис. 2. Схематическое изображение стента

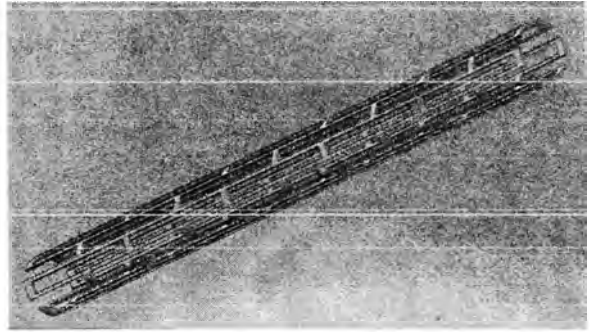


Рис. 3. Твердотельная модель стента

Для исследование взята уже готовая модель стента в SolidWorks 2007 (рис. 3). Далее создаём модель сосуда, в котором будет размещён стент (рис. 4) с геометрическими характеристиками: длина сосуда 15,6 мм, внешний диаметр 1,25 мм, внутренний диаметр 1,20 мм. Исходя из параметров модели стента и учитывая то, что он будет имплантирован в сосуд, создаём в SolidWorks 2007 модель крови (рис. 5).

Далее, имплантируя стент в сосуд и размещая внутри модель крови, создаём сборку (рис. 6). Данная модель в полной мере соответствует геометрии рассматриваемого взаимодействия биологических структур и имплантата.

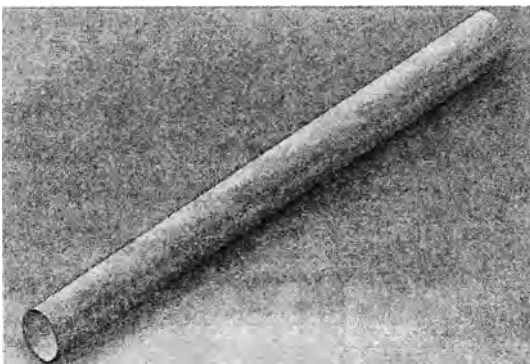


Рис. 4. Твердотельная модель сосуда

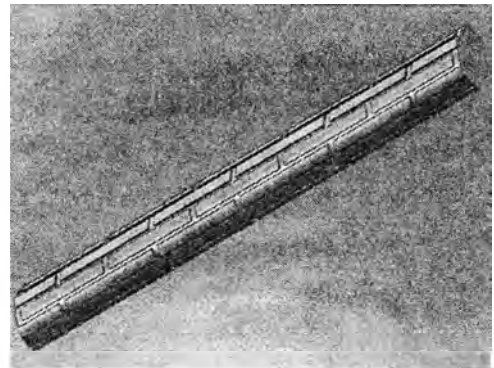


Рис. 5. Твердотельная модель крови

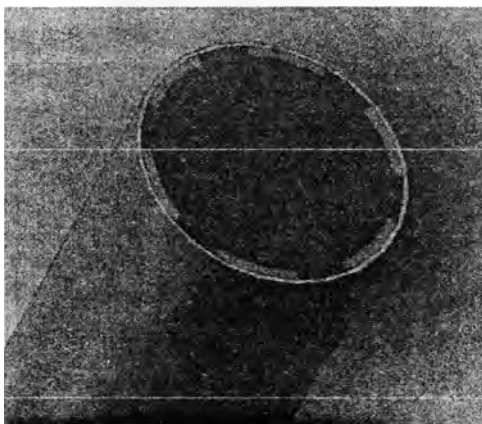


Рис. 6. Модель имплантированного стента

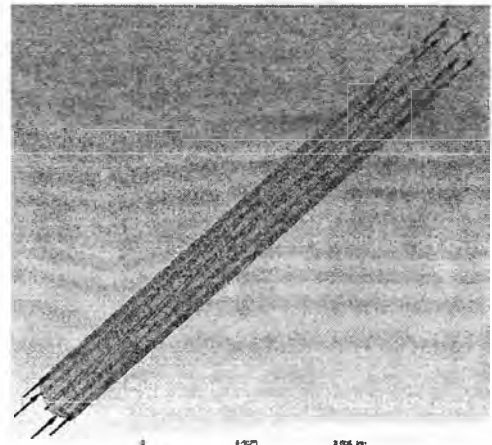


Рис. 7. Задание граничных параметров

Импортируем модель в ANSYS. Расчёт модели будет осуществляться в двух модулях: FluidFlow (CFX) и StaticStructural (ANSYS).

В первую очередь произведём расчёт в FluidFlow (CFX) течения крови. Механические свойства структуры крови приведены в табл. 1.

Таблица 1

Плотность, г/мм ³	Вязкость, г/мм с
1,0	0,0046

Разбиваем модель воды на конечные элементы и задаём граничные параметры (рис. 7): Скорость крови на входе в сосуд 0,9 м/с, давление крови на выходе из сосуда 15829 Па.

В ходе расчёт модели крови, получены значения для скоростей (рис. 8) и давлений, которые будут в дальнейшем импортированы на соответствующие стенки стента и сосуда.

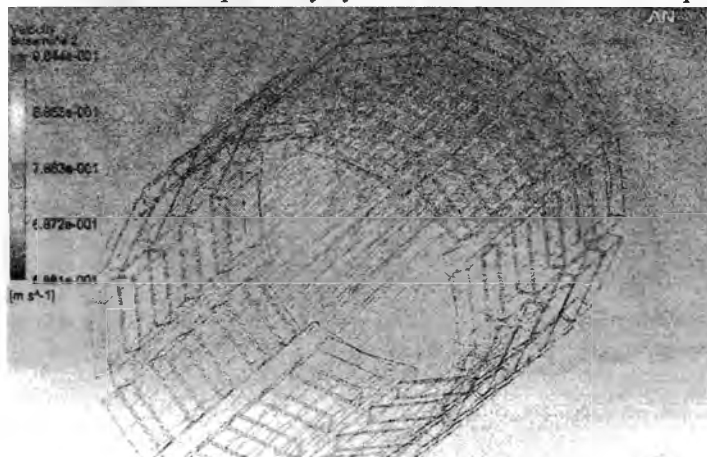


Рис. 8. Распределение скоростей

Далее производится связь между модулями FluidFlow (CFX) и StaticStructural (ANSYS) с последующим импортом давления.

Расчёт стента и сосуда происходит в модуле StaticStructural (ANSYS), где следует разбить модели на конечные элементы, закрепить концы сосуда и

импортировать рассчитанное давление в модуле FluidFlow (CFX) с внешних стенок крови на соответствующие внутренние стенки стента и сосуда (рис. 9). Механические свойства структуры сосуда приведены в табл. 2.

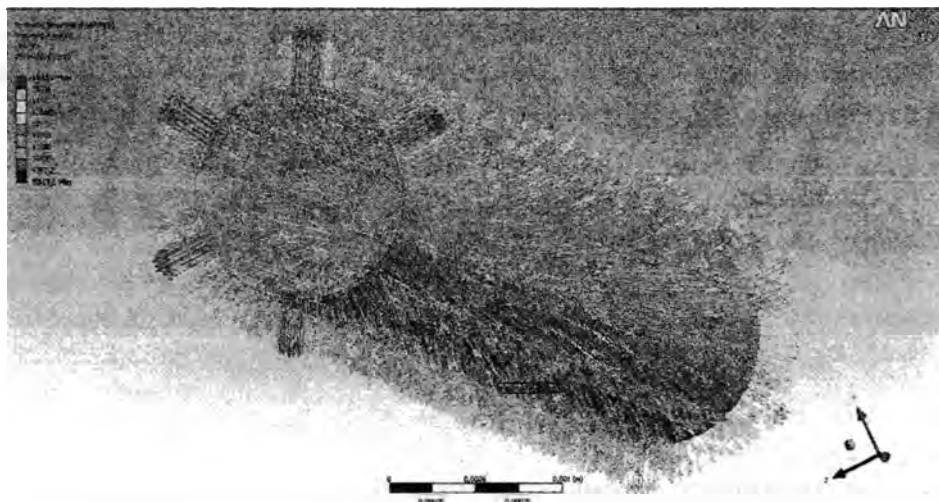


Рис. 9. Импорт давления

Модуль Юнга, Па	Коэффициент Пуассона
$2 \cdot 10^{11}$	0,3

При расчёте получены значения для деформаций (рис. 10) и напряжений (рис. 11). Деформации изменяются от 0 м (в местах ограничения перемещений) до $3,9 \cdot 10^{-9}$ м (в центральной части стента). Напряжения изменяются от 15659 Па до $3,776 \cdot 10^5$ Па. Наибольшие напряжения возникли в поперечных стенках стента.

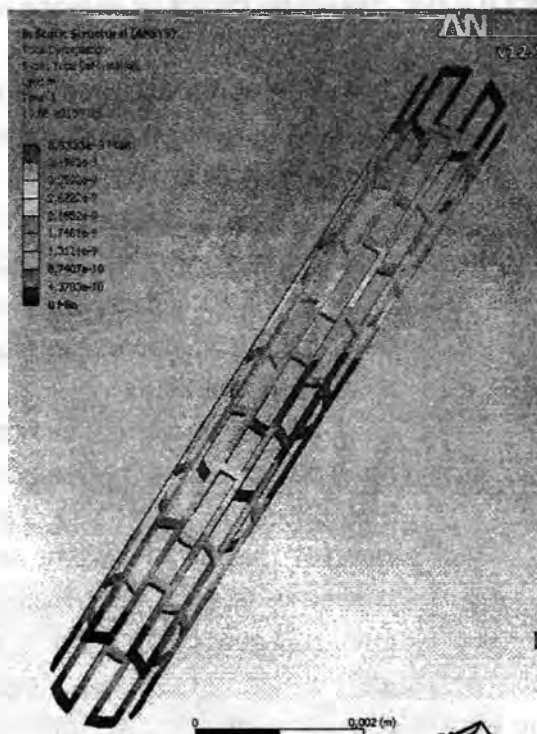


Рис. 10. Распределение деформаций

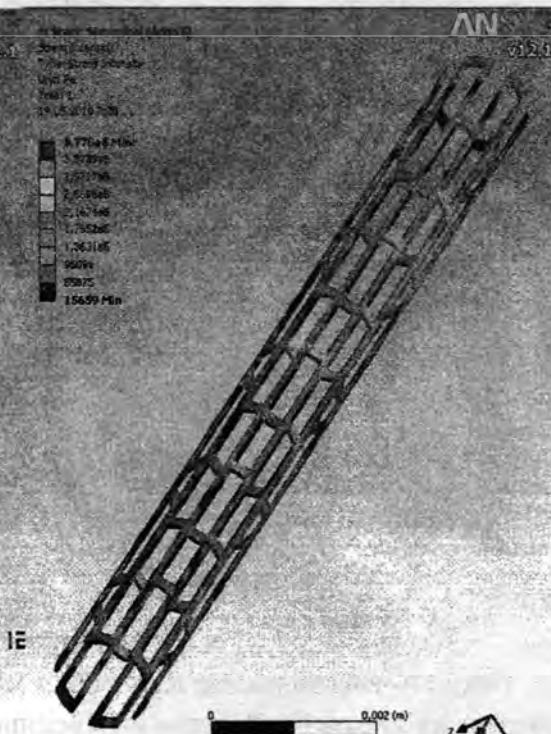


Рис. 11. Распределение напряжений

Используя возможности программного пакета ANSYS, был выполнен расчёт НДС матричного стента, имплантированного в артерию. Данный метод позволяет быстро, наглядно и достаточно точно производить подобного рода расчёты, заменяя при этом экспериментальные исследования реального объекта изучением характеристик уменьшенной подобной модели с последующим переходом от параметров модели к соответствующим параметрам биологического объекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бегун П.И., Афонин П.Н. Моделирование в биомеханике.
2. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров. – М.: Машиностроение, 2004. – 506 с.
3. Математические модели и компьютерное моделирование в биомеханике: учеб. пособие / под ред. А.В. Зинковского и В.А. Пальмова. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2004.
4. Ремизов А.Н., Максина А.Г., Потапенко А.Я. Медицинская и биологическая физика: учеб. для вузов. – М.: Дрофа. 2003. – 560 с.

СИНТЕЗ КУЛАЧКОВЫХ МЕХАНИЗМОВ В КУРСОВОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дворянчикова А.Б.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The article describes the peculiarities of software and methodological complex "Synthesis of cam mechanisms", used for dynamic and cinematic synthesis of cam mechanisms.

Курсовой проект по теории механизмов, машин и манипуляторов предусматривает решение задач, связанных с синтезом кулачковых механизмов. Основная задача синтеза кулачкового механизма заключается в определении профиля кулачка по заданным законам движения кулачка (входного звена) и толкателя (выходного звена).

Выполняя синтез кулачкового механизма, студенты гармонично сочетают графический и аналитический метод проектирования. Динамический синтез кулачкового механизма для определения его основных размеров требует вычисления функций положения толкателя, аналогов скорости, аналогов ускорения. Студент выполняет вручную расчет данных параметров только для одного контрольного положения на фазах удаления и возвращения. После своевременного и качественного выполнения контрольных расчетов студент допускается на ЭВМ.

На кафедре разработан программно-методический комплекс «Синтез кулачковых механизмов», включающий компьютерную программу «Синтез кулачковых механизмов» и учебно-методическое пособие «Синтез кулачковых механизмов» [2].

Программа "Синтез кулачковых механизмов" предназначена для проектирования кулачковых механизмов, имеющих следующие схемы преобразования движения (рис.1):

- а) вращательное движение кулачка преобразуется в возвратно-поступательное движение толкателя (схема 1);
- б) вращательное движение кулачка преобразуется в возвратно-качательное движение роликового толкателя (схема 2);
- в) вращательное движение кулачка преобразуется в возвратно-поступательное движение тарельчатого толкателя (схема 3).

Имеется возможность выполнения двух видов синтеза:

1) кинематического синтеза, когда проектируется профиль кулачка при известных основных размерах механизма (минимальный радиус кулачка и смещение линии движения толкателя – для схем 1 и 3, минимальный радиус кулачка и межосевое расстояние – для схемы 2);

2) динамического синтеза для схем 1 и 2, позволяющего спроектировать механизм минимальных размеров, когда кинематическому синтезу предшествует определение основных размеров механизма по заданному максимально допустимому углу давления; для схемы 3 механизм минимальных размеров проектируют по условию выпуклости кулачка.

Кулачок может быть спрофилирован для обеспечения движения толкателя по достаточно широко применяемым законам движения (параболический, синусоидальный закон изменения ускорения, косинусоидальный закон изменения ускорения, трапецеидальный закон изменения ускорения закон линейно убывающего ускорения, треугольный закон изменения ускорения, модифицированный линейный закон изменения ускорения).

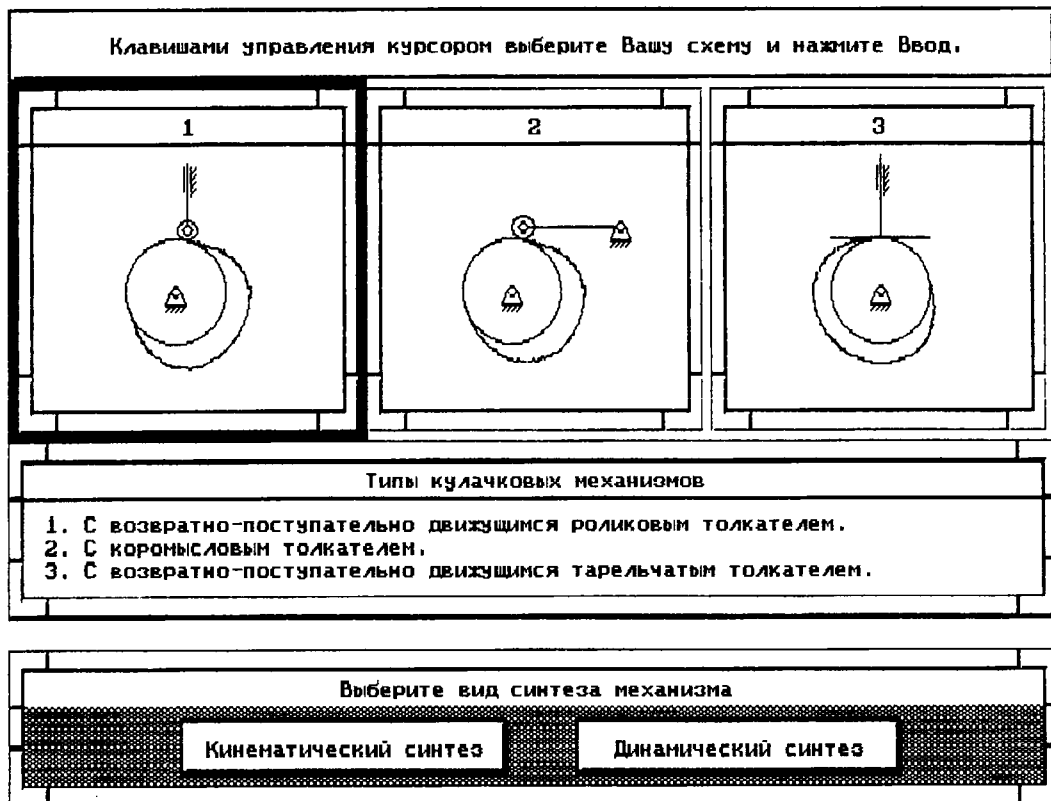


Рис. 1. Выбор схемы проектируемого механизма и вида синтеза

Проектируемые механизмы могут иметь как кинематическое замыкание высшей пары, так и силовое. Кинематическое замыкание учитывает непревышение допускаемого угла давления, как на фазе удаления, так и на фазе возвращения, и позволяет реверсировать направление вращения кулачка. В случае силового замыкания имеется возможность расчета пружины.

Результаты проектирования представляются на экране в виде графического изображения кулачкового механизма, причем пользователь может привести в движение механизм и наблюдать за его работой. На экране также демонстрируются графики перемещения, аналогов скорости и ускорения толкателя, угла давления в зависимости от угла поворота кулачка.

Интерактивный характер работы программы позволяет обучаемому в процессе проектирования изменять любые входные параметры синтеза и исследовать их влияние на проектируемую схему кулачкового механизма.

Подготовленное методическое пособие «Синтез кулачковых механизмов», позволяет ознакомиться с назначением программы и правильно подготовить исходные данные для последующей работы на ЭВМ. В указанном пособии приведены примеры синтеза кулачковых механизмов с возвратно-поступательным движением роликового толкателя, механизма с коромысловым толкателем, а также имеются расчетные формулы кинематических характеристик для всех используемых законов движения толкателя, что значительно уменьшает трудозатраты студентов по поиску дополнительных литературных источников. Пользуясь учебно-методическим пособием, студенты имеют возможность составить алгоритмы расчетов кинематических характеристик, определения основных размеров кулачкового механизма, определения координат центрального профиля кулачка и выполнить расчеты указанных параметров для контрольных положений. Используя раз-

работанную программу «Синтез кулачковых механизмов», студент выполняет расчеты на ЭВМ. Файл результатов вычислений показан на рис. 2.

СИНТЕЗ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА С ПОСТУПАТЕЛЬНО ДВИЖУЩИМСЯ ТОЛКАТЕЛЕМ

Исполнитель - студент гр. 121134 Иванов Н И 3 мая 2010 г

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:

Ход толкателя - 0.070 м
 Эксцентриситет толкателя - -0.0200 м
 Закон движения толкателя:
 на фазе удаления - ПОСТОЯННОГО УСКОРЕНИЯ (ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ)
 на фазе возвращения - КОСИНУСОИДАЛЬНЫЙ
 Фазовый угол удаления - 90.0 градусов
 Фазовый угол дальнего стояния - 120.0 градусов
 Фазовый угол возвращения - 80.0 градусов
 Максимально допустимый угол давления - 35.0 градусов
 Направление вращения кулачка - по часовой стрелке
 Замыкание пары "кулачок-толкатель" - кинематическое
 AU= 1.40 AV= 0.00

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ:

Миним. радиус центрального профиля кулачка - 0.1079 м
 Минимальный радиус кривизны профиля 0.0831 м
 Радиус ролика - 0.0432 м

N	F11	S	H2	H2P	ALF	R	TE	XC	YC	XD	YD
1	0.0	0.0000	0.0000	0.1362	0.0	0.1079	-10.7	0.0000	0.1079	0.0000	0.0647
2	7.5	0.0012	0.0178	0.1362	7.4	0.1090	-1.2	-0.0140	0.1081	-0.0155	0.0650
3	15.0	0.0047	0.0357	0.1362	14.6	0.1125	8.0	-0.0283	0.1089	-0.0311	0.0658
4	22.5	0.0105	0.0535	0.1362	21.6	0.1182	16.0	-0.0434	0.1100	-0.0466	0.0669
5	30.0	0.0187	0.0713	0.1362	28.4	0.1263	22.4	-0.0601	0.1111	-0.0624	0.0680
6	37.5	0.0292	0.0891	-0.0973	35.2	0.1367	27.1	-0.0788	0.1116	-0.0790	0.0685
7	45.0	0.0400	0.0764	-0.0973	42.1	0.1474	21.1	-0.0988	0.1093	-0.0890	0.0673
8	52.5	0.0492	0.0637	-0.0973	49.2	0.1565	15.7	-0.1184	0.1023	-0.0994	0.0636
9	60.0	0.0567	0.0509	-0.0973	56.3	0.1639	10.8	-0.1364	0.0909	-0.1095	0.0571
10	67.5	0.0625	0.0382	-0.0973	63.6	0.1697	6.2	-0.1520	0.0755	-0.1186	0.0481
11	75.0	0.0667	0.0255	-0.0973	70.9	0.1739	1.8	-0.1643	0.0568	-0.1260	0.0369
12	82.5	0.0692	0.0127	-0.0973	78.3	0.1763	-2.4	-0.1727	0.0357	-0.1312	0.0239
13	90.0	0.0700	-0.0000	-0.0973	85.8	0.1772	-6.5	-0.1767	0.0130	-0.1336	0.0098
14	210.0	0.0700	-0.0000	-0.1772	205.8	0.1772	-6.5	0.0771	-0.1595	0.0583	-0.1206
15	216.7	0.0688	-0.0204	-0.1711	212.5	0.1760	-13.0	0.0946	-0.1484	0.0674	-0.1149
16	223.3	0.0653	-0.0394	-0.1534	219.3	0.1725	-19.1	0.1093	-0.1335	0.0754	-0.1068
17	230.0	0.0597	-0.0557	-0.1253	226.2	0.1670	-24.5	0.1205	-0.1156	0.0818	-0.0966
18	236.7	0.0525	-0.0682	-0.0886	233.2	0.1598	-29.1	0.1279	-0.0958	0.0862	-0.0847
19	243.3	0.0441	-0.0761	-0.0459	240.2	0.1514	-32.6	0.1314	-0.0752	0.0884	-0.0716
20	250.0	0.0350	-0.0787	0.0000	247.4	0.1424	-35.0	0.1315	-0.0548	0.0885	-0.0580
21	256.7	0.0259	-0.0761	0.0459	254.6	0.1335	-36.1	0.1287	-0.0354	0.0865	-0.0444
22	263.3	0.0175	-0.0682	0.0886	261.8	0.1251	-35.5	0.1239	-0.0177	0.0829	-0.0312
23	270.0	0.0103	-0.0557	0.1253	269.1	0.1180	-33.1	0.1180	-0.0019	0.0781	-0.0183
24	276.7	0.0047	-0.0394	0.1534	276.2	0.1125	-28.2	0.1118	0.0122	0.0725	-0.0055
25	283.3	0.0012	-0.0204	0.1711	283.2	0.1091	-20.6	0.1062	0.0249	0.0665	0.0079
26	290.0	0.0000	0.0000	0.1772	290.0	0.1079	-10.7	0.1014	0.0369	0.0608	0.0221

Идентификаторы таблицы:

S, H2, H2P - перемещение, аналог скорости и аналог ускорения толкателя;
 ALF и R - полярный угол и радиус-вектор центрального профиля кулачка;
 TE - угол давления;
 XC и YC - координаты центрального профиля кулачка;
 XD и YD - координаты действительного профиля кулачка.

Рис. 2. Файл результатов вычислений

Затем производится обработка результатов расчетов и их анализ:

1) построение графиков кинематических характеристик (перемещения, аналога скорости и аналога ускорения толкателя) в зависимости от угла поворота кулачка;

2) построение упрощенной и полной совмещенных диаграмм «перемещение - аналог скорости» для схем механизмов с роликовым толкателем или диаграммы «перемещение – аналог ускорения» для механизма с тарельчатым толкателем и определение основных размеров механизма;

3) построение центрального профиля кулачка и кинематический анализ механизма;

4) составление алгоритма и определение радиуса ролика, сравнение его величины с машинным расчетом;

5) построение действительного профиля кулачка графическим методом;

6) построение графика угла давления;

7) определение жесткости пружины при силовом замыкании.

На рис. 3 показан образец выполненного листа курсового проекта. Из него видно, как сочетаются аналитические и графические методы проектирования. Кинематические характеристики (перемещение толкателя, аналоги скорости и ускорения), показанные слева, построены на основе компьютерных расчетов, профиль кулачка – графически с использованием метода обращенного движения.

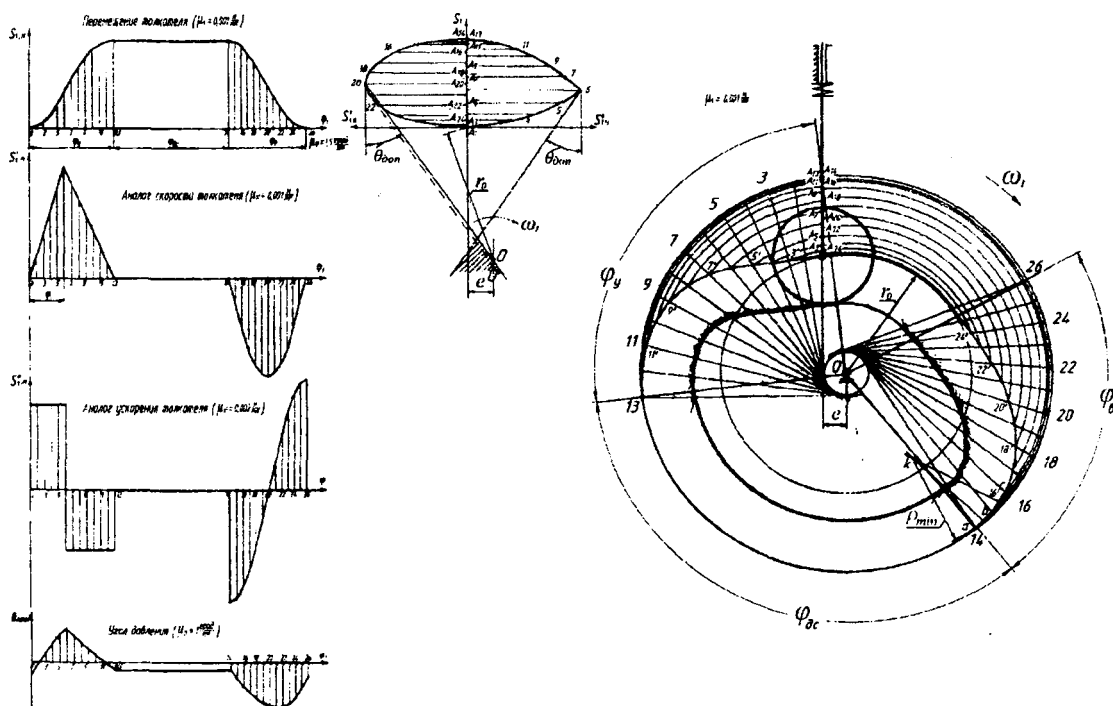


Рис. 3. Пример выполнения графических работ

В пособии [2] изложена последовательность всех перечисленных графических построений и представлены примеры их выполнения, что значительно облегчает работу и трудозатраты студента при выполнении курсового проекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин / под общ. ред. Г.Н. Девойно. – Минск: Выш. школа, 1986.–285 с.
2. Синтез кулачковых механизмов: учебно-методическое пособие по курсовому проектированию по дисциплине «Теория механизмов, машин и манипуляторов» / П.П. Анципорович [и др.].– Минск: БНТУ, 2010. – 80 с.

Третинников Д.Л., Табунов А.В., Пищ П.В., Августинович А.Г.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Nanomaterials is a field which takes a materials science-based approach to nanotechnology. It studies materials with morphological features on the nanoscale, and especially those which have special properties stemming from their nanoscale dimensions. Nanoscale is usually defined as smaller than a one tenth of a micrometer in at least one dimension, though this term is sometimes also used for materials smaller than one micrometer.

The first observations and size measurements of nano-particles were made during the first decade of the 20th century. They are mostly associated with the name of Zsigmondy who made detailed studies of gold sols and other nanomaterials with sizes down to 10 nm and less. There are traditional techniques developed during 20th century in Interface and Colloid Science for characterizing nanomaterials. These are widely used for first generation passive nanomaterials specified in the next section.

Ключевые слова: наноматериалы, нанотрубки, получение, методы, нанопорошки.

1. Методы получения наноматериалов

1.1. Получение графита в дуговом разряде

Метод основан на образовании углеродных нанотрубок при термическом распылении графитового электрода в плазме дугового разряда, горящего в атмосфере гелия. Этот метод позволяет получать нанотрубки в количестве, достаточном для детального исследования их физико-химических свойств.

Трубка может быть получена из протяженных фрагментов графита, которые далее скручиваются в цилиндр. Для образования протяженных фрагментов необходимы специальные условия нагрева графита. Оптимальные условия получения нанотрубок реализуются в дуговом разряде при использовании электролизного графита в качестве электродов. На рис. 1 показана упрощенная схема установки для получения фуллеренов и нанотрубок.

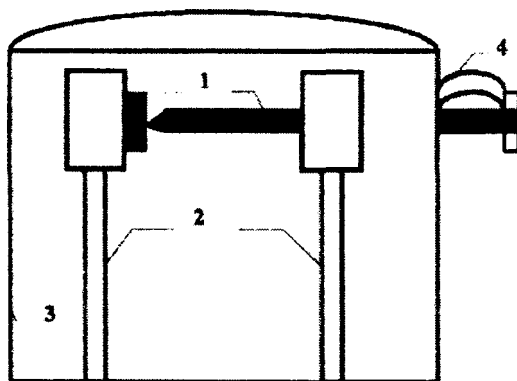


Рис. 1. Схема установки для получения фуллеренов и нанотрубок: 1 - графитовые электроды; 2 - охлаждаемая медная шина; 3 - медный кожух, 4 - пружины

Распыление графита осуществляется при пропускании через электроды тока с частотой 60 Гц, величина тока от 100 до 200 А, напряжение 10-20 В. Регулируя натяжение пружины, можно добиться, чтобы основная часть подводимой мощности выделялась в дуге, а не в графитовом стержне. Камера заполняется гелием с давлением от 100 до 500 торр.

Скорость испарения графита в этой установке может достигать 10 г/В. При этом поверхность медного кожуха, охлаждаемого водой, покрывается продуктом испарения графита, т.е. графитовой сажой. Если получаемый порошок соскоблить и выдержать в течение нескольких часов в кипящем толуоле, то получается темно-бурая жидкость. При выпаривании ее во вращающемся испарителе получается

мелкодисперсный порошок, вес его составляет не более 10 % от веса исходной графитовой сажи, в нем содержится до 10 % фуллеренов и нанотрубок.

В описанном способе получения нанотрубок гелий играет роль буферного газа. Атомы гелия уносят энергию, выделяющуюся при объединении углеродных фрагментов. Опыт показывает, что оптимальное давление гелия для получения фуллеренов находится в диапазоне 100 торр, для получения нанотрубок – в диапазоне 500 торр.

Среди различных продуктов термического распыления графита (фуллерены, наночастицы, частицы сажи) небольшая часть (несколько процентов) приходится и на многослойные нанотрубки, которые частично прикрепляются к холодным поверхностям установки, частично осаждаются на поверхности вместе с сажей.

Однослойные нанотрубки образуются при добавлении в анод небольшой примеси Fe, Co, Ni, Cd (т.е. добавлением катализаторов). Кроме того, ОСНТ получают при окислении многослойных нанотрубок. С целью окисления многослойные нанотрубки обрабатываются кислородом при умеренном нагреве, либо кипящей азотной кислотой, причем в последнем случае происходит удаление пятичленных графитовых колец, приводящее к открытию концов трубок. Окисление позволяет снять верхние слои с многослойной трубки и открыть ее концы. Так как реакционная способность наночастиц выше, чем у нанотрубок, то при значительном разрушении углеродного продукта в результате окисления доля нанотрубок в оставшейся ее части увеличивается.

1.2. Метод лазерного испарения

Альтернативой

выращивания нанотрубок в дуговом разряде является метод лазерного испарения. В данном методе синтезируются в основном ОСНТ при испарении смеси углерода и переходных металлов лазерным лучом из мишени, состоящей из сплава металла с графитом. По сравнению с методом дугового разряда, прямое испарение позволяет обеспечить более детальный

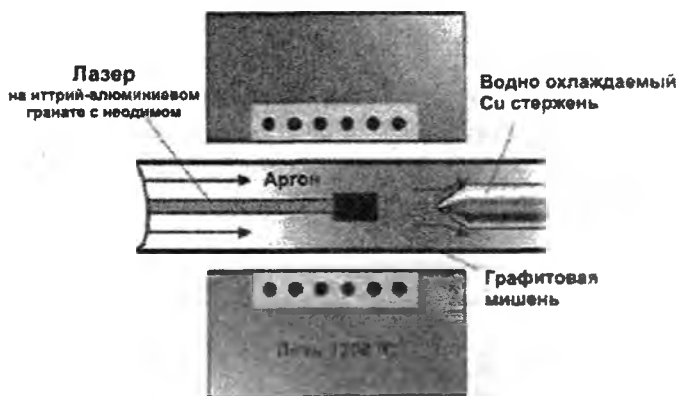


Рис. 2. Схема установки лазерной абляции

контроль условий роста, проводить длительные операции и производить нанотрубки с большим выходом годных и лучшего качества. Фундаментальные же принципы, лежащие в основе производства ОСНТ методом лазерного испарения такие же, как и в методе дугового разряда: атомы углерода начинают скапливаться и образовывать соединение в месте нахождения частиц металлического катализатора. В установке (рис. 2) сканирующий лазерный луч фокусировался в 6-7 мм пятно на мишень, содержащую металл-графит. Мишень помещалась в наполненную (при повышенном давлении) аргоном и нагретую до 1200 °С трубу. Сажа, которая образовывалась при лазерном испарении, уносилась потоком аргона из зоны высокой температуры и осаждалась на охлаждаемый водой медный коллектор, находящийся на выходе из трубы.

1.3. Технология Laser Spinning

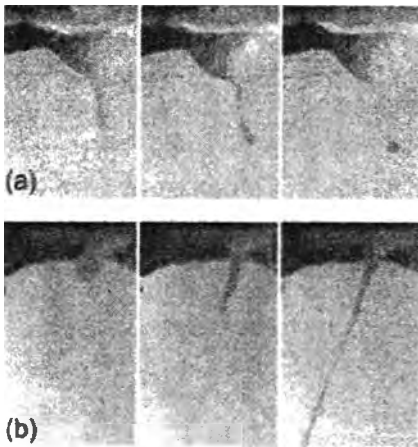


Рис. 3. Образование капли расплава;
(b) Вытягивание волокна

Материаловеды из США и Испании придумали новый способ получения длинных аморфных нановолокон. Технология, названная «laser spinning», позволяет получить волокна длиной несколько сантиметров и всего 35 нм в диаметре.

Квазиодномерные структуры (нанопроволоки, наноленты, наностержни и нанотрубки) обладают уникальными электрическими и механическими свойствами и могут найти применение в электронике, катализе, биомедицине, использоваться для изготовления различных сенсоров и композитов. В настоящее время такие структуры обычно получают из паровой фазы или из растворов.

Исследователям из University of Vigo и Rutgers University удалось получить очень длинные аморфные нановолокна, используя простой процесс, не требующий участия катализаторов, шаблонов и каких-либо других реагентов, кроме материала будущего волокна. Технология позволяет получать волокна из довольно тугоплавких веществ, что невозможно достичь другими методами, например, при помощи электроспиннинга.

