МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Физика»

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пособие
для студентов специальностей
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция
и охрана воздушного бассейна»,
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение
и охрана водных ресурсов»,
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

В 3 частях

Часть 1

Рекомендовано учебно-методическим объединением высших учебных заведений Республики Беларусь по образованию в области строительства и архитектуры

Минск
БНТУ
2020

УДК 531.382+531.14(075.8)
ББК 22.213я7
Д46

Составители:
*А. К. Есман, П. Г. Кужир, Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук,
Г. Л. Зыков, Ю. И. Андреёнок, С. В. Попко*

Рецензенты:
зам. зав. кафедрой «Общая физика» БГУ *Л. И. Буров*;
доцент кафедры медицинской и биологической физики БГМУ
И. Ф. Медведева

Д46 **Динамика** поступательного и вращательного движения : пособие для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна», 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»»: в 3 ч. / А. К. Есман [и др.]. – Минск: БНТУ, 2020. – Ч. 1. – 58 с.
ISBN 978-985-583-004-8 (Ч. 1).

В пособии представлены материалы для проведения лабораторной работы по изучению динамики поступательного и вращательного движений. Подробно рассмотрены основные характеристики механического движения, получены кинематические уравнения движения материальной точки при равномерном и равноускоренном движениях. Описаны понятия массы, момента инерции материальной точки и твердого тела, момента силы относительно точки и относительно оси вращения. Представлен экспериментальный метод определения среднего значения ускорения свободного падения для географической широты данной местности с помощью машины Атвуда. Изложена методика экспериментального исследования динамики поступательного и вращательного движения с помощью маятника Максвелла.

УДК 531.382+531.14(075.8)
ББК 22.213я7

ISBN 978-985-583-004-8 (Ч. 1)
ISBN 978-985-583-005-5

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МАШИНЫ АТВУДА

***Цель работы*:** изучить законы равноускоренного движения, экспериментально исследовать зависимость времени падения тела от высоты. По экспериментальным данным определить ускорение свободного падения для географической широты данной местности.

Оборудование и материалы: машина Атвуда, электронный секундомер, набор грузов и перегрузков.

1.1. Введение

Основными задачами студентов при выполнении лабораторной работы является сопоставление теории физического явления с результатами эксперимента, а также экспериментальное определение физических величин. Ещё до выполнения лабораторной работы студент должен знать, что он ожидает получить, и как он собирается провести эксперимент. После выполнения лабораторной работы студент должен объяснить, получил ли тот результат, который ожидал, если не получил, то почему это произошло.

В настоящей работе измеряется время равномерного движения системы грузов, определяется среднее значение ускорения свободного падения для географической широты данной местности, проверяется формула пути при равноускоренном движении. Изучение законов равноускоренного движения производится на основе анализа кинематических характеристик движения системы тел. Для проведения такого анализа используется машина Атвуда, которая позволяет исследовать прямолинейное движение тел в поле сил тяжести.

1.2. Механическое движение

Механическое движение – это изменение положения тел или их частей относительно друг друга в пространстве с течением времени. Следовательно, всякое движение относительно, так как рассматривается по отношению к определенным телам, с которыми связана система отсчета.

Для описания движения тел, в зависимости от условий задачи, используют различные физические модели. Чаще других используют понятия материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальная точка – это тело, обладающее массой, размерами, формой, вращением и внутренней структурой которого можно пренебречь в условиях исследуемой задачи.

Простейшими видами механического движения материальной точки являются равномерное и прямолинейное движения.

Движение называется ***равномерным***, если модуль вектора скорости остаётся постоянным (направление скорости при этом может меняться).

Движение называется ***прямолинейным***, если направление вектора скорости остаётся постоянным (величина скорости при этом может меняться).

Движение тела, при котором остаются постоянными как модуль скорости, так и его направление, называется ***равномерным прямолинейным***.

Абсолютно твёрдое тело – это тело, для которого длина отрезка прямой, соединяющей две любые заданные точки тела, остается неизменной при любых воздействиях со стороны других тел.

Модель абсолютно твёрдого тела применяется в тех случаях, когда мы не можем пренебречь размерами тела, но можем не принимать во внимание изменение размеров и формы тела в процессе движения.

Простейшими видами механического движения твёрдого тела являются поступательное и вращательное движения.

Поступательным называется движение, при котором все точки тела движутся по одинаковым траекториям. В этом случае можно анализировать движение только одной точки, так как остальные точки движутся точно так же.

Вращательным называется движение, при котором все точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных к неподвижной прямой, называемой осью вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

При вращательном движении различные точки тела движутся по-разному, поэтому вращательное движение тела нельзя охарактеризовать движением какой-то одной точки.

К основным характеристикам механического движения относятся: траектория, путь, перемещение, скорость и ускорение.

Положение материальной точки в пространстве может быть задано ***радиус-вектором*** $\vec{r}$ – это вектор, который соединяет начало координат с положением материальной точки в пространстве в данный момент времени.

Траектория – это линия, которую описывает материальная точка при своем движении в пространстве.

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории AB (рис. 1.1). Отсчет времени производится с момента, когда точка находилась в положении A ($t = 0$). Длина участка траектории AB, пройденного материальной точкой с момента $t = 0$, называется ***длиной пути Δs*** и является скалярной функцией времени: $\Delta s = \Delta s(t)$.

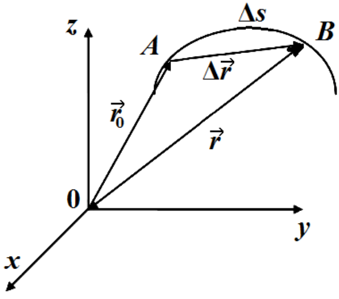


Рис. 1.1. Движение материальной точки вдоль произвольной траектории

Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведенный из начального положения движущейся точки в положение материальной точки в данный момент времени, называется ***вектором перемещения***.

В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движения.

Прямолинейное движение – это механическое движение, при котором вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и его модуль $|\Delta\vec{r}\,|$ равен пройденному пути Δs: $\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta s$.

Криволинейное движение – это движение, при котором модуль перемещения $\left|\Delta\vec{r}\right|$ не равен пройденному пути Δs.

Для того чтобы охарактеризовать насколько быстро изменяется в пространстве положение движущегося тела, используют понятие скорости.

Скорость – это векторная величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени t.

В общем случае при криволинейном движении скорость изменяется как по величине, так и по направлению.

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной **траектории** так, что в момент времени t ей соответствует радиус-вектор $\vec{r}_1$ (рис. 1.2). В течение малого промежутка времени Δt точка пройдёт путь Δs и получит элементарное (бесконечно малое) перемещение $\Delta\vec{r}$.

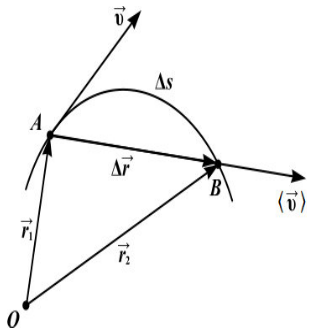


Рис. 1.2. Движение по криволинейной траектории

Различают среднюю и мгновенную скорости.

Вектором средней скорости $\langle\vec{v}\rangle$ называют отношение приращения радиус-вектора материальной точки $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за который оно произошло:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Вектор $\langle \vec{v} \rangle$ совпадает с направлением вектора приращения радиус-вектора точки $\Delta\vec{r}$.

Мгновенная скорость $\vec{v}$ – это предельное значение средней скорости при неограниченном уменьшении промежутка времени Δt: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. В математике такой предел называют первой производной и обозначают $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$. Тогда

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Таким образом, мгновенная скорость $\vec{v}$ есть векторная величина, определяемая первой производной по времени от радиус-вектора движущейся материальной точки.

Т. к. секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ в любой точке траектории направлен по касательной в сторону её движения. Модуль мгновенной скорости

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

равен первой производной пути по времени, так как при $\Delta t \to 0$, $|\Delta\vec{r}| \to \Delta s$.

Физический смысл скорости: ***скорость*** – это физическая величина, которая показывает какое перемещение совершает материальная точка за единицу времени при равномерном движении.

Равномерным называется движение с постоянной по величине (модулю) скоростью.

В произвольном случае вектор мгновенной скорости не остается постоянным. Быстрота изменения скорости по времени и направлению характеризуется ускорением.

Различают среднее ускорение материальной точки за данный промежуток времени $\Delta t = (t_2 - t_1)$ и мгновенное ускорение материальной точки в данный момент времени.

Вектор среднего ускорения $\langle \vec{a} \rangle$ ***равен*** отношению изменения вектора скорости $\Delta\vec{v}$ (рис. 1.3) к промежутку времени Δt, за который это изменение произошло:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},$$

где $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$.

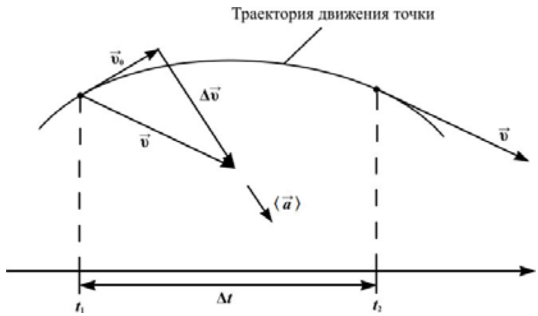


Рис. 1.3. Вектор среднего ускорения

Направление вектора ускорения $\langle \vec{a} \rangle$ совпадает с направлением изменения вектора скорости $\Delta\vec{v}$.

