

К РАСЧЕТУ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Докт. техн. наук, проф. БОСАКОВ С. В.

Белорусский национальный технический университет

Задача расчета прямоугольной плиты на упругом основании не имеет точного решения до настоящего времени [1]. Даже для простейшей местно-деформируемой модели упругого основания (модели Винклера) не удалось получить точного решения [2]. Основную трудность при его поиске составляет удовлетворение статических граничных условий на гранях плиты. Ранее [3] предложено решение задачи осесимметричного изгиба круглых плит на упругом основании с помощью представления осадок плиты в виде собственных функций дифференциального оператора осесимметричных колебаний круглой пластинки со свободными гранями. Позднее [4] эта идея реализована при решении контактных задач для стержня и кольцевых плит. История поиска таких функций для прямоугольной плиты со свободными гранями довольно поучительна и не завершена до настоящего времени.

В качестве примера эффективности своего метода в 1908 г. В. Ритц [5] рассмотрел задачу о колебаниях прямоугольной пластинки со свободными гранями. За координатные функции он принял нормальные функции колебаний для стержня. Позднее Л. Конторович и В. Крылов [6] также использовали эти функции для решения подобной задачи. В более поздних руководствах [7, 8] также не приводится точное решение этой задачи.

Поэтому автор ниже приводит решение рассматриваемой задачи, дающее точные величины частот и приближенные формы собственных колебаний прямоугольной пластинки, а также частное приложение полученных результатов к расчету пластинок на двух моделях упругого основания.

1. В рамках линейной технической теории изгиба пластинок [9] рассмотрим изгибные собственные колебания прямоугольной пластинки ($-a \leq x \leq a$; $-b \leq y \leq b$) со свободными гранями постоянной цилиндрической жесткости D и коэффициентом Пуассона материала ν_p . Уравнение изгибных колебаний имеет вид

$$(\Delta^2 - \lambda)W = 0, \quad \lambda = \frac{m\omega^2}{D}, \quad (1)$$

статические граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_p \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu_p) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0, \\ x &= \pm a; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_p \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2 - \nu_p) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} = 0, \\ y &= \pm b, \end{aligned} \quad (2)$$

где $W(x, y)$ – прогибы пластинки, м; m – распределенная масса, кг/м²; ω – круговая частота собственных колебаний, с⁻¹.

Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим симметричные относительно двух осей Ox и Oy колебания прямоугольной пластинки. Для этого случая представим ее прогибы в виде суммы двух частных решений [10] уравнения $\Delta\Delta W - \lambda W = 0$

$$W(x, y) = C_1 \cos \alpha \frac{x}{a} \cos \beta \frac{y}{b} + C_2 \operatorname{ch} \alpha \frac{x}{a} \operatorname{ch} \beta \frac{y}{b}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в граничные условия (2) и раскрывая определитель, получаем известные из теории балочных функций [11] трансцендентные уравнения для определения α и β :

$$\begin{aligned} \operatorname{th}\alpha + \operatorname{tg}\alpha &= 0; \\ \operatorname{th}\beta + \operatorname{tg}\beta &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки решений (4) в уравнение колебаний (1) можно записать для собственных частот, симметричных относительно двух осей координат колебаний прямоугольной пластинки, в известной из справочников форме [7, 8]

$$\omega = \left(\frac{\alpha_i^2}{a^2} + \frac{\beta_k^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (5)$$

Для определения форм колебаний воспользуемся условием, что в углах прямоугольной пластинки со свободными гранями крутящие моменты равны нулю [12], т. е. при $x = \pm a$; $x = \pm b$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0. \quad (6)$$

При условии (3) это приводит к выражению

$$\frac{C_2}{C_1} = - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta},$$

что позволяет представить ik -ю форму симметричных относительно двух осей координат собственных колебаний прямоугольной пластинки со свободными гранями в виде выражения

$$W_{ik}(x, y) = C_1 \left(\cos \alpha_i \frac{x}{a} \cos \beta_k \frac{y}{b} - \frac{\sin \alpha_i \sin \beta_k}{\operatorname{sh} \alpha_i \operatorname{sh} \beta_k} \operatorname{ch} \alpha_i \frac{x}{a} \operatorname{ch} \beta_k \frac{y}{b} \right). \quad (7)$$