Методика «laser spinning» основана на использовании мощного лазера для локального нагрева поверхности исходного керамического материала (кварца или оксида алюминия), т.е. только очень малый его объем находится в расплавленном состоянии. Далее под действием сильной струи газа расплав вытягивается в волокно и застывает. В результате формируется неупорядоченная сеть из микро- и нановолокон. Ученые утверждают, что такая технология позволит получать очень длинные аморфные волокна требуемого состава.

1.4. Получение нанотрубок в биореакторе

Известно, что микроорганизмы способны формировать широкий спектр минералов с уникальными физико-химическими свойствами, которые не образуются в ходе геохимических процессов.

Так исследователями из Калифорнийского Университета Риверсайд было показано формирование внеклеточной сети нанотрубок сульфидов мышьяка анаэробными металл-восстанавливающими бактериями Shewanella sp.

В ходе своего эксперимента штамм бактерий помещали в герметичный сосуд, и создавали оптимальные условия для их жизнедеятельности. Среда, в которой находились бактерии, содержала значительное количество пятивалентного мышьяка $As(V)$ и тиосульфат $S_2O_3^{2-}$. В течении семи дней состав питательной среды по соединениям мышьяка и серы сильно изменялся, а затем вы-

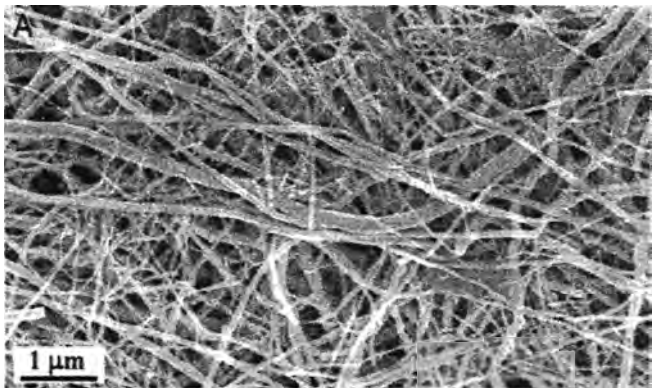


Рис. 4. Сеть нанотрубок As_xS_y разной степени зрелости

ходил на плато. В ходе метаболизма бактерий выделялся газообразный сероводород и формировался нерастворимый осадок, который, как показали исследования, состоял преимущественно из сульфидов мышьяка и представлял собой сеть нанотрубок диаметром от 20 до 100 нм и длиной до 30 мкм. Процесс образования филаментов начинался с синтеза внеклеточных полисахаридов, которые постепенно "облеплялись" аморфными наночастицами сесквисульфида мышьяка As_3S_2 , постепенно замещающегося на AsS и As_4S .

Как показали эксперименты, биогенные нанотрубки сульфидов мышьяка обладали фоточувствительностью и свойствами полупроводника.

Этот способ синтеза полупроводников оказался легче промышленного и, как считают авторы, это открывает путь к созданию нового поколения эффективных нанометровых оптоэлектронных устройств.

1.5. Масштабное производство нанотрубок

Пожалуй, можно сказать, что углеродные нанотрубки (УНТ) за последние несколько лет превратились в символ нанотехнологий. УНТ, благодаря своим уникальным физико-химическим свойствам, являются наиболее перспективными материалами для огромного множества применений в электронике, композитных материалах, химических источниках тока и т.д. Упорядочение нанотрубок в материале играет немаловажную роль, так как именно этим и определяется, будет ли материал изотропным или же анизотропным по отношению к тем или иным свойствам (например, тепло- и электропроводности).

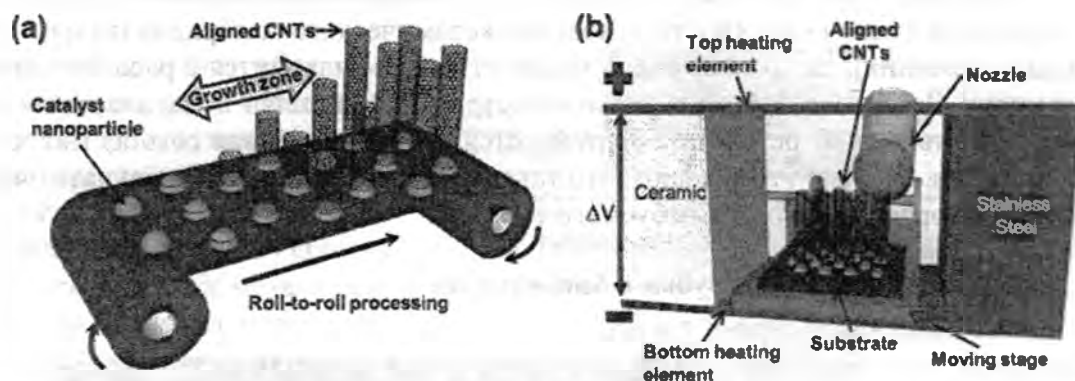


Рис. 5. Процесс непрерывного роста УНТ. (а) Схема подвижной кремниевой подложки с нанесённым катализатором Fe/Al_2O_3 и роста на них нанотрубок. (б)

На сегодняшний день предложено несколько способов получения УНТ, однако наиболее эффективным для создания плотного массива нанотрубок является термохимическое осаждение из газовой фазы прекурсоров, содержащих углерод, которое катализируется наночастицами металлов (т.е. это фактически аналог метода CVD). Авторы работы, опубликованной в журнале *Nanotechnology*, основываясь на описанном выше методе синтеза УНТ, предложили метод практически промышленного синтеза нанотрубок. Он заключается в том, что кварцевая подложка с нанесёнными наночастицами катализатора Fe/Al_2O_3 (подробнее о катализе на наночастицах Fe здесь) продвигается с различными скоростями между двумя нагревательными элементами при подаче соответствующего источника углерода (этилен). На рис. 5 представлены изображения установки. Стоит отметить, что подложку можно «разгонять» вплоть до 2.4 мм/с без видимых потерь в каче-

стве синтезируемых нанотрубок, а высота такого плотного «леса» из нанотрубок достигает 1 см.

Учёные уверены, что описанный выше метод синтеза наиболее оптимален для крупномасштабного производства УНТ, однако требует дальнейшей оптимизации условий разложения исходной газовой смеси и роста нанотрубок.

1.6. Методы получения углеродных роллов

Углеродные наноматериалы подвергаются тщательному изучению уже несколько лет, но до сих пор не все они подробно изучены. Например, пекинские

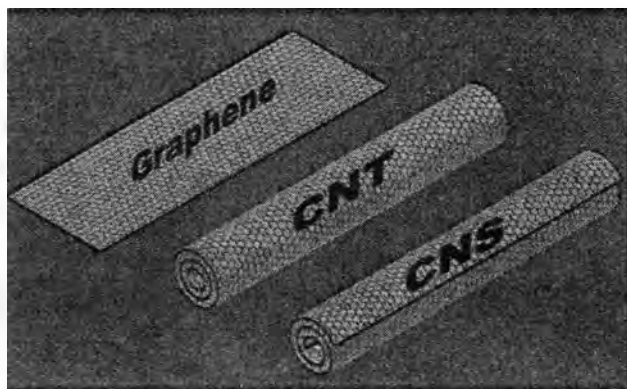


Рис. 6. Сравнение наноленты, нанотрубки и наносвитки

ученые дополнили список таких материалов, добавив к графену, нанолентам и нанотрубкам углеродные наносвитки (УНС). Наносвиток – скрученный слой графена – обладает многими уникальными свойствами. Например, электронный транспорт зависит от п-п взаимодействия его внешней и внутренней сторон, а ток может протекать не только через внешний цилиндр, как в случае

многослойных нанотрубок (МНТ), а по всей поверхности. Их уникальная топология упрощает интеркаляцию, ведь наносвиток не замкнут, и позволяет эффективно использовать их в качестве аккумулятора водорода. Однако пока все это только слова, проверить которые на практике мешало отсутствие способа получить качественные наносвитки и устройства на их основе.

Предложенные ранее методы допускали получение свитков только в смеси с другими формами углерода. Все они основаны на скручивании тонких слоев графита под воздействием ультразвука, однако высокий выход УНС сочетался с низким качеством поверхности, поскольку скручиванию подвергались как монослой графена, так два, три и более слоев.

Улучшение качества произошло, когда монослой графита удалось получить простым отшелушиванием. Тогда было показано, что при абсорбции газа такие монослои скручиваются, но позже был предложен еще более простой и эффективный способ. Графеновые слои отшелушивали на предварительно подготовленную подложку ($\text{SiO}_2(285 \text{ нм})/\text{Si}$) и определяли количество слоев методом спек-

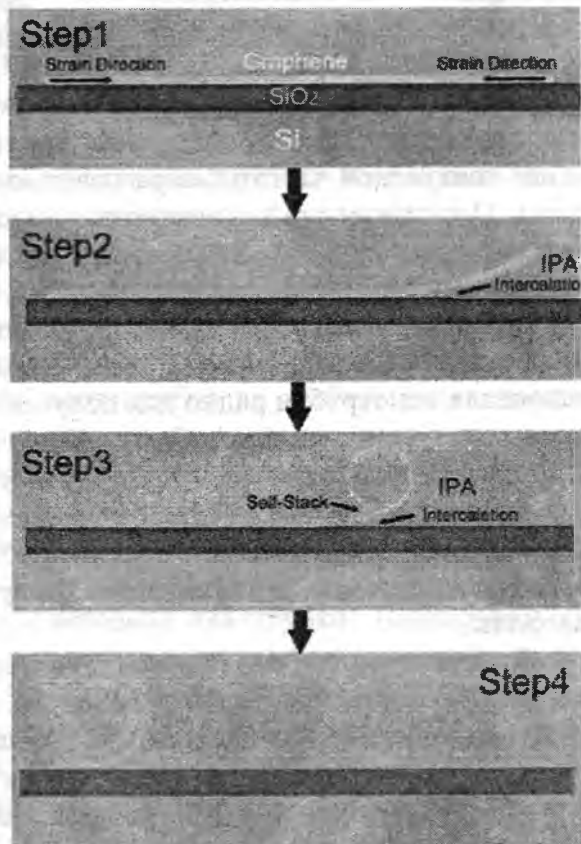


Рис. 7. Схема образования наносвитки

троскопии комбинационного рассеивания. Затем выбирали монослои и погружали их в чашку Петри с изопропанолом на 5 минут. После сушки в азоте оказалось, что двумерная структура действительно превратилась в одномерную. Изображение ПЭМ подтверждает, что это наносвитки, слои в которых плотно и равномерно упакованы. При этом расстояние между слоями составляет 0.35 нм.

КР спектры подтверждают, что образуется не нанотрубка, а именно свиток: так называемая "линия G" в спектрах хотя и уширяется по сравнению с графеном, однако остается гораздо уже, чем в нанотрубке, а "линия D" практически исчезает, в отличие от нанотрубок.

2. Применение наноматериалов

2.1. Нанотрубки в радио

Zettl построили полностью функциональное, со встроенным радиоприемником, во много раз меньше, чем любое предыдущее радио, из углеродных нанотрубок. Одна нанотрубка служит, как и все основные компоненты радио: антенна, тюнер, усилитель и демодулятор. Прием сигналов производится с помощью высокочастотных *механических* колебаний нанотрубки, а не через традиционные электрические средства.

Изображения, полученные с помощью электронной микроскопии, показывают одну из

углеродных нанотрубок, торчащих из электродов. Эти нанотрубки меньше микрона, или в 10000 раз тоньше, чем ширина человеческого волоса. Когда радио сигнал конкретной частоты затрагивает нанотрубку, она начинает активно вибрировать. Электрический ток может использоваться для обнаружения механических колебаний нанотрубки, и это позволяет слышать радио сигналы.

Антенна и тюнер осуществляются в совершенно иначе, чем традиционные радиостанции, прием сигналов с помощью высокочастотных *механических* колебаний нанотрубки, а не через традиционные электрические средства. Мы уже использовали нанотрубки радио для получения и воспроизведения музыки с FM радиопередач таких как *Layla* Эрика Клэптона (Derek And The Dominos) и пляж *Boy's Good Vibrations*. Радио нанотрубки чрезвычайно малых размеров могут позволить радикально новые приложения, такие как радиоуправляемые устройства достаточно малых размеров, чтобы существовать в человеческой крови, или просто меньше, дешевле, и эффективнее беспроводных устройств, таких как сотовые телефоны.

Высокое разрешение просвечивающего электронного микроскопа позволяет наблюдать нанотрубки радио в действии. Zettl записали четыре видеопленки с помощью электронного микроскопа, где нанотрубки радио играют четыре песни. В начале каждого видео, радио нанотрубки настроены на другую частоту, которой передается радиосигнал. Таким образом, нанотрубки не вибрируют, и только статические помехи могут быть услышаны. Как только радио становится в гармонии

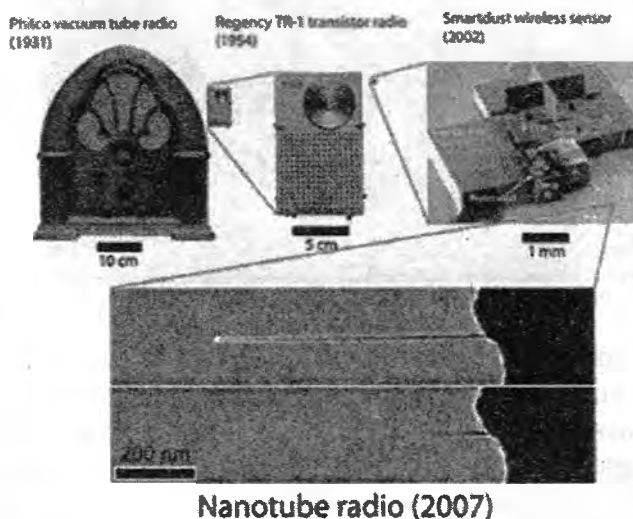


Рис. 8. Изменение размеров радио со временем

с передаваемым сигналом, нанотрубка начинает вибрировать, которая размывается в видео, и в то же время, музыка становится слышимой. За последнее столетие, радио в значительной степени уменьшилось по сравнению с деревянными " в стиле собор", радиостанциями 1930-х годов, карманными транзисторными радиоприемниками 1950-х годов и современными в одном радиочипе в сотовых телефонах и беспроводных датчиках. Продолжая эту тенденцию, Zettl еще более уменьшили радио, искусно осуществили несколько функций радио с одним компонентом, углеродными нанотрубками. Эти радио нанотрубки в более девятнадцать раз меньше, чем вакуумная трубка Philco радио с 1930-х!

2.2. Наномеханический датчик определения масс частиц атомных размеров

Какова наименьшая масса, которую может измерять простое механическое устройство? Едва заметные пылинки? Одна бактерия? Или, возможно, нанокристалл, состоящий из нескольких тысяч атомов? В самом деле, Zettl разработали новый вид механического датчика, основанного на вибрирующей углеродной нанотрубке,

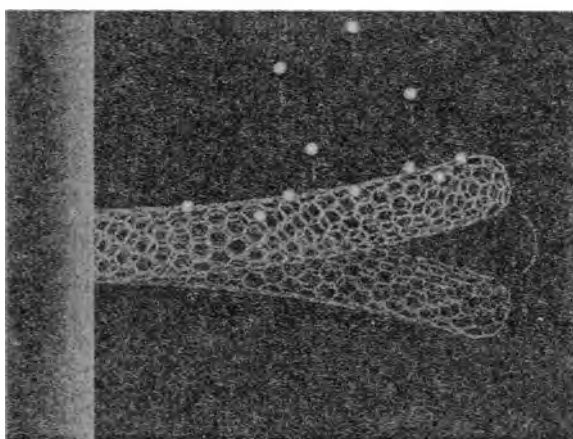


Рис. 9. Принцип действия наномеханического датчика

которым можно определить массу одного атома! Массовый датчик, основанный на нанотрубке, относится к семейству противовеса, известного как *инерциальный противовес*. Эти противовесы представляют собой пружину с присоединенной массой, которая может свободно колебаться. Отслеживая изменения в частоте колебаний, можно обнаружить изменения в массе. В этом устройстве, нанотрубка служит пружиной, а также контролируя

частоты ее колебания, мы можем обнаружить изменения в массе, вызванные адсорбированием отдельных атомов на поверхности нанотрубок. Чтобы быть более точным, текущая чувствительность устройства составляет $1,3 \cdot 10^{-25}$ кг / Гц $1/2$ или, что эквивалентно 0,40 атомов золота / Гц $1/2$. Таким образом, путем расширения понятия инерционного баланса до нанометрового масштаба, Zettl увеличили ее чувствительность до порядка нано-величины. Наномеханический датчик имеет множество преимуществ по сравнению с традиционным спектрометром точного определения масс. Во-первых, этот прибор не требует потенциально разрушающую ионизацию образца. (Большие молекулы, такие как белки, часто разрушаются при ионизации.) Во-вторых, это устройство становится более чувствительным в высших массовых диапазонах в отличие от традиционных масс-спектрометров. Наконец, наномеханический датчик компактен и, в конечном счете, может быть включен на чипе.

Как можно обнаружить колебания углеродной нанотрубки? Нанотрубки обладают меньшим размером, чем длина волны света, оптические стандартные методы для обнаружения вибраций неудачны. Хотя можно увидеть колебания с помощью просвечивающего электронного микроскопа, но этот метод является слишком медленным, чтобы быть полезным, и это не практично для коммерческих применений. Решение для обнаружения электрических колебаний. Zettl ис-

пользуют модифицированную версию «Нанотрубки Радио». По сути, они слушают колебания нанотрубки.

2.3. Хранение водорода с использованием фуллеренов

Хранение водорода — одна из самых больших проблем, с которыми столкнулась альтернативная энергетика. Но оказывается, решение ее не сложнее, чем микроскопические шарообразные молекулы углерода.

Казалось бы, внимание в эти дни приковано к углеродным нанотрубкам и углеродной нанопроводке. Но нельзя забывать и еще одну многообещающую и уникальную углеродную молекулу — бакиболл. Бакиболлы (buckyballs), названные так в честь Бакминстера Фуллера, содержат 60 атомов углерода. Это самая маленькая разновидность шарообразных углеродных молекул, фуллеренов, число атомов в которых может достигать до 2000.

Новое исследование, проведенное Университетом Райса, показывает, что углеродные бакиболлы можно

использовать для хранения водорода с плотностью, сравнимой с плотностью ядра Юпитера. Хранение водорода — самая сложная задача, которую только предстоит решить индустрии альтернативных источников энергии. Несмотря на то, что большие надежды на преодоление зависимости от ископаемого топлива возлагаются на водородные топливные элементы и эксперименты в области водородного сгорания, проблемы хранения водорода не дают этим технологиям выйти из лабораторных условий. Водород, сам по себе исключительно легкий, должен храниться с плотностью, превосходящей плотность жидкого водорода, чтобы соревноваться с бензином в плане расстояния, которое машина сможет преодолеть на одной заправке. Задача архисложная.

Исследование, которое будет опубликовано в мартовском выпуске *Nano Letters*, журнала Американского химического общества, финансировалось частично более чем миллиардным грантом на исследования в области хранения водорода от Министерства энергетики США и частично Центром военно-морских исследований. Руководитель проекта Борис Якобсон, профессор механического конструирования в Университете Райса, поражен результатом. «По нашим расчетам, некоторые бакиболлы способны удерживать настолько плотный объем водорода, что тот едва ли не переходит в металлическое состояние, — утверждает он. — Похоже, что при комнатной температуре они могут удерживать водород весом до 8 процентов от собственного, что значительно лучше, чем ориентир в 6 процентов, поставленный властями».

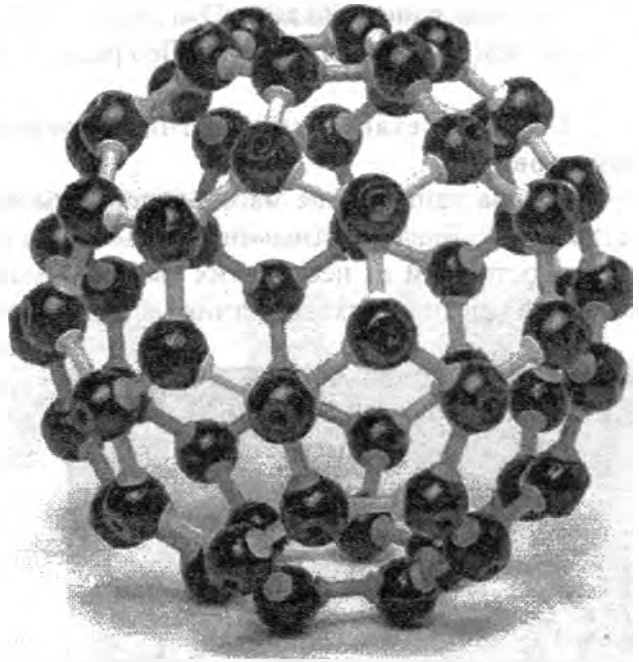


Рис. 10. Структура фуллерена C60

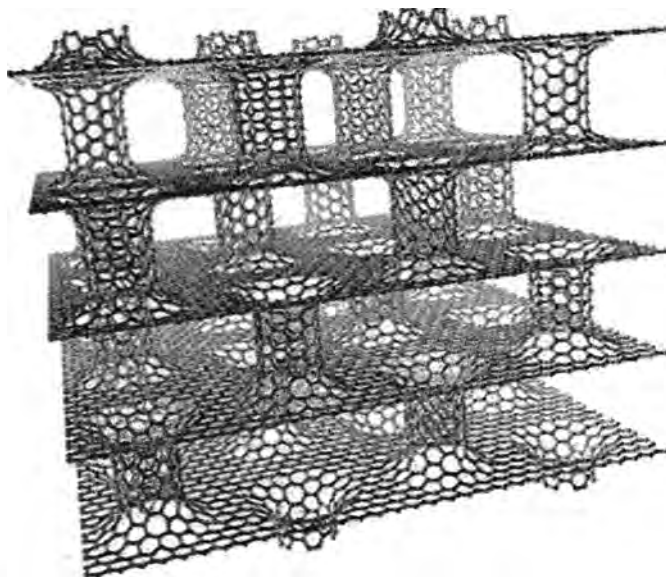
Якобсон признает, что идея хранения водорода в молекулярном контейнере не нова. Еще в прошлом, — соглашается он, — было известно, что бакиболлы могут хранить водород. Тем не менее, исследование Якобсона вместе с Ольгой Пупышевой и Амиром Фараяном, его бывшими аспирантами, впервые предложило метод точного вычисления объема водорода, который смогут, не ломаясь, выдержать микроскопические шары.

Место проведения исследования весьма символично, ведь именно в Университете Райс более 20 лет тому назад были открыты бакиболлы. Объясняя, как столь маленькие шарики могут хранить столько водорода, Якобсон говорит: «Связи между атомами углерода — одни из самых сильных химических связей в природе. Именно эти связи делают алмазы самой твердой в мире субстанцией, и наше исследование показывает, что для деформации или разрыва связей типа углерод-углерод в фуллерене требует колоссальное внутренне давление».

Новый метод вычисления вместительности задействует высокоточное компьютерное моделирование. Модель измеряет силу связей между атомами углерода в бакиболле по мере добавления атомов водорода. Модель универсальна в том смысле, что может быть масштабирована для фуллеренов любого размера. Она не только показывает, сколько водорода может вместить фуллерен, но и симулирует разрыв фуллерена, когда установленная величина оказывается превышена.

По словам Якобсона, наполненные водородом бакиболлы теоретически можно будет хранить в виде порошка. «Они, скорее всего, будут собираться в слабые молекулярные кристаллы или образуют мелкий порошок, — утверждает он. — Использовать их можно будет либо целыми, или же протыкать в определенных условиях для высвобождения чистого водорода для топливных элементов или двигателей другого рода».

2.4. Разработка топливного бака будущего



1. Структура высокотехнологичной губки, основы топливного бака будущего

В поиске решения безопасного хранения водорода при большой плотности, учёные из Греции впервые получили структуру, которая, по их мнению, станет основой топливного бака будущего.

При одинаковом весе водород в три раза более энергонасыщенный, чем бензин, но газ сложно хранить. Даже в жидком виде он требует высокого давления

или сверхмощного охлаждения. Последний прототип автомобиля, который способен проехать только до 450 км на полном баке.

Возможность хранить больше водорода простым способом может продвинуть технологию вперёд одним махом. А топливные баки нового поколения для хранения газа внутри твёрдых тел или жидкостей теперь делают это возможным.

Учёные из Греции утверждают, что они спроектировали материал, способный ответить требованиям, установленным пять лет назад Департаментом Энергетики США, чтобы создать материалы, способные удерживать 6% своего веса в водороде.

Для сравнения, самые передовые существующие твёрдые аккумулирующие материалы, гидриды металла, имеют цифру в 2 %.

Исследователи из Университета Крита в прошлом году доказали, что углеродные наноспиральи могут удерживать до 3.31 % своего веса в водороде. Сейчас они спроектировали сходный материал, который теоретически может удерживать почти в два раза больше.

Новая разработка заключается в листах графена – углеродный пласт толщиной в атом – разделённых столбцами из нанотрубок толщиной в 1.2-нанометра.

Проводилось искусственное моделирование, для того, чтобы доказать, что молекулы водорода могут свободно диффундировать по всей массе вещества, которое ‘заправляется’ положительно заряженными ионами лития для того, чтобы усилить его свойства, позволяющие удерживать газ.

Модели показали, то новые материалы поглощают 6.1 % своего веса в водороде при комнатной температуре и давлении.

Это лучшие удерживающие свойства материалов на сегодняшний день. Фраудакис надеется, что пока теоретические материалы покажут прогнозируемые свойства на практике. На данный момент по меньшей мере две исследовательские группы, пытающиеся разработать новый материал.

2.5. Применение металлоорганической структуры для хранения водорода

Материалы на основе углерода могут без давления хранить водород с большей плотностью, чем плотность твердого водорода. Чем выше интерес к так называемой «водородной экономике» и к транспорту, сжигающему водород или использующему его в топливных элементах, тем более насущным становится вопрос — как же хранить водород. Многие эксперты полагают, что для того, чтобы транспорт на водородном топливе мог соревноваться с бензиновым в дальности поездок, водород необходимо хранить с плотностью, превышающей плотность жидкого водорода. Такие уровни компрессии чреваты проблемами с безопасностью и высокой стоимостью.

Недавно мы рассказывали о планах хранения водорода в углеродных фуллеренах, таких как «бакиболлы». А в Центре нейтронных исследований Национального института стандартов и технологий (NIST) продемонстрировали многообещающую новую технологию хранения водорода с использованием еще одной экзотической разновидности углеродных материалов.

NIST, Университет Мэриленда и Калифорнийский технологический институт совместно проводили исследования металлоорганических решеток (MOF). Этот тип соединений считается очень перспективным, так как может с легкостью хранить и высвобождать водород благодаря простым изменениям условий хранения. Однажды на этой основе может быть даже разработано что-то наподобие топливного насоса.

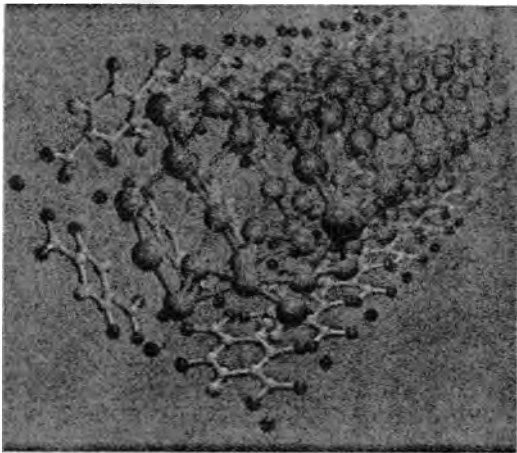


Рис. 12. Наноструктура MOF-74

по внутренним полостям которых бегают ионы цинка. Соломинки очень плотно упакованы, образуя порошкообразный материал. Благодаря уникальному устройству материала один грамм такой субстанции имеет площадь поверхности равную площади теннисного корта.

Данная структура удивительно хорошо упаковывает водород. Ученые установили, что при 77 градусах по Кельвину (-196°C) MOF-74 поглощает больше водорода, чем любой из известных на сегодня непрессованных материалов. Материал пакует водород с плотностью, превосходящей плотность твердого водорода. Чтобы придти к этому открытию ученые использовали смешанную технику нейтронного рассеивания и абсорбции газа.

Крейг Браун, ученый из Центра нейтронных исследований, сообщает, что исследователи не вполне уверены, что же помогает MOF-74 так здорово впитывать водород. По его словам, они склоняются к мнению о том, что это может происходить в результате взаимодействия водорода с ионами цинка. Браун воодушевлен перспективами MOF-74: «Когда мы начали наши эксперименты, мы поняли, что взаимодействие с металлом не только повышает температуру хранения водорода, но и увеличивает плотность до большей, чем у водорода в твердом состоянии. Это абсолютно первый случай, когда подобное было достигнуто без помощи компрессии».

Температура, необходимая для складирования в MOF-74 легко достигается с помощью дешевого жидкого азота. Это большое преимущество по сравнению с твердым азотом, нуждающимся в температурах ниже -269°C . Исследователи надеются, что дальнейшие исследования позволят им либо модифицировать материал, либо найти похожие, чтобы складирование стало возможным при еще более высокой температуре. Тогда можно будет обойтись без систем охлаждения и/или изоляции, а значит снизить производственные затраты и улучшить экономию топлива.

ЛИТЕРАТУРА

1. www.nanometer.ru
2. www.nanonewsnet.ru
3. www.nanodigest.ru
4. Рыбалкина М. Нанотехнология для всех.—Nanotechnology News Network, 2005.
5. EUR 21151 – Нанотехнологии – Новинки завтрашнего дня. Люксембург: Служба по официальным изданиям Европейского сообщества, 2006.

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ДВУХШАРНИРНОЙ КАРДАННОЙ ПЕРЕДАЧИ С ПОМОЩЬЮ КОРРЕЛЯЦИОННО- РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Гурвич Ю.А., Вареник А.А., Августиневич А.Г., Старовойтова О.Л.

Белорусский национальный технический университет, Минск

This article contains a description of a new method of unevenness definition in dependence of obliquity angle and its influence on output cinematic characteristics of two-joint cardan shafts. Also conducted a study of cardan shafts using correlation-regression analysis.

В отличие от работ [1-7] здесь впервые сделана попытка исследовать влияние угла поворота α ведущего вала I, угла излома γ_2 и угла между вилками ψ , расположенными на одном валу II, на угловое ускорение ϵ_3 ведомого вала III двухшарнирной карданной передачи, схема которой представлена на рис. 1, с помощью корреляционно-регрессионного анализа и программного пакета STATISTICA.

Корреляционно-регрессионный анализ широко используется при исследовании различных зависимостей между статистическими рядами. В зависимости от количества рассматриваемых факторов корреляционно-регрессионный анализ подразделяется на два вида: парный и множественный. Парный корреляционно-регрессионный анализ устанавливает связь между двумя факторами: $y_i = x_i$; многофакторный – между n факторами, один из которых – зависимый, а остальные – независимые: $y_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ [8-10].

При изучении кинематики плоской двухшарнирной карданной передачи сначала был проведён парный, а затем многофакторный корреляционно-регрессионный анализ.

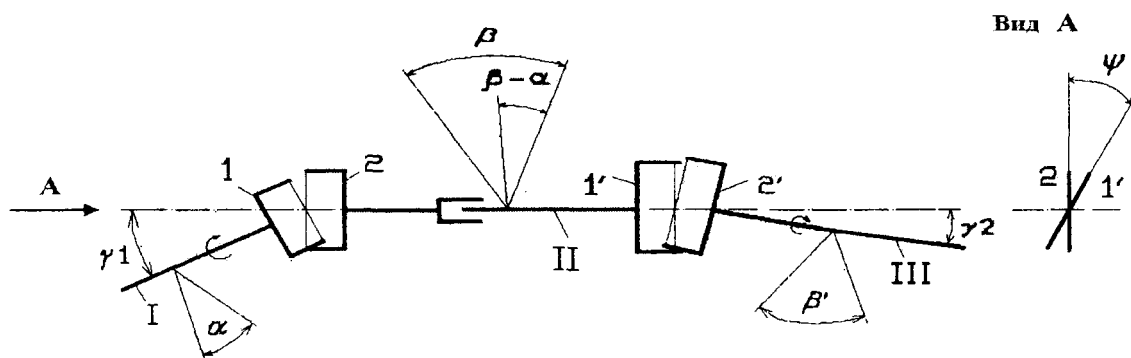


Рис. 1. Схема плоской двухшарнирной карданной передачи с двумя карданами

Для определения углового ускорения ϵ_3 вала III двухшарнирной карданной передачи в качестве исходной информации используем формулу угла поворота ведомого вала β' , приведенную в [2]:

$$\beta' = \arctag \left(\frac{\cos \gamma_2 \cdot tg \alpha (1 + tg^2 \psi)}{\cos \gamma_1 - tg \alpha \cdot tg \psi + \cos^2 \gamma_2 \cdot tg \psi (tg \alpha + tg \psi \cdot \cos \gamma_1)} \right), \quad (1)$$

где α – угол поворота вала I; β' – угол поворота вала III; γ_1 – угол излома вала I; γ_2 – угол излома вала III; ψ – угол между вилками 2 и 1', расположенными на валу II.

Сначала определим угловую скорость ведомого вала. Так как угол β' является функцией двух переменных α, γ_2 , то полная первая производная по времени от (1) представляет собой сумму двух слагаемых

$$\frac{d\beta'}{dt} = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2} \cdot \frac{d\gamma_2}{dt}.$$

Введем замены:

$$L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha}, \quad L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) = \frac{\partial\beta'}{\partial\gamma_2}, \quad \omega_3 = \frac{d\beta'}{dt} \quad - \text{угловая скорость}$$

вращения вала III; $\omega_1 = \frac{d\alpha}{dt}$ – угловая скорость вала I; $\omega_{\gamma_2} = \frac{d\gamma_2}{dt}$ – угловая скорость вала III при переменном угле γ_2 .

Выражение (1) перепишем в виде

$$\omega_3 = \omega_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi). \quad (2)$$

Теперь определим угловое ускорение ведомого вала ε_3 , взяв полную производную по времени от левой и правой частей выражения (2) (в [7] приведен вывод формулы ε_3):

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_1 \cdot L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_1 \cdot \left(\frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L1(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right) + \\ + \varepsilon_{\gamma_2} \cdot L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi) + \omega_{\gamma_2} \cdot \left(\frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\alpha} \cdot \omega_1 + \frac{\partial L2(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)}{\partial\gamma_2} \cdot \omega_{\gamma_2} \right), \quad (3) \end{aligned}$$

где ε_1 – угловое ускорение вала I; ε_{γ_2} – угловое ускорение вала III при переменном угле γ_2 .

В работе исследование углового ускорения $\ddot{\beta}' = \varepsilon_3$ с помощью парного корреляционно-регрессионного анализа было выполнено при переменных углах:

1. α (при фиксированных углах γ_1, γ_2, ψ). Примем, например, $\gamma_1 = \pi/36$, $\gamma_2 = \pi/36$, $\psi = \pi/90$;
2. γ_1 (при фиксированных углах α, γ_2, ψ). Примем, например, $\alpha = \pi/6$, $\gamma_2 = \pi/36$, $\psi = \pi/90$;
3. γ_2 (при фиксированных углах α, γ_1, ψ). Примем, например, $\alpha = \pi/6$, $\gamma_1 = \pi/36$, $\psi = \pi/90$;
4. ψ (при фиксированных углах $\alpha, \gamma_1, \gamma_2$). Примем, например, $\alpha = \pi/6$, $\gamma_1 = \pi/36$, $\gamma_2 = \pi/36$.

Значения углов $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi$ и углового ускорения $\ddot{\beta}'$ в функции этих углов или $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\alpha)$, $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_1)$, $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_2)$, $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\psi)$ определим по формуле (3), используя программный пакет MATHCAD (рис. 2). Тогда в обозначениях MATHCAD:

- $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi$ (рад);
- $\ddot{\beta}'(\alpha) = b2\alpha$, $\ddot{\beta}'(\gamma_1) = b2\gamma_1$, $\ddot{\beta}'(\gamma_2) = b2\gamma_2$, $\ddot{\beta}'(\psi) = b2\psi$ (рад/с²).