Мгновенное ускорение $\vec{a}$ – это векторная величина, равная пределу, к которому стремится среднее ускорение при стремлении промежутка времени к нулю, т. е. определяется первой производной от вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Направление вектора ускорения $\vec{a}$ также совпадает с направлением изменения вектора скорости $\Delta\vec{v}$ при очень малых значениях промежутка времени, за который происходит изменение скорости.

Таким образом, ***ускорением* называется** векторная величина, равная первой производной по времени от вектора скорости материальной точки.

Физический смысл ускорения: ***ускорение*** – это физическая величина, которая показывает на сколько изменяется скорость материальной точки за единицу времени при равнопеременном движении.

Равнопеременным называется движение, при котором скорость материальной точки за любые равные промежутки времени изменяется одинаково, т. е. движение происходит с постоянным по величине ускорением.

1.3. Кинематические уравнения движения материальной точки при равномерном и равноускоренном движениях

Положение материальной точки в пространстве может быть задано как с помощью радиус-вектора, так и с помощью координат (x, y, z). При движении материальной точки ее координаты и радиус-вектор изменяются с течением времени t.

Таким образом, для определения уравнений движения материальной точки необходимо указать либо вид функциональной зависимости трех ее координат от времени, либо зависимость радиус-вектора этой точки от времени.

Число независимых координат, определяющих положение точки в пространстве, называется ***числом степеней свободы***. Если материальная точка движется в пространстве, то она имеет три степени свободы (координаты x, y, z). Если она движется на плоскости – две степени свободы, и если вдоль линии – одну степень свободы.

а) **Равномерное прямолинейное движение.** При равномерном прямолинейном движении материальная точка движется с постоянной скоростью. Обратите внимание, что речь идёт о постоянстве вектора скорости, что означает, что скорость неизменна как по модулю, так и по направлению. Траекторией тела при равномерном прямолинейном движении является прямая или часть прямой (например, отрезок или луч). Вдоль данной прямой тело движется равномерно, то есть с постоянной по модулю скоростью.

Из определения вектора скорости выразим приращение радиус-вектора материальной точки

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}\Delta t,$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \Delta s = v\Delta t.$$

Полагая $t_1 = 0$, запишем $\Delta t = t_2 - t_1 = t_2 \equiv t$.

Кинематические уравнения при равномерном прямолинейном движении для координат и радиус-вектора, соответственно, имеют вид:

$$x = x_0 + v_{0x}t,$$

$$y = y_0 + v_{0y}t,$$

$$z = z_0 + v_{0z}t,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t.$$

б) **Равнопеременное движение.** ***Равнопеременным*** называется механическое движение с постоянным ускорением. Равнопеременное движение бывает равноускоренным и равнозамедленным. Если скорость при движении растет ($a > 0$), то движение называется ***равноускоренным***, если убывает ($a < 0$) – ***равнозамедленным***.

Из определения ускорения можно записать

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\mathrm{d}t.$$

Проинтегрировав данное выражение

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \mathrm{d}\vec{v} = \int_0^t \vec{a}\mathrm{d}t,$$

и, подставив пределы интегрирования,

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}\left(t - 0\right),$$

получим

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Последнее равенство представляет собой уравнение для вектора скорости материальной точки при движении с постоянным ускорением, где $\vec{v}_0$ – вектор скорости тела в момент времени $t = 0$.

Для проекций вектора скорости при равнопеременном движении на координатные оси получаем

$$v_x = v_{0x} \pm a_x t,$$

$$v_y = v_{0y} \pm a_y t,$$

$$v_z = v_{0z} \pm a_z t,$$

где знак "+" в формулах соответствует равноускоренному движению, знак "–" соответствует равнозамедленному движению.

Уравнение движения материальной точки для радиус-вектора в рассматриваемом случае получаем следующим образом:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^t \vec{v}\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^t \left(\vec{v}_0 + \vec{a}t\right)\mathrm{d}t,$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \vec{a}\frac{t^2}{2}.$$

Кинематическое уравнение движения материальной точки с постоянным ускорением для радиус-вектора $\vec{r}$ имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

где $\vec{r}_0$ – радиус-вектор тела в момент времени $t = 0$.

Переходя к проекциям на координатные оси, вместо данного векторного равенства получаем скалярные равенства для равноускоренного и равнозамедленного движений:

$$x = x_0 + v_{0x}t \pm \frac{a_x t^2}{2},$$

$$y = y_0 + v_{0y}t \pm \frac{a_y t^2}{2},$$

$$z = z_0 + v_{0z}t \pm \frac{a_z t^2}{2}.$$

где (x_0, y_0, z_0) – координаты материальной точки в начальный момент времени $t = 0$;

$v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}, a_x, a_y, a_z$ – проекции вектора начальной скорости и вектора ускорения на оси координат OX, OY, OZ, соответственно.

Знак "+" в формулах соответствует равноускоренному движению, знак "–" соответствует равнозамедленному движению.

Полученные формулы выражают зависимость координат материальной точки от времени и поэтому являются решением основной задачи механики для равноускоренного движения.

1.4. Понятие массы в физике

Понятие массы в физике является фундаментальным. Исходное толкование массы связано со ***вторым законом Ньютона***: ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

Для описания влияния внешнего воздействия на скорость тел Ньютон ввел понятие массы как внутренней универсальной характеристики материи.

Из второго закона Ньютона $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$ следует, что при действии одной и той же силы, тела различных масс m_1 и m_2 получают ускорения a_1 и a_2, обратно пропорциональные их массам: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{m_2}{m_1}$. Чем больше масса тела, тем труднее изменить его скорость как по величине, так и по направлению. Следовательно, ***массу*** можно рассматривать ***как меру инертности*** тела при поступательном движении.

Инертность – это свойство тел оставаться в инерциальных системах отсчёта в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения в отсутствие или при взаимной компенсации внешних воздействий.

Инертная масса характеризует меру инертности тел, которая проявляется в том, что скорость тела изменяется не мгновенно, а постепенно.

Масса входит также в закон всемирного тяготения.

Закон всемирного тяготения: сила тяготения прямо пропорциональна произведению масс m и M тяготеющих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{mM}{R^2},$$

где $G = 6{,}6742 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная в единицах системы СИ.

В данном случае масса выступает как мера тяготения и ее называют гравитационной массой.

Равенство гравитационной и инертной масс неоднократно экспериментально подтверждалось. В 1971 году В. Б. Брагинский и В. И. Панов довели точность измерений до 10^{-12}. Поэтому в настоящее время считают, что инертная масса тождественна гравитационной. В этом заключается суть принципа эквивалентности.

В классической механике массу тел, движущихся со скоростями намного меньшими скорости света, можно охарактеризовать следующим образом.

1. Масса – положительная скалярная величина.

2. Масса аддитивна: масса тела равна сумме масс составляющих его частей.

3. Масса тела в классической механике не зависит от скорости его движения $m \neq m(v)$.

4. Выполняется закон сохранения массы: масса изолированной системы тел не изменяется с течением времени.

5. Масса тела не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой, в частности, она одинакова в различных инерциальных системах координат.

6. Масса тела является мерой его инертности.

7. Массы тел являются источником их гравитационного притяжения, то есть масса является мерой тяготения.

При движении тел со скоростями, близкими к скорости света, масса тела m изменяется при изменении скорости движения тела v следующим образом:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где m_0 – масса покоя;

c – скорость света в вакууме;

v – скорость тела.

Масса покоя m_0 тела связана с энергией покоя $E_0 = m_0c^2$, которой обладает любое тело, благодаря факту своего существования.

1.5. Сила

Сила – это векторная физическая величина, являющаяся мерой воздействия на данное тело других тел, а также полей.

Если при действии силы на тело оно приобретает ускорение, то говорят о динамическом проявлении силы.

Если при действии силы на тело оно деформируется, т. е. изменяет свою форму и размеры, то говорят о статическом проявлении силы.

Единица силы в единицах системы СИ – Н (Ньютон).

1 Н – сила, которая телу, массой в 1 кг, сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы: 1 Н = 1 (кг·м)/с^2.

Сила характеризуется точкой приложения, модулем и направлением в пространстве.

Для сил выполняется ***принцип независимости*** их действия: при одновременном воздействии на тело нескольких сил, действие каждой силы не зависит от действия других сил.

1.6. Ускорение свободного падения

На все тела, находящиеся в окрестности Земли, действует сила тяжести. Если на тело не действуют другие силы, то оно будет падать с ускорением свободного падения, значение величины которого одинаково для всех тел в данном месте.

Силой тяжести называют силу, с которой тело притягивается к Земле под действием ее гравитационного поля.