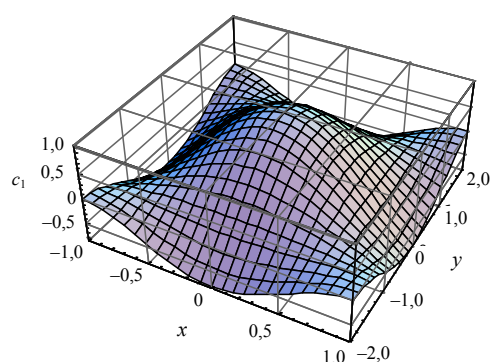
Частоты и формы собственных колебаний, соответствующие симметричным и антисимметричным относительно одной и двух осей координат, можно получить аналогично. В табл. 1 приведены выражения для форм собственных колебаний и трансцендентных уравнений для определения частот собственных колебаний, определяемых формулой (5). На рис. 1 приведены три формы собственных изгибных колебаний прямоугольной пластинки. Надо иметь в виду, что первые собственные формы колебаний прямоугольной пластинки со свободными гранями соответствуют значениям $\alpha = \beta = 0$ и перемещениям пластинки как жесткого тела. В табл. 2 приводится сопоставление полученных автором результатов для частот собственных колебаний квадратной пластинки с результатами Ритца [5], а также Конторовича и Крылова [6].

Автор считает нужным отметить следующее:

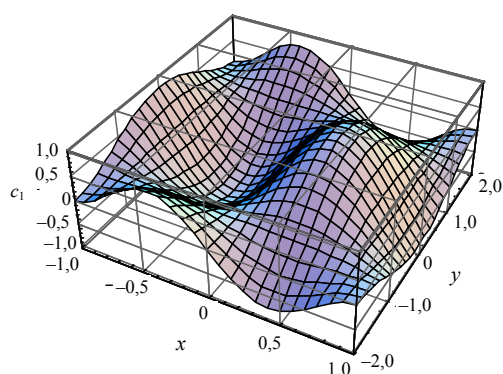
- полученные собственные частоты и формы колебаний не зависят от коэффициента Пуассона материала пластинки ν_p ;

Таблица 1

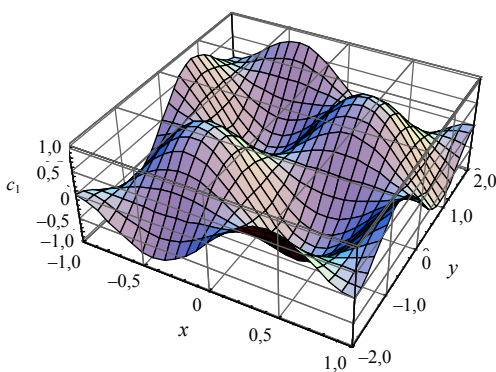
Характеристика колебаний	Собственные функции	Трансцендентные уравнения и корни
Симметричные относительно двух осей	$\cos \alpha_i \frac{x}{a} \cos \beta_k \frac{y}{b} - \frac{\sin \alpha_i \sin \beta_k}{\operatorname{sh} \alpha_i \operatorname{sh} \beta_k} \operatorname{ch} \alpha_i \frac{x}{a} \operatorname{ch} \beta_k \frac{y}{b}$	$\operatorname{th} \alpha_i + \operatorname{tg} \alpha_i = 0$; $\operatorname{th} \beta_k + \operatorname{tg} \beta_k = 0$; $\alpha_1 = 0, 0 = \beta_1$; $\alpha_2 = 2,36502 = \beta_2$; $\alpha_3 = 5,497804 = \beta_3$...
Симметричные относительно оси Oy	$\cos \alpha_i \frac{x}{a} \sin \beta_k \frac{y}{b} + \frac{\sin \alpha_i \cos \beta_k}{\operatorname{sh} \alpha_i \operatorname{ch} \beta_k} \operatorname{ch} \alpha_i \frac{x}{a} \operatorname{sh} \beta_k \frac{y}{b}$	$\operatorname{th} \alpha_i + \operatorname{tg} \alpha_i = 0$; $\operatorname{th} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_k = 0$; $\beta_1 = 0, 0$; $\beta_2 = 3,926602$; $\beta_3 = 7,068583$...
Симметричные относительно оси Ox	$\sin \alpha_i \frac{x}{a} \cos \beta_k \frac{y}{b} + \frac{\cos \alpha_i \sin \beta_k}{\operatorname{ch} \alpha_i \operatorname{sh} \beta_k} \operatorname{sh} \alpha_i \frac{x}{a} \operatorname{ch} \beta_k \frac{y}{b}$	$\operatorname{th} \alpha_i - \operatorname{tg} \alpha_i = 0$; $\operatorname{th} \beta_k + \operatorname{tg} \beta_k = 0$
Асимметричные относительно двух осей	$\sin \alpha_i \frac{x}{a} \sin \beta_k \frac{y}{b} - \frac{\cos \alpha_i \cos \beta_k}{\operatorname{ch} \alpha_i \operatorname{ch} \beta_k} \operatorname{sh} \alpha_i \frac{x}{a} \operatorname{sh} \beta_k \frac{y}{b}$	$\operatorname{th} \alpha_i - \operatorname{tg} \alpha_i = 0$; $\operatorname{th} \beta_k - \operatorname{tg} \beta_k = 0$