В столбце исходных данных угол α принимает значения $91\pi/180$ и $271\pi/180$, вместо $\alpha = 90\pi/180$ и $\alpha = 270\pi/180$, так как $\text{tg}\alpha$, входящий в формулу ε_3 [7], при значениях этих углов стремится к $\pm \infty$.

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/6 \\ \pi/3 \\ 91\pi/180 \\ 2\pi/3 \\ \pi \\ 5\pi/4 \\ 271\pi/180 \\ 7\pi/4 \\ 2\pi \end{bmatrix}, \quad b2\alpha = \begin{bmatrix} 4.002 \\ 2.422 \\ -0.577 \\ -1.99 \\ -0.414 \\ 4.002 \\ 0.91 \\ -1.99 \\ 1.097 \\ 4.002 \end{bmatrix};$$

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} \pi/180 \\ 2\pi/180 \\ 3\pi/180 \\ 4\pi/180 \\ 5\pi/180 \\ 6\pi/180 \\ 7\pi/180 \\ 8\pi/180 \\ 9\pi/180 \\ 10\pi/180 \end{bmatrix}, \quad b2\gamma_1 = \begin{bmatrix} 58.543 \\ 51.558 \\ 39.897 \\ 23.532 \\ 2.422 \\ -23.483 \\ -54.249 \\ -89.951 \\ -130.675 \\ -176.523 \end{bmatrix};$$

$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} \pi/180 \\ 2\pi/180 \\ 3\pi/180 \\ 4\pi/180 \\ 5\pi/180 \\ 6\pi/180 \\ 7\pi/180 \\ 8\pi/180 \\ 9\pi/180 \\ 10\pi/180 \end{bmatrix}, \quad b2\gamma_2 = \begin{bmatrix} -55.592 \\ -48.406 \\ -36.332 \\ -19.384 \\ 2.422 \\ 29.064 \\ 60.514 \\ 96.74 \\ 137.702 \\ 183.359 \end{bmatrix};$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \pi/360 \\ \pi/180 \\ 3\pi/360 \\ 2\pi/180 \\ 5\pi/360 \\ 3\pi/180 \\ 7\pi/360 \\ 4\pi/180 \\ 9\pi/360 \\ 5\pi/180 \end{bmatrix}, \quad b2\psi = \begin{bmatrix} 0.703 \\ 1.294 \\ 1.867 \\ 2.422 \\ 2.96 \\ 3.478 \\ 3.979 \\ 4.46 \\ 4.923 \\ 5.367 \end{bmatrix}.$$

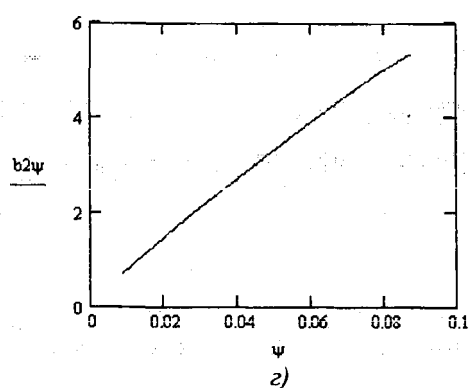
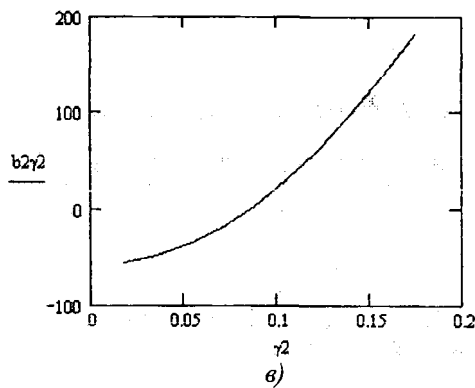
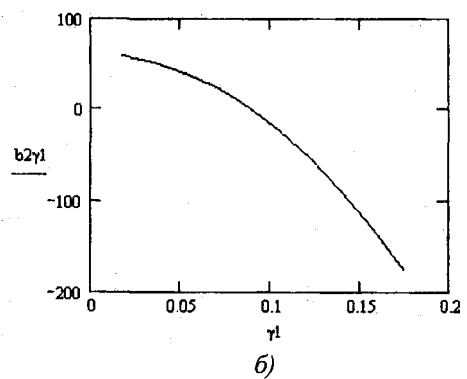
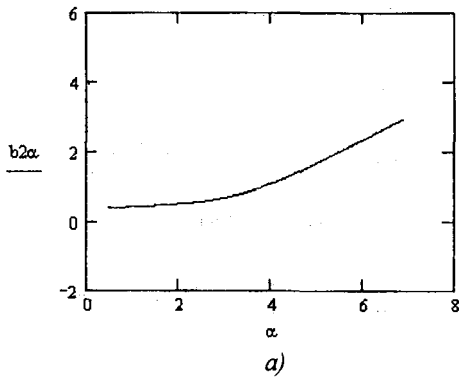


Рис. 2. Графики зависимости углового ускорения от углов $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi$:

а) $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\alpha)$, б) $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_1)$, в) $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\gamma_2)$, з) $\ddot{\beta}' = \ddot{\beta}'(\psi)$

Из графика, представленного на рис. 2, видно, что зависимость между угловым ускорением β' и углом α близка к параболической; между β' и углом γ_1 близка к гиперболической; между β' и углом γ_2 близка к параболической; между β' и углом ψ близка к линейной. Поэтому при выводе формулы парной регрессии с помощью программного пакета STATISTICA будем использовать параболическую, гиперболическую и линейную функции.

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица d)						
R= ,51420124 R2= ,26440292 Скорректир. R2= ,05423232 F(2,7)=1,2580 p<,34138 Станд. ошибка оценки: 2,3202						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(7)	p-уров.
Св.член			2,839761	1,695868	1,67452	0,137940
alfa	-1,87221	1,245710	-0,035869	0,023686	-1,50293	0,176561
v1**2	1,97214	1,245710	0,000103	0,000065	1,58314	0,157405

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица d)						
R= ,99200825 R2= ,98408038 Скорректир. R2= ,97953191 F(2,7)=216,35 p<,00000 Станд. ошибка оценки: 11,596						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(7)	p-уров.
Св.член			179,9129	18,38532	9,7857	0,000025
gamma1	-1,23608	0,081060	-33,0901	2,16999	-15,2490	0,000001
1/v1	-0,32481	0,061060	-94,9492	23,69563	-4,0070	0,005144

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица d)						
R= ,99999946 R2= ,99999893 Скорректир. R2= ,99999862 F(2,7)=3258E3 p<,0,0000 Станд. ошибка оценки: ,09701						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(7)	p-уров.
Св.член			-58,2040	0,114103	-510,102	0,000000
v1**2	0,996473	0,001748	2,4070	0,004222	570,116	0,000000
gamma2	0,003619	0,001748	0,0987	0,047654	2,070	0,077184

Итоги регрессии для зависимой переменной: b2 (Таблица d)						
R= ,99899418 R2= ,99796938 Скорректир. R2= ,99773805 F(1,8)=3970,9 p<,00000 Станд. ошибка оценки: ,07472						
N=10	БЕТА	Стд.Ош. БЕТА	В	Стд.Ош. В	t(8)	p-уров.
Св.член			0,294200	0,051043	5,76375	0,000422
psi	0,998994	0,015853	0,016453	63,01480	0,000000	

Рис. 3. Результаты парной регрессии для углов α , γ_1 , γ_2 , ψ

Из рис. 3 видно, что зависимости β' от углов α , γ_1 , γ_2 , ψ выражаются моделями:

$$\begin{aligned} \beta' &= 2.839761 - 0.0358 \cdot \alpha^2 - 0.000103 \cdot \alpha; \\ \beta' &= 179.9129 - 33.0901 \cdot \gamma_1 - 94.9492 \cdot 1/\gamma_1; \\ \beta' &= -58.2040 + 2.4070 \cdot \gamma_2^2 + 0.0987 \cdot \gamma_2; \\ \beta' &= 0.2942 + 1.036764 \cdot \psi. \end{aligned}$$

Применим многофакторный корреляционно-регрессионный анализ для установления одновременной функциональной зависимости между исследуемой случайной величиной и факторами $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или $\beta' = \beta'(\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \psi)$.

На стадии количественного анализа отберем факторы, влияние которых на исследуемую зависимость $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существенно. В уравнении множественной регрессии существенными обычно оказываются те факторы, которые имеют существенную корреляционную связь с результативным признаком, т. е. с $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (большое значение коэффициента корреляции), а между собой – несущественную (малое значение коэффициента корреляции). На данной стадии рассчитывается корреляционная матрица (табл. 1).

Таблица 1

	y	x ₁	x ₂	...	x _n
y	1	r _{yx1}	r _{yx2}	...	r _{yxn}
x ₁		1	r _{x1x2}	...	r _{x1xn}
x ₂			1	...	r _{x2xn}
x ₃				...	r _{x3xn}
⋮					⋮
x _n					1

Коэффициент корреляции между факторами x_i и x_j определяется по формуле

$$r_{x_i, x_j} = \frac{\sum_{k=1}^n [(x_{ik} - \bar{x}_i) \cdot (x_{jk} - \bar{x}_j)]}{\sqrt{\sum_{k=1}^n [(x_{ik} - \bar{x}_i)^2 \cdot (x_{jk} - \bar{x}_j)^2]}} \quad (4)$$

где \bar{x}_i и \bar{x}_j - соответственно, среднее по строкам и столбцам.

В нашем случае корреляционная матрица между углами α , γ_1 , γ_2 , ψ и угловым ускорением $\varepsilon_3 = \ddot{\beta}'$ примет следующий вид:

$$Matriza = \begin{bmatrix} 1 & r_{\varepsilon_3\alpha} & r_{\varepsilon_3\gamma_1} & r_{\varepsilon_3\gamma_2} & r_{\varepsilon_3\psi} \\ r_{\varepsilon_3\alpha} & 1 & r_{\alpha\gamma_1} & r_{\alpha\gamma_2} & r_{\alpha\psi} \\ r_{\varepsilon_3\gamma_1} & r_{\alpha\gamma_1} & 1 & r_{\gamma_2\gamma_1} & r_{\psi\gamma_1} \\ r_{\varepsilon_3\gamma_2} & r_{\alpha\gamma_2} & r_{\gamma_2\gamma_1} & 1 & r_{\gamma_2\psi} \\ r_{\varepsilon_3\psi} & r_{\alpha\psi} & r_{\psi\gamma_1} & r_{\gamma_2\psi} & 1 \end{bmatrix},$$

$$Matriza = \begin{bmatrix} 1 & 0.032 & -0.973 & 0.975 & 0.999 \\ 0.032 & 1 & 0.955 & 0.965 & 0.995 \\ -0.973 & 0.955 & 1 & 1 & 0.02 \\ 0.975 & 0.965 & 1 & 1 & 1 \\ 0.999 & 0.995 & 0.02 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из матрицы видно, что коэффициент корреляции:

- между $\ddot{\beta}'$ и α равен 0.032;
- между $\ddot{\beta}'$ и γ_1 равен -0.973;
- между $\ddot{\beta}'$ и γ_2 равен 0.975;
- между $\ddot{\beta}'$ и ψ равен 0.999.

Для фактора α (матрицу рассматриваем по столбцам) связь с фактором γ_1 сильнее, чем с функцией $\ddot{\beta}'$, потому что $r_{\alpha\gamma_1} = 0.955 > r_{\varepsilon_3\alpha} = 0.032$. Следовательно, фактор α является несущественным и его нужно исключить из дальнейшего рассмотрения.

Исходные данные $\ddot{\beta}'$ для множественной корреляции получим из формулы (3) по 29 значениям углов γ_1 , γ_2 , ψ (в градусах):

$\gamma_1 =$	0	$\gamma_2 =$	0.5	$\psi =$	0.2	$\beta' =$	0.832
	0.5		1		0.3		1.735
	1		1.5		0.8		3.095
	1.5		1.75		1.1		2.609
	2		2		1.3		0.899
	2.5		2.25		1.7		-1.924
	3		2.5		2.2		-6.13
	3.5		2.75		2.5		-11.565
	4		3		2.7		-18.047
	4.5		3.25		3		-25.128
	5		3.5		3.3		-32.092
	5.5		3.75		3.8		-38.979
	6		4		4.5		-46.214
	6.5		4.25		4.9		-51.116
	7		4.5		5.3		-51.857
	7.5		4.75		5.9		-43.329
	8		5		6.1		-36.733
	8.5		5.25		6.5		-22.233
	9		5.5		7		-11.848
	9.5		5.75		7.7		1.416
	10		6		7.9		19.769
	10.5		6.25		8.3		61.176
	11		6.5		9.1		94.006
	11.5		6.75		9.5		145.979
	12		7		9.7		200.717
	12.5		7.25		10.1		243.717
	13		7.5		10.3		296.951
	13.5		7.75		10.7		341.095
	14		8		11.1		378.234

В работе были рассмотрены:

- линейная модель, для которой коэффициент множественной корреляции $R = 0,754$;
- параболическая модель, для которой коэффициент множественной корреляции $R = 0,964$;
- гиперболическая модель, для которой коэффициент множественной корреляции $R = 0,597$.

Так как коэффициент множественной корреляции у параболической модели наибольший, то она наиболее точно описывает связь между β' и углами γ_1, γ_2, ψ .

Приведем расчет параболической модели.

- зависимость между откликом и предикторами сильная, так как $R = 0,964 > 0,75$;
- построенная параболическая регрессия адекватно описывает взаимосвязь между откликом и предикторами;
- свободный член статистически значим [9].

Полученная модель может быть использована:

- для прогнозирования значений углового ускорения $\ddot{\beta}'$;
- для определения исходных значений углов γ_1, γ_2, ψ при заданном значении углового ускорения $\ddot{\beta}'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. – М., 1954. – 379 с.
2. Малаховский Я. Э., Лапин А. А. Карданные передачи. – М.: Машгиз, 1962. – 153 с.
3. Островерхов Н. Л., Русецкий И. К., Бойко Л. И. Динамическая нагруженность трансмиссий колёсных машин. – Минск: Наука и техника, 1977. – 191 с.
4. Проектирование универсальных шарниров и ведущих мостов. Пер. с англ. Попова Ю. В. – Л.: Машиностроение. – 1984. – 463 с.
5. Бойко Л. И. Механика приводов колеблющихся рабочих органов машин. – Мн.: ООО «Мэджик бук». – 2003 г. – 239 с.
6. Гурвич Ю. А., Сафронов К. И., Пащенко А. В. Анализ кинематических характеристик карданных передач // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 24. – С. 261–266.
7. Гурвич Ю. А., Вареник А. А. Анализ кинематических характеристик одношарнирной и двухшарнирной карданных передач / Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ, 2010. – № 25. – С. 258–262.
8. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем. – Минск: Дизайн ПРО, 2004. – 640 с.
9. Халафян А. А. Учебник STATISTICA 6 Статистический анализ данных. – М.: Бином, 2007. – 508 с.
10. Лебедева Г. И., Микулик Н. А. Прикладная математика. – Минск: Асар, 2009. – 512 с.

ОБЪЕДИНЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS 12

Куликов И.С., Коваль Ю. Г., Томило Е. В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Possibility on association of decisions in program complex ANSYS 12 on a problem example about mixing of liquids with various temperatures and speeds of movement in pipes is presented

В программном комплексе ANSYS 12 реализованы наиболее наглядные и удобные при использовании возможности по объединению решений, полученных в различных модулях программы. При использовании ANSYS 12 возможно решение задач с большим приближением к реальным условиям.

В данной работе для демонстрации этих возможностей будет решена задача о смешивании двух жидкостей с различными температурами и скоростями движения во врезке в трубу.

Размеры трубы:

Внешний диаметр 100мм;

Толщина стенки 2 мм;

Материалы:

Сталь с параметрами: модуль Юнга $E=2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

Вода с параметрами: плотность $\rho=997$ кг/м³, удельная теплоёмкость $c=4181$ Дж/(кг · К).

В работе рассматривались трубы с одинаковыми геометрическими размерами. Расчетная модель строится в SolidWorks (рис. 1).

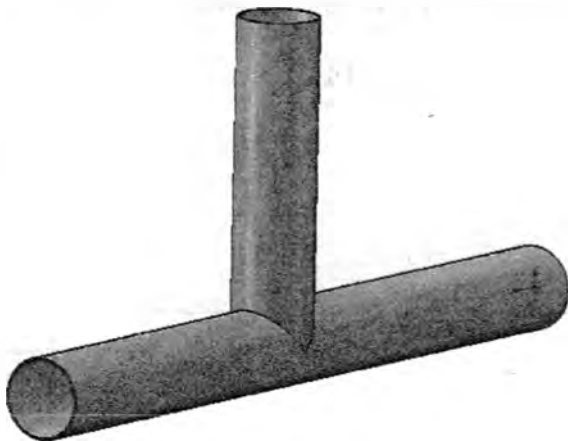


Рис. 1. Твёрдотельная модель труб

Геометрическую модель жидкости создаем в ANSYS и разбиваем на конечные элементы (рис. 2, а, б).

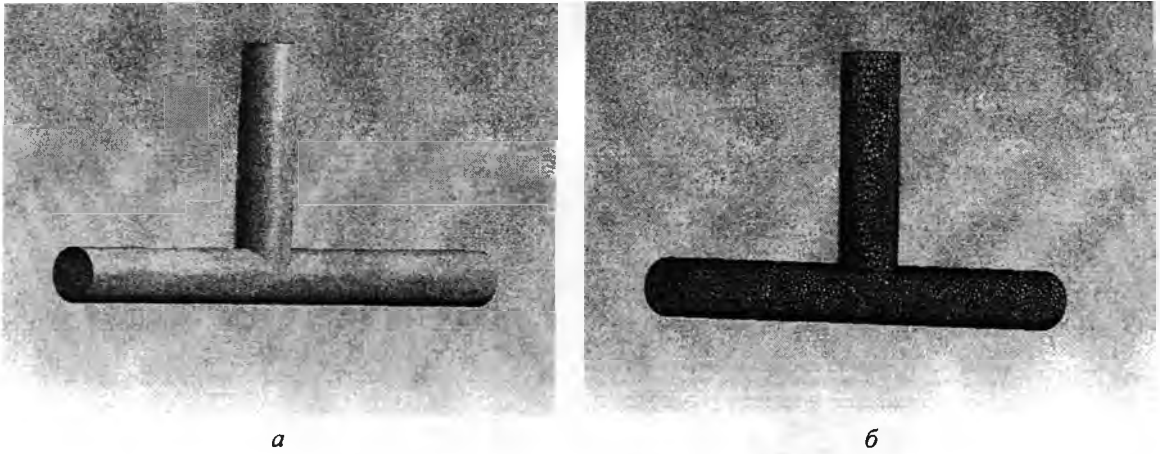


Рис. 2: а – модель жидкости; б – сеточная модель жидкости в ANSYS

Во врезке в трубу задана скорость 10 м/с и температура 333 К, в самой трубе скорость 20 м/с и температура 295 К, давление на выходе равно 0 МПа, скорость по внешней поверхности трубы задана 0 м/с (рис. 3).

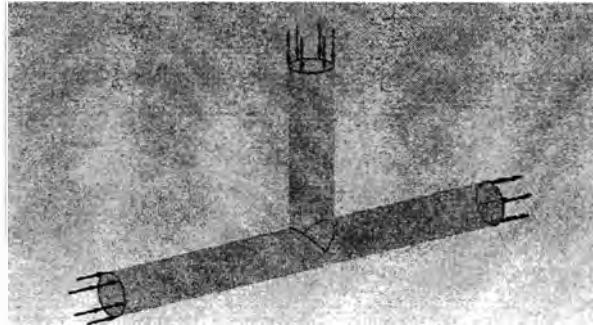


Рис. 3. Задание граничных условий

Рассматриваем течение жидкости как установившийся процесс. В результате расчета в модуле CFX получили значения температуры на внешней поверхности жидкости (рис. 4, а), которые затем импортируем в модуль Steady-StateThermal на внутренние поверхности труб (рис. 4, б).

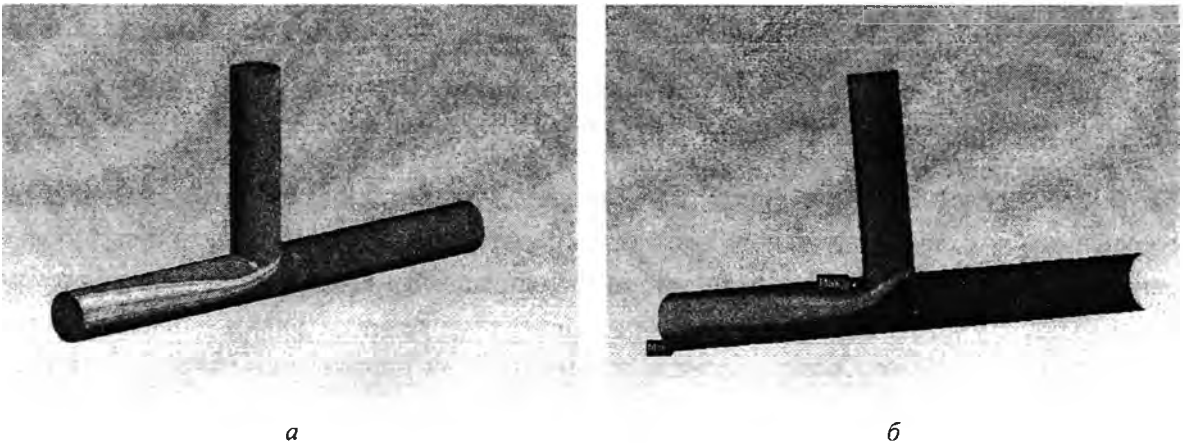


Рис. 4: а – распределение температуры на внешней поверхности жидкости; б – импортированное распределение температуры на внутренние поверхности труб

Задаем значение температуры величиной 22 °С на внешней поверхности труб. Решаем задачу. В результате получаем неравномерно нагретое тело по толщине трубы и по ее длине (рис. 5).

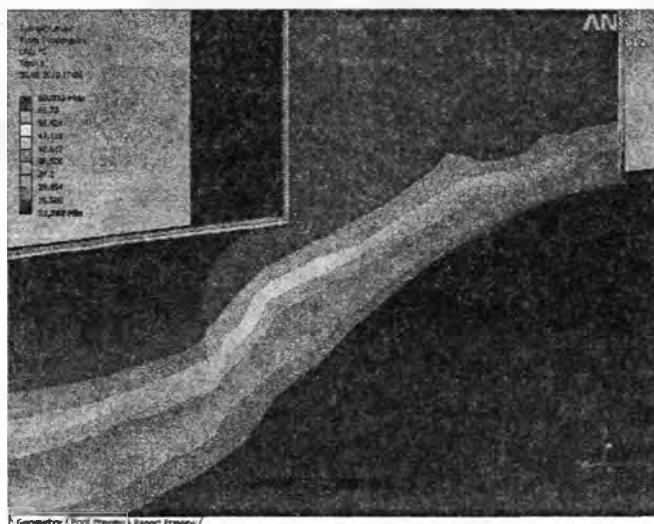
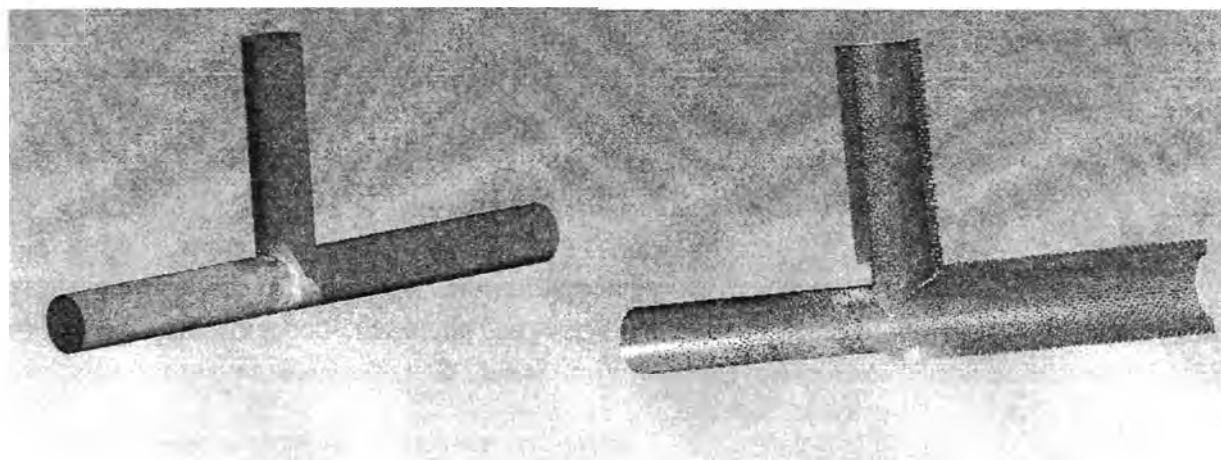


Рис. 5. Неравномерно нагретое тело

Далее импортируем давление на внешней поверхности жидкости, рассчитанное в модуле CFX (рис. 6, а), в модуль StaticStructural на внутренние поверхности труб (рис. 6, б).



а

б

Рис. 6: а – давление на внешней поверхности жидкости;
б – импортированное давление на внутренние поверхности труб

Итоговый расчет НДС производится в модуль StaticStructural с учетом полученных ранее решений для тепло-гидравлической и температурной задач. Приложив результаты, полученные в этих решениях как условия нагружения для труб, получаем задачу для определения НДС с учетом неравномерного распределения температуры и давления. В результате решения получаем распределение интенсивности напряжений (рис. 7), при анализе которого можно сделать вывод о НДС рассчитываемого тела.

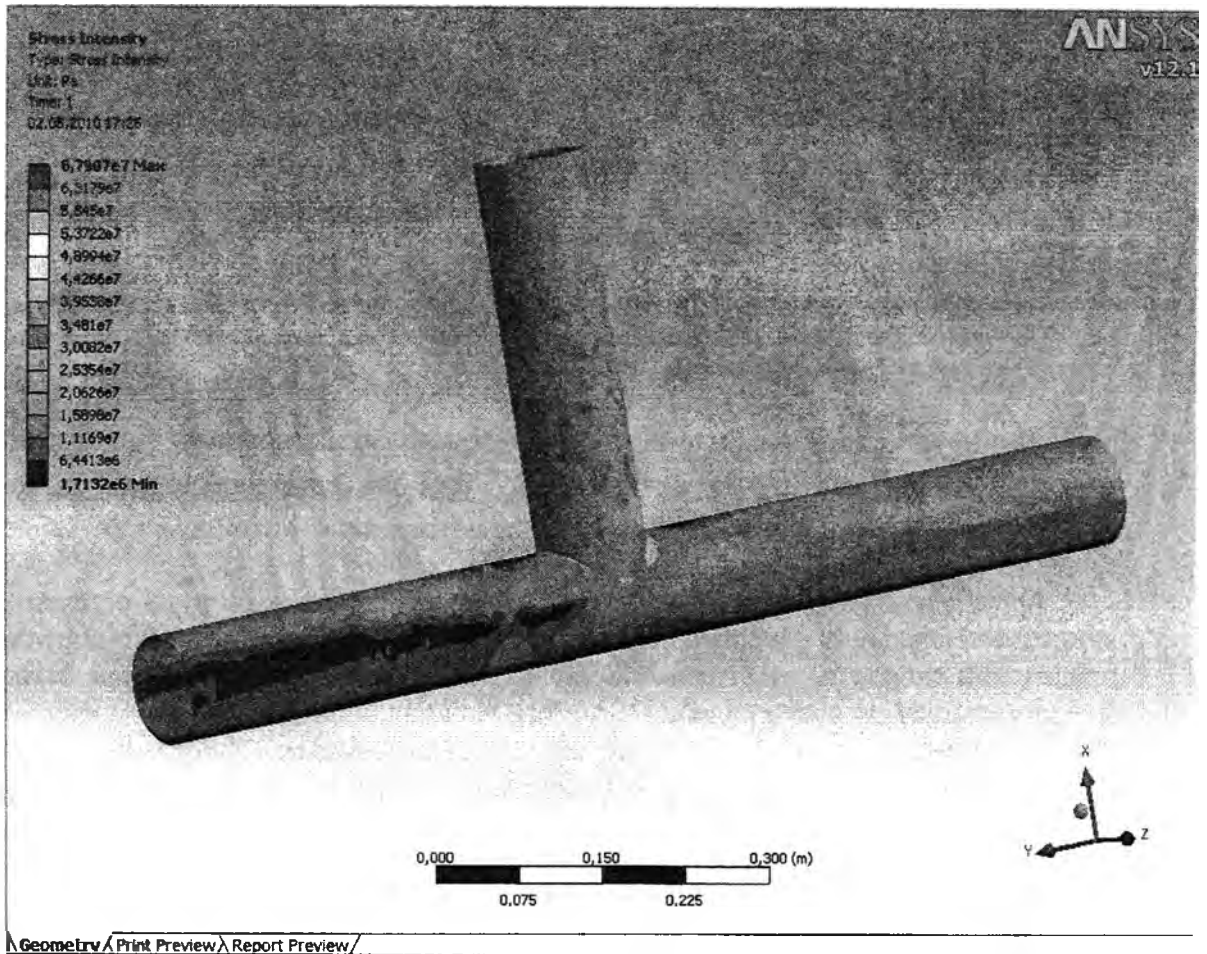


Рис. 7. Распределение интенсивности напряжений

По принципу приведенного расчета можно решать задачи используя в виде нагрузок результат ранее решенных задач. Таким образом, решение разных типов задач для рассчитываемого тела происходит последовательно, по средствам одностороннего переноса результатов предшествующего расчёта на последующий в качестве граничных условий. При таком решении возможен учет неравномерности таких нагрузок как температура и давление. Задавая нагрузки как результат решения, мы получаем достаточно приближенное к реальным значениям решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров. – М.: Машиностроение, 2004. – 506 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАДЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА В ВОЗДУХЕ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Горбач Н.И., Лужинский Е.С., Неверовская Я.Б.

Белорусский национальный технический университет, Минск

В работе приводятся результаты теоретических исследований падения тяжелого тела в воздухе при квадратичном законе сопротивления. Получен ряд аналитических зависимостей, характеризующих основные параметры этого движения.

Рассмотрим падение тела в воздухе без начальной скорости. Примем силу сопротивления \bar{R} равной по величине μV^2 , где μ - постоянный коэффициент сопротивления, зависящий от формы и размеров тела и физических свойств среды.

Определим изменение скорости падения и пройденного пути с течением времени, предельную скорость падения, время, в течение которого тело достигает предельной скорости, расстояние, пройденное телом до достижения предельной (максимальной) скорости падения.

1. Направим ось Ox (рис.1) по вертикали вниз, изобразим тело в произвольном положении и покажем силы, действующие на него: вес \bar{P} и силу сопротивления \bar{R} .

Запишем второй закон динамики в проекции на ось Ox :

$$m\ddot{x} = P - R = P - \mu V^2, \quad (1)$$

где $P = mg$. Обозначим $\ddot{x} = \frac{dV}{dt}$ и сократим на m , получим

$$\frac{dV}{dt} = g - \frac{\mu}{m} V^2 = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg}{\mu} - V^2 \right). \quad (2)$$

Обозначим $\frac{\mu}{m} = k$; $\frac{mg}{\mu} = n^2$, разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int_0^V \frac{dV}{n^2 - V^2} = \int_0^t k dt \Rightarrow \frac{1}{2n} \ln \left| \frac{n+V}{n-V} \right| = kt.$$

Потенцируем полученное выражение и определим закон изменения скорости с течением времени:

$$V = n \frac{e^{2nkt} - 1}{e^{2nkt} + 1}. \quad (3)$$

2. Для определения предельной скорости падения уравнение (3) представим в виде

$$V = n \frac{1 - e^{-2nkt}}{1 + e^{-2nkt}}. \quad (4)$$

Из (4) следует, что с увеличением времени падения скорость возрастает и при $t = \infty$ достигает максимальной (предельной) величины:

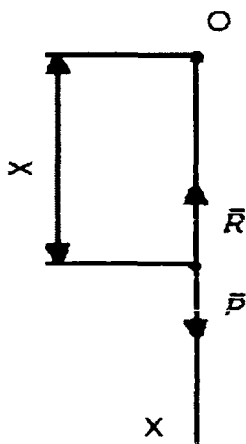


Рис. 1

$$V_{np} = n = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}. \quad (5)$$

Значение V_{np} можно также получить из условия максимума функции $f(V)$, при котором $f'(V) = \frac{dV}{dt} = 0$. Поэтому подставив в уравнение (1) ускорение

$$\frac{dV}{dt} = 0, \text{ получим } P - \mu V_{np}^2 = 0. \text{ Отсюда } V_{np} = \sqrt{\frac{P}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}}.$$

3. Определим время, за которое скорость падения тела достигнет значения весьма мало отличающегося от предельной скорости, т.е. $V = \gamma V_{np}$, где $\gamma < 1$, $V_{np} = n$.

Подставим в (3) вместо V значение $V = \gamma n$. После сокращения на V получим $\gamma = \frac{e^{2nkt} - 1}{e^{2nkt} + 1}$. Отсюда $t = t_\gamma = \frac{1}{2nk} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$. (6)

Или с учетом введенных выше обозначений

$$t_\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{\mu g}} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma}. \quad (6')$$

Таким образом, время, в течение которого скорость тела достигает предельного значения, зависит от массы тела и коэффициента сопротивления воздуха, т.е. более тяжелое тело достигает предельной скорости падения за большее время при одном и том же сопротивлении воздуха.

4. Определим зависимость пройденного пути (координаты x) от времени.

Так как $V = \frac{dx}{dt} = n \frac{e^{2nkt} - 1}{e^{2nkt} + 1}$, то разделим переменные и преобразуем $dx = n \frac{(e^{2nkt} - 1) dt}{e^{2nkt} + 1} = n \left(1 - \frac{2}{e^{2nkt} + 1} \right) dt$.

После интегрирования этого выражения при начальных условиях $t = 0$, $x_0 = 0$ получим

$$x = nt + \frac{1}{k} \ln \frac{(1 + e^{-2nkt})}{2}. \quad (7)$$

Так как $n = V_{np}$, $k = \frac{\mu}{m}$, то (7) можно записать в следующем виде:

$$x = V_{np} \left(t + \frac{m}{\mu V_{np}} \ln \frac{(1 + e^{-2\frac{\mu}{m} V_{np} t})}{2} \right). \quad (8)$$

В соответствии с этим законом тело будет падать до тех пор, пока не достигнет предельной скорости. В этом случае ускорение $\frac{dV}{dt} = 0$, то после достижения предельной скорости дальнейшее движение тела будет равномерным со скоростью, равной предельной скорости.

5. Определим какой путь, будет проходить тело до момента достижения предельной скорости в зависимости от времени t_γ . Для этого подставим в формулу (7) значение t_γ из (6)

$$x = n \frac{1}{2nk} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma} + \frac{1}{k} \ln \frac{\left(1 + e^{-2nk \frac{1}{2nk} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma}}\right)}{2}.$$

После преобразований получим

$$x = -\frac{1}{2k} \ln(1-\gamma^2) = -\frac{1}{2} \frac{m}{\mu} \ln(1-\gamma^2). \quad (9)$$

Из формул (5), (6) и (9) следует, что более тяжелое тело проходит больший путь до достижения предельной скорости и за большее время, чем менее тяжелое, при одних и тех же значениях γ и μ . Предельная скорость падения более тяжелого тела больше скорости падения менее тяжелого при прочих равных условиях.

6. Определим далее зависимость скорости падения тела от пройденного расстояния (от пути).

Для этого уравнение (2) перепишем, введя подстановку $\frac{dv}{dt} = \frac{v dv}{dx}$, в виде $\frac{v dv}{dx} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg}{\mu} - V^2\right)$ или с учетом введенных выше обозначений:

$$\frac{v dv}{dx} = k(n^2 - V^2) \quad (10)$$

После интегрирования уравнения (10) с учетом нулевых начальных условий и последующих преобразований получим

$$V = n\sqrt{1 - e^{-2kx}}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что с увеличением x выражение e^{-2kx} убывает, стремясь к нулю при $x \rightarrow \infty$, а скорость V стремится к максимальной (предельной) скорости $V_{np} = n$.

