УДК 621.311

ЗАДАЧА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА И БРАХИСТОХРОНА

Белявская Н. С.,Катковская И. Н.
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

Если начальная и конечная точки движения одинаковы, то поскольку прямая есть кратчайшее расстояние между ними, то можно было бы думать, что движение, совершающееся по ней, требует наименьшего времени. На самом деле это не так.
Г. Галилей

Цель нашей работы состояла в изучении решения задачи о самом быстром спуске из точки A в точку B, лежащих в вертикальной плоскости. Кривая, соответствующая траектории наиболее быстрого спуска, по предложению И. Бернулли, называется брахистохроной (от греческих слов «брахос» - самое короткое и «хронос» – время).

Решение задачи о наискорейшем спуске состоит в следующем.

Пусть ось Ox горизонтальна, ось Oy направлена вертикально вниз; время спуска есть определенный интеграл обратной величины скорости по пути:

$$t = \int_{x_0}^{x'} \frac{ds}{v}$$

Задача состоит в том, чтобы найти такую форму кривой, для которой этот интеграл обращается в минимум.

Из закона сохранения энергии несложно выразить v:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \sqrt{2gy}$$

Прим этом

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$$

Подставляя эти значения в исходный интеграл, получаем

$$\delta \int \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}dx = 0$$

Решая уравнение, получаем:

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{c}{\sqrt{y}}$$

Откуда

$$y'^2 = \frac{c^2 - y}{y}$$

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением горизонтальной циклоиды.

Таким образом, доказано, что циклоида является брахистохроной при спуске из точки A в точку B.

Кроме того, рассмотрены возможности оптимального по времени спуска без траектории циклоиды.

Одним из способов решения этой задачи является построение ломаной из двух отрезков. Полученные результаты:

1)Если высота горки меньше ее длины, то спуск по любой наклонной плоскости ниже одного исходного отрезка, будет являться более выгодным по времени. Если первый участок ломаной сделать почти вертикальным, то тело быстро разгонится до максимальной скорости и второй участок уже будет преодолевать по инерции, так как оно приобрело большую энергию. Вывод: выигрыш по времени тем больше, чем ниже находится перегиб. Можно видеть выигрыш во времени при различной высоте перегиба на рисунке 1:

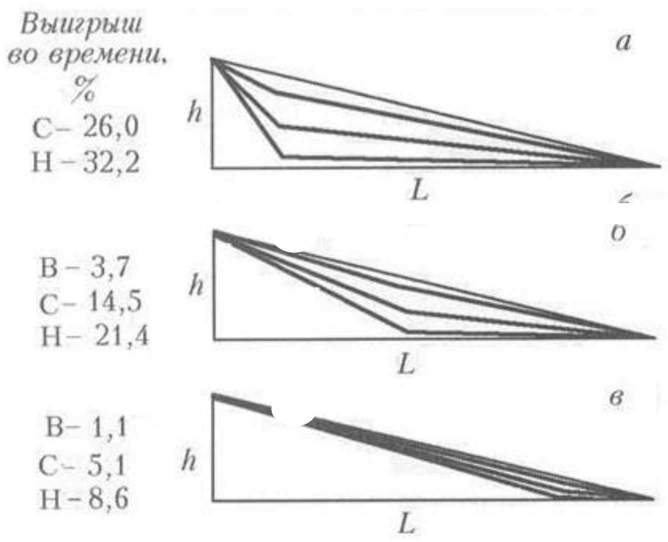

Рис.1. Выигрыш по времени при спуске по ломаной

2)Если же высота горки больше ее длины, выигрыш по времени получить достаточно сложно (можно получить незначительный выигрыш лишь при небольшом отклонении от исходного отрезка).

Выводы:

Наискорейшей траекторией спуска из точки A в точку B (и решением задачи Бернулли) является не что иное, как циклоида. При отсутствии возможности конструирования циклоиды на практике, можно воспользоваться траекторией ломаной. При условии, что горизонтальная проекция трассы меньше, чем ее вертикальная проекция, экономия времени при спуске будет тем больше, чем ниже находится перегиб.

Литература

1. Д. П. Голосков «Уравнения математической физики» - Издательство Питер, 2004 - Глава 8

2. О.Д. Максимова, Д.М. Смирнов «История Математики» - Москва, Юрайт, 2018 - Глава 7

3. Клейбер И. А. «Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона» - Санкт-Петербург, 1890-1907 – Полутом 8, «Брахистохрона»