Если, например, камень и комок бумаги одинаковых формы и размеров одновременно начали падать без начальной скорости с одинаковой высоты, то камень достигнет земли раньше, чем комок. Из подобного рода повседневных наблюдений следует, что под действием силы тяжести тела с большей массой падают быстрее тел с меньшей массой. Такое неверное заключение было сделано великим греческим философом Аристотелем. Это воззрение имело место в науке в течение почти двух тысяч лет. Только в 1583 г. Г. Галилей на основании более глубокого опытного изучения законов свободного падения опроверг мнение Аристотеля. Галилей выяснил, что в обычных условиях тела падают под действием не только силы тяжести, но и силы сопротивления воздуха. Галилей установил, что, в отсутствие сил сопротивления все тела падают равноускоренно, и в данной точке Земли ускорение всех тел при падении одинаково.

Таким образом, ***свободное падение*** – это движение тел под действием силы тяжести без учета сил сопротивления, при этом тела движутся с постоянным ускорением.

Ускорение свободного падения g – ускорение, которое приобретают все тела независимо от их массы при свободном падении вблизи поверхности Земли.

Если считать сопротивление воздуха настолько малым, что им можно пренебречь, то тело, освобожденное от опоры или подвеса, будет падать, находясь только под действием силы притяжения Земли. Значение ускорения свободного падения на поверхности Земли при средних значениях радиуса и массы Земли R = 6 371 032 м, $M = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ кг равно

$$g = G\frac{M}{R^2} = 6{,}6742 \cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}9736 \cdot 10^{24}}{(6371 \cdot 10^3)^2} = 9{,}822\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

На ускорение свободного падения тел оказывают влияние различные факторы. Ускорение свободного падения зависит:

1. **От распределения плотности пород земной коры.** Гравитационное поле Земли условно разделяется на нормальную и аномальную части. Нормальная часть соответствует идеализированной Земле («нормальной» Земле) простой геометрической формы, в виде шара, с однородным распределением плотности внутри неё. Аномальная часть гравитационного поля Земли меньше по величине, но имеет сложное строение. Она отражает неоднородное распределение плотности реальной Земли.

2. **От формы Земли и ее суточного вращения.** Земля имеет не шарообразную форму, а форму геоида. Форма Земли такова, что в направлении полюсов ее радиус минимален (R = 6 356 912 м), а на экваторе радиус (R = 6 378 388 м) и центростремительное ускорение максимальны. Ускорение свободного падения на экваторе составляет

$$g_\text{э} = G\frac{M}{R^2} = 6{,}6742 \cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}96 \cdot 10^{24}}{(6378 \cdot 10^3)^2} = 9{,}7805\ \text{м/с}^2.$$

Если тело находится на полюсе Земли, то оно неподвижно (центростремительное ускорение равно нулю). По второму закону Ньютона сила тяжести равна силе тяготения. Значение ускорения свободного падения равно

$$g_{\text{п}} = G\frac{M}{R^2} = 6,6742 \cdot 10^{-11}\,\frac{5,96 \cdot 10^{24}}{(6357 \cdot 10^3)^2} = 9,8324 \text{ м/с}^2.$$

Земля вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью $\omega = 0,0000729$ рад/с. Радиус окружности, которую описывает тело, вращаясь вместе с Землей вокруг ее оси, зависит от географической широты θ. Зависимость ускорения свободного падения от географической широты θ определяется выражением

$$g = 9,7803\,(1 + 0,00529\,\sin^2\theta)\ (\text{м/с}^2).$$

"Нормальным" ускорением свободного падения называют ускорение свободного падения на широте 45° на уровне моря ($h = 0$). Численно оно равно 9,80665 м/с^2. ***Минск*** находится на широте 54°, ускорение свободного падения на этой широте должно составлять ***9,8143 м/с^2***.

3. **От высоты *h* тела над Землей.** Сила земного притяжения F зависит от высоты h тела над Землей в соответствии с законом Всемирного тяготения. При этом ускорение свободного падения будет

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2},$$

где m – масса тела;

M – масса Земли;

h – высота тела над поверхностью Земли.

Вес тела – это сила, с которой тело действует на опору или подвес. Это означает, что вес тела приложен не к телу, а к опоре. Напомним, что сила тяжести приложена к самому телу. Вес тела и сила тяжести приложены, таким образом, к разным предметам. Вес тела равен силе тяжести только в том случае, когда опора или подвес неподвижны относительно Земли или движутся прямолинейно и равномерно.

Если опора будет свободно падать вниз с ускорением g, то тело не будет действовать на нее. Опора с телом не взаимодействует. Вес тела будет равен нулю. Тело в этом случае находится в состоянии невесомости.

1.7. Описание машины Атвуда

Для экспериментального исследования свободного падения тел необходима большая высота экспериментальной установки из-за большого значения ускорения свободного падения.

Машина Атвуда позволяет замедлить движение до небольших скоростей и необходимость в большой высоте отпадает.

Машина Атвуда (рис. 1.4) состоит из легкого блока в виде сплошного диска, способного вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, расположенной в верхней части вертикальной стойки. На правой стороне стойки нанесена шкала с сантиметровыми отметками. Через блок перекинута легкая нерастяжимая нить. На концах нити закреплены грузы A и B одинаковой массы M в виде цилиндров. Грузы могут двигаться вдоль вертикальной рейки со шкалой. На груз B могут одеваться один или несколько перегрузков C массой m. В таком случае система грузов A, B и C выходит из равновесия

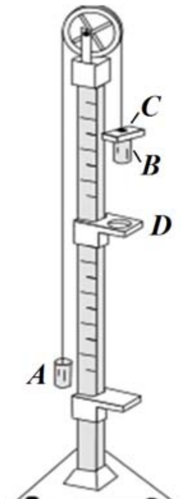


Рис. 1.4. Машина Атвуда

и начинает двигаться равноускоренно, проходя какое-то расстояние за определенное время.

В начале опыта груз B с перегрузком C удерживается неподвижно в верхней части стойки. После нажатия клавиши «ПУСК» электромагнит освобождает груз B с перегрузком C и система грузов A, B и C приходит в движение. При этом груз B с перегрузком C при равноускоренном движении проходит расстояние S_0 за промежуток времени t_0.

На кольце D перегрузок C отцепляется от груза B, а система грузов A и B совершает теперь равномерное движение. Груз B пройдет расстояние S при равномерном движении за промежуток времени t.

Измерение промежутков времени производится по электронному секундомеру.

Найдем ускорение грузов. Составим систему уравнений на основе второго закона Ньютона, пренебрегая моментом инерции ролика, сопротивлением воздуха и силами сопротивления в установке. Если считать нить невесомой и нерастяжимой, то сила натяжения нити T на всех участках одинакова и грузы двигаются с одним и тем же ускорением a. Определим силы, действующие на каждый из грузов.

На груз B, с лежащим на нем перегрузком C, действуют:

$M\vec{g}$ – сила тяжести;

$\vec{T}$ – сила натяжения нити;

$\vec{F}$ – сила давления перегрузка C.

Записывая второй закон Ньютона для груза B в векторном виде и в проекциях на выбранное направление OY (рис. 1.5), получаем

$$M\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = M\vec{a},$$

$$Mg + F - T = Ma. \qquad (1.1)$$

На груз A действуют:

$M\vec{g}$ – сила тяжести;

$\vec{T}$ – сила натяжения нити.

Записывая второй закон Ньютона для груза A, получаем

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a},$$

$$Mg - T = -Ma. \tag{1.2}$$

На перегрузок C массой m действуют:

$m\vec{g}$ – сила тяжести;

$\vec{N}$ – сила реакции опоры.

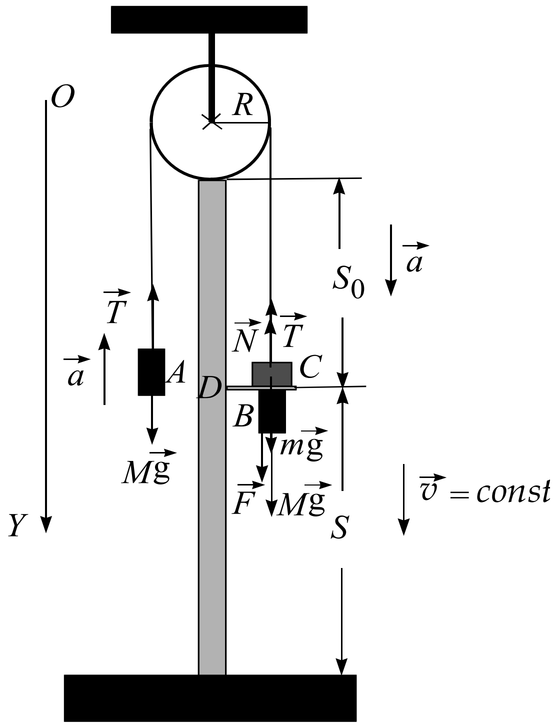


Рис. 1.5. Силы, действующие на грузы

Записываем второй закон Ньютона для перегрузка *C:*

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a},$$

$$mg - N = ma. \qquad (1.3)$$

Вычтем из уравнения (1.1) уравнение (1.2). Получим

$$F = 2Ma.$$

Из уравнения (1.3) находим

$$N = mg - ma.$$

Учитывая, что по третьему закону Ньютона $F = N$, получим

$$2Ma = mg - ma.$$

Тогда ускорения a грузов A и B и перегрузка C будут определяться по формуле

$$a = \frac{mg}{2M + m}, \qquad (1.4)$$

где g – ускорение свободного падения.