Из выражения (11) также можно определить, как быстро скорость падающего тела приближается к предельной, т.е. определить x при $V = \gamma V_{np}$.

Из выражения $\gamma = \sqrt{1 - e^{-2kx}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2k} \ln(1 - \gamma^2) = -\frac{1}{2} \frac{m}{\mu} \ln(1 - \gamma^2)$, что соответствует полученной ранее формуле (9).

В качестве примера рассмотрим движение парашютиста, считая что парашют раскрывается как только парашютист покидает самолет.

Из практики известно, что сила сопротивления выражается формулой [1]

$$R = \frac{1}{2} c_x \rho S V^2, \quad (12)$$

где c_x - безразмерный коэффициент сопротивления; для парашюта $c_x = 1,4$;

ρ - плотность воздуха;

при $t = 15^\circ$ и давлении 760 мм рт. ст. $\rho = 1,205 \text{ Н} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^4$;

S - площадь проекции парашюта на горизонтальную плоскость, м^2 .

Тогда для коэффициента сопротивления μ получаем выражение:

$$\mu = \frac{1}{2} c_x \rho S. \quad (13)$$

Примем массу парашютиста вместе с парашютом $m = 80 \text{ кг}$; значение S принимаем 10, 20 и 30 м^2 .

Тогда для μ получим три значения:

$$\mu = 8,435; 16,870 \text{ и } 25,305 \text{ Н} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^2 \text{ или кг} / \text{м}.$$

Значение γ примем:

$$\gamma_1 = 0,9; \gamma_2 = 0,99; \gamma_3 = 0,999; \gamma_4 = 0,9999;$$

Для принятых значений m, μ и γ определим предельную скорость падения, время t_γ и путь, пройденный за это время, используя формулы (5), (6) и (9). Результаты вычислений приведены в таблице 1, где V_{np} — м/с, t_γ — в секундах, x — в метрах.

Таблица 1

γ	0,9	0,99	0,999	0,9999
μ/V_{np}				
8,435	$t_\gamma = 1,449$	$t_\gamma = 2,604$	$t_\gamma = 3,739$	$t_\gamma = 4,872$
9,641	$x_1 = 7,880$	$x_2 = 18,586$	$x_3 = 29,491$	$x_4 = 40,414$
16,87	$t_\gamma = 1,024$	$t_\gamma = 1,841$	$t_\gamma = 2,644$	$t_\gamma = 3,445$
6,819	$x_1 = 3,940$	$x_2 = 9,293$	$x_3 = 14,745$	$x_4 = 20,207$
25,30	$t_\gamma = 0,836$	$t_\gamma = 1,503$	$t_\gamma = 2,158$	$t_\gamma = 2,812$
5,567	$x_1 = 2,625$	$x_2 = 6,193$	$x_3 = 9,826$	$x_4 = 13,466$

Из таблицы 1 видно, что тело достигает скорости, весьма близкой к предельной за достаточно небольшое время, а не за время $t = \infty$.

Так при коэффициенте сопротивления $\mu = 25,3 \text{ кг/м}$ тело достигает значения 99,99% V_{np} примерно за 2,8 с.

Теперь разобьем путь, проходимый за некоторое принятое общее время, на два участка: первый — участок ускоренного движения и второй — участок равномерного движения с достигнутой на первом участке предельной скоростью.

Расстояние, пройденное телом на первом участке, определим по формуле (8), которую представим в виде

$$x_1 = V_{np} \left(t_\gamma + \frac{m}{\mu V_{np}} \ln \frac{1 + e^{-2 \frac{\mu}{m} V_{np} t_\gamma}}{2} \right). \quad (14)$$

Расстояние, пройденное на втором участке:

$$x_2 = V_{np}(t_{об} - t_\gamma). \quad (15)$$

Тогда общее расстояние

$$x = x_1 + x_2 = V_{np}t_{об} + \frac{m}{\mu} \ln \frac{(1 + e^{-2\frac{\mu}{m}V_{np}t_\gamma})}{2}. \quad (16)$$

Примем за общее время $t_{об}$ время падения парашютиста с высоты $h = 1000$ м с предельной постоянной скоростью $V_{np} = 5,567$ м/с, что составляет примерно 3 мин.

Вычислим расстояние, по формуле (8) предположим, что в течение времени $t_{об} = 3$ мин движение было ускоренным и по формуле (16), как сумму расстояний x_1 при ускоренном движении и x_2 при равномерном, приняв $\mu = 25,305$ кг/м, $V_{np} = 5,567$ м/с, $t_\gamma = 2,812$ с и $m = 80$ кг.

По формуле (8)

$$\begin{aligned} x &= V_{np}t_{об} + \frac{m}{\mu} \ln \frac{(1 + e^{-2\frac{\mu}{m}V_{np}t_{об}})}{2} = \\ &= 5,567 \cdot 180 + \frac{80}{25,385} \ln \frac{(1 + e^{-2\frac{25,3}{80} \cdot 5,567 \cdot 180})}{2} = 999,868 \text{ м.} \end{aligned}$$

По формуле (16)

$$x = 5,567 \cdot 180 + \frac{80}{25,385} \ln \frac{(1 + e^{-2\frac{25,3}{80} \cdot 5,567 \cdot 2,812})}{2} = 999,868 \text{ м.}$$

Полученные результаты в точности совпадают. Это объясняется тем, что достижение точного значения предельной скорости теоретически возможно при $t = \infty$. Поэтому в пределах принятого значения $t_{об}$, а тем более при больших значениях $t_{об}$, движение может рассматриваться ускоренным.

Заметим, что выражение $e^{-2\frac{\mu}{m}V_{np}t}$ с увеличением t достаточно быстро стремится к нулю, начиная даже со значения $t = 3$ сек, а, именно, при этом значении t и указанных выше значениях μ , m и V_{np} это выражение равно $2,58 \cdot 10^{-5}$, которым можно пренебречь.

Тогда для значений $t > 3$ сек падение может рассматриваться как равномерное со скоростью V_{np} , а координата x определяется по формуле

$$x = V_{np}t + \frac{m}{\mu} \ln 2, \quad (17)$$

что хорошо согласуется с данными табл. 1.

ЛИТЕРАТУРА

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1955. — 416 с.

РАЗРАБОТКИ ПО НАНОМАТЕРИАЛАМ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ ZETTL BERKELEY

Августинович А.Г.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In this article described a Zettl Research Group. They are currently investigating electronic, magnetic and mechanical properties of nanoscale materials such as fullerenes, carbon and non-carbon nanotubes. They also are investigate biological application of nanotechnology.

1. ВВЕДЕНИЕ

Zettl – это группа, которая занимается экспериментальной физикой во главе с ом, который является государственным профессором на кафедре физики в Университете Беркли и в отделе изучения материалов в Национальной лаборатории Беркли Лоренса. Они также связаны с центром наномеханической комплексной системы, междисциплинарным центром нанонауки. В исследованиях этой группы приняли участие исследователи из Беркли, Стэнфорда, Cal Tech и UC Merced. Зеттл является директором центра.

Исследовательская группа Zettl в настоящее время исследует электронные, магнитные и механические свойства наноразмерных материалов, таких как фуллерены, углеродные и Non-углеродные нанотрубки, и двумерные структуры листа графена, также и нитрида бора. Они также заинтересованы в необычных электронных состояниях при обычных и высоких температурах сверхпроводников. В лаборатории они обобщают эти материалы и исследуют их свойства, используя различные методы, включая и сканирующую электронную микроскопию, сканирующую зондовую микроскопию, высокое магнитное поле и высокие давления, ИК- и КР(комбинационного рассеяния) -спектроскопии. Они также исследуют биологические применения нанотехнологий.

2. НАНОРАЗМЕРНАЯ АРХИВНАЯ ПАМЯТЬ

Разработан новый механизм для хранения цифровой памяти, способный хранить данные с долгим сроком службы и высокой плотностью. Такое запоминающее устройство состоит из кристаллических наночастиц железа, заключенного в многослойных углеродных нанотрубках. Наночастица может двигаться через нанотрубки с применением низкого напряжения, устройство «записывает» бинарное состояние в виде позиции наночастицы. Состояние устройства может быть впоследствии прочитано простым измерением сопротивления.

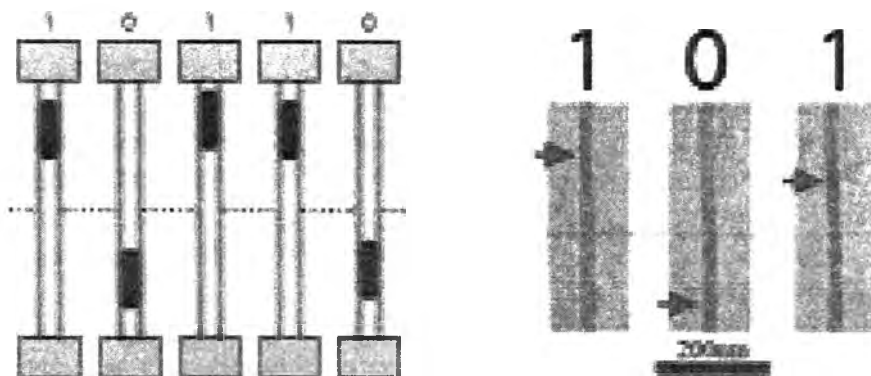


Рис. 1. Наночастицы железа, заключенные в многослойных углеродных нанотрубках

Цифровые устройства хранения данных стали повсеместно использоваться в нашей жизни, музыка, фотографии и даже написание слов перешли от своих традиционных аналоговых форматов в новые цифровые. Однако этот переход на цифровое хранение данных вызвал опасения о времени работы носителей. Хотя древние аналоговые носители (например, камень и калька) могут сохранить свои данные за тысячи лет, цифровые технологии хранения данных, такие, как оптические диски, магнитные диски и магнитные ленты, как полагают, на полвека (а во многих случаях намного меньше). Очевидно, камень и калька не хорошо подходят к объему сегодняшних данных: ячейки в дисках находятся на расстоянии около микрона друг от друга, резьба на камне имеет размеры ближе к сантиметру. Новым архивным технологиям придется объединить лучшие черты обоих, хранение данных на высокой плотности с большим временем службы.



Рис. 2. Египетские иероглифы, которые долгое время хранятся на камне, но у них низкая плотность записи

3. ПРОСМОТР АТОМОВ НА ГРАНИ ДВУХМЕРНОГО КРИСТАЛЛА

Хотя физика материалов на поверхности и краях очень хорошо изучена, движение отдельных атомов непосредственно на изолированном краю не наблюдалось в реальном времени. С TEAM 0.5, просвечивающим электронным микроскопом, группа Zettl отразила динамику атомов углерода на краю отверстия в один атомный слой графена. Они определили стабильности и описали динамику различных конфигураций края.

Можем ли мы увидеть, как отдельные атомы перемещаются в реальном времени? Можем ли мы смотря на кристалл увидеть перерыв формы, как атомы изменяют сами себя? С появлением коррекции абберации просвечивающего электронного микроскопа (ТЭМ), такой как TEAM 0.5, ответ на эти вопросы «да». Этот микроскоп позволит изучить не только каждый отдельный атом в пробе, но он может сделать это за значительно короткие сроки. Впервые, можно сделать запись динамики атомов.

Идеальная система для изучения динамики атомов графена - один лист графита. Это атомный слой атомов углерода, оставленный концом карандаша для наблюдения в микроскоп TEAM. Нетронутая гексагональная решетка углерода прерывается отверстием, умышленно сделанным длительным облучением пучком электронов TEAM. Атомы на краю отверстия подвергаются действию постепенно

выбрасываемых электронов из пучка и размер отверстия растет. Атомы, которые потеряли своих соседей, являются крайне неустойчивыми, и передвигаются, стараясь быстро найти стабильную конфигурацию. Анализируя рост дыры и атомные перестройки, Zettl заключают, что конфигурация зигзаг является наиболее стабильной на открытой границе графена.

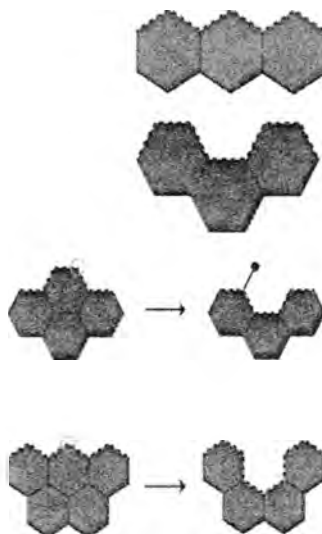


Рис. 3. Схема зигзаг (красный) и кресло (синий) конфигураций

Схема зигзаг (красный) и кресло (синий) EDGE конфигураций. Положение края обозначается белой штриховой линией. Хотя обе конфигурации показаны в фильме TEAM 0.5, зигзагообразные края более стабильные при облучении электронным пучком и они преобладают.

Схема стабильности края. Удаление атомов на краю кресла (синяя, сверху) оставляет за собой изолированный атом, в то время как удаление атома из края зигзагом (красный, низ) не оставляет.

4. НАНОТРУБКИ В РАДИО



Рис. 4. Вибрирующая нанотрубка, при помощи которой можно слышать радиосигналы

Zettl построили полностью функциональное, со встроенным радиоприемником, во много раз меньше, чем любое предыдущее радио, из углеродных нанотрубок. Одна нанотрубка служит, как и все основные компоненты радио: антенна, тюнер, усилитель и демодулятор. Прием сигналов производится с помощью вы-

сокочастотных *механических* колебаний нанотрубки, а не через традиционные электрические средства.

Изображения, полученные с помощью электронной микроскопии, показывают одну из углеродных нанотрубок, торчащих из электродов. Эти нанотрубки меньше микрона, или в 10000 раз тоньше, чем ширина человеческого волоса. Когда радио сигнал конкретной частоты затрагивает нанотрубку, она начинает активно вибрировать. Электрический ток может использоваться для обнаружения механических колебаний нанотрубки, и это позволяет слышать радио сигналы.

Антенна и тюнер осуществляются в совершенно иначе, чем традиционные радиостанции, прием сигналов с помощью высокочастотных *механических* колебаний нанотрубки, а не через традиционные электрические средства. Мы уже использовали нанотрубки радио для получения и воспроизведения музыки с FM радиопередач таких как *Layla* Эрика Клэптона (Derek And The Dominos) и пляж *Boy's Good Vibrations*. Радио нанотрубки чрезвычайно малых размеров могут позволить радикально новые приложения, такие как радиоуправляемые устройства достаточно малых размеров, чтобы существовать в человеческой крови, или просто меньше, дешевле, и эффективнее беспроводных устройств, таких как сотовые телефоны.

Высокое разрешение просвечивающего электронного микроскопа позволяет наблюдать нанотрубки радио в действии. Zettl записали четыре видеофильма с помощью электронного микроскопа, где нанотрубки радио играют четыре песни. В начале каждого видео, радио нанотрубки настроены на другую частоту, которой передается радиосигнал. Таким образом, нанотрубки не вибрируют, и только статические помехи могут быть услышаны. Как только радио становится в гармонии с передаваемым сигналом, нанотрубка начинает вибрировать, которая размывается в видео, и в то же время, музыка становится слышимой. Четыре песни, *которые прослушали с помощью нанорадио* The Beach Boys, *Ларго* из оперы Генделя Ксеркс (это была первая песня), *Layla* Эрика Клэптона (Derek & The Dominos), и главный титул "Звездных Войн" Джон Уильямс.

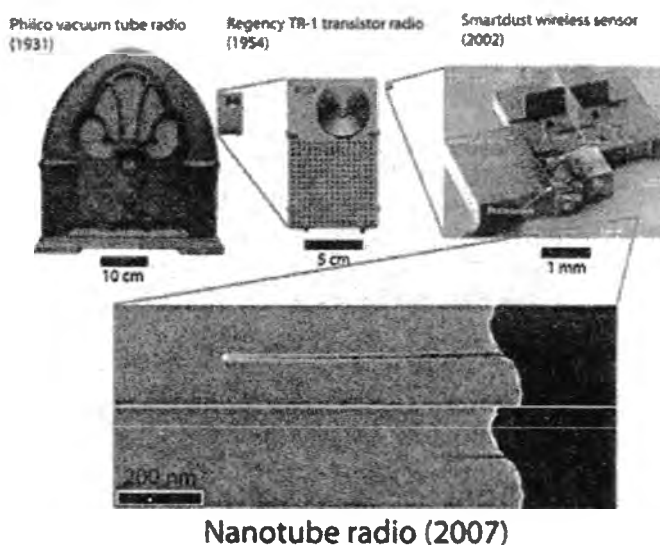


Рис. 5. Изменение размеров радио со временем

За последнее столетие, радио в значительной степени уменьшилось по сравнению с деревянными " в стиле собор", радиостанциями 1930-х годов, карманными транзисторными радиоприемниками 1950-х годов и современными в одном

радиочипе в сотовых телефонах и беспроводных датчиках. Продолжая эту тенденцию, Zettl еще более уменьшили радио, искусно осуществили нескольких функций радио с одним компонентом, углеродными нанотрубками. Эти радио нанотрубки в более девятнадцать раз меньше, чем вакуумная трубка Philco радио с 1930-х!

5. ПРЯМОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СВЕТА В РАБОТУ

Современная технология и исследования по преобразованию солнечной энергии зачастую неразрывно опирается на производство, хранение и распределение энергии для содействия производству полезной работы. Исследователи в лаборатории Zettl обнаружили механизм для преобразования солнечной энергии в работу. Они с помощью оптотермального отопления производят градиенты поверхностного натяжения, в результате которых на плавучие объекты действует движущие силы. Эти силы, по существу преобразование солнечной энергии непосредственно в полезную работу.



Рис. 6. Небольшая самоходная лодка, плавающая на воде и управляемая с помощью оптотермального отопления

Пример: небольшая самоходная лодка, плавающая на воде и управляемая с помощью этого процесса. Наноструктурированные композиционные материалы, состоящие из вертикально связанных полидиметилсилоксановых (PDMS), углеродных нанотрубок, встроенных в пластик, эффективно поглощают свет и преобразует его в тепло. При плавании на жидкости, это тепло локально уменьшает поверхностное натяжение жидкости. Когда объект асимметрично нагревается, создается градиент поверхностного натяжения и силы на объекте несбалансированы, в то возникает чистая движущая сила на объект.

Определение пространственного облучения, ориентирование света могут быть использованы для контролируемого перемещения объектов на различных жидкостях. Этот метод двигателя обходит типичные ограничения, связанные с двигателем такие, как турбулентность. Вращательные движения также могут быть получены путем тщательного проектирования расположения света поглощающих материалов. При простоте использования поверхностного натяжения, на котором основан механизм создания движения, может быть использован для широкого применения.

6. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ НАНОРАЗМЕРНЫХ ЧАСТИЦ

Группа Zettl разработали технику для перемещения отдельных атомов вдоль углеродной нанотрубки и обратно. Общая масса сохраняется с высокой степенью точности (5%) во время транспортировки.

Градиент напряжения, а не тепловой градиент, определяет направление перемещения массы.

Концентрация влияет только на скорость передачи: наличие или отсутствие частиц, но не их размеры, влияет на рост своих соседей.

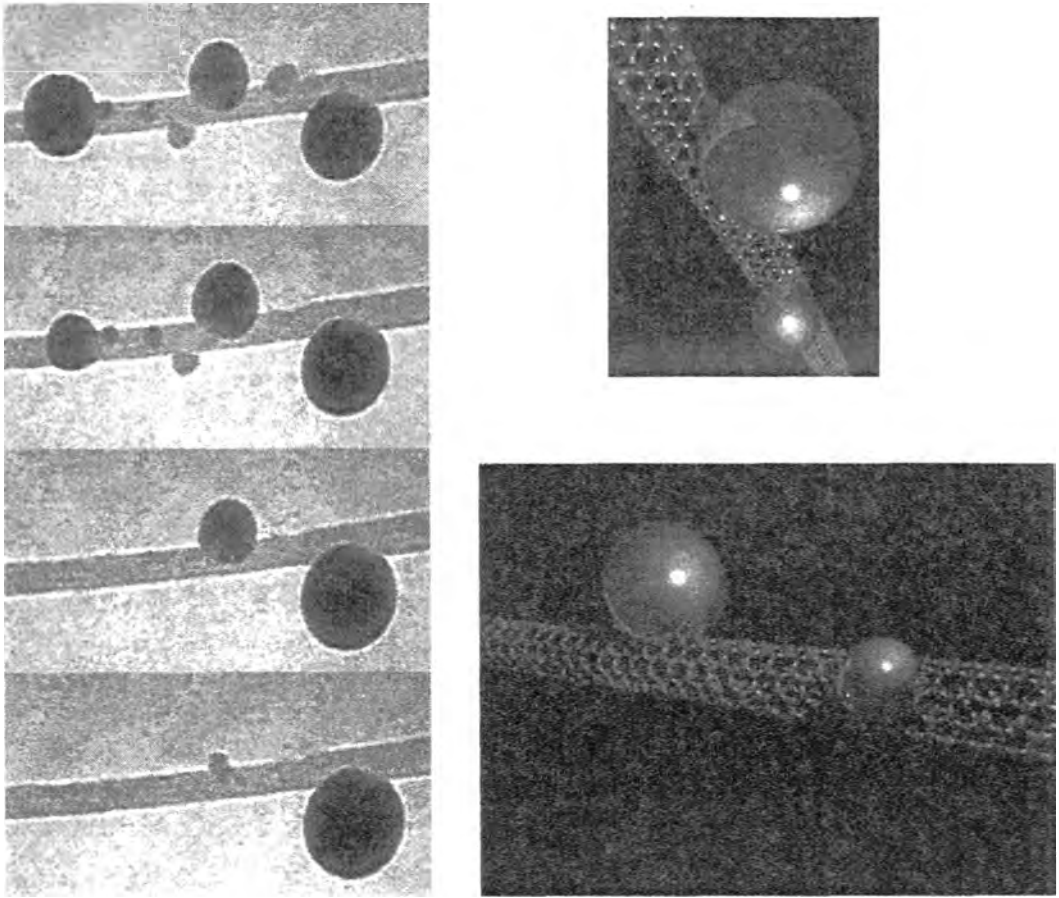


Рис. 7. Перемещение наноразмерных частиц вдоль нанотрубки

7. НАНОМЕХАНИЧЕСКИЙ ДАТЧИК ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС ЧАСТИЦ АТОМНЫХ РАЗМЕРОВ

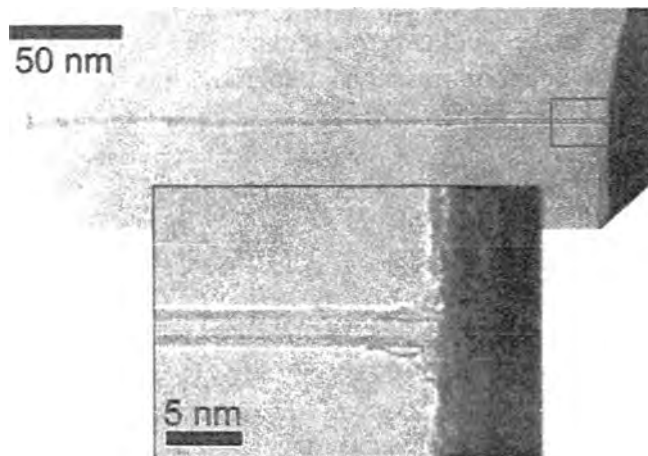


Рис. 8. Нанотрубка, используемая как наномеханический датчик определения масс частиц атомных размеров

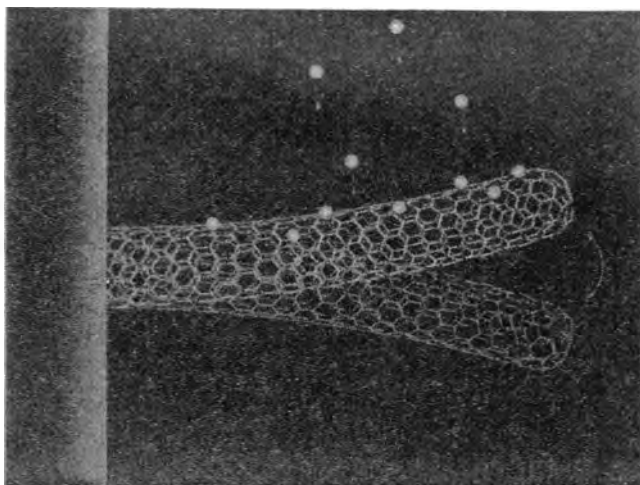


Рис. 9. Принцип действия наномеханического датчика

Какова наименьшая масса, которую может измерять простое механическое устройство? Едва заметные пылинки? Одна бактерия? Или, возможно, нанокристалл, состоящий из нескольких тысяч атомов? В самом деле, Zettl разработали новый вид механического датчика, основанного на вибрирующей углеродной нанотрубке, которым можно определить массу одного атома! Массовый датчик, основанный на нанотрубке, относится к семейству противовеса, известного как *инерциальный противовес*. Эти противовесы представляют собой пружину с присоединенной массой, которая может свободно колебаться. Отслеживая изменения в частоте колебаний, можно обнаружить изменения в массе. В этом устройстве, нанотрубка служит пружиной, а также контролируя частоты ее колебания, мы можем обнаружить изменения в массе, вызванные адсорбированием отдельные атомов на поверхности нанотрубок. Чтобы быть более точным, текущая чувствительность устройства составляет $1,3 \cdot 10^{-25}$ кг / Гц $1/2$ или, что эквивалентно 0,40 атомов золота / Гц $1/2$. Таким образом, путем расширения понятия инерционного баланса до нанометрового масштаба, Zettl увеличили ее чувствительность до порядка нано-величины. Наномеханический датчик имеет множество преимуществ по сравнению с традиционным спектрометром точного определения масс. Во-первых, этот прибор не требует потенциально разрушающую ионизацию образца. (Большие молекулы, такие как белки, часто разрушаются при ионизации.) Во-вторых, это устройство становится более чувствительным в высших массовых диапазонах в отличие от традиционных масс-спектрометров. Наконец, наномеханический датчик компактен и, в конечном счете, может быть включен на чипе.

Как можно обнаружить колебания углеродной нанотрубки? Нанотрубки обладают меньшим размером, чем длина волны света, оптические стандартные методы для обнаружения вибраций неудачны. Хотя можно увидеть колебания с помощью просвечивающего электронного микроскопа, но этот метод является слишком медленным, чтобы быть полезным, и это не практично для коммерческих применений. Решение для обнаружения электрических колебаний. Zettl используют модифицированную версию «Нанотрубки Радио». По сути, они слушают колебания нанотрубки.

8. НАНОДВИГАТЕЛЬ

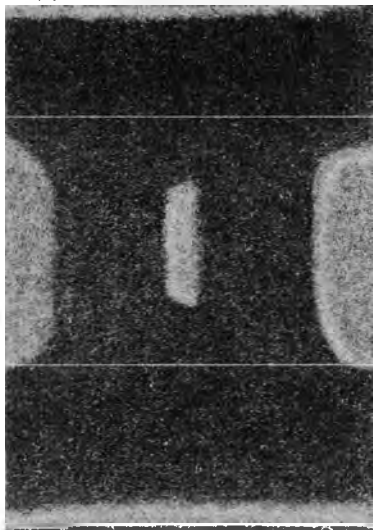


Рис. 10. Фотография нанодвигателя



Рис. 11. Изображение металлической пластины с углеродной нанотрубкой

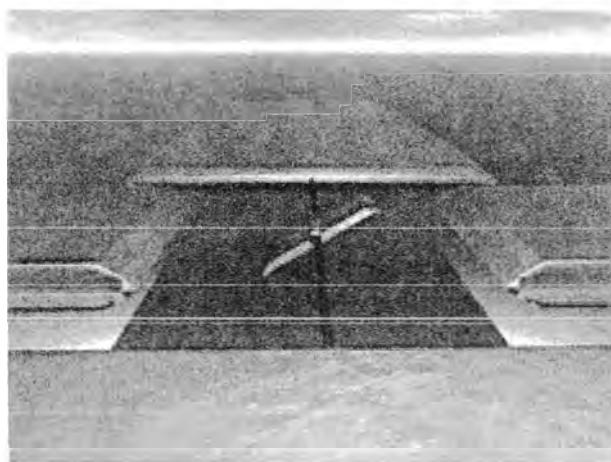


Рис. 12. Виртуальное изображение нанодвигателя: твердая прямоугольная металлическая пластина, кремниевая микросхема, фиксированные электроды статора

Для разрабатываемых сейчас микроскопических устройств, которые смогут, например, проплывать по кровеносным сосудам человека и очищать их стенки от отложений холестерина, нужны уж совершенно микроскопические двигатели - размером с молекулу. Группа Zettl смогла создать нанодвигатель с использованием многослойных углеродных нанотрубок.

Нанодвигатель представляет собой вращающуюся металлическую пластину с углеродной нанотрубкой.

Низкие внешние напряжения точно контролируют скорость работы и положения ротора пластины. Повторные колебания ротора пластины между позициями, а также повороты в 360 градусов были продемонстрированы без признаков износа или усталости.

В отличие от существующих химических биопроводов и двигателей, эта синтетическая электро-механическая система нанометровых размеров привода предназначена для работы в широком диапазоне частот, температуры, и экологических условий, в том числе в вакууме и жестких химических средах.

Концептуальный дизайн электромеханического вращательного привода. Вращательный элемент, твердая прямоугольная металлическая пластина, выступающая в качестве ротора, крепится к валу. Поддержка концов вала производится их опиранием на окисленной поверхности кремниевой микросхемы. Пластину-ротор окружают три фиксированных электрода статора: два горизонтальных сопротивления находятся на поверхности оксида кремния, а также третий статор находится под поверхностью. Они контролируют положение, скорость и направление вращения ротора.

9. Вывод

Благодаря исследовательской группе Zettl и их исследованиям, получены и открыты новые применения наноматериалов в различных областях: механике, электронике, биологии. Это еще один шаг в развитии и применении нанотехнологий.

1. Разработали новый механизм для хранения цифровой памяти, способный хранить данные с долгим сроком службы и высокой плотностью.

2. Zettl отразили динамику атомов углерода на краю отверстия в один атомный слой графена, определили стабильности и описали динамику различных конфигураций края.

3. Zettl построили полностью функциональное, со встроенным радиоприемником, во много раз меньше, чем любое предыдущее радио, из углеродных нанотрубок.

4. Zettl обнаружили механизм для преобразования солнечной энергии в работу.

5. Группа Zettl разработали технику для перемещения отдельных атомов вдоль углеродной нанотрубки и обратно.

6. Zettl разработали новый вид механического датчика, основанного на вибрирующей углеродной нанотрубке, которым можно определить массу одного атома.

7. Zettl смогли создать нанодвигатель с использованием многослойных углеродных нанотрубок.

ЛИТЕРАТУРА

1. <http://www.physics.berkeley.edu/research/zettl/>
2. www.nanonewsnet.ru
3. www.popnano.ru
4. Рыбалкина М. Нанотехнологии для всех. – Nanotechnology News Network, 2005.
5. Перспективные материалы. – ТГУ, МИСиС, 2006.

ОБУЧЕНИЕ СТУДЕНТОВ СОЗДАНИЮ ПРЕЗЕНТАЦИЙ В POWER POINT

Анципорович П.П., Алейникова О.И., Войтович О.Н.,
Лукашевич О.Н., Луцко Н.Я.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Обучение качественному представлению информации является одним из этапов подготовки инженера. В настоящее время все более эффективной формой представления информации является компьютерная презентация, представляющая собой связанную последовательность слайдов на определенную тему, выполненных в едином стиле и хранящихся в одном файле. Компьютерные презентации удобно использовать на защитах курсовых и дипломных проектов, выступлениях с докладами, в учебном процессе.

Для обучения студентов технологиям создания компьютерной презентации на кафедре «Теория механизмов и машин» в рамках дисциплины «Информатика» разработано электронное пособие. Оно содержит последовательность упражнений, позволяющих студенту изучить технологии, инструменты и объекты приложения Microsoft Office PowerPoint и создать компьютерную презентацию.

В лабораторной работе «Знакомство с приложением Microsoft Office PowerPoint» студенту предлагается подготовить доклад-презентацию на тему «Программное обеспечение персонального компьютера», состоящий из 15 слайдов:

Программное обеспечение персонального компьютера

Доклад-презентация
Выполнил Сидоров А.А.

Цель доклада

Знакомство с программным обеспечением (ПО) персонального компьютера (ПК), его структурой и функциями.

Содержание доклада

- Определение ПО ПК
- Структура ПО ПК
- Базовое ПО
- Системное ПО
- Инструментальное ПО
- Службное ПО
- Классификация служебных программных средств

Содержание доклада

- Прикладное ПО
- Классификация прикладных программ

Определение ПО ПК

Программное обеспечение – это совокупность программ, обеспечивающих работу ПК под управлением пользователя.



11.11.2010

10:34:19

1

Структура ПО ПК



11.11.2010

10:34:19

2

Базовое ПО

Базовое ПО отвечает за взаимодействие с базовыми аппаратными средствами. Оно входит в состав базового оборудования и хранится в специальных микросхемах (ПЗУ – постоянные запоминающие устройства или ПСПЗУ – перепрограммируемые постоянные запоминающие устройства).

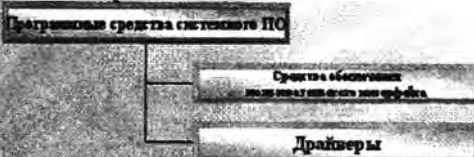
11.11.2010

10:34:19

3

Системное ПО

Системное ПО служит для обеспечения эффективной работы аппаратуры компьютера.



11.11.2010

10:34:19

4

Системное ПО

Драйверы – специализированные программы, выполняющие операции по обмену данными между программой и внешними устройствами.

Средства обеспечения пользовательского интерфейса – класс программ системного ПО, по средствам которых пользователь получает возможность вводить данные в вычислительную систему, управлять ее работой и получать результаты в удобной для себя форме.

11.11.2010

10:34:19

5

Инструментальное ПО

Инструментальное ПО служит для разработки пакетов программ, применяемых в различных областях деятельности человека.



11.11.2010

10:34:19

6

Служебное ПО

Служебное ПО взаимодействует с программами базового и системного уровней.

Назначение служебных программ (их называют *утилитарными*) – автоматизация работ по проверке, наладке и настройке компьютерной системы. Они используются для расширения и улучшения функций системных программ.

11.11.2010

10:34:19

11

Классификация служебных программных средств

- **Диспетчеры файлов** (файловые менеджеры) выполняют операции, связанные с обслуживанием файловой структуры: копирование, перемещение и переименование файлов, создание каталогов (папок), удаление файлов и каталогов и т.д.
- **Средства сжатия данных** (архиваторы) предназначены для создания архивов.
- **Средства диагностики** предназначены для автоматизации процессов диагностики программного и аппаратного обеспечения.

11.11.2010

10:34:19

12

Классификация служебных программных средств

- Средства коммуникаций позволяют устанавливать соединение с удаленными компьютерами, обеспечивают передачу сообщений электронной почтой, работу с телеконференциями и др. операции.
- Средства обеспечения компьютерной безопасности – это средства пассивной и активной защиты данных от повреждения, а также средства защиты от несанкционированного доступа, просмотра и изменения данных.

Прикладное ПО

Прикладное ПО – программы, предназначенные для выполнения определенных пользовательских задач и рассчитанные на непосредственное взаимодействие с пользователем.

Классификация прикладных программ



Установив требуемые параметры и изучив характеристики окна Microsoft PowerPoint, студент приступает к созданию презентации.

Фрагмент лабораторной работы имеет вид

11. Создайте слайд 2. Для этого активизируйте пункты Меню **Вставка** – **Создать слайд**, при этом в правой часть появится окно **Разметка слайда**.
12. В области задач **Разметка слайда** изучите стандартные макеты слайдов. Найдите макет **Заголовок** и **текст**. Примените, если необходимо, макет **Заголовок и текст** к слайду 2, выполнив на макет LC.
13. Отредактируйте слайд 2, приведя его к виду

Цель доклада

Знакомство с программным обеспечением (ПО) персонального компьютера (ПК), его структурой и функциями.