$$\omega_2 = \frac{6,9917}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$$



$$\omega_3 = \frac{9,4479}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$$



$$\omega_4 = \frac{19,2728}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Рис. 1. Первые три формы собственных изгибных колебаний прямоугольной пластинки ($a = 1; b = 2$)

• наблюдается нарушение свойств ортогональности полученных форм собственных колебаний, причем величина погрешности уменьшается с увеличением частоты, соответствующей этой форме. В подтверждение этого автор

приводит данные табл. 3, где для симметричных форм собственных колебаний квадратной пластинки приводятся величины погрешности свойства ортогональности форм собственных колебаний;

Таблица 2

Номер частоты	$\omega_2 \sqrt{\frac{ma^4}{D}}$	$\omega_3 \sqrt{\frac{ma^4}{D}}$	$\omega_4 \sqrt{\frac{ma^4}{D}}$
Характеристика частоты	Симметричная относительно осей Ox и Oy	Симметричная относительно Oy и асимметричная относительно Ox	Асимметричная относительно осей Ox и Oy
По Ритцу [5]	14,10	20,56	23,91
По Конторовичу и Крылову [6]	12,43	–	–
По автору	11,19	21,91	30,83

Таблица 3

i	1			2		3
k	2	3	4	3	4	4
$\int_{-a}^a \int_{-b}^b W_i W_k dx dy$	0	0	0	0,017812	0,0044	0,00821

• частоты собственных колебаний прямоугольной пластинки со свободными гранями, определяемые (5), по-видимому, найдены точно. Однако автор считает, что в рамках технической теории изгиба пластинок невозможно точно определить формы собственных колебаний для прямоугольной пластинки со свободными гранями.

2. Рассмотрим приложение полученных результатов для расчета прямоугольной пластинки на основании Винклера под действием центрально приложенной сосредоточенной силы. Дифференциальное уравнение ее равновесия имеет вид [1]

$$\left(\Delta^2 + \frac{k}{D} \right) W = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (8)$$

где $q(x, y)$ – вертикальная нагрузка на пластинку; k – коэффициент постели основания Винклера [1].

Зададимся уравнением осадок пластинки в форме (7):

$$W(x, y) = C_{11} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} C_{ik} W_{ik}(x, y);$$

$$W_{ik}(x, y) = C_{ik} \left(\cos \alpha_i \frac{x}{a} \cos \beta_k \frac{y}{b} - \frac{\sin \alpha_i \sin \beta_k}{\operatorname{sh} \alpha_i \operatorname{sh} \beta_k} \operatorname{ch} \alpha_i \frac{x}{a} \operatorname{ch} \beta_k \frac{y}{b} \right). \quad (9)$$