С ускорением a грузы A и B и перегрузок C в машине Атвуда проходят путь S_0, в конце которого располагается кольцо D. На кольце D перегрузок C массой m снимается с груза B, и дальше грузы A и B с одинаковой массой M двигаются равномерно, проходя путь S.

Так как грузы A и B и перегрузок C начинают движение из состояния покоя, то скорость при равноускоренном движении грузов в конце пути S_0 определяется как

$$v = at_0, \tag{1.5}$$

где t_0 – время ускоренного движения на пути S_0.

При равномерном движении грузов A и B на пути S

$$v = \frac{S}{t}, \tag{1.6}$$

где t – время равномерного движения.

Учитывая (1.6) и формулу для ускорения тела $a = \frac{v^2}{2S_0}$, движущегося с начальной скоростью, $v_0 = 0$, получаем

$$a = \frac{v^2}{2S_0} = \frac{S^2}{2S_0 t^2}. \tag{1.7}$$

Приравняем правые части равенств (1.4) и (1.7). Получим формулу (1.8) для земного ускорения свободного падения в виде

$$g = \frac{2M + m}{m} \cdot \frac{S^2}{2S_0 t^2}. \tag{1.8}$$

Формула (1.8) является **рабочей формулой для** определения ускорения свободного падения.

На участке равноускоренного движения

$$S_0 = \frac{at_0^2}{2}. \tag{1.9}$$

Из (1.5) и (1.6) следует, что

$$t_0 = \frac{S}{ta}.$$

Подставив t_0 в (1.9), получим

$$S_0 = \frac{S^2}{2at^2}. \qquad (1.10)$$

Как показывает формула (1.10), для фиксированных значений ускорения a между параметрами S_0 и S^2/t^2 существует линейная зависимость.

Таким образом, для определения ускорения тела надо измерить:

S_0 – расстояние, пройденное при равноускоренном движении;

S – расстояние, пройденное телом при равномерном движении;

t – время прохождения телом участка равномерного движения.

1.8. Порядок выполнения работы

I. Определение ускорения свободного падения

1. Установите нижнюю платформу указателем на отметке «0» шкалы стойки.
2. Средний кронштейн поднимите до уровня 30 см. Верхний – до уровня 48 см.
3. Убедитесь в том, что через блок, смонтированный на подшипнике, переброшена нить с двумя одинаковыми грузами массой M = 61,6 г. Система находится в равновесии.
4. Правый груз поднимите так, чтобы плоскость дна груза совместилась с горизонтальной чертой верхнего кронштейна.
5. Включите тумблер «Сеть» прибора. Если на индикаторе не появляются нули, нажмите тумблер «Сброс».
6. На правый груз системы положите дополнительный груз (перегрузок) массой m_1 = 6,5 г.

7. Нажмите клавишу «Пуск». Система грузов получит ускорение и пройдёт с этим ускорением путь S_0 = 18 см (рис. 1.5).

8. На среднем кронштейне перегрузок m_1 будет автоматически отцеплен и грузы массой M пройдут путь S = 30 см, двигаясь равномерно (система двух грузов находится в равновесии).

9. Измерьте время t_1 равномерного движения системы грузов массой M на пути S. Результаты занесите в табл. 1.

Таблица 1

№ п/п	m_1 = 6,5 г		m_2 = 8,5 г		m_3 = 12,7 г	
	t_1, с	g_1, м/с^2	t_2, с	g_2, м/с^2	t_3, с	g_3, м/с^2
1						
2						
3						
	$g_{1ср}$ =		$g_{2ср}$ =		$g_{3ср}$ =	

10. Нажмите тумблер «Сброс» и повторите пп. 7–9 еще два раза. Полученные данные занесите в табл. 1.

11. На правый груз системы поочередно положите перегрузки массами m_2 = 8,5 г, затем m_3 = 12,7 г и измерьте соответственно время t_2 и t_3 равномерного движения системы грузов массой M на пути S. Результаты измерений занесите в табл.1. Нажмите тумблер «Сброс» и повторите пп. 7–9 еще по два раза для масс m_2 и m_3.

12. Рассчитайте ускорение свободного падения по формуле

$$g = \frac{2M + m_i}{m_i} \cdot \frac{S^2}{2S_0 t_i^2},$$

где i = 1, 2, 3.

Результаты расчетов занесите в табл. 1.

13. Определите среднее значение ускорения свободного падения $g_{ср}$ по результатам всех экспериментов. Результаты вычислений занесите в табл. 2.

Таблица 2

$g_{ср} = (g_{1ср} + g_{2ср} + g_{3ср})/3$, м/с^2	$\Delta g_i = \lvert g_{ср} - g_{iср} \rvert$, м/с^2	$g = g_{ср} \pm \Delta g_{ср}$, м/с^2
	1 2 3	
	$\Delta g_{ср} =$	

14. Вычислите абсолютную погрешность для каждого эксперимента Δg_i, затем рассчитайте среднее значение абсолютной погрешности $g_{ср}$. Округлите сначала абсолютную погрешность ускорения свободного падения $\Delta g_{ср}$, затем среднее значение ускорения свободного падения. Запишите окончательный результат в виде **$g = g_{ср} \pm \Delta g_{ср}$ (табл. 2)**.

15. Сравните полученное значение ускорения свободного падения со значением ускорения свободного падения для Минска и сделайте вывод.

II. Проверка формулы пути $S = \dfrac{at^2}{2}$ при равноускоренном движении

1. Установите нижнюю платформу указателем на отметке «0» шкалы стойки.

2. Средний кронштейн поднимите в крайнее верхнее положение на отметку $S_1 = 42$ см.

3. Правый груз поднимите так, чтобы плоскость дна груза совместилась с горизонтальной чертой среднего кронштейна. Положите на него малый грузик (перегрузок) в виде шайбы с прорезью.

4. Нажав клавишу «Пуск», измерьте время падения t_1 правого груза массой M с дополнительным грузиком массой m.

5. Нажмите тумблер «Сброс».

6. Повторите пп. 3–4 еще два раза.

7. Изменяя положение среднего кронштейна, поочередно установите его на расстояниях S_2 = 35 см и S_3 = 30 см. Измерьте для этих расстояний время падения t_2 и t_3. Повторите пп. 3–5 для измерения времени t_2 и t_3 еще дважды.

8. Результаты измерений занесите в табл. 3.

Таблица 3

S_k, м	i	t_i, с	$t_{ср}$, с	$a_{ср}$, м/с^2
S_1 = 0,42 м	1			
	2			
	3			
S_2 = 0,35 м	1			
	2			
	3			
S_3 = 0,30 м	1			
	2			
	3			

9. Вычислите среднее время падения для каждого расстояния по формуле

$$t_{ср} = \frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}.$$

10. Рассчитайте ускорение $a_{ср}$ для каждого времени падения $t_{ср}$, по формуле

$$a_{ср} = \frac{2S}{t_{ср}^2}.$$

11. При одной и той же массе дополнительного грузика ускорение системы будет одинаковым. Проверьте, выполняется ли по данным эксперимента соотношение

$$a_{ср} = \frac{2S_1}{t_{1ср}^2} = \frac{2S_2}{t_{2ср}^2} = \frac{2S_3}{t_{3ср}^2},$$

где $t_{1ср}$, $t_{2ср}$ и $t_{3ср}$ – среднее время падения для расстояний S_1, S_2 и S_3, соответственно.

12. Сделайте вывод.

1.9. Контрольные вопросы

1. Какое движение называется механическим?
2. Назовите виды механического движения. Дайте определения равномерного, прямолинейного, поступательного и вращательного движений.
3. Дайте определения траектории, пути, перемещения, скорости и ускорения тела?
4. Получите кинематические уравнения движения для равномерного движения.
5. Получите кинематические уравнения движения для равнопеременного движения.
6. Сформулируйте второй закон Ньютона.
7. Сформулируйте закон всемирного тяготения.

8. Что в физике понимают под массой? Назовите характеристики массы в классической механике.

9. Сформулируйте принцип эквивалентности для инертной и гравитационной масс.

10. Дайте определение силы и назовите ее характеристики.

11. Какое движение называется свободным падением?

12. Что называется ускорением свободного падения? От каких факторов зависит ускорение свободного падения? По какой формуле оно определяется?

13. Опишите экспериментальную установку машины Атвуда.

14. Получите формулу для ускорения грузов при их равноускоренном движении в машине Атвуда.

15. В чем состоит метод определения ускорения свободного падения с помощью машины Атвуда? Получите формулу для ускорения свободного падения в этом методе.

Лабораторная работа № 2

2. МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Цель работы: изучить динамику поступательного и вращательного движений, определить момент инерции маятника, силу натяжения нитей маятника, линейное и угловое ускорения маятника, проверить закон сохранения энергии в механике.

Оборудование и материалы: маятник Максвелла, секундомер.

2.1. Механическое движение

Простейшим видом движения является **механическое движение**, которое заключается в изменении взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.

Если макроскопические тела движутся со скоростями существенно меньшими скорости света c в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с), то такую механику называют *классической*. В основе классической механики лежат законы Ньютона. Закономерности движения тел со скоростями, близкими к скорости света, рассматриваются в релятивистской механике.

Классическая механика состоит из кинематики, динамики и статики. В кинематике дается математическое описание механического движения тел безотносительно к причинам, обеспечивающим осуществление этого вида движения. Динамика занимается исследованием влияния взаимодействия тел на их механическое движение. В статике рассматриваются законы сложения сил и условия равновесия тел.