Для этого:

- 13.1 для **Заголовка слайда** установите, если необходимо, форматирование согласно п.9; введите текст заголовка.
- 13.2 для **Текста слайда** установите, если необходимо, следующее форматирование:

шрифт: *Times New Roman*,
размер: 36,

выравнивание: *по ширине* (для этого активизируйте пункты Меню **Формат** – **Выравнивание** – **По ширине**);

отступ слева: 0;
красная строка: 1;

введите текст.

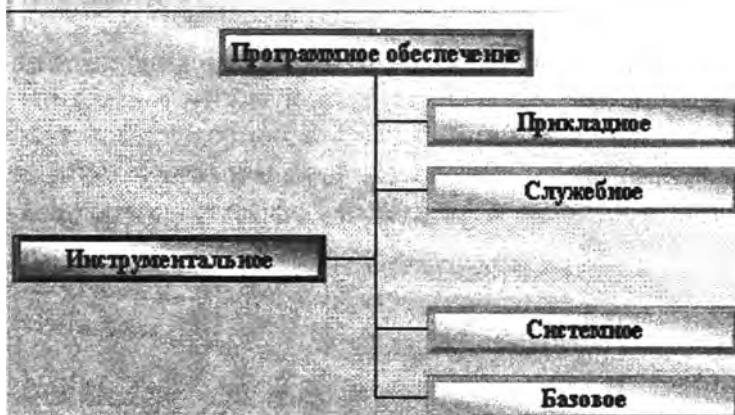
В презентациях для наглядности представления информации удобно использовать организационные диаграммы. В лабораторной работе «Знакомство с приложением Microsoft Office PowerPoint» студенты на примере создания слайда 6 («Структура ПО ПК») приобретают навыки создания и форматирования организационной диаграммы.

Фрагмент работы имеет вид

16. Создайте слайд с макетом **Заголовок и объект**, используя технологии п. 11-12.

17. Отредактируйте слайд, приведя его к виду

Структура ПО ПК



Для этого:

17.1 Для **Заголовок слайда** установите, если необходимо, форматирование согласно п.15.1; введите заголовок.

17.2 Вставьте **Организационную диаграмму**. Для этого:

17.2.1 выполните ЛС на значке  - **Добавить диаграмму или организационную диаграмму**;

17.2.2 в окне **Библиотека диаграмм** выберите тип диаграммы  - **Организационная диаграмма**;

17.2.3 ;

17.3 Установите **Правосторонний** макет диаграммы. Для этого:

17.3.1 на Панели инструментов **Организационная диаграмма** нажмите кнопку **Макет** ▾;

17.3.2 выберите **Правосторонний**;

17.4 Добавьте четвертую **Подчиненную** фигуру диаграммы. Для этого:


17.4.1 на панели инструментов **Организационная диаграмма** наведите курсор на кнопку  **Добавить фигуру** ▾ и нажмите ;



17.4.2 в меню выберите  **Подчиненный**.

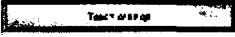


17.5 Следуя указаниям п. 17.4, добавьте фигуру **Помощник**.

17.6 Измените стиль диаграммы на **Рельефный градиент**. Для этого:

17.6.1 на Панели инструментов **Организационная диаграмма** нажмите на кнопку  - **Автоформат**;

17.6.2 в окне **Библиотека стилей организационных диаграмм** выберите стиль диаграммы **Рельефный градиент** и .

17.7 Разгруппируйте диаграмму. Для этого на Панели инструментов **Организационная диаграмм** нажмите кнопку **Макет**  и выберите  **Автомат**.

17.8 Разместите фигуры диаграммы  и  в соответствии с приведенным выше изображением **слайда**. Для этого наведите курсор на границу фигуры (курсор примет вид ); удерживая нажатой левую кнопку мыши, переместите фигуру в нужное место.

17.9 Дополните диаграмму текстом (см. изображение **слайда**). Для этого выполните ЛС внутри фигуры диаграммы, установите формат:

шрифт: *Times New Roman*,

размер: 20 ,

начертание: *полужирный*,

выравнивание: *по центру*;

введите текст.

17.10 Для завершения работы с диаграммой выполните ЛС на свободном поле слайда.

Благодаря наглядности, информационной емкости, компактности и мобильности компьютерных презентаций обеспечивается высокая эффективность представления информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вашкевич Э.В. Видеосамоучитель. PowerPoint 2007. Эффективные презентации на компьютере. – СПб.: Питер, 2008. – 240 с.
2. Солоницын Ю.А. Презентация на компьютере. – СПб.: Питер, 2006. – 176 с.
3. Кудрявцев Е.М. Оформление презентаций на компьютере. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2007. – 332 с.

ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРИСПОСОБЛЕНИЙ ДЛЯ НАНЕСЕНИЯ ПОКРЫТИЙ С ЗАДАНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ТОЛЩИНЫ СЛОЯ

Белорусский национальный технический университет, Минск

Авсиевич А.М., Осипович В.В.

The rules of designing for irregular thickness coating devices are subscribed. Irregular thickness coatings have be obtained by irregular part angular velocity accordingly wear value, which is measured in every point of part surface.

Исследования процесса изнашивания подвижных сопряжений свидетельствуют о том, что различные участки поверхностей трения подвержены действию факторов износа с разной интенсивностью [1]. В результате потеря работоспособности вращательных пар трения обуславливается появлением недопустимо большого зазора не по всей площади сопрягаемых поверхностей, а только в некоторых радиальных направлениях (рис. 1). Для большинства сопряжений в плоских механизмах характерно отсутствие перекосов, поэтому в осевом направлении распределение износа можно принять неизменным.

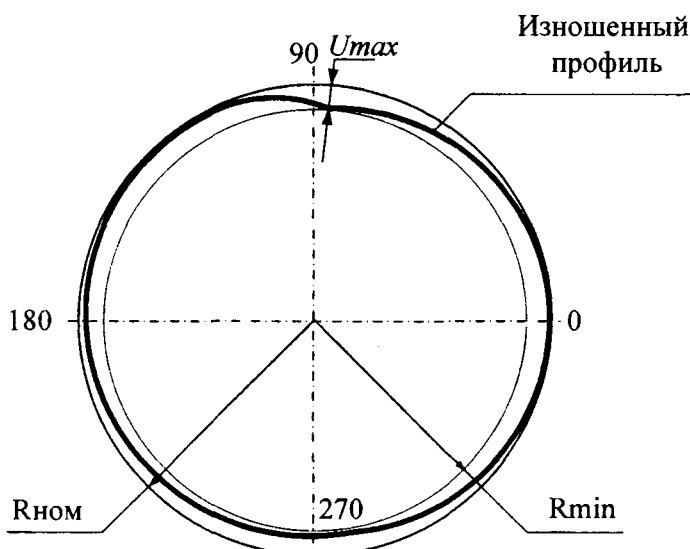


Рис. 1. Пример эпюры износа цилиндрической поверхности

Традиционно технологии восстановления изношенных поверхностей путем нанесения покрытий предполагают протачивание до размера R_{\min} , подготовку поверхности абразивно-струйной обработкой, напыление или наплавку покрытия до размера больше $R_{\text{ном}}$, возможно термообработку покрытия, финишную механическую обработку до номинального размера и шероховатости. Из приведенного рисунка видно, что при такой технологии основной объем наносимого покрытия восполняет не столько изношенную поверхность, сколько срезанный в процессе подготовки слой. Для минимизации расхода материала упрочняющих покрытий необходимо производить процесс нанесения с управляемым распределением толщины слоя соответственно эпюре износа.

При нанесении с помощью концентрированных источников энергии толщина покрытия h в пятне обработки за один проход (оборот детали) определяется

исходя из расхода наносимого материала и времени нанесения на элементарный участок восстанавливаемой поверхности

$$h = \frac{Qt}{S}, \quad (1)$$

Q – расход материала покрытия в высокоэнергетической струе;
 t – время нанесения покрытия на элементарный участок поверхности;
 S – площадь пятна обработки.

Расход материала может быть выражен как

$$Q = KV_C S, \quad (2)$$

где K – коэффициент, характеризующий размер, массу и количество частиц материала, проходящего через сечение S в единицу времени;
 V_C – скорость потока частиц.

Время t при нанесении покрытия от неподвижного источника на вращающуюся деталь можно определить по формуле

$$t = \frac{b}{V_D} = \frac{b}{\omega_D r}, \quad (3)$$

где b – размер пятна обработки в направлении относительного перемещения детали источника (плазмотрона, горелки, электрода и пр.);

V_D – скорость относительного перемещения;

ω_D – угловая скорость вращения детали;

r – радиус детали.

Тогда толщина покрытия будет равна

$$h = \frac{Kb}{r} \cdot \frac{V_C}{\omega_D}. \quad (4)$$

В формуле (4) первая дробь включает величины, постоянные для конкретного процесса нанесения покрытий, а вторая дробь – параметры, которыми можно варьировать. Варьирование скорости потока частиц определяется расходом транспортирующего газа. Это может быть реализовано применением порошковых питателей с регулируемым расходом транспортирующего газа, в которых регулировка производится за счет изменения размера дроссельной щели кулачковыми механизмами. В них один оборот кулачка соответствует одному обороту упрочняемой детали, а законы движения толкателей определяют в зависимости от теоретической эпюры износа упрочняемой поверхности. Алгоритм проектирования таких кулачковых механизмов является общепринятым и описан в [2]. Углы опережения и запаздывания механизмов определяются экспериментально в зависимости от размеров детали, расстояния от нее до источника и прочих особенностей технологии. Однако, с учетом наличия этих дополнительных факторов, для большинства технологий сложно гарантировать точное управление расходом материала. Поэтому предпочтительно наносить покрытия с переменной толщиной при постоянном потоке частиц и варьировании относительной скорости перемещения детали и источника. Это может быть реализовано путем создания специальных приводов вращения детали.

Учитывая, что стандартные приводы движения деталей обеспечивают постоянную скорость вращения, приспособление для обеспечения переменной скорости вращения должно проектироваться исходя из обеспечения заданной передаточной функции

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = f(\varphi_1), \quad (5)$$

где ω_2 и $d\varphi_2$ – соответственно угловая скорость и приращение угла поворота упорочняемой детали;

ω_1 и $d\varphi_1$ – аналогичные величины для стандартного вращателя, являющиеся постоянными.

График функции $i(\varphi_1)$ должен соответствовать развертке эпюры износа. Например, для эпюры, представленной на рис. 1, график функции показан на рис. 2. Минимальное значение i соответствует точке, в которой по результатам измерений наблюдается максимальный износ U_{max} , а для каждого φ_1 величина i определяется по зависимости вида

$$i = a - kU, \quad (6)$$

где U – замеренный в данном положении износ;

a и k – некоторые коэффициенты, причем

$$a > kU_{max}. \quad (7)$$

В общем случае зависимость (5) может иметь сколь угодно сложный вид, определяемый требованиями к распределению свойств по поверхности конкретной детали и зависящий от эпюры ее изнашивания. В принципе возможно задавать детали переменное вращение с изменением направления угловой скорости.

Алгоритм проектирования передаточного механизма, обеспечивающего воспроизведение заданной зависимости $i(\varphi_1)$, предполагает разбиение графика функции (рис. 2) на несколько участков. Для каждого участка движение от вала, вращающегося с постоянной скоростью ω_1 , на вал детали, вращающийся со скоростью ω_2 , передают через отдельный кулачковый механизм. Все кулачки жестко закрепляют на валу стандартного вращателя, а толкатели – на валу детали. Профили кулачков рассчитывают по общепринятой методике [2]. Зависимость $i(\varphi_1)$ определяет закон движения. Согласованную работу кулачковых механизмов обеспечивают установкой кулачков и толкателей с соответствующими углами опережения таким образом, что после окончания передачи движения одним механизмом оно начинает передаваться следующим.

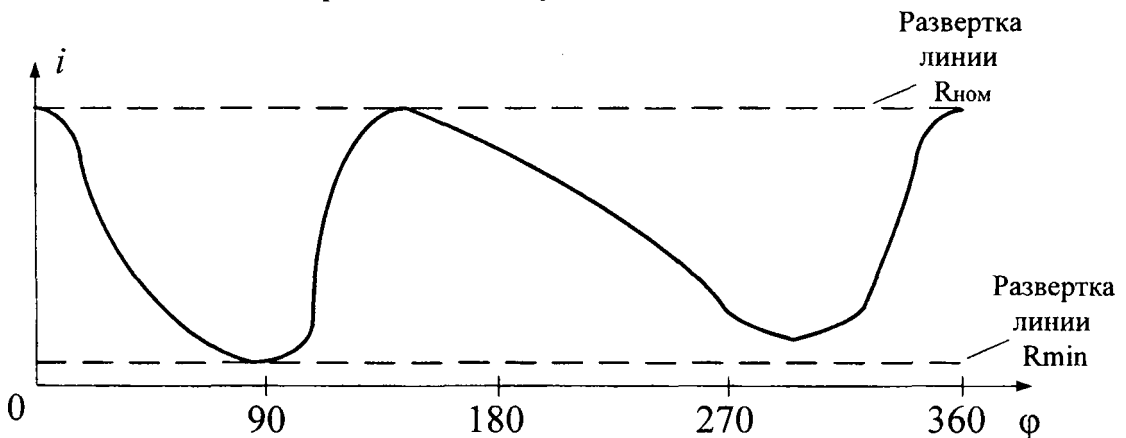


Рис. 2. Пример графика передаточной функции соответствующей эпюре износа

В ряде случаев привод вращения детали может быть выполнен на основе простых рычажных механизмов, например кулисного механизма, представленного на рис. 3.

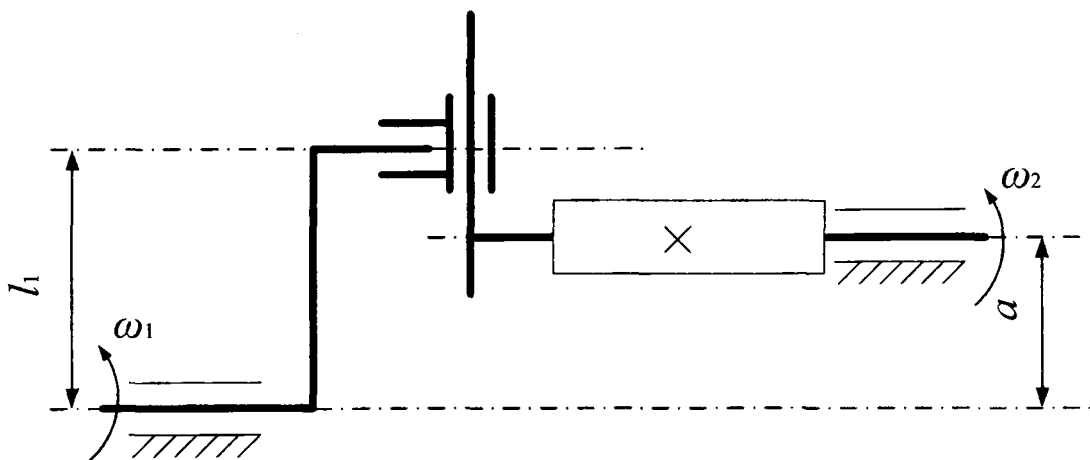


Рис. 3. Схема кулисного механизма привода вращения упрочняемой детали

При соотношении основных размеров механизма

$$\lambda = \frac{l_1}{a} > 1. \quad (8)$$

Равномерное вращение кривошипа с угловой скоростью ω_1 будет преобразовываться во вращение кулисы с переменной угловой скоростью ω_2 без изменения направления вращения. Скорость вращения будет нелинейно изменяться в диапазоне

$$\omega_1(l_1 - a) \leq \omega_2 \leq \omega_1(l_1 + a). \quad (9)$$

Формирование покрытий по всей поверхности происходит за большое количество проходов (оборотов детали), порядка десятков и сотен. Так как за один проход расход материала пропорционален относительной скорости перемещения детали и источника, варьирование скорости позволяет в конечном итоге сформировать покрытия переменной толщины с широким диапазоном варьирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгоритмизация расчетов факторов износа кинематических пар рычажных механизмов / А.М. Авсиевич [и др.] // Машиностроение: Респ. сборник научн. трудов. – Минск: БНГУ, 2009. – Вып. 25. – С. 8–11.
2. Артоблевский И.И. Теория механизмов и машин: учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.

К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ НЕКРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Якубовский Ч.А., Якубовский А.Ч., Гурин А.Н.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The account of torsion bars with a non-round cross-section is presented. It's a practical interesting method as most simply account. The approximation of geometrical reinforce with 8 per. miscalculation is received. The particular cases of non-round cross-sections (there are ellipse, triangle and rectangle) are considered.

Большой практический интерес представляет собой вопрос о кручении стержней некруглого поперечного сечения, применяемых в различных конструкциях. В таких стержнях при кручении поперечные сечения не остаются плоскими, а искривляются (депланируют). Это связано с тем, что точки поперечного сечения получают перемещения, направленные вдоль оси стержня.

Если на стержень не наложены связи, препятствующие свободной деформации его поперечных сечений, то такое кручение называется свободным. При свободном кручении в стержне возникают лишь касательные напряжения.

Таким образом, при кручении стержней некруглого поперечного сечения нарушается одна из основных гипотез сопротивления материалов — гипотеза плоских сечений. Поэтому при решении таких задач необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но также их депланацию. Эта задача усложняется еще и тем, что напряжения в стержне определяются функцией не одной переменной (ρ) полярной системы координат, как в стержнях круглого сечения, а двух переменных (x, y) декартовой системы координат. Следовательно, определение напряжений в стержнях некруглого поперечного сечения представляет собой довольно сложную задачу, которая решается методами теории упругости [1].

При кручении стержней произвольного поперечного сечения основными параметрами, представляющими практический интерес, являются наибольшие касательные напряжения τ_{max} , возникающие в стержне, и относительный угол закручивания θ (угол закручивания на единицу длины стержня). При этом независимо от формы сечения значения этих величин могут быть записаны в виде

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_k}; \quad \theta = \frac{T}{GI_k}; \quad \theta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (1)$$

где T — крутящий момент, приложенный к стержню; G — модуль сдвига материала стержня; $d\varphi$ — взаимный поворот поперечных сечений стержня на участке dz ; W_k и I_k — геометрические характеристики сечений некруглой формы при кручении — соответственно геометрическая характеристика прочности (момент сопротивления кручению) и жесткости (геометрическая жесткость).

Задачу о кручении стержней впервые решил знаменитый французский ученый Б. Сен-Венан (1797–1886). Однако, точное решение, предложенное Сен-Венаном и заключающееся в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений равновесия совместно с заданными краевыми условиями, является довольно сложным, даже для простых сечений. Немецкий ученый Л. Прандтль (1875–1953) впервые предложил решение этой задачи путем введения понятия функции напряжений $\Phi(x, y)$, что значительно упрощает расчет.

Эта функция дифференцируема и связана с касательными напряжениями следующим образом [2, 3]:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (2)$$

Функция Φ должна удовлетворять уравнениям равновесия, уравнениям сплошности и краевым условиям. Подставляя соотношения (2) в уравнения равновесия и применяя формулы закона Гука при кручении, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} = -2G\theta. \quad (3)$$

При свободном кручении краевые условия на торцах принимают вид (рис. 1):

$$\int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA = T. \quad (4)$$

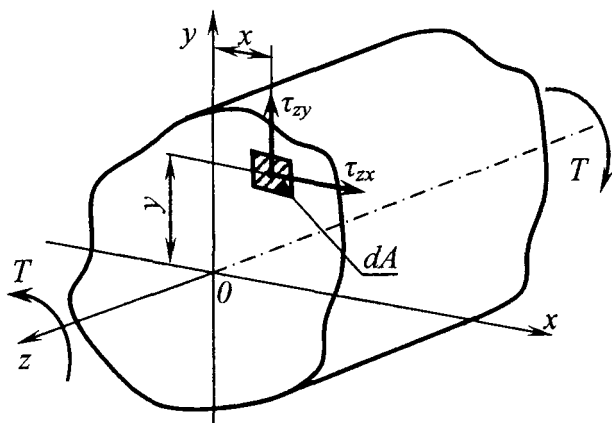


Рис. 1. К определению краевых условий на торцевой поверхности стержня

Учитывая выражения (2), а также, применяя теорему Грина при интегрировании [3], условие (4) может быть записано в следующем виде:

$$T = 2 \int_A \Phi dA. \quad (5)$$

Но, так как $T = G\theta I_k$, то формула для определения геометрической жесткости односвязных (сплошных, без внутренних полостей) сечений принимает вид:

$$I_k = \frac{2}{G\theta} \int_A \Phi dA. \quad (6)$$

Функция напряжений может быть определена следующим образом [3]:

$$\Phi = C \cdot f(x, y), \quad (7)$$

где $f(x, y)$ — уравнение контура сечения; C — постоянная, определяемая из уравнения (3).

При этом для точек контура

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые простейшие сечения.

Эллиптическое сечение. Уравнение контура (рис. 2) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b — полуоси эллипса.

С учетом условия (8) функцию Φ записываем в следующем виде:

$$\Phi(x, y) = C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Подставляя в уравнение (3), находим постоянную C :

$$C = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta.$$

По формуле (6) находим геометрическую жесткость:

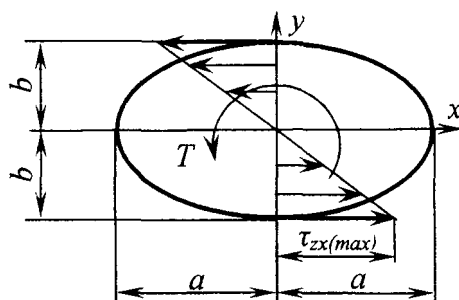


Рис. 2. Распределение касательных напряжений в эллиптическом сечении

$$I_k = \frac{2}{G\theta} \int_A C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dA = \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2} \left(A - \frac{1}{a^2} I_y - \frac{1}{b^2} I_x \right),$$

где A, I_x, I_y — соответственно площадь и осевые моменты инерции сечения.

После интегрирования и упрощения получим

$$I_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Тогда

$$T = G\theta \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Функция Φ принимает вид

$$\Phi = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\theta \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) = -\frac{T}{\pi a b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

По уравнениям (2) находим

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2T}{\pi a b^3} y; \quad \tau_{zy} = \frac{2T}{\pi a^3 b} x.$$

Наибольшие напряжения возникают в точках пересечения контура с малой осью эллипса:

$$\tau_{\max} = \tau_{zx(\max)} = \frac{T}{W_k}, \quad \text{где} \quad W_k = \frac{\pi a b^2}{2}.$$

Для кругового сечения $\left(a = b = \frac{d}{2} \right)$ получим

$$I_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^3} = \frac{\pi d^4}{32} = I_p; \quad W_k = \frac{\pi a b^2}{2} = \frac{\pi d^3}{16} = W_p.$$

где I_p и W_p — соответственно полярный момент инерции и полярный момент сопротивления сечения круглой формы.

Треугольное сечение (треугольник равно-
сторонний). Запишем уравнения сторон тре-
угольника в центральных осях x, y (рис. 3):

$$\text{сторона AB: } y + \frac{h}{3} = 0;$$

$$\text{сторона AC: } y - \sqrt{3}x - \frac{2}{3}h = 0;$$

$$\text{сторона BC: } y + \sqrt{3}x - \frac{2}{3}h = 0.$$

Функция напряжений запишется в виде:

$$\Phi(x, y) = C \left[\left(y + \frac{h}{3} \right) \left(y - \sqrt{3}x - \frac{2}{3}h \right) \left(y + \sqrt{3}x - \frac{2}{3}h \right) \right].$$

Используя (3), находим постоянную C :

$$C = -G\theta.$$

Находим геометрическую жесткость по формуле (6)

$$I_k = \frac{2}{G\theta} \int_A \Phi dA.$$

Подставляя значение Φ , раскрывая скобки и интегрируя в пределах измене-
ния переменных x и y , окончательно получим

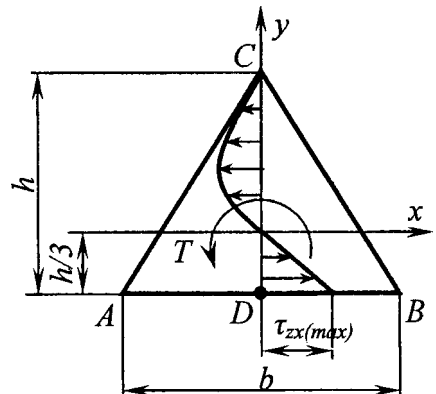


Рис. 3. Распределение касательных напряжений в треугольном сечении

$$I_k = \frac{h^4}{15\sqrt{3}} = \frac{b^4\sqrt{3}}{80}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают в т. D основания АВ:

$$\tau_{zx(\max)} = \frac{T}{W_k}, \text{ где } W_k = \frac{2 \cdot h^3}{15 \cdot \sqrt{3}} = \frac{b^3}{20}.$$

Принимая $T=G\theta I_k$, можно записать

$$\tau_{zx(\max)} = \frac{T}{W_k} = G\theta \frac{I_k}{W_k} = G\theta \frac{h}{2}.$$

Прямоугольное сечение. Вышеизложенный метод не позволяет получить решение для прямоугольных сечений. В этом случае функция напряжений представляется в виде ряда Фурье:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f(y) \cdot \cos \frac{n\pi x}{b}, \quad (9)$$

где $f(y)$ — функция, подлежащая определению.

Так как на контуре $\Phi(x, y)=0$, то в формуле (9) используются только нечетные значения n ($n=1, 3, 5, \dots$).

Геометрическая жесткость в этом случае определяется следующим образом:

$$I_k = k_1 \frac{bh^3}{3} = k_1 I_{x_1},$$

где I_{x_1} — момент инерции сечения относительно оси x_1 , проходящей через большую сторону сечения (рис. 4).

Значение коэффициента k_1 определяется по формуле [3]:

$$k_1 = 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{h}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{th(k_n b)}{(2n+1)^2} \approx 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{h}{b} \cdot th\left(\frac{\pi b}{2h}\right), \text{ где } k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h}.$$

Максимальные касательные напряжения, которые возникают посредине длинных сторон (точки А и А₁ на рис.4), равны:

$$\tau_{\max} = \tau_{zx(\max)} = k_2 \frac{T}{W_k}, \text{ где } W_k = \frac{I_k}{h}.$$

Значение коэффициента k_2 определяется по формуле [3]

$$k_2 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \cdot ch(k_n b)}.$$

По вышеперечисленным формулам можно вычислить значения коэффициентов k_1 и k_2 при любых соотношениях сторон прямоугольного сечения.

Следует отметить, что в отечественной литературе по сопротивлению материалов приводятся следующие формулы для определения W_k и I_k [5, 6]:

$$W_k = \alpha bh^2; \quad I_k = \beta bh^3.$$

При этом для сечений, у которых $b \gg h$, $\alpha = \beta = 1/3 \approx 0,333$. Такому значению коэффициентов α и β нет логического объяснения.

В то же время, согласно формулам, предлагаемым в настоящей статье, в предельном случае ($b \gg h$) получим: $k_1 = k_2 = 1$. И тогда

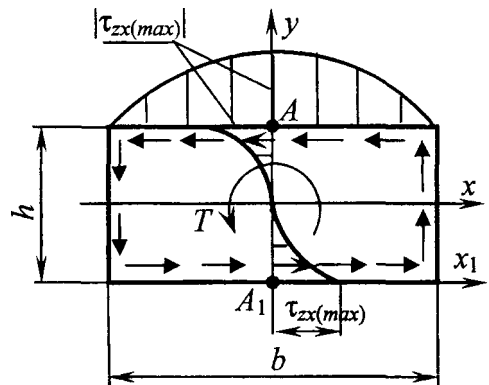


Рис. 4. Распределение касательных напряжений в прямоугольном сечении

$$I_k = I_{x_1} = \frac{bh^3}{3}; \quad W_k = \frac{I_{x_1}}{h} = \frac{bh^2}{3} = 2W_x,$$

где W_x — осевой момент сопротивления прямоугольного сечения.

Такой подход к решению задачи о кручении стержня прямоугольного сечения является, на наш взгляд, более логичным.

В [2] приведены приближённые формулы для определения коэффициентов α и β :

$$\alpha \approx \frac{1}{3 + 1,8 \frac{h}{b}}; \quad \beta \approx \frac{1}{3 + 2 \left(\frac{h}{b} + \frac{h^2}{b^2} \right)}.$$

Применяя эти формулы, можно получить приближенные выражения для вычисления коэффициентов k_1 и k_2 :

$$k_1 = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{h^2}{b^2} \right)}; \quad k_2 = \frac{1 + 0,6 \frac{h}{b}}{1 + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{b} + \frac{h^2}{b^2} \right)}.$$

Расчет I_k по приближенной формуле Сен-Венана. Для определения геометрической жесткости сплошных сечений произвольной формы Б. Сен-Венаном была предложена следующая приближённая формула [4]:

$$I_k = \frac{A^4}{4\pi^2 I_p}. \quad (10)$$

Учитывая то, что величины A и I_p можно легко определить, формула (10) представляет собой хорошую аппроксимацию величины I_k для любых односвязных сечений. При этом погрешность вычислений составляет не более 8%. В то же время в отечественной литературе по сопротивлению материалов эта формула нигде не встречается.

Таким образом, приведенные в статье формулы позволяют значительно упростить решения, связанные с кручением стержней некруглого односвязного поперечного сечения. Предложенная методика представляет практический интерес в инженерных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян. — М.: Ассоц. строит. ВУЗов, 1995. — 572 с.
2. Биргер, И.А. Сопротивление материалов / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. — М.: Наука, 1986. — 560 с.
3. André Bazergui, Thang Bui-Quoc, André Biron, Georgus McInure, Charles Laberge. Résistance des matériaux. — Ecole Polytechnique de Montréal, 2003. — 466 p.
4. Pierre Agati, Frédéric Lerouge, Marc Rosseto. Résistance des matériaux. — Paris: Dunod, 2004. — 454 p.
5. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов: учебник / Э.И. Старовойтов. — Гомель: БелГУТ, 2004. — 376 с.
6. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин. — М.: Физматлит, 2002. — 544 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОВОРОТА ШАРНИРНО СОЧЛЕНЕННОЙ МАШИНЫ С ТРЕМЯ ОСЯМИ

Гурвич Ю. А., Третинников Д. Л., Петровский А. Л.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In the article have been considered a unsteady turn of hinged machine. The research is topical because the up-to-date state of open-cut method progress of mineral product on majority of operating enterprise is characterized by open cast mine deepening, by load distance increasing and by angle of ascent of track rising.

Современный этап развития открытого способа разработки полезных ископаемых на большинстве действующих предприятий характеризуется интенсивным углублением карьеров, увеличением расстояний транспортирования и повышением углов подъема дорог. Проектные глубины карьеров достигают 600—800 м. При значительном углублении карьеров и увеличении затрат на добычу открытым способом интенсивными темпами ведутся работы по переводу некоторых карьеров на подземную добычу. Поэтому повысились требования к маневренности в сочетании с габаритными размерами машин и их грузоподъемностью, что предопределило появление новых конструкций машин, в том числе и шарнирно-сочлененных транспортных средств. Исследований, посвященных изучению силовых характеристик неустановившегося поворота шарнирно-сочлененных машин, в литературе проведено недостаточно [1-6]. Данная работа посвящена исследованию характеристик поворота трехосной шарнирно-сочлененной машины на примере подземного самосвала БелАЗ-75281. Работа является актуальной, так как в настоящее время резко увеличивается спрос на подземные машины.

Рассмотрим поворот машины в движении по горизонтальной поверхности с однородным фоном.

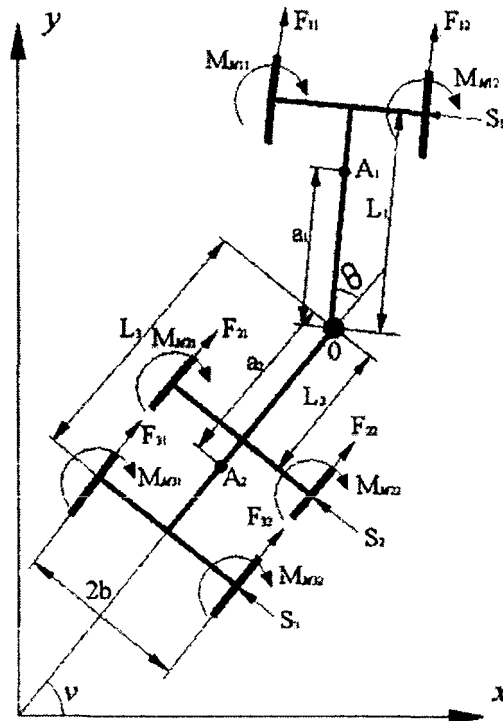


Рис. 1. Расчетная схема шарнирно-сочлененной машины

Расчетная схема машины в общем виде приведена на рис. 1, где O – вертикальный шарнир, A_1 и A_2 – центры тяжести передней и задней секций, F_{ij} – продольная реакция ij -го колеса, S_i – поперечная реакция i -й секции, $M_{\mu ij}$ – момент сопротивления повороту ij -го колеса, $M\theta$ – момент, необходимый для складывания секций машины, цифрами в индексах 11, 12, 21, 22, 31, 32 обозначены колеса, первая цифра – номер секции, а вторая – номер колеса (1 – левое, 2 – правое).

Положение машины определяется десятью обобщенными координатами $x_0, y_0, \nu, \theta, \psi_{ij}$, где x_0, y_0 – координаты вертикального шарнира O , ψ_{ij} – угол поворота ij -го колеса. Остальные координаты показаны на рис. 1.

На рис. 2 представлены основные размеры самосвала БелАЗ-75281.

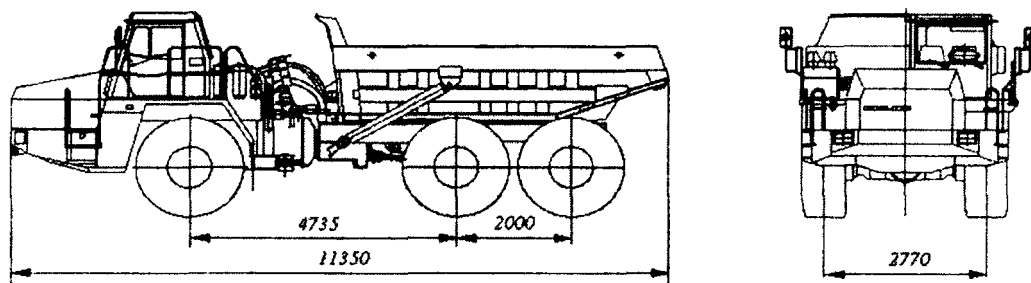


Рис. 2. Основные размеры самосвала БелАЗ-75281

Положения центров тяжести и массы секций самосвала БелАЗ-75281 показаны на рис. 3.

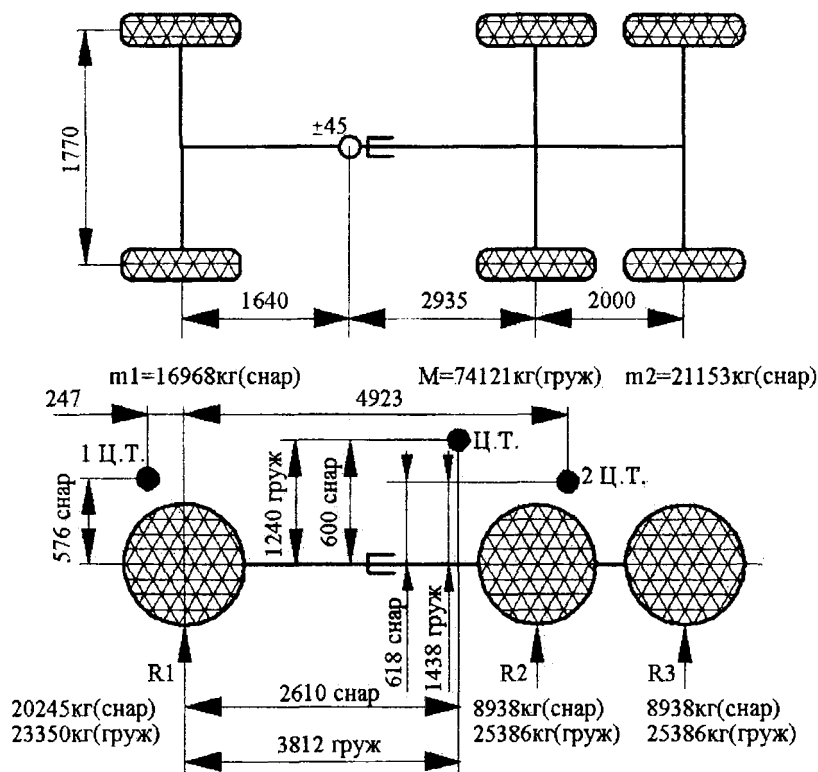


Рис. 3. Положение центров тяжести и массы секций самосвала БелАЗ-75281: снар – снаряженный; груз – груженный

Систему дифференциальных уравнений, описывающих поворот шарнирно-сочлененной машины при ее движении по горизонтальной плоскости, получим из уравнений Лагранжа второго рода (без вывода):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + R_k, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы, q_k – обобщенная координата, Q_k – обобщенная сила соответствующая k -той координате, R_k – обобщенная сила реакций неголономных или кинематико-силовых связей, соответствующая k -той координате (которая в нашем случае принимает значения x, y, v).

