УДК 517.551

О ПРИБЛИЖЕНИИ СПЛАЙНАМИ

Янушкевич И.В., Лукьянов И.М., Бондаренко Е.А.,Катковская И.Н.
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

Целью нашей работы является

Изучение и применение интерполирования функций различными полиномами; знакомство со сплайнами и их применением в теории приближении, а также сравнение различных приближенных методов.

Задача интерполяции

Дан отрезок [a;b], на котором заданы n-точек x_i, называемые узлами интерполяции, где $i \in [1,2,3\ldots n]$, а также значения некоторой функции y = f(x) в этих точках. Требуется построить интерполирующую функцию y =F(x), принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и функция y = f(x).

Интерполяционный полином Лагранжа – многочлен минимальной степени, принимающий заданные значения в конкретном наборе точек, который в общем случае определяется формулой:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

, где l_i– базисные полиномы, определяющиеся по следующей формуле:

Преимуществами данного интерполяционного метода являются:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

- график интерполяционного полинома проходит через каждый узел на заданном интервале;
- построенная функция имеет непрерывные производные любого порядка.

К недостаткам данного метода относятся:

- изменение хотя бы одного узла требует полного пересчета коэффициентов полинома Лагранжа;
- степень интерполяционного полинома зависит от количества узлов (чем больше число узлов, тем выше степень интерполяционного полинома).

Суть метода линейной интерполяции заключается в том, что заданные точки (x_i, y_i) соединяются прямолинейными отрезками и функция приближается к ломаной с вершинами в данных точка (уравнения каждого отрезка ломаной в общем случае разные).

Преимущества метода линейной интерполяции:

- метод является самым простым и часто используемым методом;
- не зависит от количества узлов (при добавлении узлов нет необходимости пересчитывать все значения).

Недостатки данного метода:

- график функции не является гладким и более отдален от истинной функции.

Сплайн-функция – это функция, которая определена на конечном числе отрезков, на каждом из которых она совпадает с некоторым полиномом. Степень сплайна – это максимальная из степеней использованных полиномов.

В частности, квадратичный интерполяционный сплайн определяется формулой:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$
$$x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Кубический интерполяционный сплайн определяется формулой:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$
$$x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Преимущества приближения сплайнами по сравнению с остальными методами интерполирования состоят в быстрой сходимости и устойчивости вычислительного процесса.

Наша задача состояла в выявлении наиболее эффективного и точного способа интерполирования на примере простейшей, всем известной функции y = cos x. Для решения этой задачи (проведения вычислений и построения графиков) мы использовали программный код на высокоуровневом языке программирования Python.

Используя интерполяционный полином Лагранжа, метод линейной интерполяции и метод приближения сплайнами, были получены различные приближения функции, которые представлены на рисунке 1.

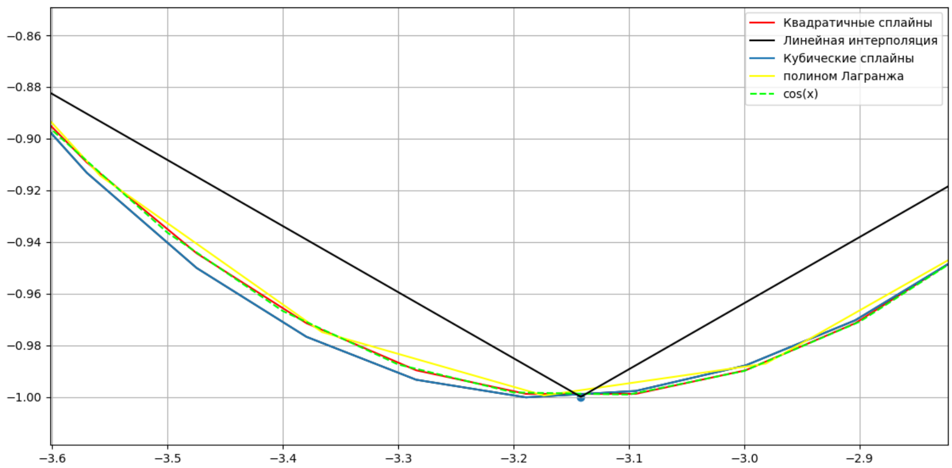

Рисунок 1. Графическое представление полученных результатов

Вывод

Таким образом, проанализировав полученные результаты, наилучшим оказалось приближение функции квадратичными сплайнами.

Литература

1. Бутусов П.Н., Половко А.Д. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации: Учебной пособие. – Санкт- Петербург, 2005г.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы: Учебное пособие. – Москва, 2006г.
3. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближение функций: Учебное пособие 2-ое изд. перераб. – Москва, 1954 – 327с.
4. http://statistica.ru/branches-maths/interpolyatsiya-splaynami-teor-osnovy/