В механике для описания реальных тел используются различные модели: материальная точка, абсолютно твердое тело и т. п. Выбор той или иной модели в данной задаче нужно производить так, чтобы учесть все существенные особенности поведения реального тела и отбросить все второстепенные.

Материальной точкой называется тело, обладающее массой, форма и размеры которого несущественны в данной задаче.

Абсолютно твердое тело – тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Такое тело можно рассматривать как систему жестко связанных между собой материальных точек.

Не имеет никакого смысла рассматривать положение и механическое движение какого-либо тела в пространстве «вообще», т. е. безотносительно к другим телам. Всегда говорят о положении и движении этого тела по отношению к какому-то, другому конкретно выбранному телу, например, положение планеты относительно Солнца, самолета относительно Земли и т. д. Для однозначного определения положения исследуемого тела в пространстве в произвольный момент времени необходимо выбрать систему отчета.

Системой отчета называется система координат, снабженная часами и жестко связанная с абсолютно твердым телом, по отношению к которому определяется положение других тел в различные моменты времени.

Поступательным движением твердого тела называется движение, при котором любая прямая AB, проведенная через любые две точки тела, остается параллельной самой себе (рис. 2.1). При таком движении все точки твердого тела за один и тот же промежуток времени совершают одинаковые перемещения. Значит, в каждый момент времени скорости всех точек одинаковы, а следовательно, одинаковы и их ускорения. Поэтому рассмотрение поступательного движения твердого тела сводится к изучению движения любой из его точек.

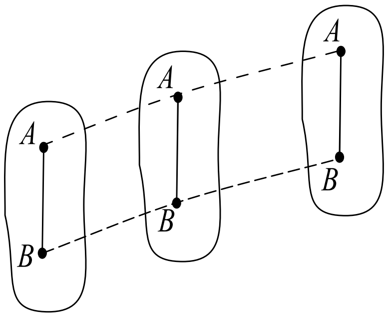


Рис. 2.1. Пример поступательного движения твердого тела

2.2. Первый закон Ньютона. Инерциальные системы отчета

Первый закон Ньютона: существуют такие системы отсчета, относительно которых тело движется прямолинейно и равномерно или находится в состоянии покоя, если на него не действуют внешние силы или действие сил скомпенсировано.

В этом проявляется особое динамическое свойство тел, которое называется ***инертностью***. Первый закон Ньютона обычно называют законом инерции, а движение тела, свободного от внешних воздействий – движением по инерции.

Всякое механическое движение относительно. Например, космонавт, находящийся на борту спутника, неподвижен в системе отсчета, связанной со спутником. В то же время для наблюдателя, находящегося на Земле, он движется вместе со спутником по эллиптической орбите.

Поэтому возникает вопрос, о каком покое или прямолинейном и равномерном движении идет речь в первом законе Ньютона? Как при этом выбирать систему отсчета?

Ответ на этот вопрос дает опыт. Системы отсчета, по отношению к которым выполняется закон инерции, называют ***инерциальными системами отсчета***. Следовательно, в первом законе Ньютона содержатся два утверждения: во-первых, все тела обладают свойством инертности и, во-вторых, существуют инерциальные системы отсчета.

Две любые инерциальные системы отсчета могут двигаться друг относительно друга только поступательно, равномерно и прямолинейно.

2.3. Основное уравнение динамики поступательного движения

Из опыта известно, что, в результате действия на тело других тел, это тело может изменять состояние своего механического движения, а также форму и размеры, т. е. деформироваться. Для описания такого механического действия тел друг на друга вводят понятие силы.

Механическое взаимодействие может осуществляться как между непосредственно контактирующими телами (например, при трении), так и между удалёнными телами. Удалённые тела взаимодействуют друг с другом с помощью особой формы материи – поля. В механике удаленные тела взаимодействуют посредством гравитационного поля. Эти силы называют ***силами тяготения***.

Сила $\vec{F}$ полностью определена, если задан ее модуль, направление в пространстве и точка приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется ***линией действия силы***. Если на тело одновременно действуют n сил, приложенных в одной и той же точке, то их можно заменить ***равнодействующей силой***, равной их геометрической сумме:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .$$

Основная задача динамики – установление законов изменения механического движения тел под влиянием приложенных к ним сил. Опыты показывают, что под действием силы $\vec{F}$ свободное тело изменяет скорость поступательного движения, приобретая ускорение. При этом оказывается, что ускорение тела прямо пропорционально вызывающей его силе и совпадает с ней по направлению, т. е.

$$\vec{a} = k_1 \vec{F},$$

где k_1 – положительный коэффициент пропорциональности, постоянный для каждого конкретного тела и неодинаковый для разных тел.

Соотношение, связывающее $\vec{a}$ и $\vec{F}$, демонстрирует тот факт, что под влиянием силы тело приобретает конечное по времени ускорение, т. е. скорость поступательного движения тела изменяется не мгновенно, а постепенно. Следовательно, здесь проявляется инертность тела. В качестве меры инертности тела в поступательном движении вводят скалярную величину m, называемую ***массой тела***. Чем больше инертность тела, а, следовательно, и его масса m, тем меньше ускорение оно должно приобретать под действием одной и той же силы $\vec{F}$. Поэтому, полагая $k_1 = \dfrac{k_0}{m}$, и учитывая, что во всех системах единиц физических величин коэффициент $k_0 = 1$, получаем

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Как показывает опыт, масса – величина аддитивная: масса тела равна сумме масс всех частей этого тела.

Основным уравнением динамики поступательного движения твердого тела (материальной точки) является ***второй закон Ньютона*** – это фундаментальный закон природы, он является обобщением опытных фактов.

Второй закон Ньютона утверждает: в инерциальных системах отсчета ускорение, приобретаемое материальной точкой, прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (2.1)$$

С учётом того, что вектор ускорения тела $\vec{a}$ равен производной вектора скорости по времени, второй закон Ньютона примет вид:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Учитывая, что масса материальной точки постоянна (это постулируется в классической механике), внесем константу m под знак производной:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

Вектор $\vec{p} = m\vec{v}$ называется ***импульсом материальной*** точки. Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{2.2}$$

Выражение (2.2) есть более ***общая формулировка второго закона Ньютона***: скорость изменения вектора импульса материальной точки равна вектору силы, действующей на нее.

Выражение (2.2) называется также уравнением движения материальной точки.

Уравнения (2.1) и (2.2) справедливы и для твердых тел в том случае, когда они движутся поступательно. Если на тело действует несколько сил, то под вектором силы $\vec{F}$ в уравнениях (2.1) и (2.2) подразумевают вектор их равнодействующей, т. е. векторную сумму всех сил. Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета.

При описании движения абсолютно твердого тела используется понятие центра масс (центра инерции). Рассмотрим твердое тело как систему жестко закрепленных материальных точек.

Центром масс тела, состоящего из n материальных точек, называется точка, радиус-вектор которой определяется формулой:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \qquad (2.3)$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор центра масс i-ой материальной точки, соответственно.

Продифференцировав (2.3) по времени, получим

$$\vec{p} = m\vec{v}_C,$$

где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы материальных точек;

$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt}$ – скорость центра масс тела;

$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$ – вектор полного импульса системы материальных точек.

Подставляя выражение для вектора импульса $\vec{p}$ в формулу (2.2), получим

$$m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}. \qquad (2.4)$$

Формула (2.4) выражает ***закон движения центра масс***: центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе.

2.4. Третий закон Ньютона

Если два тела взаимодействуют друг с другом, то тело 2 действует на тело 1 с силой $\vec{F}_{12}$, а тело 1 действует на тело 2 с силой $\vec{F}_{21}$.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по модулю и противоположны по направлению, и направлены по одной прямой, соединяющей центры этих тел:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} .$$

Таким образом, силы всегда возникают попарно. Силы, фигурирующие в этом соотношении, приложены к разным телам, поэтому они не могут уравновесить друг друга. Третий закон Ньютона, как и первые два, справедлив только в инерциальных системах отсчета.

2.5. Вращательное движение твердого тела

Любое сложное движение твердого тела всегда можно разложить на два основных вида движения – поступательное и вращательное.

Вращательным называется движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой ***осью вращения***.

Окружности, описываемые точками, находятся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения (рис. 2.2). Ось вращения может находиться как внутри тела, так и вне его.

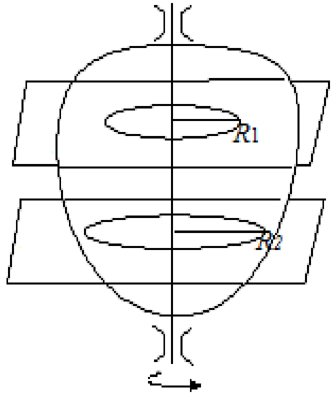


Рис. 2.2. Пример вращательного движения твердого тела

При вращательном движении все точки тела за один и тот же промежуток времени совершают одинаковые угловые перемещения и, следовательно, движутся с одной и той же угловой скоростью и угловым ускорением. Однако, как показывает опыт, при вращательном движении твердого тела вокруг закрепленной оси, масса уже не является мерой его инертности, а сила – недостаточна для характеристики внешнего воздействия. Поэтому, для описания вращательного движения твердого тела введены новые характеристики, такие как момент силы и момент инерции тела.