В итоге система дифференциальных уравнений второго порядка имеет вид:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x}_0 + [m_1 a_1 \sin v - m_2 a_2 \sin(v + \theta)] \ddot{v} = m_2 a_2 \ddot{\theta} \sin(v + \theta) - \\ - m_1 a_1 \dot{v}^2 \sin v + m_2 a_2 (\dot{v} + \dot{\theta})^2 \sin(v + \theta) + R_x, \\ (m_1 + m_2) \ddot{y}_0 - [m_1 a_1 \cos v - m_2 a_2 \cos(v + \theta)] \ddot{v} = m_2 a_2 \ddot{\theta} \cos(v + \theta) - \\ - m_1 a_1 \dot{v}^2 \sin v + m_2 a_2 (\dot{v} + \dot{\theta})^2 \sin(v + \theta) + R_y, \\ [m_1 a_1 \sin v - m_2 a_2 \sin(v + \theta)] \ddot{x} - [m_1 a_1 \cos v - m_2 a_2 \cos(v + \theta)] \ddot{y}_0 + \\ + (J_1 + J_2 + m_1 a_1^2) \ddot{v} = (J_2 + m_2 a_2^2) \ddot{\theta} + R_v; \\ J_{ij} \ddot{\psi}_{ij} + J_D \frac{c_{ij}}{c_D} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 c_{ij} \ddot{\psi}_{ij} = \text{sign} \dot{\psi}_{ij} M_{\mu ij} + M_D \frac{c_{ij}}{c_D} - F_{ij} r_i, \end{cases} \quad (2)$$

где R_x, R_y, R_v определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 F_{ij} \cos[v + \theta(i-2)] - \sum_{i=1}^3 S_i \sin[v + \theta(i-2)]; \\ R_y &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 F_{ij} \sin[v + \theta(i-2)] + \sum_{i=1}^3 S_i \cos[v + \theta(i-2)]; \\ R_v &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 (-1)^j b_i F_{ij} + \sum_{i=1}^3 (-1)^i S_i L_i, \end{aligned} \quad (3)$$

где c_{ij} – коэффициенты, определяющие кинематическую связь вала двигателя с ij -м колесом; M_{fij} – момент сопротивления перекачиванию ij -го колеса; M_D – момент двигателя; m_1, m_2, J_1, J_2 – массы и моменты инерции передней и задней секций; J_{ij} – момент инерции ij -того колеса и связанных с ним вращающихся деталей; J_D – момент инерции двигателя.

Выразим буксование δ ij -го колеса самосвала, а также увод колес ϵ i -й секции через обобщенные координаты и через их первые производные:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1 - \frac{(-1)^j b_i [\dot{v} - \dot{\theta}(i-2)] + \dot{x}_0 \cos[v - \theta(i-2)] + \dot{y}_0 \sin[v - \theta(i-2)]}{r_i \dot{\psi}_{ij}}, \\ \epsilon_i &= 1 - \frac{(-1)^{i+1} l_i [\dot{v} - \dot{\theta}(i-2)] - \dot{x}_0 \sin[v - \theta(i-2)] + \dot{y}_0 \cos[v + \theta(i-2)]}{\vartheta_i}. \end{aligned} \quad (4)$$

Присоединяя уравнения (3) и (4) к системе уравнений (2), получим 18 уравнений, с 18 неизвестными: $v, x_0, y_0, \psi_{ij}, F_{ij}, S_i$, которые полностью описывают неустановившийся поворот шарнирно сочлененной трехосной машины.

В результате решения системы 18 дифференциальных уравнений определяется момент M_θ , необходимый для поворота самосвала:

$$M_\theta = m_1 a_1 [-\ddot{x}_0 \sin(v + \theta) + \ddot{y}_0 \cos(v + \theta)] + (J_2 + m_2 a_2^2)(\ddot{v} + \ddot{\theta}) + M_{\mu 11} + M_{\mu 22} + b_1(F_{11} - F_{22}) - S_1 l_1. \quad (5)$$

Схема решения системы уравнений (2) представлена на рис.4:

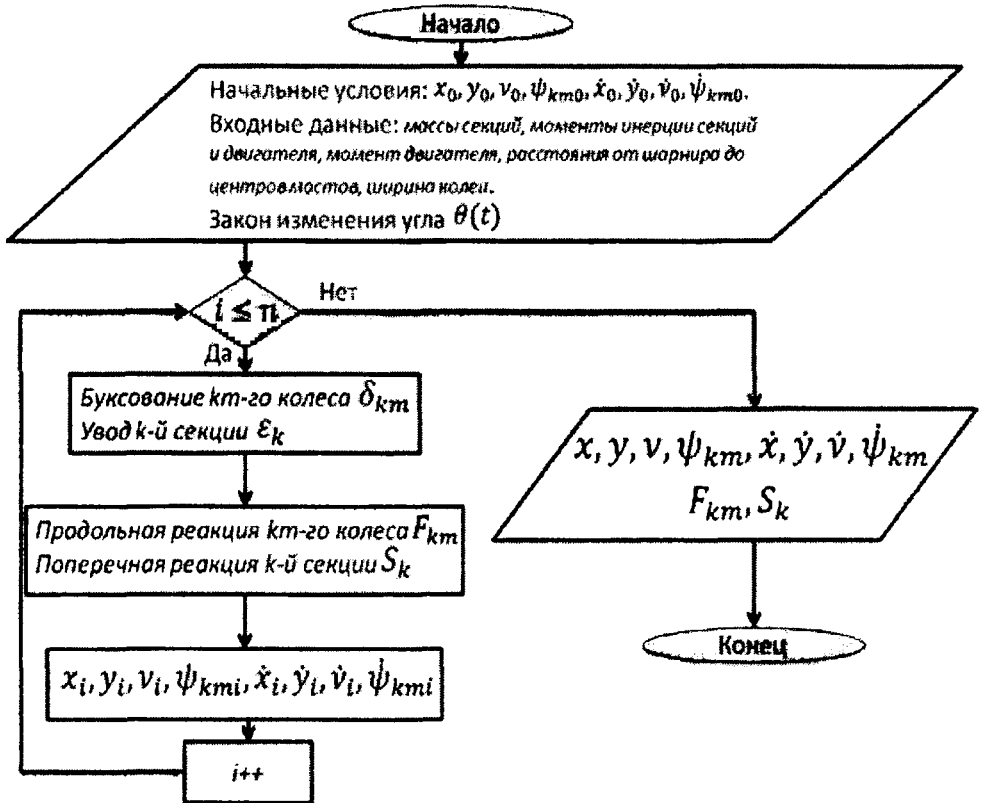


Рис. 4. Блок-схема решения системы дифференциальных уравнений

Таблица 1

Исходные данные

Начальное время t_n , с	0
Конечное время t_k , с	60
Количество разбиений, n	20
Масса передней секции m_1 , кг	16968
Масса задней секции m_2 , кг	21153
Расстояние от центра до первого моста L_1 , м	1640
Расстояние от центра до второго моста L_2 , м	2935
Расстояние от центра до третьего моста L_3 , м	2000
Ширина колеи b , м	2770
Линейный закон изменения угла складывания секций θ	$9 \cdot t$

Используя исходные данные и данные табл. 1, решаем систему уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности. Результаты расчетов представлены на рис. 5–8.

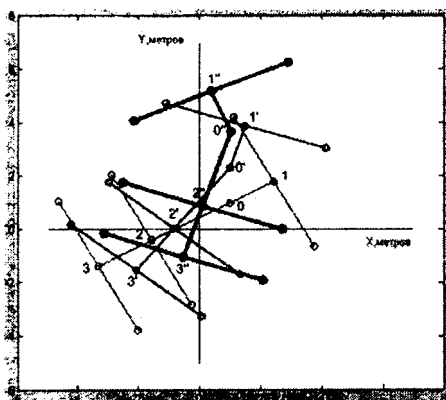


Рис. 5. Траектория поворота машины: 1-1'-1'' – траектория движения центра первого моста, 2-2'-2'', 3-3'-3'' – второго и третьего соответственно

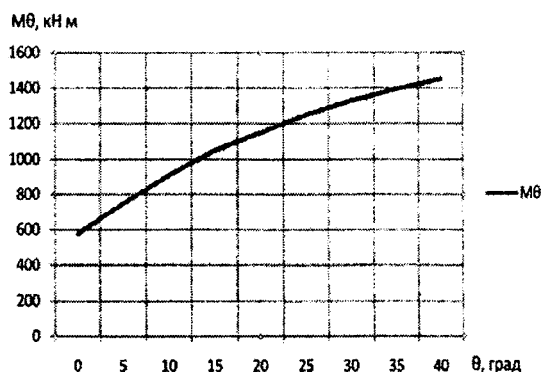


Рис. 6. Зависимость момента сопротивления повороту M_{θ} в движении от угла складывания секций θ

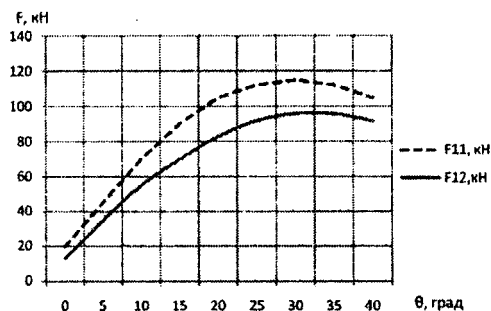


Рис. 7. Продольные силы колес передней секции: F_{11} – левого колеса; F_{12} – правого

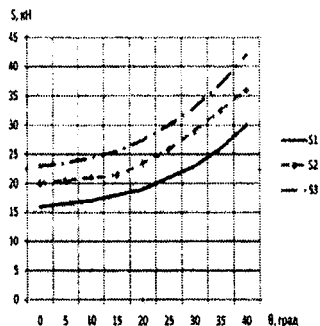


Рис. 8. Поперечные силы осей: S_1 – первой оси; S_2 – второй; S_3 – третьей

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойков А.В. Теория и расчет трактора «Кировец». – М.: Машиностроение, 1980. – 276 с.
2. Фаробин Я.Е. Теория поворота транспортных машин. – М.: Машиностроение, 1970. – 324 с.
3. Скокан А.И. Исследование поворота шарнирно сочленённых колёсных машин. – М., 1973. – 89 с.
4. Ванцевич В.В. Динамика криволинейного движения колёсных машин. – М.: Машиностроение, 1981. – 396 с.
5. Смирнов Г.А. Теория движения колёсных машин. – М.: Машиностроение, 1981. – 271 с.
6. Гришкевич А.И. Автомобили: теория. – Минск: Выш. шк., 1986. – 208 с.

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The article is devoted to the features of use of a method of transformation of coordinates at the kinematic analysis of the closed spatial mechanism.

В настоящей работе решается задача кинематического анализа пространственного 4-звенного рычажного механизма методом преобразования координат с использованием аппарата матриц.

Механизм (рис.1) преобразует вращательное движение кривошипа 1 в горизонтальной плоскости $x_0 Ay_0$ посредством шатуна 2 в качательное движение коромысла 3 в вертикальной плоскости $z_0 Ax_0$. Шатун 2 образует 3-подвижную пару C (сферическую) с коромыслом 3 и 2-подвижную пару B (сферическую с пальцем) с кривошипом 1. На рис.1 изображены используемые системы координат и параметры относительного движения звеньев. Система координат $S_0(x_0, y_0, z_0)$, связанная со стойкой, является неподвижной, а система $S_1(x_1, y_1, z_1)$, связанная с кривошипом, системы $S_2(x_2, y_2, z_2)$, $S'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$, связанные с шатуном, и система $S_3(x_3, y_3, z_3)$, связанная с коромыслом, являются подвижными. Все системы координат являются правыми, и, следовательно, положительным направлением отсчёта поворота углов является направление против часовой стрелки. Обобщённая координата механизма – угол φ_1 поворота кривошипа 1 вокруг оси z_0 .

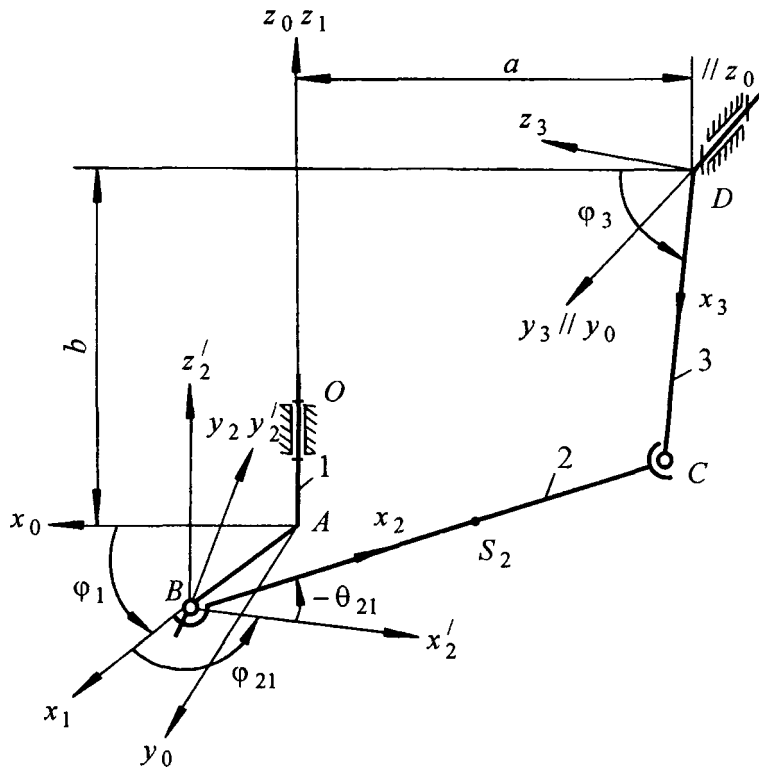


Рис. 1

Для получения матричного уравнения, выражающего зависимость угловых параметров относительного движения звеньев механизма, воспользуемся методом размыкания замкнутой кинематической цепи 1-2-3-0 в центре сферической пары C [2]. Тогда, используя два противоположных направления обхода замкнутого контура, можно записать следующее матричное уравнение замкнутости контура звеньев механизма, выражающее преобразование координат точки C в неподвижную систему двояким образом:

$$M_{01} M_{12'} M_{2'2} r_C^{(2)} = M_{03} r_C^{(3)}$$

или, так как $M_{01} M_{12'} M_{2'2} = M_{02}$,

$$M_{02} r_C^{(2)} = M_{03} r_C^{(3)}, \quad (1)$$

где M_{01} , $M_{12'}$, $M_{2'2}$, M_{03} - матрицы преобразования координат (4-го порядка), учитывающие одновременно повороты и параллельные переносы координатных осей; $r_C^{(2)}$ и $r_C^{(3)}$ - столбцовые матрицы координат точки C в подвижных системах координат S_2 и S_3 .

Выражения матриц перехода получаются в соответствии с известными правилами составления таких матриц [1]. Матрица M_{01} выражает переход от системы координат $x_1 y_1 z_1$ к системе $x_0 y_0 z_0$ при вращении системы $x_1 y_1 z_1$ вокруг общей оси $z_1 (z_0)$. Матрица $M_{12'}$ учитывает поворот системы $x_2' y_2' z_2'$ вокруг оси z_2' , параллельной оси z_1 , на угол φ_{21} и сдвиг вдоль оси x_1 на расстояние l_{AB} . Матрица $M_{2'2}$ учитывает поворот системы $x_2 y_2 z_2$ вокруг общей оси $y_2 (y_2')$ на угол θ_{21} . Матрица M_{03} учитывает поворот системы $x_3 y_3 z_3$ на угол φ_3 вокруг общей оси $y_3 (y_0)$, сдвиг вдоль оси x_0 на расстояние a и сдвиг вдоль оси z_0 на расстояние b .

Таким образом,

$$M_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{12'} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{21} & -\sin \varphi_{21} & 0 & l_{AB} \\ \sin \varphi_{21} & \cos \varphi_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M_{2'2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{21} & 0 & \sin \theta_{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_{21} & 0 & \cos \theta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_{03} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & 0 & \sin \varphi_3 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_3 & 0 & \cos \varphi_3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$r_C^{(2)} = \begin{bmatrix} l_{BC} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad r_C^{(3)} = \begin{bmatrix} l_{CD} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Выполнив умножение матриц в соответствии с уравнением (1) и приравняв соответствующие элементы, получим систему нелинейных уравнений с 3 неизвестными θ_{21} , φ_{21} и φ_3 в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} l_{AB} \cos \varphi_1 + l_{BC} \cos \theta_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) &= l_{CD} \cos \varphi_3 - a, \\ l_{AB} \sin \varphi_1 + l_{BC} \cos \theta_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) &= 0, \\ -l_{BC} \sin \theta_{21} &= l_{CD} \sin \varphi_3 + b. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для решения системы уравнений (2) целесообразно использовать один из итерационных методов, например Ньютона или Зейделя.

Для получения производных $\dot{\theta}_{21}$, $\dot{\varphi}_{21}$, $\dot{\varphi}_3$, $\ddot{\theta}_{21}$, $\ddot{\varphi}_{21}$, $\ddot{\varphi}_3$ следует продифференцировать по времени уравнения (2), при этом получаются системы линейных уравнений относительно указанных параметров.

Угловая скорость ω_2 звена 2 в проекциях на оси неподвижной системы координат может быть получена на основании матричной формулы [3]

$$\Omega_2^{(0)} = \dot{A}_{02} A_{20}, \quad (3)$$

где $\Omega_2^{(0)}$ – кососимметричная матрица, составленная из проекций вектора $\bar{\omega}_2$ и имеющая вид

$$\Omega_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2^{z_0} & \omega_2^{y_0} \\ \omega_2^{z_0} & 0 & -\omega_2^{x_0} \\ -\omega_2^{y_0} & \omega_2^{x_0} & 0 \end{bmatrix}; \quad (4)$$

A_{02} и A_{20} – матрицы поворота (3-го порядка), которые получаются из матриц M_{02} и M_{20} исключением 4-й строки и 4-го столбца, причём матрица A_{20} есть транспонированная матрица по отношению к A_{02} , то есть $A_{20} = A_{02}^T$; \dot{A}_{02} – производная по времени матрицы A_{02} .

После получения выражений матриц \dot{A}_{02} и A_{20} и их перемножения согласно формуле (3) на основании выражения (4) имеем

$$\begin{aligned} \omega_2^{x_0} &= -\dot{\theta}_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1), \\ \omega_2^{y_0} &= \dot{\theta}_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1), \end{aligned}$$

$$\omega_2^{z_0} = \dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1.$$

Угловая скорость ω_3 звена 3 в проекциях на оси неподвижной системы координат получается непосредственно на основании рис. 1:

$$\omega_3^{x_0} = 0, \quad \omega_3^{y_0} = \dot{\varphi}_3, \quad \omega_3^{z_0} = 0.$$

Угловые ускорения ε_2 и ε_3 находятся путём дифференцирования проекций угловых скоростей:

$$\varepsilon_2^{(0)} = \dot{\omega}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} -\ddot{\theta}_{21} \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) - \dot{\theta}_{21} (\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1) \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ \dot{\theta}_{21} \cos(\varphi_{21} + \varphi_1) - \dot{\theta}_{21} (\dot{\varphi}_{21} + \dot{\varphi}_1) \sin(\varphi_{21} + \varphi_1) \\ \ddot{\varphi}_{21} + \ddot{\varphi}_1 \end{bmatrix};$$

$$\varepsilon_3^{(0)} = \dot{\omega}_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для центра масс S_2 звена 2 имеем следующее соотношение:

$$r_{S_2}^{(0)} = M_{02} r_{S_2}^{(2)} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} x_{S_2}^{(0)} \\ y_{S_2}^{(0)} \\ z_{S_2}^{(0)} \\ 1 \end{bmatrix} = M_{02} \begin{bmatrix} l_{AS_2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда могут быть получены выражения координат $x_{S_2}^{(0)}$, $y_{S_2}^{(0)}$, $z_{S_2}^{(0)}$. Путём дифференцирования этих выражений можно получить проекции скорости и ускорения точки S_2 :

$$V_{S_2}^{x_0} = \dot{x}_{S_2}, \quad V_{S_2}^{y_0} = \dot{y}_{S_2}, \quad V_{S_2}^{z_0} = \dot{z}_{S_2};$$

$$a_{S_2}^{x_0} = \ddot{x}_{S_2}, \quad a_{S_2}^{y_0} = \ddot{y}_{S_2}, \quad a_{S_2}^{z_0} = \ddot{z}_{S_2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев, П.А. Кинематика пространственных механизмов / П.А. Лебедев. – М.; Л.: Машиностроение, 1966. – 280 с.
2. Литвин, Ф.Л. Определение функции положения пространственного механизма способом условного замыкания контура / Ф.Л. Литвин // Машиноведение. – 1970. – № 3. – С. 51–57.
3. Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
4. Механика машин / И.И. Вульфсон [и др.]; под ред. Г.А. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ САПР КОМПАС-3D V12 В КУРСОВОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ПО КУЛАЧКОВЫМ МЕХАНИЗМАМ

Журавлёв А.М., Астахов Э.И.

Белорусский национальный технический университет, Минск

For a cam mechanism with a shaking rocker actuator the problem of its dynamic synthesis with use of information technology CAD system Компас-3D V12 is shown. Problems of calculation of the law of movement of a rocker actuator, definition of basic dimensions, construction centre and a working cam profile, construction of the schedule of a corner of pressure are consistently solved. Calculations are made analytically under known formulas and chair TMM BNTU technique, and graphic methods. Performance of graphic constructions in the Компас-3D gives the ideal sizes.

Основная задача, решаемая системой КОМПАС-3D – моделирование изделий с целью существенного сокращения периода проектирования и скорейшего их запуска в производство. Эти цели достигаются благодаря возможностям: быстрого получения конструкторской и технологической документации, необходимой для выпуска изделий (сборочных чертежей, спецификаций, детализовок и т.д.); передачи геометрии изделий в расчетные пакеты; передачи геометрии в пакеты разработки управляющих программ для оборудования с ЧПУ; создания дополнительных изображений изделий (например, для составления каталогов, создания иллюстраций к технической документации и т.д.). Основные компоненты КОМПАС-3D – собственно система трехмерного твердотельного моделирования, чертежно-графический редактор и модуль проектирования спецификаций.

Система трехмерного твердотельного моделирования предназначена для создания трехмерных ассоциативных моделей отдельных деталей и сборочных единиц, содержащих как оригинальные, так и стандартизованные конструктивные элементы. Параметрическая технология позволяет быстро получать модели типовых изделий на основе однажды спроектированного прототипа. Многочисленные сервисные функции облегчают решение вспомогательных задач проектирования и обслуживания производства.

Чертежно-графический редактор (КОМПАС-График) предназначен для автоматизации проектно-конструкторских работ в различных отраслях деятельности. Он может успешно использоваться в машиностроении, архитектуре, строительстве, составлении планов и схем — везде, где необходимо разрабатывать и выпускать чертежную и текстовую документацию. Совместно с любым компонентом КОМПАС-3D может использоваться модуль проектирования спецификаций, позволяющий выпускать разнообразные спецификации, ведомости и прочие табличные документы.

Задачи синтеза кулачкового механизма: расчёт и построение закона движения толкателя; определение основных размеров механизма, обеспечивающих его работу; построение профиля кулачка, обеспечивающего выполнение заданного закона движения толкателя.

Покажем пример синтеза коромыслового кулачкового механизма со следующими исходными данными: синтез - динамический; схема кулачкового механизма с вращающимся кулачком и роликовым коромыслом на рисунке 1; угол качания коромысла $\psi = 16^\circ$; направление вращения кулачка против часовой стрелки; длина коромысла $l_k = 0,14$ м; закон движения коромысла – параболический с $v = a/a = 1,3$; угол поворота кулачка: на удалении $\varphi_y = 60^\circ$; на дальнем стоянии

$\varphi_{д.с.} = 10^\circ$; на возвращении $\varphi_g = 60^\circ$; допустимый угол давления в кулачковом механизме $\theta_{доп.} = 35^\circ$; масса коромысла: $m_k = 0,283$ кг; момент инерции коромысла: $I_k = 0,00047$ кг·м²; угловая скорость вращения кулачка $\omega_k = -\omega_{ср.} = 209,44$ рад/с .

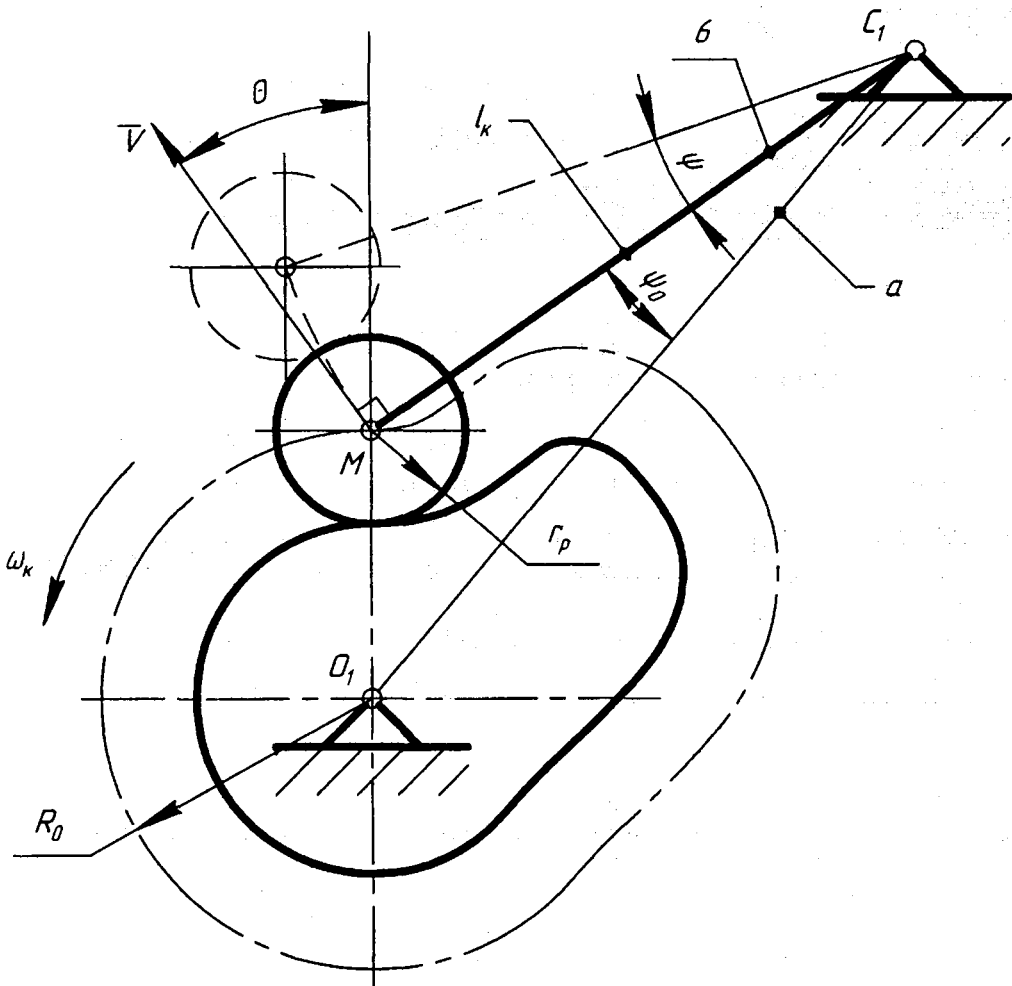


Рис. 1. Кулачковый механизм с коромыслом

Основные размеры кулачкового механизма определяем из условия недопущения заклинивания. Для этого в соответствии с рисунком 2 в точке при максимальном положительном аналоге скорости при $+S'_{\max}$ к оси S проводится наклонная прямая под углом $+\theta_{доп.}$, а при силовом замыкании из начальной точки M_1 проводится другая наклонная прямая под углом $-\theta_{доп.}$. Точка O_1 пересечения этих наклонных прямых даёт центр кулачка. Замеряются отрезки и рассчитываются основные размеры графически:

- минимальный радиус кулачка $R_0 = O_1M_1 \cdot \mu_S = 56,3 \cdot 0,001 = 0,0563$ м ;
- межосевое расстояние между центрами кулачка и коромысла $a = O_1C_1 \cdot \mu_S = 178,3 \cdot 0,001 = 0,1783$ (м);
- начальная угловая координата коромысла замеряется из совмещенной диаграммы $\psi_0 = 15,0074519^\circ$.

Все вышерассмотренные графические построения в САПР Компас выполняются с высокой точностью.

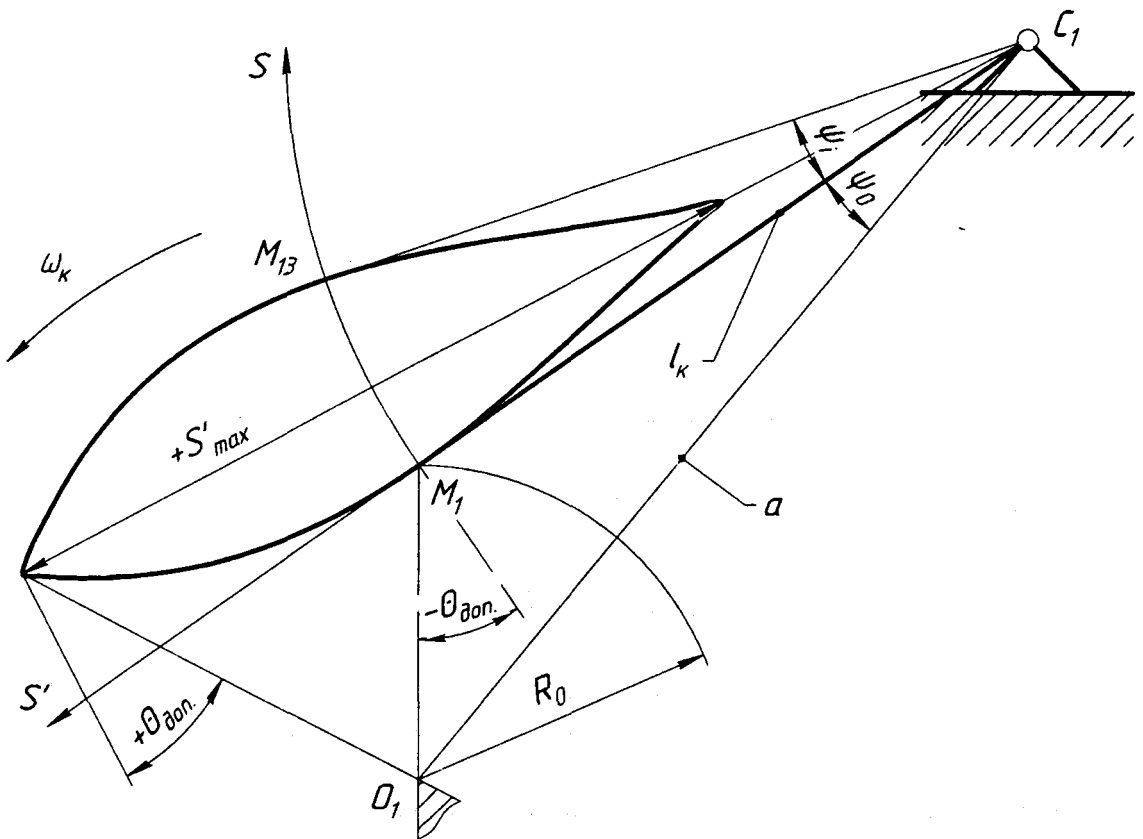


Рис. 2. Диаграмма для определения основных размеров

Сравним ψ_0 , a и R_0 , полученные путём расчёта на ЭВМ аналитически и построенные в САПР КОМПАС-3D V12:

Таблица 1

Сравнение результатов, определения основных размеров.

Сравниваемые параметры	$\psi_0, ^\circ$	$a, \text{ м}$	$R_0, \text{ м}$
Аналитический результат на компьютере	15,0074519°	0,1783	0,0563
Графический результат в САПР КОМПАС-3D V12	15.0074519°	0,1783	0,0563
Процент расхождения	0	0	0

Графическое построение профиля центрального кулачка методом обращённого движения представлено на рисунке 3 и проводится в следующей последовательности: выбирается масштаб построения μ_l , мм/м; из произвольного центра O_1 проводятся в масштабе окружности с радиусами R_0 и a ; начальной из точки C_1 на окружности a в направлении противоположно вращению кулачка ω_k откладываются углы φ_u , $\varphi_{д.с.}$ и φ_v , углы φ_u , φ_v делятся на 12 интервалов, из каждой точки деления радиусом l_k проводятся дуги; на этих дугах от точки пересечения с окруж-

ностями R_{0i} откладываются в масштабе μ_i соответствующие перемещения коромысла M_iC_i ; полученные точки соединяются плавной кривой, образуя центровой профиль кулачка.