После подстановки (9) в (8) и выполнения операции дифференцирования получаем

$$\frac{ka^4}{D} C_{11} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \left[\left(\alpha_i^2 + \frac{a^2}{b^2} \beta_k^2 \right)^2 + \frac{ka^4}{D} \right] \times C_{ik} W_{ik}(x, y) = q(x, y) \frac{a^4}{D}. \quad (10)$$

Умножим обе части (10) на $T_{2m} \left(\frac{x}{a} \right) T_{2n} \left(\frac{y}{b} \right) \frac{dx dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}$ и проинтегрируем по x от $-a$ до $+a$ и по y от $-b$ до $+b$ ($T_{2m}(z)$ – полином Чебышева 1-го рода [13]). При этом сосредоточенная сила распределяется по площади бесконечно малого прямоугольника в начале координат. Получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_{ik} , которую решаем способом усечения [6].

Для примера рассмотрим железобетонную прямоугольную плиту с $a = 1$ м и $b = 2$ м толщиной 0,4 м на основании Винклера с коэффициентом постели $k = 2 \cdot 10^7 \frac{H}{M^3}$. Получаем

(рис. 2) $\frac{ka^4}{D} = 0,121528;$

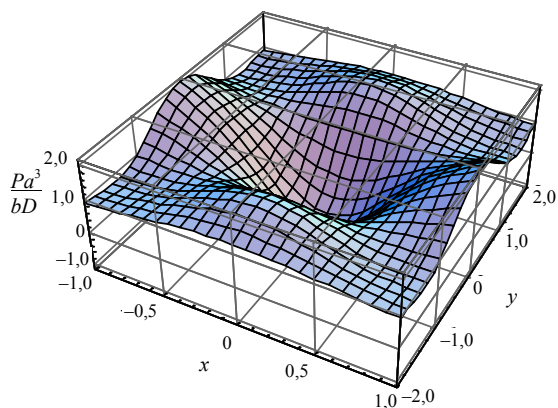


Рис. 2. Поверхность осадок прямоугольной пластинки на упругом основании Винклера

$$C_{11} = 73,9961 \frac{Pa^3}{\pi^2 bD};$$

$$C_{22} = -10,9069 \frac{Pa^3}{\pi^2 bD};$$

$$C_{23} = -6,3887 \frac{Pa^3}{\pi^2 bD};$$

$$C_{32} = -1,1053 \frac{Pa^3}{\pi^2 bD};$$

$$C_{33} = -1,4041 \frac{Pa^3}{\pi^2 bD}$$

...

3. Рассмотрим интегральное уравнение контактной задачи для симметрично нагруженной сосредоточенной силой прямоугольной плиты, лежащей на упругом однородном изотропном полупространстве с упругими постоянными E_0 и ν_0 [1]:

$$W(x, y) = \frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0} b \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{p(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \alpha^2(y-\eta)^2}} \times d\xi d\eta, \quad \alpha = \frac{b}{a}. \quad (11)$$

Представим:

$$W(x, y) = A_{00}\Phi_{00} + A_{11}\Phi_{11};$$

$$\Phi_{00} = 1;$$

$$\Phi_{11} = \cos \alpha_1 \frac{x}{a} \cos \beta_1 \frac{y}{b} - \frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1}{\operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{sh} \beta_1} \times \operatorname{ch} \alpha_1 \frac{x}{a} \operatorname{ch} \beta_1 \frac{y}{b}; \quad \alpha_1 = \beta_1 = 2,36502; \quad (12)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}} \times [B_{00} + B_{20}T_2(x) + B_{22}T_2(x)T_2(y) + B_{02}T_2(y)];$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \alpha^2(y-\eta)^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} C_{mr}^{ns}(\alpha) T_m(x) T_n(y) T_r(\xi) T_s(\eta).$$

После подстановки (12) в (11) и интегрирования с учетом ортогональности принятых полиномов Чебышева получаем равенство, обе части которого умножаем на $\frac{T_{2k}(x)T_{2l}(y)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}} dx dy$