Опыт показывает, что при вращении какого-либо тела с помощью рычага (например, при затягивании болта гаечным ключом) существенным оказывается не только модуль силы, но и длина рычага. В соответствии с этим вводится понятие момента силы.

Вектором момента силы $\vec{M}$ относительно точки О называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$ и вектора силы $\vec{F}$:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \qquad (2.5)$$

Момент силы есть вектор, направление которого определяется по правилу векторного произведения: вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, проведенной через векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, и образует с ними правую тройку векторов (рис. 2.3). При наблюдении из конца вектора $\vec{M}$ поворот по кратчайшему расстоянию от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ осуществляется против хода часовой стрелки (правило правого винта или правило буравчика).

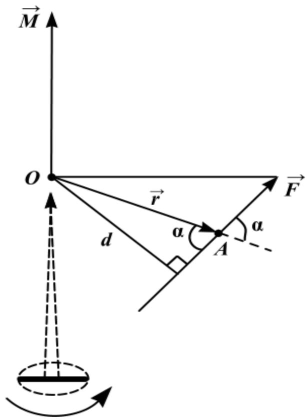


Рис. 2.3. Момент силы относительно точки *O*

Правило буравчика: направление вектора $\vec{M}$ определяется поступательным движением острия буравчика, расположенного в точке *O*, если направление вращения его головки совпадает с направлением действующей силы. При переносе точки приложения силы $\vec{F}$ вдоль линии ее действия, момент $\vec{M}$, относительно одной и той же неподвижной точки *O*, не изменяется.

Модуль вектора $\vec{M}$ равен

$$M = rF\sin(\vec{r}, \vec{F}) = rF\sin a.$$

Из рис. 2.3 видно, что $r\sin\alpha = d$.

Кратчайшее расстояние *d* от точки, относительно которой определяется момент силы, до линии действия силы называется ***плечом силы***.

Следовательно, модуль момента силы равен произведению силы на плечо.

Если под воздействием силы, тело вращается вокруг точки *O* по ходу часовой стрелки, то момент берется со знаком "–", если против – со знаком "+":

$$M = \pm Fd.$$

Когда сила приложена к одной из точек абсолютно твердого тела, то вектор $\vec{M}$ характеризует способность силы вращать тело вокруг точки *O*, относительно которой он и определяется. Поэтому момент силы называют также ***вращающим моментом***.

Полный момент сил, действующих на систему материальных точек относительно точки *O*, равен векторной сумме моментов отдельных сил относительно этой точки.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i \right].$$

Способность силы вращать тело вокруг оси определяется моментом силы относительно данной оси.

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется скалярная величина, равная проекции вектора $\vec{M}$ на эту ось, определенного относительно произвольной точки *A*, принадлежащей данной оси.

Пусть внешняя сила $\vec{F}$ приложена к точке тела *C*, находящейся на расстоянии *R* от закрепленной оси вращения (рис. 2.4, *а*). Определим момент силы $\vec{F}$ относительно оси *z*. Разложим вектор силы $\vec{F}$ на три взаимно перпендикулярные составляющие: $\vec{F}_O$, $\vec{F}_R$ и $\vec{F}_\tau$. Сила $\vec{F}_\tau$ направлена по касательной к окружности, по которой движется рассматриваемая точка *C*. Момент силы $\vec{F}$ относительно произвольной точки *A*, лежащей на оси вращения, равен векторной сумме моментов составляющих сил:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{M}_R + \vec{M}_\tau.$$

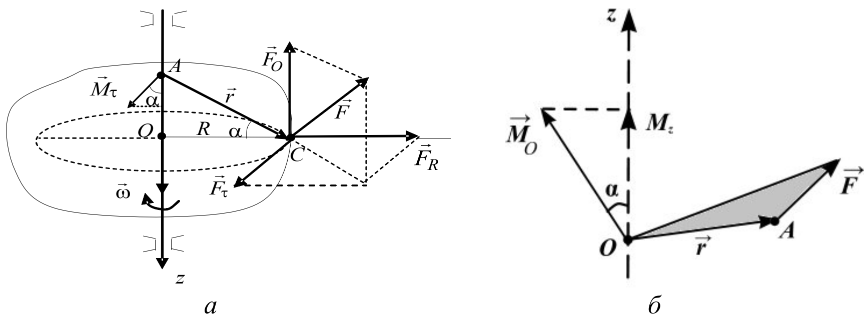


Рис. 2.4. К определению момента силы $\vec{F}$
относительно неподвижной оси *z*:
а – путем разложения $\vec{F}$ на три составляющие;
б – путем проецирования вектора момента силы $\vec{M}_o$
относительно точки *O* на ось *z*

Так как вектор силы $\vec{F}_O$ параллелен оси *z*, то он не создает вращательного момента относительно этой оси. Проекция момента вектора силы $\vec{F}_R$ на ось *z* равна нулю. Тогда,

$$\vec{M}_A = \vec{M}_\tau .$$

Момент силы $\vec{M}_\tau$ относительно точки *A* равен:

$$\vec{M}_\tau = \left[\vec{r}, \vec{F}_\tau\right]$$

и образует с осью *z* угол α, а модуль $\vec{M}_\tau$ имеет значение:

$$M_\tau = rF_\tau \sin 90° = rF_\tau \cdot$$

Проекция вектора $\vec{M}_\tau$ на ось *z* равна

$$M_z = M_t \cos\alpha = rF_t \cos\alpha = F_t R. \qquad (2.6)$$

где $R = r\cos\alpha$ (рис. 2.4, *а*).

Следовательно, только составляющая $\vec{F}_\tau$, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и перпендикулярная к радиусу R окружности точки C приложения внешней силы, создает момент силы относительно оси и приводит к изменению вращательного движения тела.

Момент силы относительно оси z может быть также определен как проекция момента вектора силы $\vec{M}_o$ (рис. 2.4, *б*) относительно произвольно выбранной точки O на данную ось z.

2.6. Основное уравнение динамики вращательного движения

Выведем уравнение движения тела, имеющего закрепленную в пространстве ось вращения z. Для этого мысленно разобьем тело на совокупность элементов с массами m_1, m_2,… m_i,… m_n. На i-й элемент (рис. 2.5) действует некоторая произвольная сила $\vec{F}_i$, которая представляет собой равнодействующую всех приложенных к этому элементу внешних сил. Кроме внешних сил на каждый элемент действуют внутренние силы. Внутренние силы всегда входят попарно: силе F_{ik}, с которой k-й элемент действует на i-й, соответствует равная и противоположно направленная сила F_{ki}, с которой i-й элемент действует на k-й. Согласно третьему закону Ньютона, эти две силы направлены вдоль одной прямой. При вычислении моментов этих сил точки их приложения можно перене-

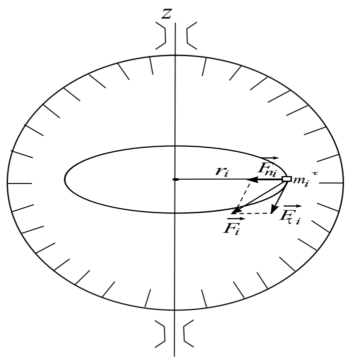


Рис. 2.5. Действие произвольной внешней силы $\vec{F}_i$ на i-й элемент твердого тела

сти в одну и ту же точку на этой прямой. Силы взаимно уничтожаются, а их полный момент относительно любой точки будет равен нулю. Поэтому при вычислении моментов сил нужно учитывать только внешние силы, действующие на рассматриваемую механическую систему.

При вращении элемент с массой m_i движется по окружности радиуса r_i (рис. 2.5). Моментом относительно оси вращения обладает только составляющая $\vec{F}_{\tau i}$ силы $\vec{F}_i$, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения. По второму закону Ньютона ее численное значение равно

$$F_{\tau i} = m_i a_{\tau i}, \tag{2.7}$$

где $\vec{a}_{\tau i}$ – тангенциальная (касательная) составляющая ускорения i-того элемента.

Умножим обе части равенства (2.7) на r_i и выразим $a_{\tau i}$ через угловое ускорение $\varepsilon (a_{\tau i} = \varepsilon r_i)$,

$$F_{\tau i} r_i = m_i r_i^2 \varepsilon, \tag{2.8}$$

где $M_{iz} = F_{\tau i} r_i$ – момент силы $\vec{F}_i$, действующий на данный элемент тела относительно оси вращения z, а произведение массы элемента на квадрат расстояния от него до оси вращения, т. е.

$$J_{iz} = m_i r_i^2 \tag{2.9}$$

момент инерции i-го элемента относительно оси z.

Модуль углового ускорения равен проекции углового ускорения на ось вращения, а при неизменной оси вращения направление вектора $\vec{\varepsilon}$ совпадает или противоположно направлению оси вращения, поэтому его модуль можно записать как

$$\varepsilon = \varepsilon_z. \tag{2.10}$$

Используя выражения (2.9), (2.10), формулу (2.8) перепишем следующим образом:

$$M_{iz} = J_{iz}\varepsilon_z. \tag{2.11}$$

Просуммируем выражение (2.11) по всем элементам тела:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \sum_{i=1}^{n} J_{iz}\varepsilon.$$

Так как угловое ускорение ε одинаково для всех частиц данного тела, его можно вынести за знак суммы

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} J_{iz}. \tag{2.12}$$

Алгебраическую сумму моментов всех внешних сил относительно оси z

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = M_z,$$

действующих на тело относительно заданной оси вращения, называют *полным моментом внешних сил относительно заданной оси вращения*. Сумма моментов инерции отдельных частиц, составляющих тело,

$$\sum_{i=1}^{n} J_{iz} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J_z \tag{2.13}$$

называется *моментом инерции тела относительно заданной оси вращения*.