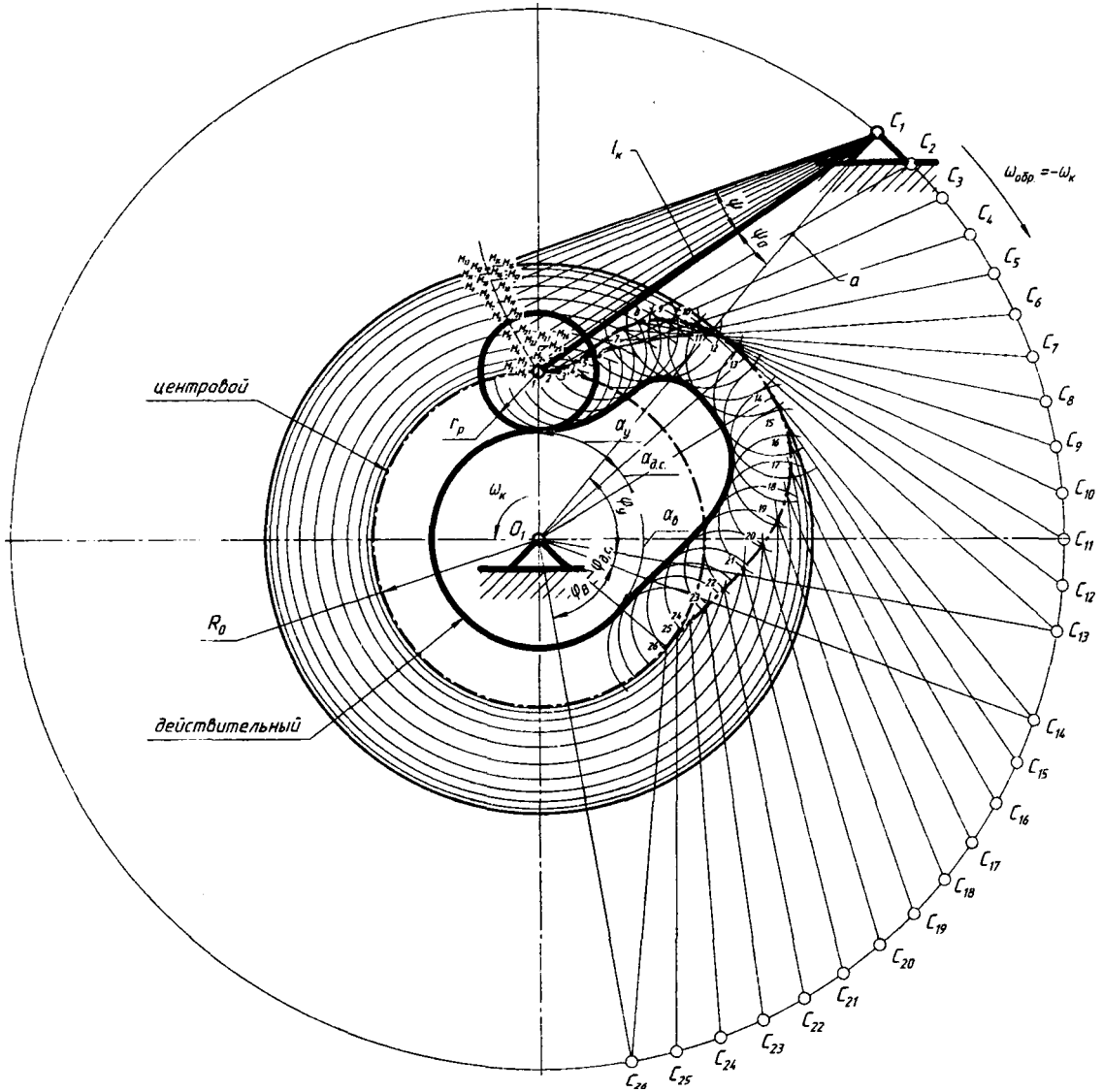


Рис. 3. Построение профиля кулачка методом обращённого движения

Полярные координаты центрального профиля рассчитываются по известным аналитическим формулам из литературы [2] на с. 61:

$$R_0 = \sqrt{a^2 + l_k^2 - 2 \cdot a \cdot l_k \cdot \cos(\psi_0 + \psi_i)};$$

$$\alpha_i = \varphi_i \pm \beta_i = \varphi_i \pm \left\{ \arcsin \left[\frac{l_k}{R_i} \cdot \sin(\psi_0 + \psi_i) \right] - \arcsin \left[\frac{l_k}{R_i} \cdot \sin(\psi_0) \right] \right\}.$$

Построение центрального профиля кулачка в полярных координатах показано на рис. 4.

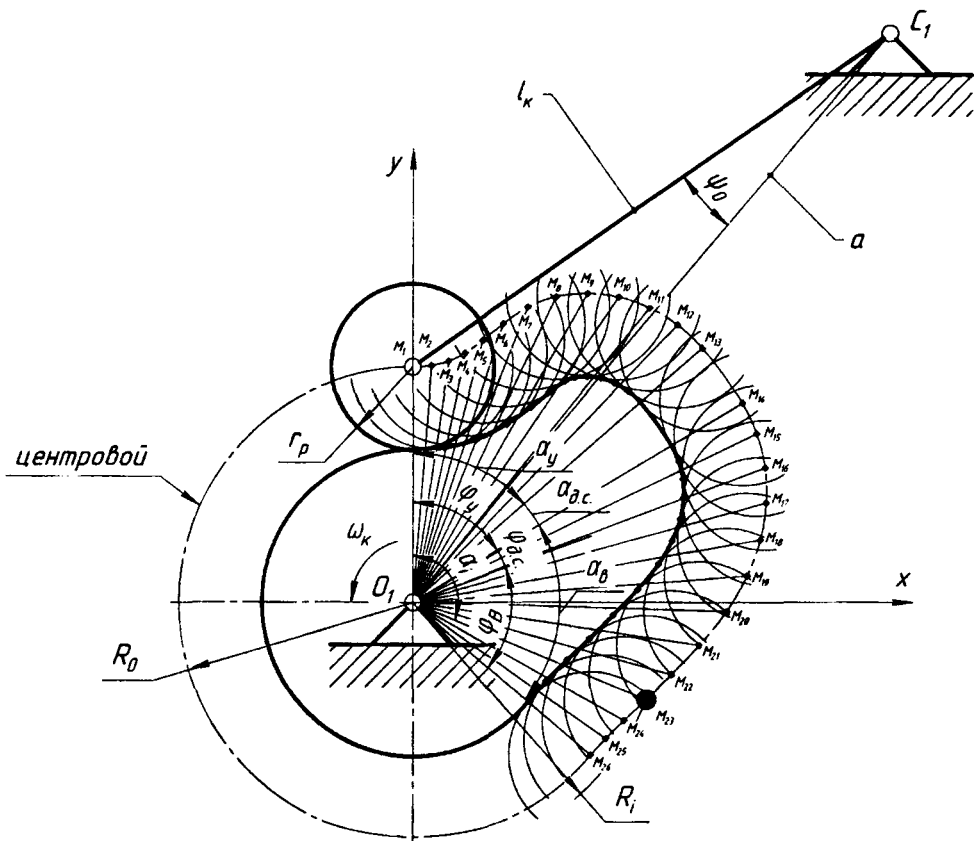


Рис. 4. Построение центрального профиля кулачка методом полярных координат

Геометрические построения и расчёт декартовых координат действительного профиля кулачка: на построенном центровом профиле строим полуокружности радиусом r_p (команда в Компасе окружность или дуга); через центры M_i окружностей проводим касательные t_i к центральному профилю (команда – касательная прямая через точку на кривой); перпендикулярно касательным к центральному профилю откладываем нормали n_i на величину r_p в направлении центра кулачка O_1 (команда – перпендикулярный отрезок); действительный профиль кулачка получаем соединив точки касания параллельных прямых к соответствующим окружностям ролика r_{pi} (команда – кривая Безье); декартовые координаты точек реального профиля можно получить из свойств или с помощью команды координаты точки.

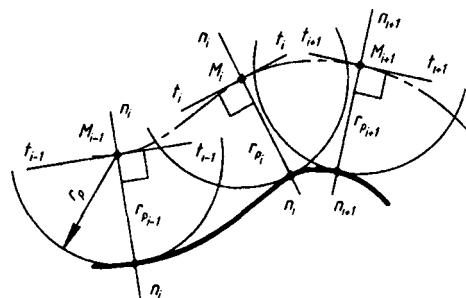


Рис. 5. Построение действительного профиля кулачка

Сравним декартовые координаты точек действительного профиля полученные путём аналитического расчёта на компьютере и построенные в САПР КОМПАС-3D V12.

Таблица 2

Сравнение результатов расчёта декартовых координат действительного профиля

№	На ЭВМ		В САПР КОМПАС-3D V12 методом об- ращённого движения		В САПР КОМПАС-3D V12 методом по- лярных координат	
	X	Y	X	Y	X	Y
1	0,0000	0,0365	0,0000	0,0365	0,0000	0,0365
2	0,0077	0,0370	0,0077	0,0371	0,0077	0,0371
3	0,0157	0,0392	0,0156	0,0390	0,0154	0,0390
4	0,0230	0,0427	0,0228	0,0426	0,0228	0,0426
5	0,0290	0,0468	0,0288	0,0467	0,0288	0,0467
6	0,0343	0,0510	0,0336	0,0504	0,0336	0,0504
7	0,0369	0,0528	0,0369	0,0528	0,0370	0,0529
8	0,0393	0,0537	0,0394	0,0537	0,0393	0,0537
9	0,0423	0,0540	0,0423	0,0540	0,0423	0,0540
10	0,0456	0,0536	0,0457	0,0536	0,0456	0,0536
11	0,0489	0,0525	0,0490	0,0524	0,0490	0,0524
12	0,0521	0,0505	0,0522	0,0505	0,0521	0,0505
13	0,0550	0,0478	0,0551	0,0478	0,0551	0,0478
14	0,0625	0,0375	0,0625	0,0375	0,0625	0,0375
15	0,0642	0,0338	0,0642	0,0337	0,0642	0,0338
16	0,0652	0,0296	0,0653	0,0295	0,0653	0,0295
17	0,0654	0,0249	0,0654	0,0249	0,0654	0,0249
18	0,0646	0,0199	0,0646	0,0198	0,0646	0,0198
19	0,0627	0,0146	0,0627	0,0145	0,0627	0,0147
20	0,0596	0,0092	0,0595	0,0091	0,0594	0,0091
21	0,0547	0,0034	0,0545	0,0031	0,0545	0,0030
22	0,0486	-0,0030	0,0486	-0,0031	0,0486	-0,0030
23	0,0429	-0,0086	0,0429	-0,0086	0,0429	-0,0086
24	0,0376	-0,0135	0,0375	-0,0137	0,0375	-0,0136
25	0,0327	-0,0183	0,0325	-0,0185	0,0325	-0,0185
26	0,0279	-0,0234	0,0283	-0,0231	0,0283	-0,0231

Как видно, максимальное расхождение между аналитическим методом и расчётом в САПР Компас в 4- м знаке не более шести единиц.

Таким образом, современные САПР позволяют использовать ранее известные графические методы проектирования механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимов А. А. Самоучитель Компас-3D V8. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 544 с.: ил.
2. Курсовое проектирование по теории механизмов и машин: учеб. пособие для инж.-техн. спец. вузов / под общ. ред. Г. Н. Девойно. – Минск: Выш. шк., 1986. – 285 с.: ил.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Якубовский Ч.А., Якубовский А.Ч.

Белорусский национальный технический университет, Минск

In article the energy method, which may be successfully used to account of various statically indeterminate systems as “work method”, is considered in details (for examples, the bars, beam and frame). The effectiveness of energy method and the reason of using it in learn process is established.

В настоящее время в технических ВУЗах республики в курсе сопротивления материалов излагаются различные методы расчета статически неопределимых систем (СНС) в зависимости от вида деформации, испытываемой элементами системы (растяжение, сжатие, изгиб и т.д.), а также от конструкции самой системы. Так СНС, элементы которой работают на растяжение–сжатие, рассчитываются с помощью уравнений статики с добавлением к ним уравнений совместности перемещений, основанных на определении перемещений отдельных точек системы, одновременно принадлежащих к разным ее элементам [1, 2]. Такой метод является громоздким, особенно для статически неопределимых асимметричных систем с числом лишних неизвестных $N \geq 2$.

Для СНС, элементы которой работают в основном на изгиб, применяются другие методы. Так, расчет рамных систем производится методом сил [3], в то время как для балочных систем применяется уже другой метод — метод «уравнений трех моментов» [1, 3]. Хотя он базируется на методе сил, но существенно отличается от последнего.

Такой разнообразный подход к решению СНС является неприемлемым. Он значительно усложняет усваиваемость материала и вносит путаницу в умы студентов.

Ранее нами предлагалось производить расчет любых СНС методом сил, что обеспечивает общность подхода к решению таких задач [4]. Приводились примеры расчета различных СНС и преимущества метода. Однако для внедрения в учебный процесс этого предложения, на наш взгляд, понадобится не одно десятилетие. В данной статье предлагается энергетический метод, который наряду с методом сил может также успешно применяться для расчета различных СНС. Этот метод позволяет не только находить перемещения и определять лишние неизвестные в стержневых системах, но и является основой ряда приближенных методов, применяемых в сопротивлении материалов и теории упругости для прочностного расчета конструкций. Он основан на законе минимума потенциальной энергии деформации [5]. Согласно этому закону любое напряженное состояние равновесия упругого тела дает минимум потенциальной энергии деформации. Следовательно, все неизвестные усилия X_1, X_2, \dots, X_i , от которых зависит потенциальная энергия деформации тела, могут быть определены из условий минимума энергии, а именно:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial X_i} = 0.$$

Этот метод особенно эффективен при определении перемещений узлов или сечений элементов СНС. Он широко применяется в вузах западных стран (Франция, Канада и др.) [6, 7]. В наших учебных заведениях он, к сожалению, не находит применения.

Рассмотрим применение этого метода на конкретных примерах.

Пример 1. Определить усилия в стержнях 4-стержневой системы, нагруженной силой F (рис. 1), и найти величину и направление полного перемещения узла C . Все стержни имеют одинаковое поперечное сечение A и выполнены из одного материала E . При этом принять $\alpha=45^\circ$, $\beta=60^\circ$, $l=1$ м, $F=40$ кН, $A=5$ см², $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение этой задачи традиционным методом является трудновыполнимой задачей (см. замечания выше). Система является два раза статически неопределимой. Вырезаем узел C и рассматриваем его равновесие. Полагаем, что все стержни растянуты (рис. 2). Записываем уравнения статики:

$$\sum x = 0; \quad N_1 \cdot \cos \beta + N_2 \cdot \cos \alpha + N_3 + N_4 \cdot \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\sum y = 0; \quad N_1 \cdot \sin \beta + N_2 \cdot \sin \alpha - N_4 \cdot \sin \alpha - F = 0. \quad (2)$$

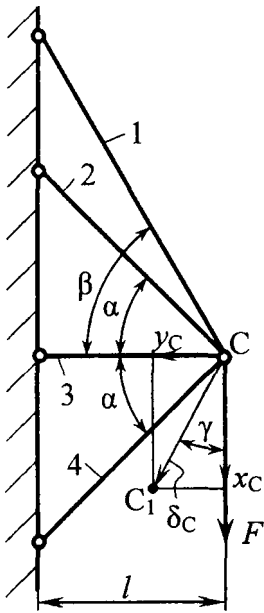


Рис. 1

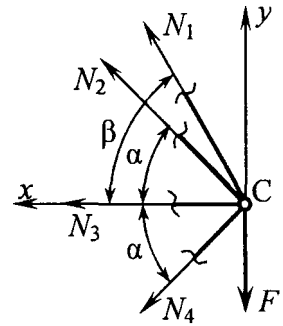


Рис. 2

Выражаем усилия в стержнях 3 и 4 через усилия N_1 и N_2 :

$$N_4 = N_1 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + N_2 - \frac{F}{\sin \alpha} = 1,225N_1 + N_2 - 1,414F;$$

$$N_3 = -N_1 \cdot \cos \beta - N_2 \cdot \cos \alpha - \left(N_1 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + N_2 - \frac{F}{\sin \alpha} \right) \cdot \cos \alpha = -1,366N_1 - 1,414N_2 + F.$$

Вычисляем потенциальную энергию деформации системы по формуле

$$U = \sum \frac{N_i^2 l_i}{2E_i A_i}. \quad (3)$$

Находим длины стержней:

$$l_1 = \frac{l}{\cos \beta} = \frac{l}{\cos 60^\circ} = 2l; \quad l_3 = l; \quad l_2 = \frac{l}{\cos \alpha} = \frac{l}{\cos 45^\circ} = 1,414l; \quad l_4 = l_2 = 1,414l.$$

Подставляя значения N_i и l_i в формулу (3), получим:

$$U = \frac{l}{2EA} \left[2N_1^2 + 1,414N_2^2 + (-1,366N_1 - 1,414N_2 + F)^2 + 1,414(1,225N_1 + N_2 - 1,414F)^2 \right]. \quad (4)$$

Далее вычисляем:

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \frac{l}{2EA} \left[4N_1 + 2(-1,366N_1 - 1,414N_2 + F)(-1,366) + 2,828(1,225N_1 + N_2 - 1,414F)1,225 \right] = 0.$$

После преобразований получим:

$$11,976N_1 + 7,327N_2 - 7,632F = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial N_2} = \frac{l}{2EA} \left[2,828N_2 + 2(-1,366N_1 - 1,414N_2 + F)(-1,414) + 2,828(1,225N_1 + N_2 - 1,414F) \right] = 0$$

$$\text{или} \quad 9,656N_2 + 7,327N_1 - 6,828F = 0. \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (5) и (6), получим

$$N_1 = 0,382F; \quad N_2 = 0,417F.$$

Далее находим

$$N_3 = -0,112F; \quad N_4 = -0,529F.$$

Определяем потенциальную энергию деформации стержневой системы:

$$U = \sum \frac{N_i^2 l_i}{2EA} = \frac{l}{2EA} \left[(0,382F)^2 \cdot 2 + (0,417F)^2 \cdot 1,414 + (0,112)^2 + (0,529F)^2 \cdot 1,414 \right] = \frac{0,473F^2 l}{EA}.$$

Находим перемещение узла С (см. рис. 1). Горизонтальное перемещение находится просто:

$$x_C = \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA} = \frac{-0,113Fl}{EA} = -\frac{0,113 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} = -0,045 \text{ мм.}$$

Вертикальное перемещение находим, используя закон сохранения энергии $U=W$, где W — работа внешней силы на перемещении в ее направлении. При этом по теореме Клапейрона $W=Fy_C/2$. Тогда получим:

$$y_C = \frac{2W}{F} = \frac{2U}{F} = 2 \frac{0,473F^2 l}{EAF} = \frac{0,946Fl}{EA} = \frac{0,946 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} = 0,378 \text{ мм.}$$

Таким образом, полное перемещение узла С равно:

$$\delta_C = CC_1 = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \sqrt{0,045^2 + 0,378^2} = 0,381 \text{ мм.}$$

Находим направление перемещения узла С:

$$\gamma = \arctg \frac{x_C}{y_C} = \arctg \frac{0,045}{0,378} = 6,789^\circ.$$

Пример 2. Определить угловое и вертикальное перемещение сечения С балки (рис. 3, а).

Балка один раз статически неопределима. Выбираем основную систему (рис. 3, б) и составляем эквивалентную систему (рис. 3, в). Находим изгибающие моменты в сечениях балки:

$$M_1 = -m; \quad M_2 = -m + X_1 z_2 - \frac{qz_2^2}{2}.$$

Определяем вертикальное перемещение сечения В по теореме Кастigliано:

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad U = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EI}.$$

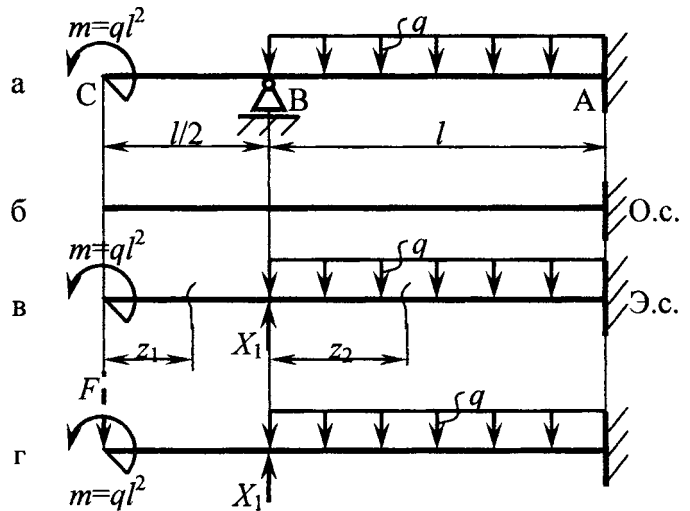


Рис. 3

Чтобы избежать необходимости возведения в квадрат изгибающих моментов, используем метод дифференцирования сложной функции. Например, если

$$U = f_1(M), \quad \text{а} \quad M = f_2(X), \quad \text{то} \quad \frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial X}.$$

Далее вычисляем

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_1} = \int_0^l \frac{M}{EI} \left(\frac{\partial M}{\partial X_1} \right) dz = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{l/2} M_1 \left(\frac{\partial M_1}{\partial X_1} \right) dz + \int_0^l M_2 \left(\frac{\partial M_2}{\partial X_1} \right) dz \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{l/2} (-m)(0) dz + \int_0^l \left(-m + X_1 z - \frac{qz^2}{2} \right) z \cdot dz \right] = \frac{1}{EI} \left(-\frac{ml^2}{2} + \frac{X_1 l^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0.$$

Отсюда находим:

$$X_1 = R_B = \frac{12m + 3ql^2}{8l} = \frac{15ql}{8}.$$

Угол поворота сечения С определяем по теореме Кастилиано.

$$\begin{aligned} \theta_C &= \frac{\partial U}{\partial m} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} M_1 \left(\frac{\partial M_1}{\partial m} \right) dz + \int_0^l M_2 \left(\frac{\partial M_2}{\partial m} \right) dz \right] = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} -m(-1) dz + \int_0^l \left(-m + X_1 z - \frac{qz^2}{2} \right) (-1) dz \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left(\frac{ml}{2} + ml - X_1 \frac{l^2}{2} + \frac{q}{2} \cdot \frac{l^3}{3} \right) = \frac{35ql^3}{48EI}. \end{aligned}$$

Для определения вертикального перемещения сечения С прикладываем в этом сечении фиктивную силу F . После интегрирования принимаем $F=0$ и находим искомое перемещение.

Записываем выражения моментов в сечениях с учетом силы F (рис. 3, г).

$$M_1 = -m - Fz_1; \quad M_2 = -m + X_1 z_2 - \frac{qz_2^2}{2} - F \left(\frac{l}{2} + z_2 \right).$$

Далее вычисляем:

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} M_1 \left(\frac{\partial M_1}{\partial F} \right) dz + \int_0^l M_2 \left(\frac{\partial M_2}{\partial F} \right) dz \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} (-m - Fz)(-z) dz + \int_0^l \left[-m + X_1 z - \frac{qz^2}{2} - F \left(\frac{l}{2} + z \right) \right] \left(-\frac{l}{2} - z \right) dz \right] = \frac{23ql^4}{96EI}. \end{aligned}$$

Пример 3. Определить внутренние силовые факторы в стержнях рамы (рис. 4, а). Построить эпюры Q и M .

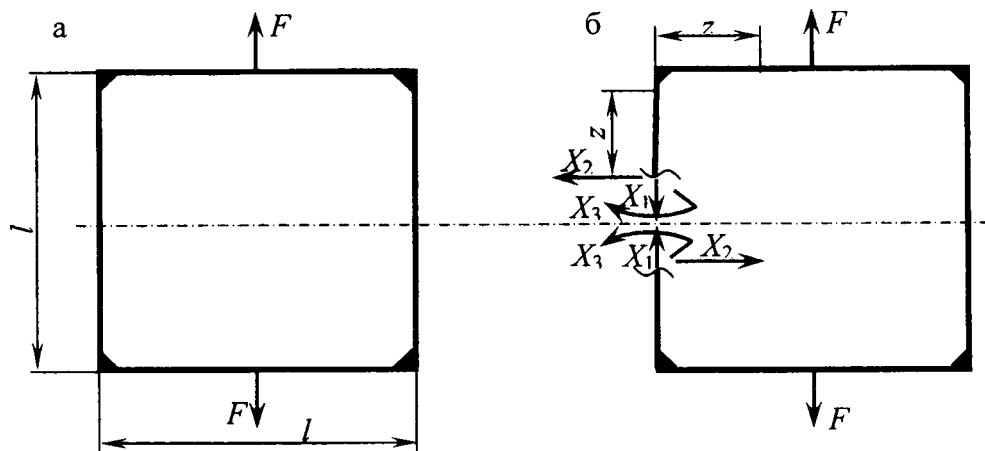


Рис. 4

Замкнутая рама является трижды внутренне статически неопределимой системой. Изображаем эквивалентную систему (рис. 4, б).

Исходя из равновесия отсеченной по горизонтальной оси симметрии части рамы, находим $\sum y=0$; $X_1=F/2$.

Кроме того, известно правило: *в симметричной системе при симметричной нагрузке внутренние кососимметричные факторы равны нулю*. Следовательно, $X_2=0$. Для нахождения третьего неизвестного X_3 запишем условие

$$\frac{\partial U}{\partial X_3} = \theta_A = 0, \quad \text{где} \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = \frac{\partial U}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_3}; \quad U = \sum \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EI}.$$

Запишем выражения изгибающих моментов в сечениях рамы:

$$M_1 = X_3; \quad M_2 = X_3 - \frac{F}{2} z.$$

Далее вычисляем:

$$\frac{\partial U}{\partial X_3} = \sum \int_0^l \frac{M \left(\frac{\partial M}{\partial X_3} \right)}{EI} dz = \frac{4}{EI} \left[\int_0^{\frac{l}{2}} X_3 dz + \int_0^{\frac{l}{2}} \left(X_3 - \frac{F}{2} z \right) dz \right] = \frac{4}{EI} \left(X_3 \frac{l}{2} + X_3 \frac{l}{2} - \frac{Fl^2}{16} \right) = 0.$$

Отсюда получим:

$$X_3 = \frac{Fl}{16}.$$

Эпюры Q и M имеют вид, представленный на рис. 5.

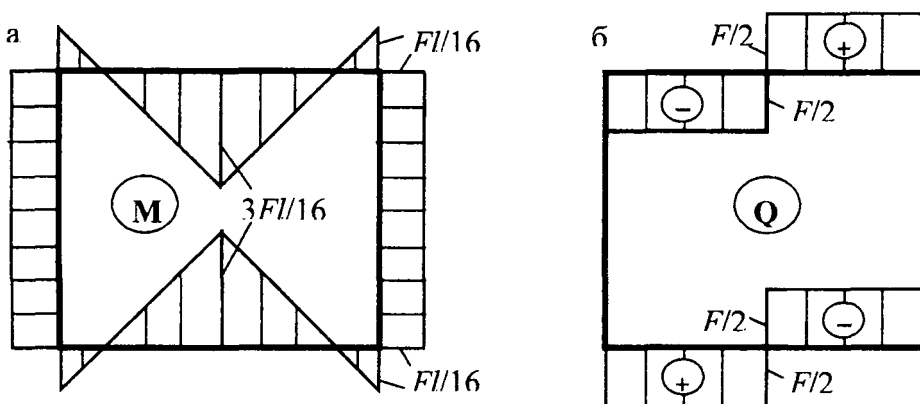


Рис. 5

Вывод. Очевидно, что энергетический метод расчета статически неопределимых систем является эффективным методом прочностного расчета различного рода конструкций и заслуживает большего внимания и широкого использования в учебном процессе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин.— М.: Физматлит, 2002.— 544 с.
2. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов: учебник / Э.И. Старовойтов.— Гомель: БелГУТ, 2004.— 376 с.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев.— М.: МГТУ, 1999.— 591 с.
4. Якубовский, Ч.А. Механика материалов. Практикум: учебное пособие / Ч.А. Якубовский, А.Ч. Якубовский.— Минск: БНТУ, 2006.— 168 с.
5. Работнов, Ю.Н. Сопротивление материалов / Ю.Н. Работнов.— М.: Физматгиз, 1962.— 456 с.
6. Pierre Agati, Frédéric Lerouge, Marc Rosseto. Résistance des matériaux. — Paris: Dunod, 2004.— 454 p.
7. André Bazergui, Thang Bui-Quoc, André Biron, Georgus McInure, Charles Laberge. Résistance des matériaux. — Ecole Polytechnique de Montréal, 2003. — 466 p.

РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ ОСЛАБЛЕННОЙ ТРУБЫ

Якубовский А.Ч., Якубовский Ч.А., Галуза И.М., Галуза Е.М.

Белорусский национальный технический университет, Минск

The formulae for account of the inertia moment, inertia radius and resistance moment of dangerous cross-section in an injured round fine-wall tube are received. There is a cross-section in an opened ring form. The truth of derived formulae is determined. It's verified by particular formulae for the closed ring.

В современной технике во многих конструкциях с целью их облегчения при сохранении прочности используют трубные элементы, соединения которых выполняют различными способами. В частности, при соединении сваркой осуществляют подготовку кромок разделкой, а в случае с трубами иногда прибегают к вырезанию в них «окошек», что приводит к фактическому ослаблению трубы.

При проектировании сварных конструкций для обеспечения их безотказной работы проводят расчет на прочность и жесткость конструктивных элементов, что непосредственно связано с определением геометрических характеристик их поперечных сечений [1–4].

Принимая во внимание, что в качестве трубных элементов конструкций наиболее часто используют круглые в сечении трубы (чаще тонкостенные), рассмотрим поперечное сечение в форме кольца (замкнутого тонкостенного контура) со срединным диаметром D и толщиной δ . Тогда в случае ослабления трубы в расчетах следует рассматривать опасное сечение в зоне ослабления — тонкостенный контур незамкнутого кольца ($\beta=2\pi-\alpha$) с той же толщиной δ и срединным радиусом $R=D/2$ (рис. 1).

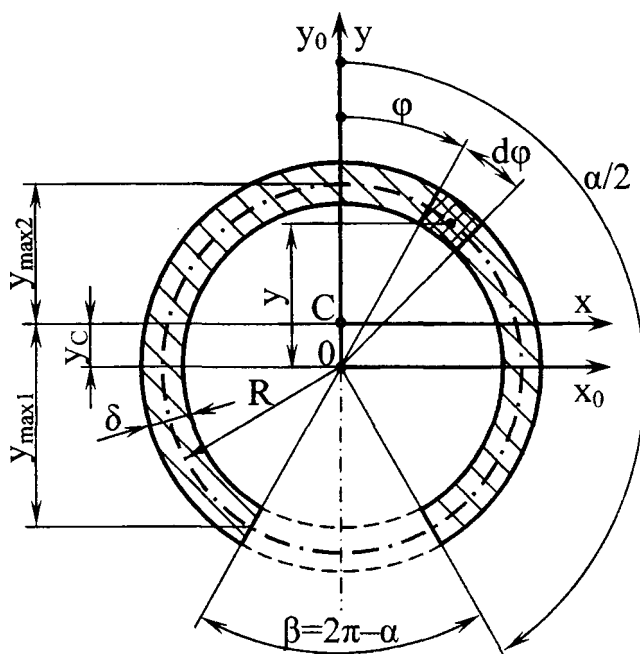


Рис. 1. Расчетная схема поперечного сечения ослабленной трубы.

Выделим из сечения элементарный участок размерами δ и $R \cdot d\phi$ (см. рис. 1), площадь которого

$$dA = \delta \cdot (R \cdot d\phi). \tag{1}$$

Тогда площадь незамкнутого кольца

$$A = \int_A dA = 2 \cdot \delta \cdot R \cdot \int_0^{\alpha/2} d\phi = R \cdot \delta \cdot \alpha. \tag{2}$$

Здесь угол α измеряется в радианах.

В частности, для замкнутого кольца при $\beta=0$ (т.е. при $\alpha=2\pi$) имеем:
 $A = 2\pi \cdot R \cdot \delta$.

Чтобы определить другие геометрические характеристики сечения, необходимо установить положение его центра тяжести (точки С на рис. 1). С этой целью введем систему вспомогательных координатных осей x_0 и y_0 с началом отсчета в точке 0, являющейся центром срединной линии сечения (центром окружности). Очевидно, что точка С будет лежать на оси y_0 , т.е. горизонтальная координата центра тяжести сечения в системе вспомогательных осей равна нулю ($x_C=0$); а вертикальную координату y_C — нужно найти.

Статический момент сечения относительно оси x_0 с учетом (1)

$$S_{x_0} = \int_A y \cdot dA = R^2 \cdot \delta \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \varphi \cdot d\varphi = R^2 \cdot \delta \cdot \sin \varphi \Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = 2 \cdot R^2 \cdot \delta \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (3)$$

где $y=R \cdot \cos \varphi$ — вертикальная координата выделенного из сечения элементарного участка в системе вспомогательных осей x_0 и y_0 .

Тогда из выражения (3) с учетом (2) вертикальная координата центра тяжести сечения

$$y_C = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{2 \cdot R}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

В частности, для замкнутого кольца ($\alpha=2\pi$) получим: $y_C = 0$.

Осевой момент инерции сечения относительно вспомогательной оси x_0 с учетом (1)

$$J_{x_0} = \int_A y^2 \cdot dA = R^3 \cdot \delta \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{R^3 \cdot \delta}{2} \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (1 + \cos 2\varphi) \cdot d\varphi = \frac{R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (\alpha + \sin \alpha). \quad (5)$$

Здесь приняли: $\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$; $\int \cos 2\varphi \cdot d\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$.

Тогда с учетом выражений (2), (4) и (5) осевой момент инерции сечения относительно центральной оси x

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_0} - y_C^2 \cdot A = \frac{R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (\alpha + \sin \alpha) - \left(\frac{2 \cdot R}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \cdot R \cdot \delta \cdot \alpha = \\ &= \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\alpha} - 8 \cdot \frac{\sin^2(\alpha/2)}{\alpha^2} \right) = \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 + a - 2 \cdot b^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь приняли $a = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$; $b = \frac{2}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$.

Осевой момент инерции сечения относительно другой центральной оси y (ось y_0) с учетом (1) равен:

$$\begin{aligned} J_y &= J_{y_0} = \int_A x^2 \cdot dA = R^3 \cdot \delta \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{R^3 \cdot \delta}{2} \cdot \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (1 - \cos 2\varphi) \cdot d\varphi = \\ &= \frac{R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (\alpha - \sin \alpha) = \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 - a). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приняли $x = R \cdot \sin \varphi$; $\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$.

В частности, для замкнутого кольца функции $a=0$ и $b=0$, тогда получим: $J_x = J_y = \pi \cdot R^3 \cdot \delta$.

Радиусы инерции сечения с учетом (2), (6) и (7)

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 + a - 2 \cdot b^2)}{R \cdot \delta \cdot \alpha}} = R \cdot \sqrt{\frac{1 + a - 2 \cdot b^2}{2}}; \quad (8)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 - a)}{R \cdot \delta \cdot \alpha}} = R \cdot \sqrt{\frac{1 - a}{2}}. \quad (9)$$

Для замкнутого кольца $i_x = i_y = R/\sqrt{2}$.

Моменты сопротивления сечения с учетом (6) и (7), а также с учетом координат точек на срединной линии тонкостенного контура, наиболее удаленных от центральных осей x и y (см. рис. 1), $x_{\max} = R$;

$$\begin{aligned} |y_{\max 1}| &= \left| -R \cdot \cos \frac{\beta}{2} - y_c \right| = R \cdot \cos \left(\pi - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{2 \cdot R}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = R \cdot \left(\frac{2}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= R \cdot \left(\frac{2}{\alpha} \cdot \sin(\alpha/2) - \frac{\sin \alpha}{2 \cdot \sin(\alpha/2)} \right) = R \cdot \left(b - \frac{a}{b} \right); \end{aligned}$$

$$y_{\max 2} = R - y_c = R - \frac{2 \cdot R}{\alpha} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = R \cdot \left(1 - \frac{2}{\alpha} \cdot \sin(\alpha/2) \right) = R \cdot (1 - b),$$

где всегда $|y_{\max 1}| \geq y_{\max 2}$ (рис. 2), определяются следующим образом:

$$W_{x1} = \frac{J_x}{|y_{\max 1}|} = \frac{\frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 + a - 2 \cdot b^2)}{R \cdot (b - a/b)} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot \frac{1 + a - 2 \cdot b^2}{b - a/b}; \quad (10)$$

$$W_{x2} = \frac{J_x}{y_{\max 2}} = \frac{\frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 + a - 2 \cdot b^2)}{R \cdot (1 - b)} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot \frac{1 + a - 2 \cdot b^2}{1 - b}; \quad (11)$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{\frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot (1 - a)}{R} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot (1 - a). \quad (12)$$

Для замкнутого кольца при $x_{\max} = y_{\max} = R$ и $J_x = J_y = \pi \cdot R^3 \cdot \delta$ получим:

$$W_x = W_y = \pi \cdot R^2 \cdot \delta.$$

Выведенные выражения (2) и (6) – (12) в полной мере описывают геометрические характеристики опасного сечения ослабленной круглой тонкостенной трубы. Объединив входящие в них соотношения тригонометрических функций a и b в коэффициенты

$$k_1 = 1 + a - 2 \cdot b^2; \quad k_2 = 1 - a; \quad k_3 = b - a/b; \quad k_4 = 1 - b,$$

эти формулы можно представить в виде

$$J_x = \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot k_1; \quad J_y = \frac{\alpha \cdot R^3 \cdot \delta}{2} \cdot k_2; \quad i_x = R \cdot \sqrt{\frac{k_1}{2}}; \quad i_y = R \cdot \sqrt{\frac{k_2}{2}};$$

$$W_{x1} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot \frac{k_1}{k_3}; \quad W_{x2} = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot \frac{k_1}{k_4}; \quad W_y = \frac{\alpha \cdot R^2 \cdot \delta}{2} \cdot k_2.$$

Графическое изображение зависимостей введенных коэффициентов и тригонометрических функций от целостности контура сечения трубы (рис. 2) наглядно отображает закономерность их изменения. Очевидно, что с увеличением угла ($\beta = 2\pi - \alpha$) разделки трубы в зоне ее ослабления, особенно при $\beta > \pi$, все геометриче-

ские характеристики сечения ослабленной трубы значительно уменьшаются. Также из диаграммы видно, что геометрические характеристики сечения ослабленной трубы относительно оси, параллельной разделки, всегда меньше характеристик относительно оси, перпендикулярной разделки. Кроме того, геометрические характеристики сечения ослабленной трубы при $\beta \rightarrow 0$, когда коэффициенты $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 \rightarrow 1$, приближаются к характеристикам сечения цельной трубы.