и интегрируем по приведенной площади прямоугольной плиты. Получаем систему из четырех линейных алгебраических уравнений, выражающих связь между коэффициентами $B_{2i,2k}$ и $A_{2m,2n}$. Решая ее, получаем:

$$B_{00} = \frac{\pi E_0}{(1-\nu_0^2)a} [A_{00}\alpha_{11} + A_{11} \times (\alpha_{11}F_{00}^{11} + \alpha_{12}F_{20}^{11} + \alpha_{13}F_{22}^{11} + \alpha_{14}F_{02}^{11})];$$

$$B_{20} = \frac{\pi E_0}{(1-\nu_0^2)a} [A_{00}\alpha_{21} + A_{11} \times (\alpha_{21}F_{00}^{11} + \alpha_{22}F_{20}^{11} + \alpha_{23}F_{22}^{11} + \alpha_{24}F_{02}^{11})];$$

$$B_{22} = \frac{\pi E_0}{(1-\nu_0^2)a} [A_{00}\alpha_{31} + A_{11} \times (\alpha_{31}F_{00}^{11} + \alpha_{32}F_{20}^{11} + \alpha_{33}F_{22}^{11} + \alpha_{34}F_{02}^{11})];$$

$$B_{02} = \frac{\pi E_0}{(1-\nu_0^2)a} [A_{00}\alpha_{41} + A_{11} \times (\alpha_{41}F_{00}^{11} + \alpha_{42}F_{20}^{11} + \alpha_{43}F_{22}^{11} + \alpha_{44}F_{02}^{11})];$$

$$F_{2v,2n} = (-1)^{m+n} J_{2m}(\alpha_1) J_{2n}(\beta_1) - \frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1}{\text{sh}\alpha_1 \text{sh}\beta_1} I_{2m}(\alpha_1) I_{2n}(\beta_1);$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} C_{00}^{00} & \frac{1}{2}C_{00}^{02} & \frac{1}{4}C_{00}^{22} & \frac{1}{2}C_{00}^{20} \\ \frac{1}{2}C_{20}^{00} & \frac{1}{4}C_{20}^{02} & \frac{1}{8}C_{20}^{22} & \frac{1}{4}C_{20}^{20} \\ \frac{1}{4}C_{22}^{00} & \frac{1}{8}C_{22}^{02} & \frac{1}{16}C_{22}^{22} & \frac{1}{8}C_{22}^{20} \\ \frac{1}{2}C_{02}^{00} & \frac{1}{4}C_{02}^{02} & \frac{1}{8}C_{02}^{22} & \frac{1}{4}C_{02}^{20} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (14)$$

Формулы для C_{mn}^{ik} приведены в [4]. Составим систему уравнений в матричной форме для определения A_{00} и A_{11} , используя подход К. Ректориса [14]:

$$\begin{pmatrix} (L\varphi_{00}, \varphi_{00}) & (L\varphi_{00}, \varphi_{11}) \\ (L\varphi_{11}, \varphi_{00}) & (L\varphi_{11}, \varphi_{11}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{00} \\ A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\varphi_{00}, \frac{q(x,y) - p(x,y)}{D} \\ L\varphi_{11}, \frac{q(x,y) - p(x,y)}{D} \end{pmatrix}; \quad (15)$$

$$L = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Так как:

$$(L\varphi_{00}, \varphi_{00}) = (L\varphi_{00}, \varphi_{11}) = (L\varphi_{11}, \varphi_{00}) = 0;$$

$$(L\varphi_{11}, \varphi_{11}) = \frac{1}{a^4} \left(\alpha_1^2 + \frac{a^2}{b^2} \beta_1^2 \right)^2 \varphi_{11};$$

$$\left(L\varphi_{00}, \frac{q(x,y)}{D} \right) = \frac{P}{D};$$

$$\left(L\varphi_{00}, \frac{p(x,y)}{D} \right) = \frac{\pi^2 ab}{D} B_{00};$$

$$\left(L\varphi_{11}, \frac{q(x,y)}{D} \right) = \frac{P}{D} \left(1 - \frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1}{\text{sh}\alpha_1 \text{sh}\beta_1} \right); \quad (16)$$

$$\left(L\varphi_{11}, \frac{p(x,y)}{D} \right) = \frac{\pi^2 ab}{D} (B_{00}F_{00} + B_{20}F_{20} + B_{22}F_{22} + B_{02}F_{02}),$$

после подстановки (16) в (15) получаем систему уравнений для определения A_{00} и A_{11} .