Следовательно, уравнение (2.12) примет вид:

$$M_z = J_z \varepsilon_z \quad \text{или} \quad \varepsilon_z = \frac{M_z}{J_z}. \tag{2.14}$$

Уравнение (2.14) называют ***основным уравнением динамики вращательного движения***: угловое ускорение, приобретаемое твердым телом, прямо пропорционально полному моменту внешних сил относительно оси вращения и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно этой же оси.

Уравнение (2.14) аналогично второму закону Ньютона в проекции на ось z:

$$F_z = ma_z.$$

Роль массы в уравнении (2.14) играет момент инерции. Чем больше момент инерции, тем меньше (при прочих равных условиях) угловое ускорение, т. е. имеет место аналогия момента инерции с массой. ***Момент инерции тела есть мера инертности тела во вращательном движении***.

Надо отметить, что уравнение (2.14), как и второй закон Ньютона, выполняется только в инерциальных системах отсчета.

Вращающееся тело обладает кинетической энергией.

Получим выражение для кинетической энергии тела во вращательном движении. Кинетическая энергия тела, разбитого на материальные точки с массами m_i, равна

$$E_к = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2.$$

Так как линейная скорость v_i i-той материальной точки связана с угловой скоростью ω и расстоянием до оси вращения r_i соотношением $v_i = \omega r_i$, то

$$E_к = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega^2 r_i^2 m_i = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения.

Таким образом, момент инерции во вращательном движении является аналогом массы тела при поступательном движении.

2.7. Момент инерции

Всякое тело, независимо от того, вращается оно или покоится, обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой независимо от того, движется оно или находится в покое.

Величина момента инерции тела относительно данной оси зависит от размеров тела, его формы, плотности. Из определения момента инерции тела по формуле (2.13) следует, что эта *величина аддитивная*. Это означает, что момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции частей тела относительно той же оси.

Для однородных тел геометрически правильной формы (рис. 2.6) момент инерции находится посредством интегрирования; т. е. в формуле (2.14) суммирование следует заменить на интегрирование:

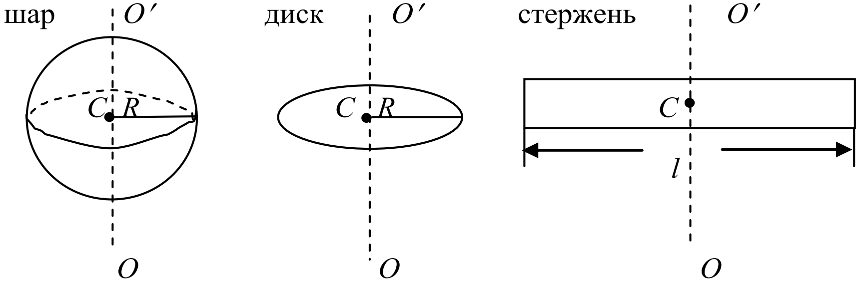
$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV, \qquad (2.15)$$

где $\rho = \dfrac{dm}{dV}$ – плотность тела;

V – объем тела;

r – расстояние от элемента тела массой dm до оси вращения.

В системе СИ момент инерции J измеряется в **кг · м^2**.



$$J_C = \frac{2}{5} mR^2 \qquad J_C = \frac{1}{2} mR^2 \qquad J_C = \frac{1}{12} ml^2$$

Рис. 2.6. Моменты инерции некоторых тел

Для тел неправильной геометрической формы такие интегралы находятся численно или используются экспериментальные методы определения момента инерции.

Если ось вращения не проходит через центр масс тела, то необходимо воспользоваться ***теоремой Штейнера***: момент инерции тела относительно произвольной оси, непроходящей через центр масс тела, равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела (J_c), и произведения массы тела на квадрат расстояния d между осями:

$$J = J_c + md^2. \tag{2.16}$$

На рис. 2.7 показан шар. Требуется определить его момент инерции относительно оси OO', находящейся на расстоянии $d = 4R$ от центра масс шара:

$$J = \frac{2}{5} mR^2 + m\left(4R\right)^2 =$$

$$= mR^2 \left(\frac{2}{5} + 16\right) = \frac{82}{5} mR^2.$$

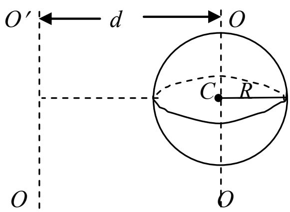


Рис. 2.7. К расчету момента инерции шара относительно оси OO'

В качестве примера рассмотрим, как определяется момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно его геометрической оси OO', совпадающей с осью, проходящей через его центр масс.

Разобьем цилиндр на слои радиуса r и толщиной dr (см. рис. 2.8). Масса такого слоя

$$dm = \rho dV = \rho 2\pi r h dr.$$

Момент инерции слоя

$$dJ = r^2 dm = 2\pi\rho h r^3 dr.$$

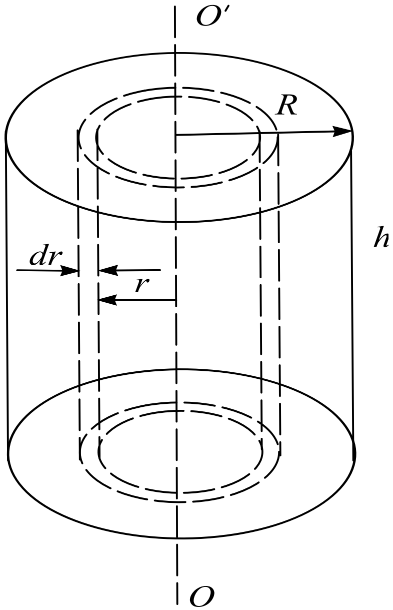


Рис. 2.8. К расчету момента инерции цилиндра относительно оси OO'

Проинтегрировав это выражение от 0 до R, получим ***момент инерции диска***:

$$J = 2\pi\rho h\int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4 = \frac{1}{2}mR^2, \qquad (2.17)$$

где $m = \rho h\pi R^2$ – масса цилиндра.

Так как момент инерции цилиндра

$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

не зависит от высоты цилиндра h, то формула (2.17) определяет ***момент инерции тонкого диска относительно оси, перпендикулярной к нему и проходящей через его центр***.

Найдем момент инерции полого цилиндра (кольца) относительно его геометрической оси.

Момент инерции полого цилиндра, имеющего внутренний радиус R_1, а внешний – R_2, можно вычислить также по формуле (2.17), изменив в интеграле пределы интегрирования

$$J = 2\pi\rho h\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi\rho h\left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi\rho h(R_2^4 - R_1^4).$$

Зная, что масса полого цилиндра $m = \pi\rho h(R_2^2 - R_1^2)$, запишем ***момент инерции полого цилиндра*** следующим образом:

$$J = \frac{1}{2}m(R_2^2 + R_1^2). \qquad (2.18)$$

Таким образом, момент инерции полого цилиндра зависит от массы цилиндра и его внутреннего и внешнего радиусов.

2.8. Описание маятника Максвелла и вывод рабочих формул

Маятник Максвелла представляет собой небольшой диск, насаженный туго на ось и опускающийся под действием силы тяжести на двух нитях, предварительно намотанных на ось диска. Нити во время движения вниз разматываются до полной длины, раскрутившийся диск продолжает вращательное движение в том же направлении и наматывает нити на ось, вследствие чего он поднимается вверх, замедляя при этом свое вращение. Дойдя до верхней точки, диск опять будет опускаться вниз и т. д. (см. рис. 2.9). Т. к. диск совершает колебания вверх и вниз, то такое устройство называется *маятником*.

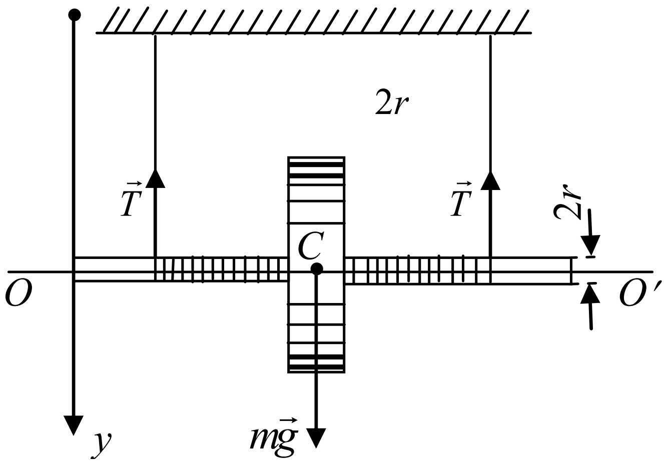


Рис. 2.9. Силы, действующие на маятник Максвелла

Если, накрутив нити на концы вала, поднять маятник на высоту s и отпустить, то маятник начнет поступательное движение вниз и одновременно будет вращаться вокруг оси симметрии. Запасенная при поднятии маятника потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию поступательного и вращательного движений. Достигнув положения равновесия, при котором потенциальная энергия полностью переходит в кинетическую, маятник не остановится. По инерции он будет продолжать вращение, нити начнут наматываться на вал и маятник вновь поднимется вверх. Однако, вследствие трения нитей о вал и сопротивления воздуха, расстояние, пройденное маятником при подъеме, окажется меньше, чем при спуске. Трение нитей о вал мало, им можно пренебречь и считать, что и при подъеме, и при спуске на маятник действуют одни и те же силы, т. е. маятник движется с постоянным ускорением a.