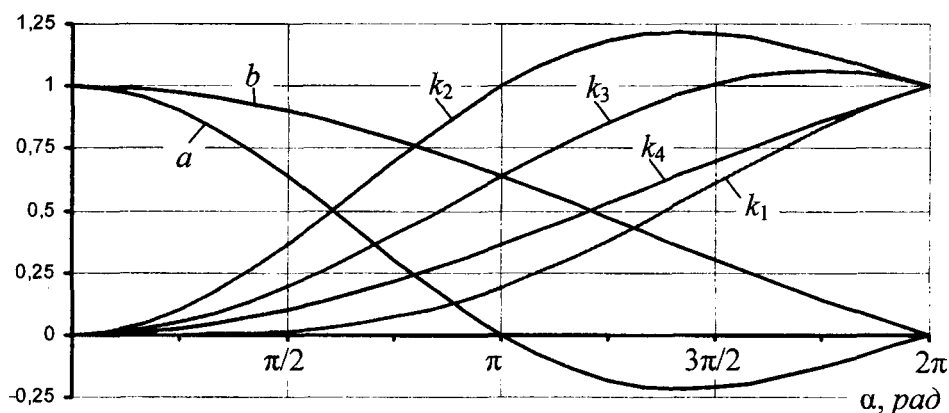


Рис. 2. Графические зависимости коэффициентов k_1 , k_2 , k_3 и k_4 и тригонометрических функций a и b от угла α .

Таким образом, достоверность приведенных выкладок подтверждается их полным соответствием известным формулам [1–4]

$A = 2\pi \cdot R \cdot \delta$; $J_x = J_y = \pi \cdot R^3 \cdot \delta$; $i_x = i_y = R/\sqrt{2}$; $W_x = W_y = \pi \cdot R^2 \cdot \delta$
 для частного случая круглого тонкостенного сечения — сечения цельной трубы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев.— М.: МГТУ, 1999.— 591 с.
2. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашин.— М.: Физматлит, 2002.— 544 с.
3. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов: учебник / Э.И. Старовойтов.— Гомель: БелГУТ, 2004.— 376 с.
4. Работнов, Ю.Н. Сопротивление материалов / Ю.Н. Работнов.— М.: Физматгиз, 1962.— 456 с.

МОДЕЛЬ И АНАЛИЗ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С БИОТКАНЯМИ ОДНОМЕРНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ИМПЛАНТАТОВ

Шилько С.В.¹, Черноус Д.А.¹, Панин С.В.²

¹*Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого
НАН Беларуси, Гомель*

²*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия*

The base stage of implantation in a kind of one-dimensional prosthetic (fixing, diagnostic) element, stretching through an aperture in a biotissue, is considered. The developed mechanical and mathematical model describes implant interaction with biotissues in the conditions of sticking and sliding of contacting surfaces. The calculated dependences for implant elongation and the maximum value of stress tensor intensity in adjoining volumes of the material are obtained, allowing one to receive a theoretical estimation of frictional and mechanical characteristics of one-dimensional implant and to determine the injuring action.

Введение. В медицине широко используются методы и средства для протезирования, фиксации и диагностики органов, а также инъекций, основанные на введении в организм тонких и гибких сплошных или полых элементов (катетеров, игл, зондов, микрокабелей, шовного материала в виде нитей или проволоки и т.п.). С учетом весьма малого отношения радиуса поперечного сечения и длины, указанные элементы можно обозначить, как **одномерные имплантаты**. Помимо обеспечения ряда деформационно-прочностных показателей имплантатов, включая прочность, эластичность и формостабильность, необходимо минимизировать вызываемую их использованием травму и сроки заживления раны в целях быстрой и полной послеоперационной реабилитации пациентов. В результате приходится выполнять зачастую противоречивые требования к физико-механическим свойствам материалов для изготовления указанных изделий. Так как практически все способы имплантации связаны с интенсивным контактным взаимодействием с биотканями, актуален также учет трения, оказывающего существенное влияние на манипуляционные показатели и травматичность изучаемых одномерных имплантатов.

Можно заметить, что имплантация (например, введение зонда или формирование хирургического шва) представляет собой однократный либо повторяющийся акт перфорации биоткани и протягивания имплантата через образовавшееся отверстие. Теоретический анализ данного взаимодействия позволяет, исходя из достаточно просто определяемых фрикционно-механических и геометрических параметров одномерного имплантата, прогнозировать его манипуляционные свойства и травматичность. Целью настоящего исследования является построение механико-математической модели протягивания одномерного имплантата через фрагмент биоткани в виде мембраны.

Формулировка задачи и построение модели. В ходе обзора литературных источников [1-9] авторами не обнаружены публикации, содержащие подробное теоретическое описание протягивания одномерного имплантата через перфорированную биоткань. Вместе с тем, в механике композитов известны работы, в которых анализируется сходный процесс вытягивания волокна из объема материала матрицы, в частности, при экспериментальном определении сдвиговой прочности адгезионной связи «волокно-матрица» посредством «pull-out» теста [10,11]. Одна-

ко имеются существенные различия контактного взаимодействия одномерного имплантата с биотканями и армирующего волокна с матричным материалом в композитах:

1) Из-за отсутствия сильной адгезии имплантата к биоткани, предельное сдвиговое напряжение определяется законом Кулона, т.е. произведением контактного давления и коэффициента трения.

2) Практикуемое изготовление имплантатов из низкомолекулярных полимеров и эластомеров приводит к необходимости учета изменения поперечного сечения имплантата в зоне контакта при натяжении.

3) Толщина фрагмента биоткани, через который осуществляется протягивание, мала в сравнении с другими размерами фрагмента. В этом случае сила сопротивления при протягивании в основном определяется не упругими свойствами биоткани, а ее предварительным натяжением, как это имеет место в мембранах конечной толщины.

Отмеченные особенности не позволяют использовать известные методики, разработанные для оценки адгезионной прочности соединения относительно жесткого волокна с матрицей в армированных композитах.

В первом приближении будем рассматривать материал биоткани как упругий изотропный, характеризующийся модулем Юнга E_t и коэффициентом Пуассона ν_t . Примем, что исходный радиус отверстия r_0 меньше радиуса нити R_n . Элемент ткани, через который осуществляется «протягивание», представляет собой мембрану толщиной h . Размеры мембраны в плоскости, перпендикулярной нити, существенно больше толщины h и радиуса R_n . При описании напряженно-деформированного состояния элемента биоткани введем цилиндрические координаты r, φ, z . Ось z перпендикулярна плоскости мембраны и проходит через центр отверстия. Координату z будем отсчитывать от свободного поперечного сечения нити. Элемент ткани находится в плоском напряженном состоянии $\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{z\varphi} = 0$. Начальное натяжение биоткани будем характеризовать заданной компонентой тензора напряжений $\sigma_{rr} = \sigma_0$.

При протягивании имплантата радиус отверстия становится равным r_1 . Для упрощения дальнейших выкладок введем допущение о независимости конечного радиуса отверстия r_1 от координаты z . Изменение радиуса отверстия по толщине мембраны обусловлено неоднородностью распределения осевого напряжения σ_{zz} на участке имплантата, контактирующего с биотканью. Допущение о постоянстве радиуса r_1 не является принципиальным, но позволяет существенно упростить преобразования и получить аналитическое решение задачи. Увеличение отверстия при протягивании вызывает дополнительные напряжения и деформации, для определения которых следует решить задачу теории упругости в осесимметричной постановке для плоского напряженного состояния. Также следует обеспечить отсутствие дополнительных напряжений на большом удалении от отверстия (при $r \rightarrow \infty$). Решение поставленной задачи в перемещениях имеет вид [12] —

$u_r = \frac{(r_1 - r_0)r_0}{r}, \quad u_z = u_\varphi = 0$. На имплантат со стороны биоткани будет действовать нормальное давление p_n , значение которого определяется по формуле

$$p_n = \frac{E_t(r_1 - r_0)}{r_0(1 + \nu_t)} - \sigma_0. \quad (1)$$

Представим имплантат в виде стержня круглого поперечного сечения из упругого материала с модулем Юнга E_n и коэффициентом Пуассона ν_n . Для расчетной оценки конечного радиуса r_1 необходимо учесть уменьшение радиуса от исходного R_n . Пренебрежение зависимостью радиуса r_1 от координаты z позволяет рассматривать поперечное сжатие независимо от процесса протягивания, т.е. в предположении равенства нулю осевого напряжения σ_{zz} . Соответствующее решение имеет вид [13] $u_r = -\frac{R_n - r_1}{R_n} r$, $u_z = \frac{2\nu_n(R_n - r_1)}{R_n(1 - \nu_n)} z$, $u_\phi = 0$. Приравняв на границе контакта радиальные напряжения в стержне и биоткани, для определения радиуса r_1 получим уравнение, решение которого имеет вид

$$r_1 = \frac{1}{1+Z} \left[ZR_n + r_0 \left(1 + \frac{\sigma_0(1+\nu_t)}{E_t} \right) \right]. \quad (2)$$

Здесь для краткости записи введено обозначение $Z = \frac{E_n r_0(1+\nu_t)}{E_t R_n(1-\nu_n)}$.

Тангенциальное контактное напряжение p_τ при наличии сцепления прямо пропорционально упругому смещению u_z точек поверхности

$$p_\tau = k u_z. \quad (3)$$

Для определения коэффициента k рассмотрим прогиб мембраны элементарной толщины dz с отверстием радиуса r_1 . В мембране действует радиальное напряжение σ_0 . Периметр отверстия смещается на величину u_z . Так как радиус мембраны много больше смещения u_z , можно пренебречь изменением радиального напряжения при прогибе. Тогда сила сопротивления, действующая со стороны мембраны, будет определяться по формуле $T_z = 2\pi\sigma_0 u_z dz$. Представляя эту силу, как результирующую равномерно распределенного по внутренней поверхности отверстия тангенциального напряжения, получим выражение для коэффициента пропорциональности в (3)

$$k = \frac{\sigma_0}{r_1}. \quad (4)$$

Далее рассмотрим равновесие участка имплантата в области контакта с биотканью. Этот участок представляет собой цилиндр длиной h и радиусом r_1 . На одной из торцевых поверхностей цилиндра действует продольная сила F_0 . Противоположная торцевая поверхность свободна от нагрузок. Уравнение равновесия элементарного участка цилиндра длины dz можно записать в виде

$$\frac{dF_z}{dz} = 2\pi r_1 p_\tau. \quad (5)$$

Здесь F_z — продольная сила, для которой выполняются граничные условия $F_z(0) = 0$, $F_z(h) = F_0$. Сила F_z связана с продольной деформацией стержня следующим образом:

$$F_z = Z_n \pi r_1^2 \epsilon_{zz} = Z_n \pi r_1^2 \frac{du_z}{dz}. \quad (6)$$

Здесь $Z_n = \frac{E_n(1-\nu_n)}{(1+\nu_n)(1-2\nu_n)}$. Подставив выражения для продольной силы и напряжения p_τ в выражение (5), получим

$$\frac{d^2 u_z}{dz^2} = \frac{2k}{Z_n r_1} u_z = D^2 u_z. \quad (7)$$

Здесь для краткости дальнейших выкладок введен коэффициент $D = \sqrt{\frac{2k}{Z_n r_1}} = \frac{1}{r_1} \sqrt{\frac{2\sigma_0}{Z_n}}$. Равенство (7) представляет собой дифференциальное уравнение для функции $u_z(z)$. Общее решение этого уравнения имеет вид — $u_z = C_1 e^{Dz} + C_2 e^{-Dz}$. Значения констант C_1 и C_2 определяются из граничных условий для продольной силы с учетом равенства (6). После преобразований получим

$$u_z = \frac{F_0 (e^{Dz} + e^{-Dz})}{D Z_n \pi r_1^2 (e^{Dh} - e^{-Dh})}. \quad (8)$$

Функция (8) при увеличении координаты z возрастает. Следовательно, тангенциальное напряжение при $z = h$ достигает максимума, значение которого вычисляется по формуле

$$p_\tau^{\max} = k u_z(h) = \frac{F_0}{\pi r_1^2} \sqrt{\frac{\sigma_0}{2Z_n}} \frac{(e^{Dh} + e^{-Dh})}{(e^{Dh} - e^{-Dh})}. \quad (9)$$

Сцепление с биотканью сохраняется до тех пор, пока напряжение p_τ не достигнет предельного значения, определяемого по закону Кулона — $p_\tau^{kr} = f_{cy} p_n$. Здесь f_{cy} — коэффициент трения сцепления для данной пары «нить-ткань». Используя соотношение (9), можно определить значение продольной силы F_0^{kr} , при которой начнется проскальзывание нити

$$F_0^{kr} = f_{cy} p_n \pi r_1^2 \sqrt{\frac{2Z_n}{\sigma_0}} \frac{(e^{Dh} - e^{-Dh})}{(e^{Dh} + e^{-Dh})}. \quad (10)$$

При продольной силе F_0 , превышающей данное значение, область контакта нити с биотканью можно разделить на два участка длиной l_1 и l_2 соответственно ($l_1 + l_2 = h$). На участке от $z = 0$ до $z = h$ выполняется условие сцепления (3) и для смещения выполняется уравнение (7). Граничное условие на свободной поверхности имеет вид $F_z(0) = 0$. На границе раздела участков (при $z = l_1$) напряжение p_τ принимает значение p_τ^{kr} . Следовательно $u_z^{(1)}(l_1) = \frac{f_{cy} p_n}{k}$. С учетом данных граничных условий решение уравнения (7) примет вид

$$u_z^{(1)} = \frac{f_{cy} P_n (e^{Dz} + e^{-Dz})}{k(e^{Dl_1} + e^{-Dl_1})}. \quad (11)$$

На втором участке длиной l_2 выполняется равенство $p_\tau = f_{ck} P_n$ и реализуется проскальзывание. Здесь f_{ck} – коэффициент трения. Для упругого смещения справедливо уравнение

$$\frac{d^2 u_z^{(2)}}{dz^2} = \frac{2\pi r_1}{Z_n \pi r_1^2} f_{ck} P_n = H. \quad (12)$$

Здесь введен коэффициент $H = \frac{2f_{ck} P_n}{Z_n r_1}$. На решение уравнения (12) накладывается граничное условие при $z = h$ — $F_z(h) = F_0$. Также следует обеспечить неразрывность смещений при $z = l_1$ — $u_z^{(1)}(l_1) = u_z^{(2)}(l_1)$. С учетом указанных граничных условий решение уравнения (12) имеет вид

$$u_z^{(2)} = \frac{f_{cy} P_n}{k} + \left(\frac{F_0}{Z_n \pi r_1^2} - Hh \right) (z - l_1) + \frac{H}{2} (z^2 - l_1^2). \quad (13)$$

Условие неразрывности первой производной от упругого смещения при переходе от одного участка к другому приводит к уравнению

$$\frac{Df_{cy} P_n (e^{Dl_1} - e^{-Dl_1})}{k (e^{Dl_1} + e^{-Dl_1})} = \frac{F_0}{Z_n \pi r_1^2} - H(h - l_1). \quad (14)$$

В результате решения данного нелинейного уравнения при заданной силе F_0 определяется длина участка сцепления l_1 . В момент начала проскальзывания $l_1 = h$ и значение силы F_0 совпадает с F_0^{kr} . Если проскальзывание распространяется на всю толщину мембраны, $l_1 = 0$. Значение приложенной силы F_0^{ck} , при которой $l_1 = 0$, определяется из уравнения (14) следующим образом:

$$F_0^{ck} = Z_n \pi r_1^2 H h = 2\pi r_1 h f_{ck} P_n. \quad (15)$$

Таким образом, при действии на имплантат продольной силы $F_0 < F_0^{kr}$, его удлинение согласно соотношению (8) определяется следующим образом:

$$u = \frac{F_0 L}{E_n \pi R_n^2} + \frac{F_0 (e^{Dh} + e^{-Dh})}{Z_n \pi r_1^2 D (e^{Dh} - e^{-Dh})}. \quad (16)$$

Здесь L – длина имплантата между точкой приложения силы и мембраной. Для силы, значение которой лежит в диапазоне между F_0^{kr} и F_0^{ck} , его удлинение вычисляется по формуле

$$u = \frac{F_0 L}{E_n \pi R_n^2} + \frac{F_0 (h - l_1)}{Z_n \pi r_1^2} + \frac{f_{cy} p_n}{k} - \frac{H}{2} (h - l_1)^2. \quad (17)$$

Длина l_1 в выражении (17) определяется как решение уравнения (14).

Соотношения (16) и (17) позволяют установить расчетную зависимость удлинения нити от продольной силы F_0 . Кроме того, разработанная методика может быть использована для оценки максимального значения интенсивности тензора напряжений σ_u^{\max} , которое характеризует предельное состояние и вычисляется по известным зависимостям [13]

а) для биоткани

$$\sigma_{ut}^{\max} = \sqrt{p_n^2 + 3(p_\tau^{\max})^2}, \quad (18)$$

б) для имплантата

$$\sigma_{un}^{\max} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + p_n^2 + p_n \sigma_{zz} + 3(p_\tau^{\max})^2}. \quad (19)$$

В этих выражениях давление p_n определяется согласно уравнению (1) с учетом равенства (2). В диапазоне значений продольной силы $F_0 < F_0^{kr}$ величина p_τ^{\max} вычисляется по формуле (9) и $\sigma_{zz} = \frac{F_0}{\pi r_1^2}$. Интенсивность тензора напряжений принимаем максимальное значение в области контакта ($r = r_1$) вблизи поверхности биоткани $z = h$. Если значение продольной силы лежит в диапазоне от F_0^{kr} до F_0^{ck} , в формулах (18) и (19) следует принять

$$p_\tau^{\max} = f_{cy} p_n, \quad \sigma_{zz} = \frac{F_0}{\pi r_1^2} - Z_n H (h - l_1). \quad (20)$$

Максимальная интенсивность напряжений достигается на границе раздела участков сцепления и проскальзывания.

Пример использования математической модели. Разработанная механико-математическая модель протягивания одномерного имплантата позволяет установить зависимость его удлинения от приложенной продольной силы и получить расчетную оценку максимальной интенсивности напряжений в имплантате и биоткани. Исходными параметрами являются упругие характеристики биоткани (E_b, ν_b) и имплантата (E_n, ν_n), исходные значения радиусов отверстия (r_0) и имплантата (R_n), толщина (h) и начальное натяжение (σ_0) биоткани, коэффициенты трения покоя (f_{cy}) и скольжения (f_{ck}) для данной пары «нить-ткань». Предварительно по формуле (2) определяется радиус отверстия после деформации r_1 . Затем по формуле (1) вычисляется давление ткани на нить p_n . Согласно равенствам (4), (7) и (12) вычисляются введенные коэффициенты k, D и H соответственно. После этого с использованием соотношений (10) и (15) определяются значения силы F_0^{kr} и F_0^{ck} . В результате решения уравнение (14) для заданного значения силы F_0 вычисляется длина участка сцепления l_1 . Подставляя полученные значения в фор-

мулы (16)–(19), при заданной продольной силе определяются удлинение нити u и максимальные значения тензора напряжений в нити σ_{un}^{\max} и ткани σ_{ut}^{\max} .

В качестве примера использования разработанной методики рассмотрим процесс протягивания полиэфирной нити с параметрами $E_n = 25$ МПа; $\nu_n = 0,4$; $R_n = 0,2$ мм через отверстие в мембране, свойства которой соответствуют упругим характеристикам кожи человека в области живота $E_t = 1,1$ МПа; $\nu_t = 0,48$, полученным в работе [6]. Значения остальных исходных параметров были приняты следующими: $r_0 = 0,13$ мм; $h = 6$ мм; $\sigma_0 = 0,1$ МПа; $f_{cy} = 0,6$; $f_{cx} = 0,5$; $L = 0$.

В соответствии с рисунком 1, до начала проскальзывания ($F_0 < F_0^{kr}$) зависимость удлинения нити от приложенной силы практически линейна. Для сил $F_0 > F_0^{kr}$ условная жесткость нити (производная от силы по удлинению) по мере удлинения плавно уменьшается.

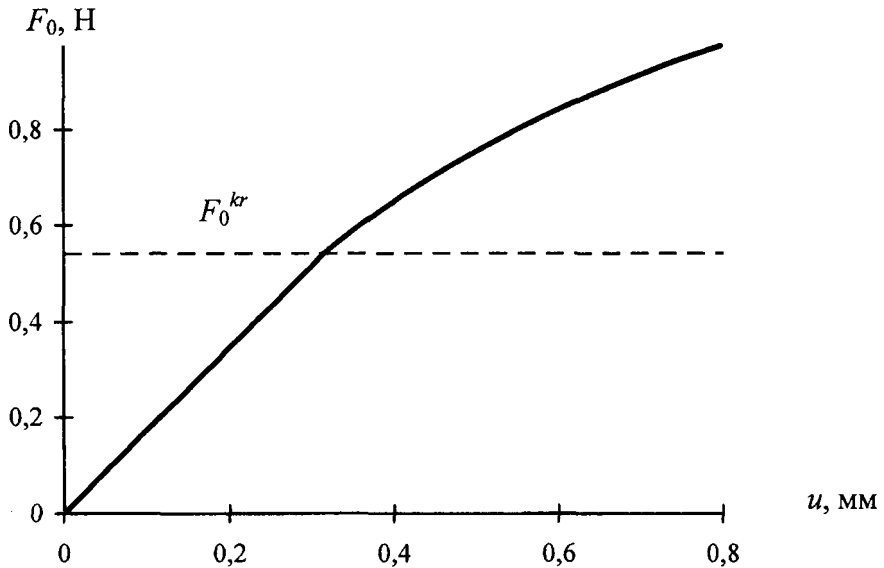


Рис. 1. Зависимость «сила-удлинение».

В соответствии с рис. 2 при заданных значениях исходных параметров интенсивность напряжений в нити существенно (на порядок) превышает интенсивность напряжений в коже. До начала проскальзывания интенсивность напряжений в имплантате увеличивается практически линейно с ростом приложенной силы. В данном диапазоне сил максимум интенсивности напряжений в биоткани возрастает с увеличением F_0 нелинейно. После начала проскальзывания максимум интенсивности напряжений в нити плавно снижается, а в коже остается неизменным.

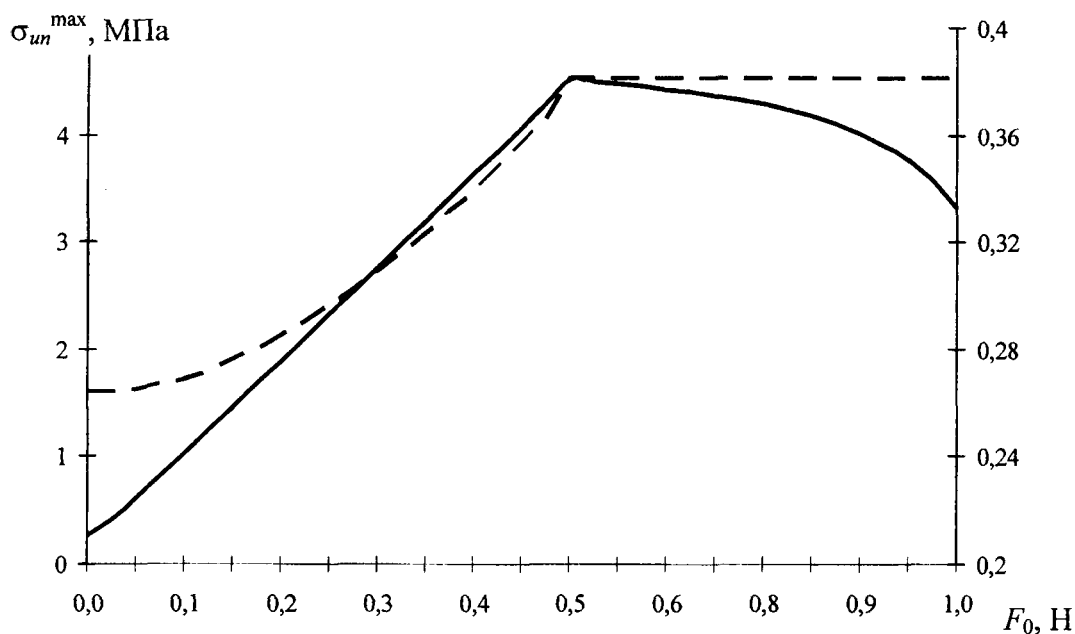


Рис. 2. Зависимость максимума интенсивности тензора напряжений в нити (сплошная кривая) и коже (пунктирная) от приложенной силы

Заклучение. Разработанная механико-математическая модель описывает процесс протягивания одномерного эластичного имплантата через фрагмент биоткани в виде мембраны с отверстием. Установлено, что в определенном диапазоне значений усилия протягивания наблюдается снижение жесткости исследуемой системы с ростом удлинения имплантата, причем характер зависимости максимальных значений интенсивности напряжений от приложенной силы различен для имплантата и биоткани. Разработанная методика и установленные закономерности позволяют прогнозировать манипуляционные характеристики и травматичность одномерных имплантатов исходя из фрикционно-механических свойств используемых материалов.

Работа выполнена при поддержке БРФФИ-РФФИ: проекты Ф10-240 (10-08-90011-Бел_а), Т10СО-033, а также 09-08-00752-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cavaliere R. Suture materials. Properties and uses // J. Amer. Podiatry Assoc. – 1983. – Vol. 4. – P. 57-64.
2. Chu C.C. Mechanical properties of suture materials: an important characterization // J. Annals of Surgery. – 1983. – Vol. 193, No. 3. – P. 365-370.
3. Бурсина Н.В., Винокурова Т.И., Гаврилюк Н.Н. Критерии, методы оценки свойств и технология получения шовных материалов. – Киев: Изд-во ИПМ, 1987.
4. Буянов В.М., Егиев В.Н., Удотов О.А. Хирургический шов. – М.: Рапид-Принт, 1993. – 103 с.
5. Пучков К.В., Селиверстов Д.В., Гаусман Б.Я., Швальб А.П. Сравнительная оценка реакции тканей на синтетические шовные материалы, применяемые в абдоминальной хирургии // Вестник Росс. ассоц. акушеров-гинекологов. – 1996. – № 1. – С. 30-34.

6. Винокурова Т.И., Кирюхин С.М., Фёдорова Е.Ф. Выбор метода оценки жесткости хирургических нитей // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. – 1997. – Т. 236, № 2. – С. 6-9.
7. Сандаков П.Я., Егиев В.Н., Тепликов А.В., Шадрин В.В. Оценка «пилящего» эффекта шовных материалов, используемых в абдоминальной хирургии // Матер. 3 Междун. конф. «Совр. подходы к разр. эффект. перевяз. средств, шовных матер. и полим. имплантатов». – М.: 1998. – С. 164-165.
8. Шадрин В.В., Тепликов А.В. Манипуляционные характеристики хирургических нитей // Российский журнал биомеханики, 2001. – Т. 5, № 3. – С. 41–50.
9. Семенов Г.М., Петришин В.Л., Ковшова М.В. Хирургический шов. – СПб.: Питер, 2002. – 256 с.
10. Nayfeh A.H. Thermomechanically induced interfacial stresses in fibrous composites // Fibre Sci. Techn. – 1997. – № 10. – P. 195-209.
11. Dutchk V., Pisanova E., Zandarov S., Lauke B. “Fundamental” and “practical” adhesion in polymer/fiber systems // Mechanics of Composite Materials. – 1998. – Vol. 34. – № 4. – P. 431-446.
12. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982 – 334 с.
13. Старовойтов Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.
14. Шилько С.В. Черноус Д.А., Анфиногенов С.Б., Курек М.Ф. Механические и фрикционные свойства биоэластомеров. Часть 1: Описание релаксационных зависимостей кожи человека при растяжении // Российский журнал биомеханики. – 2008. – Т. 12, № 3. – С. 44–51.

СОДЕРЖАНИЕ

Климов Д.М., Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.	
К 80-летию Ивлева Дюиса Даниловича.....	3
Ивлев Д.Д., Непершин Р.И.	
Давление плоского штампа на ортотропное идеально пластическое полупространство.....	17
Чигарев А.В., Горбач Н.И.	
Кафедра теоретической механики в юбилейный год БПИ-БГПА-БНТУ.....	25
Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В.	
Установившаяся ползучесть трёхслойных армированных цилиндрических оболочек с лёгким наполнителем.....	28
Чигарев А.В., Борисов А.В.	
Об использовании СКМ «Mathematica» в качестве программной среды для моделирования движений антропоморфного робота.....	35
Nemtsov V.V., Shirko A.V., Belov V.V.	
Critical phenomena soft modes and negative Poisson's ratio.....	45
Янковский А. П.	
Кинематический метод определения эффективных термоупругих характеристик пространственно армированных сред.....	50
Клус С.А., Куликов И.С., Ширвель П.И.	
Моделирование напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек конечной длины при неравномерном нагреве и нейтронном облучении.....	61
Старовойтов Э.И., Поддубный А.А.	
Изгиб локальной нагрузкой трехслойного стержня, частично опертого на упругое основание.....	70
Ван Чживэй, Босяков С.М.	
Численный анализ свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки при различных граничных условиях.....	76
Хиженок В.Ф., Шилько С.В.	
Влияние структуры материала на деформационно-прочностные характеристики композитных кардиоимплантатов.....	83
Василевич Ю.В., Неумержицкая Е.Ю., Язневич А.М., Чигарев В.А.	
Расчет на прочность конструкционных изделий с использованием элементов теории вероятностей.....	91
Колешко В.М., Гулай А.В., Гулай В.А., Польшкова Е.В.	
Сенсорная микросистема светового контроля почвы: схемотехнические решения.....	97
Ботогова М.Г.	
Локальные колебания вязкоупругих конических оболочек.....	112
Холодарь Б.Г.	
Ударное нагружение ступенчатого стержня из реономного материала.....	116
Леоненко Д. В.	
Колебания вязкоупругой пластины на основании Винклера.....	122
Косых Э.Г.	
Деформирование трехслойного тонкостенного стержня с переменной по длине жесткостью.....	128

Гавриленко С.Л. Моделирование текучести нелинейно упруговязкопластических материалов в условиях одноосного сжатия.....	132
Локтионов А.В., Сеньков С.А. Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения.....	138
Громыко О.В., Царева А.А. Применение методов математического моделирования для исследования кинематики манипуляторов.....	144
Круподеров А.В. Воздействие поверхностной нагрузки на многослойное трансверсально-изотропное полупространство.....	149
Чигарев А.В., Борисов А.В. Модель изменения физико-механических свойств и накопления повреждений в суставах человека.....	153
Никитин А.В., Михасев Г.И. Применение конечно-элементных моделей для биомеханической оценки фиксации перелома с помощью пластины остеосинтеза.....	160
Гончарова С.В. Операторный метод решения системы дифференциальных уравнений термоупругости.....	165
Холодарь Б.Г. Продольный удар о жесткую преграду реономного стержня с массой на конце.....	167
Куриленко А.В. Влияние угла установки ножки эндопротеза тазобедренного сустава на НДС системы «кость-имплантат».....	172
Кузьминский Ю.Г. Разработка математической модели и комплекса программ гидродинамического анализа для повышения энергоэффективности и безопасности трубопроводного транспорта нефти.....	176
Довга Ю.А. Куликов И.С. Температурный расчет тепловыделяющего элемента газоохлаждаемого быстрого ядерного реактора.....	185
Протуро И.И. Цилиндрический изгиб ортотропной трехслойной пластины с нелинейно упругим наполнителем.....	189
Славашевич И.Л., Михасев Г.И., Петрова Л.Г. Моделирование свободных колебаний реконструированного среднего уха, подвергнутого тимпаностапедопластике и перфорации подножной пластины стремени.....	196
Кудин В.В., Астахов Э.И., Кудин М.В. Виброзащита высокоточного машиностроительного оборудования от вибраций внешних источников.....	203
Гурвич Ю.А., Бойко Б.С., Макаревич А.П. Выбор значений конструктивных параметров ползуна кузнечно-прессового оборудования.....	208
Акимов В.А. Построение замкнутой формы решения бесконечной системы алгебраических уравнений.....	213

Акимов В.А. Исследование разложения функций в ряд по корням трансцендентного уравнения.....	216
Астахов Э.И., Кудин В.В., Гурин А.Н. О структуре плоских механизмов с высшими кинематическими парами....	218
Коваль Ю.Г., Томило Е.В. Решение задачи Герца в программном комплексе ANSYS 12.....	223
Орловская А.А., Коваль Ю.Г. Сравнительный анализ искусственных двухстворчатых и трехстворчатых клапанов сердца с помощью программного пакета ANSYS 12.....	228
Чигарев А.В., Борисов А.В. Применение модели многослойных сфер к численным расчетам деформаций и напряжений в тазобедренном суставе человека.....	233
Бокун Г.С., Вихренко В.С., Гапанюк Д.В. Компьютерный практикум по проектированию рычажных механизмов....	248
Бокун Г.С., Гапанюк Д.В., Козырский Н.В. Использование пакетов MathCAD и NASTRAN для построения схем механизмов и их кинематического анализа.....	252
Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. Использование аппарата матриц для кинематического анализа карданной передачи.....	256
Орловская А.А., Томило Е.В. Исследование с помощью инженерного пакета ANSYS НДС матричного стента, имплантированного в кровеносный сосуд.....	259
Анципорович П.П., Акулич В.К., Дворянчикова А.Б. Синтез кулачковых механизмов в курсовом проектировании.....	263
Третинников Д.Л., Табунов А.В., Пищ П.В., Августинович А.Г. Методы получения и применение наноматериалов.....	267
Гурвич Ю.А., Вареник А.А., Августинович А.Г., Старовойтова О.Л. Исследование кинематики двухшарнирной карданной передачи с помощью корреляционно-регрессионного анализа.....	278
Куликов И.С., Коваль Ю. Г., Томило Е. В. Объединение решений в программном комплексе ANSYS 12.....	286
Горбач Н.И., Лужинский Е.С., Неверовская Я.Б. Исследование падения тяжелого тела в воздухе при квадратичном законе сопротивления.....	290
Августинович А.Г. Разработки по наноматериалам исследовательской лаборатории ZETTL BERKELEY.....	295
Анципорович П.П., Алейникова О.И., Войтович О.Н., Лукашевич О.Н., Луцко Н.Я. Обучение студентов созданию презентаций в POWER POINT.....	304
Авсневич А.М., Осипович В.В. Принципы проектирования приспособлений для нанесения покрытий с заданным распределением толщины слоя.....	309
Якубовский Ч.А., Якубовский А.Ч., Гурин А.Н. К вопросу о кручении стержней некруглого поперечного сечения.....	313
Гурвич Ю. А., Третинников Д. Л., Петровский А. Л. Определение силовых характеристик неустановившегося поворота шарнирно-сочлененной машины с тремя осями.....	318

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. Кинематический анализ пространственного рычажного механизма методом преобразования координат.....	323
Журавлёв А.М., Астахов Э.И. Использование САПР КОМПАС-3D V12 в курсовом проектировании по кулачковым механизмам.....	327
Якубовский Ч.А., Якубовский А.Ч. Энергетический метод расчета статически неопределимых систем.....	333
Якубовский А.Ч., Якубовский Ч.А., Галуза И.М., Галуза Е.М. Расчет геометрических характеристик поперечных сечений ослабленной трубы.....	338
Шилько С.В., Черноус Д.А., Панин С.В. Модель и анализ контактного взаимодействия с биотканями одномерных полимерных имплантатов	342

Научное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Международный
научно-технический журнал

Ответственный за выпуск М.Г. Ботогова

Подписано в печать 27.01.2011.

Формат 60×84¹/₈. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 41,26. Уч.-изд. л. 16,14. Тираж 100. Заказ 40.

Издатель и полиграфическое исполнение:

Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.

Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.