Дальнейшие выкладки проведем для $a/b = 0,5$ и показателя гибкости по Горбунову-Посадову [1] $\beta = \frac{\pi E_0 l^3}{D(1-\nu_0^2)} = 20$. Последова-

тельно получено

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0,546068 & 0,077434 & -0,310178 & -0,193811 \\ -0,193811 & -0,52403 & -3,13728 & 11,3529 \\ -0,310178 & -18,4137 & 182,323 & -3,13728 \\ 0,077434 & 20,5447 & -18,4137 & -0,52403 \end{pmatrix}.$$

Вектор свободных членов

$$S^T = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi b E_0} \beta \begin{pmatrix} \beta \left(1 - \frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1}{\text{sh}\alpha_1 \text{sh}\beta_1} \right) \end{pmatrix}.$$

В результате решения получено:

$$A_{00} = \frac{3,34011 + 0,10076\beta}{1,82393 + 0,00193\beta} \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi b E_0};$$

$$A_{11} = \frac{0,62181\beta}{1,82393 + 0,00193\beta} \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi b E_0}. \quad (17)$$

На рис. 3 показаны осадки прямоугольной плиты при $a/b = 2$; $\beta = 20$.

Для проверки полученных результатов прием в (17) $\beta = 0$ (случай прямоугольного штампа). Тогда:

$$A_{11} = 0; \quad A_{00} = 0,58 \frac{P(1-\nu_0^2)}{E_0 b}.$$

В [1] получено для осадки прямоугольного штампа без выделения особенности в контактных напряжениях

$$A_{00} = 0,64 \frac{P(1-\nu_0^2)}{E_0 b}.$$

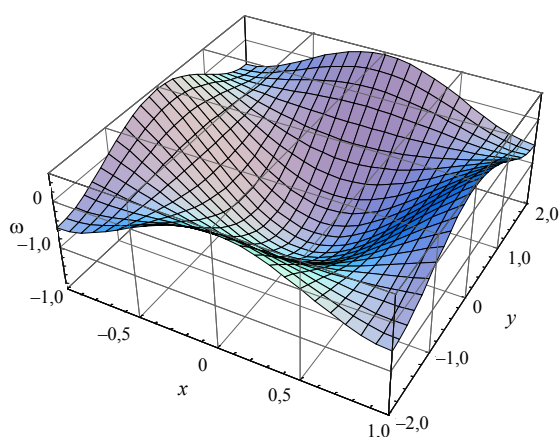


Рис. 3. Осадки прямоугольной плиты на упругом полупространстве в долях $\frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi b E_0}$

ВЫВОДЫ

1. Получены спектр и приближенные формы собственных колебаний прямоугольной пластинки со свободными гранями.

2. Показано применение данных результатов для расчетов прямоугольной плиты на упругом основании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов-Посадов, М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.
2. Палатников, Е. А. Прямоугольная плита на упругом основании / Е. А. Палатников. – М.: Стройиздат, 1964. – 236 с.
3. Цейтлин, А. И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики / А. И. Цейтлин. – М.: Стройиздат, 1984. – 334 с.
4. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. – Брест, 2006. – 108 с.
5. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: ФМ., 1959. – 439 с.
6. Конторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Конторович, В. И. Крылов. – М.; Л.: ФМ., 1962. – 708 с.
7. Справочник по динамике сооружений / под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
8. Вибрации в технике / под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
9. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высш. шк., 1990. – 400 с.
10. Полянин, А. Д. Линейные уравнения математической физики: справ. / А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 575 с.
11. Фаддеева, В. Н. О фундаментальных функциях оператора X^{xy} / В. Н. Фаддеева // Труды математического института АН СССР. – 1949. – Т. 28. – С. 157–159.
12. Киселев, В. А. Расчет пластин / В. А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1973. – 149 с.
13. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: ФМ, 1963. – 1097 с.
14. Ректорис, К. Вариационные принципы в математической физике и технике / К. Ректорис. – М.: Мир, 1985. – 589 с.

Поступила 4.04.2007