Уравнения движения маятника Максвелла можно записать, используя основные законы динамики поступательного и вращательного движений.

Для поступательного движения центра масс маятника C в проекции на ось y:

$$ma = mg - 2T, \tag{2.19}$$

где m – масса маятника

$$m = m_0 + m_{\text{Д}},$$

где $m_{\text{Д}}$ – масса диска маятника;

m_0 – масса стержня;

T – сила натяжения нити;

a – ускорение центра масс;

g – ускорение свободного падения.

Для вращательного движения маятника вокруг оси OO' проходящей через центр масс:

$$J\varepsilon = 2Tr, \tag{2.20}$$

где J – момент инерции маятника относительно оси вращения;

ε – угловое ускорение маятника;

$2Tr$ – вращательный момент (момент силы натяжения двух нитей);

r – радиус цилиндрического стержня (см. рис. 2.9).

Связь линейного и углового ускорения имеет вид:

$$a = \varepsilon r. \tag{2.21}$$

Ускорение a определяется кинематическим соотношением

$$a = \frac{2s}{t^2}, \tag{2.22}$$

где s – длина нити от крайних, верхнего и нижнего, положений маятника;

t – время движения маятника между его крайними положениями.

Измеряют время движения маятника t. По формулам (2.22) и (2.21) определяют линейное и угловое ускорение маятника.

Далее из формулы (2.19) вытекает выражение для вычисления силы натяжения нитей

$$T = \frac{m(g-a)}{2}. \tag{2.23}$$

Из формулы (2.20) для момента инерции маятника получим

$$J = \frac{2Tr}{\varepsilon} = \frac{2Tr^2}{a}. \tag{2.24}$$

Подставив формулы (2.22) и (2.23) в формулу (2.24), получим для момента инерции маятника следующее выражение:

$$J = mr^2\left(\frac{gt^2}{2s} - 1\right). \tag{2.25}$$

Если пренебречь силами трения, сопротивления воздуха, то закон сохранения механической энергии маятника дает с хорошей степенью точности равенство потенциальной энергии маятника в верхнем положении и кинетической энергии вращения маятника в нижнем положении, т. е.

$$E_p = E_к. \tag{2.26}$$

Потенциальная энергия маятника в верхнем положении

$$E_p = mgs, \tag{2.27}$$

Кинетическая энергия вращения маятника в нижнем положении

$$E_к = \frac{J\omega^2}{2}. \tag{2.28}$$

Учитывая, что

$$\omega = \varepsilon t, \tag{2.29}$$

получаем

$$E_к = \frac{J\varepsilon^2 t^2}{2}. \tag{2.30}$$

Значение момента инерции маятника Максвелла можно вычислить теоретически. Согласно свойству аддитивности, момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня и диска относительно оси:

$$J_{теор} = J_{ст} + J_{д} = \frac{1}{2}m_0 r^2 + \frac{1}{2}m_{д}(r^2 + R^2), \tag{2.31}$$

где $J_{\text{ст}}$ – момент инерции стержня относительно оси вращения;

m_0 – масса стержня;

r – радиус стержня;

$J_{\text{д}}$ – момент инерции полого диска относительно оси вращения;

$m_{\text{д}}$ – масса диска;

r – внутренний радиус диска равный радиусу стержня;

R – внешний радиус диска.

2.9. Порядок выполнения работы

1. Включите установку в сеть.
2. Отожмите кнопку «Пуск» лабораторной установки. Вращательным движением маятника намотайте нити на ось маятника до его верхнего положения и закрепите маятник электромагнитом установки.
3. Запустите маятник, нажав сначала кнопку «Сброс», потом «Пуск». При этом электронное устройство с помощью фотоэлемента фиксирует время падения маятника с точностью до одной тысячной секунды и высвечивает это время на табло. Запишите это время в табл. 1.
4. Повторите опыт 3 раза. Вычислите среднее время $t_{\text{ср}}$ падения маятника.
5. По рабочим формулам (2.21), (2.22), (2.23), (2.25), (2.26), (2.27) произведите соответственно вычисления для среднего времени линейного ускорения a, силы натяжения нитей T, углового ускорения ε во вращательном движении маятника, момента инерции маятника J, потенциальной энергии маятника $E_{\text{р}}$ в верхнем положении, кинетической энергии вращения маятника в нижнем положении $E_{\text{к}}$. Оцените относительную погрешность ε_E выполнения закона сохранения механической энергии по формуле

$$\varepsilon_E = \frac{\left| E_p - E_к \right|}{E_p}.$$

Округлите величину относительной погрешности и результат запишите в табл. 1.

Таблица 1

№ измерения	t	$t_{ср}$, с	a, м/с^2	T, Н	ε, с$^{-2}$	J, кг·м^2	$E_к$, Дж	$E_р$, Дж	ε_E
1									
2									
3									

6. Определите значение момента инерции теоретически по формуле (2.31) и сравните со значением полученным экспериментально.
7. Сделайте выводы.

2.10. Контрольные вопросы

1. Какое движение называется поступательным, вращательным?
2. Сформулируйте законы Ньютона.
3. Сформулируйте основное уравнение динамики поступательного движения твердого тела.
4. Что такое момент силы относительно точки, относительно оси? Поясните рисунками.
5. Как изменится момент силы, если точку приложения силы перенести на какое-то расстояние вдоль линии действия силы? Ответ обоснуйте.

6. Выведите основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела.

7. Дайте определение центра масс тела.

8. Сформулируйте закон движения центра масс.

9. Запишите формулы моментов инерции диска, стержня, шара, цилиндра и полого цилиндра относительно оси, проходящей через центр тяжести тел.

10. Дайте определения моментов инерции материальной точки и твердого тела относительно некоторой оси.

11. Сформулируйте теорему Штейнера. Приведите примеры ее применения.

12. Получите выражение для кинетической энергии тела во вращательном движении.

13. Что представляет собой маятник Максвелла? Опишите характер движения маятника Максвелла.

14. Выведите формулу для определения момента инерции маятника Максвелла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по общему курсу физики. Механика. Статистическая физика и термодинамика. В 2 ч. Ч. 1 / П. Г. Кужир, Н. П. Юркевич и Г. К. Савчук. – Минск: БНТУ, 2014. – 219 с.

2. Физика. Ч. 1. Механика : учебно-методический комплекс для студентов специальностей 1-70 04 01 "Водохозяйственное строительство", 1-70 04 02 "Теплогазоснабжение, вентиляция и охрана воздушного бассейна", 1-70 04 03 "Водоснабжение, водоотведение и охрана водных ресурсов", 1-70 07 01 "Строительство тепловых и атомных электростанций", 1-37 03 02 "Кораблестроение и техническая эксплуатация водного транспорта", 1-70 02 01 "Промышленное и гражданское строительство", 1-70 01 01 "Производство строительных изделий и конструкций", 1-70 02 02 "Экспертиза и управление недвижимостью" / кол. авт. Белорусский национальный технический университет, Кафедра "Физика", сост. Кужир П. Г., сост. Юркевич Н. П., сост. Савчук Г. К., сост. Бибик А. И., сост. Климович И. А., сост. Журавкевич Е. В., сост. Иванов А. А., сост. Баранов А. А., сост. Позняк В. С., сост. Потачиц В. А., сост. Попко С. В. – Электрон. дан. – БНТУ, 2013.

3. Джеммер, М. Понятие массы в классической и современной физике / М. Джеммер. – 2003. – 256 с.

4. Детлаф, А. А. Курс физики: в 3 т. / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Высшая школа, 1973. – Т. 1. – 384 с.

5. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2019. – Т. 1. – 544 с.

6. Матвеев, А. Н. Курс общей физики: в 5 т. / А. Н. Матвеев. – М.: Оникс 21 век, 2003. – Т. 1. – 432 с.

7. Савельев, И. В. Курс общей физики. Механика / И. В. Савельев. – М.: АСТ-Астрель, 2004. – Кн. 1: Механика. – 336 с.

Учебное издание

ДИНАМИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пособие
для студентов специальностей
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 04 02 «Теплогазоснабжение, вентиляция
и охрана воздушного бассейна»,
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение
и охрана водных ресурсов»,
1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены»

В 3 частях

Часть 1

Составители:
ЕСМАН Александр Константинович
КУЖИР Павел Григорьевич
ЮРКЕВИЧ Наталья Петровна и др.

Редактор *Е. О. Германович*
Компьютерная верстка *Е. А. Беспанской*

Подписано в печать 23.03.2020. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,43. Уч.-изд. л. 2,68. Тираж 100. Заказ 261.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.