

## К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

*Докт. техн. наук, проф. БОСАКОВ С. В., асп. ЩЕТЬКО Н. С.*

*Белорусский национальный технический университет*

Многие задачи динамического расчета несущих балок сводятся к исследованию их колебаний как системы с одной степенью свободы [1]. В последнее время в связи с принятием нормативных документов, регламентирующих нелинейные расчеты железобетонных и бетонных конструкций [2], актуальным становится исследование нелинейных колебаний балок. Ниже авторы рассматривают и решают задачу о нелинейных колебаниях балок с различными опорными закреплениями с одной степенью свободы. Предлагаемый энергетический подход может быть реализован для любых видов физических нелинейностей, которые может выдвигать строительная практика.

**Построение координатных функций для балок.** Рассмотрим задачу построения координатных функций [3] для балок с различными опорными закреплениями. Для этого воспользуемся собственными функциями дифференциального уравнения изгибных колебаний стержня

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \lambda^4 y, \quad (1)$$

в котором граничные условия определяются в зависимости от способа закрепления концов балки.

В качестве примера определим собственные числа и фундаментальные координатные функции для консольной балки (рис. 1) при однородных граничных условиях [4]

$$y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (1) записываем в следующем виде [5]:

$$y(x) = C_1 \sin \lambda \frac{x}{l} + C_2 \cos \lambda \frac{x}{l} + C_3 \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{l} + C_4 \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{l}. \quad (3)$$

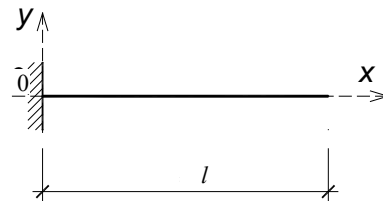


Рис. 1

Выполнив граничные условия, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений для определения совокупности собственных чисел  $\lambda$ :

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0; \\ C_1 + C_3 = 0; \\ -C_1 \sin \lambda - C_2 \cos \lambda + C_3 \operatorname{sh} \lambda + C_4 \operatorname{ch} \lambda = 0; \\ -C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda + C_3 \operatorname{ch} \lambda + C_4 \operatorname{sh} \lambda = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Условия существования ненулевого решения этой системы приводят к определителю

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda & -\cos \lambda & \operatorname{sh} \lambda & \operatorname{ch} \lambda \\ -\cos \lambda & \sin \lambda & \operatorname{ch} \lambda & \operatorname{sh} \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Раскрывая определитель, получаем известное трансцендентное уравнение для определения собственных чисел  $\lambda$  [6, 7]

$$1 + \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda = 0. \quad (6)$$

На рис. 2 показано графическое решение этого уравнения. Вследствие периодичности функции  $\cos\lambda$  существует бесчисленное множество собственных чисел  $\lambda$ :

- $\lambda_1 = 1,87510$ ;
- $\lambda_2 = 4,69409$ ;
- $\lambda_3 = 7,85476$ ;
- .....

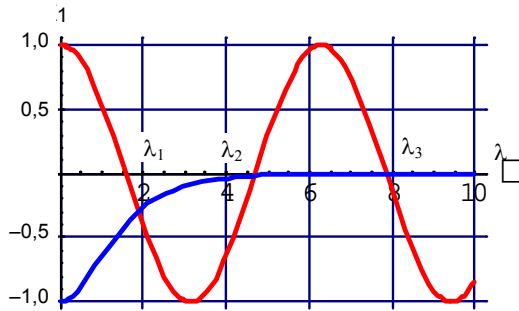


Рис. 2

Для определения собственных функций решим переопределенную систему (4) относительно  $C_i$ . При этом одно из ее уравнений нужно отбросить. После решения системы и подстановки полученных результатов в (3) получим выражение для  $i$ -й координатной функции в следующем виде:

$$y_i(x) = \sin \lambda \frac{x}{l} - \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{l} + \frac{\sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda}{\cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda} \left( \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{l} - \cos \lambda \frac{x}{l} \right). \quad (7)$$

На рис. 3 показаны графики полученных трех первых координатных функций.

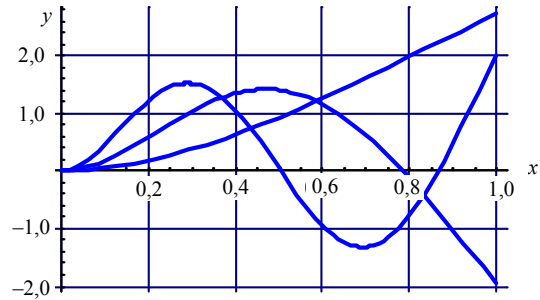


Рис. 3

Подобным образом в [6] определяются координатные функции для оставшихся трех типов балок, используемых в классических задачах строительной механики. Эти результаты с некоторыми дополнениями и изменениями авторов сведены в табл. 1.

Отметим, что в задаче о балке с обоими заземленными концами намеренно смещено начало координат, что позволяет значительно упростить представление координатных функций [6].

Таблица 1

Граничные условия			
$y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0$	$y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0$	$y(0) = y'(0) = y(l) = y''(l) = 0$	$y(0) = y(l) = y'(0) = y'(l) = 0$
Уравнение для определения собственных чисел			
$1 + \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda = 0$	$\sin \lambda = 0$	$\tan \lambda - \operatorname{th} \lambda = 0$	$1 - \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda = 0$
Собственные числа			
$\lambda_1 = 1,87510$	$\lambda_1 = \pi$	$\lambda_1 = 3,9266$	$\lambda_1 = 4,730$
$\lambda_2 = 4,69409$	$\lambda_2 = 2\pi$	$\lambda_2 = 7,0686$	$\lambda_2 = 10,996$
$\lambda_3 = 7,85476$	$\lambda_3 = 3\pi$	$\lambda_3 = 10,210$	$\lambda_3 = 14,137$
Координатные функции			
$y_i(x) = \sin \lambda \frac{x}{l} - \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{l} + \frac{\sin \lambda + \operatorname{sh} \lambda}{\cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda} \left( \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{l} - \cos \lambda \frac{x}{l} \right)$	$y_i(x) = \sin \lambda \frac{x}{l}$	$y_i(x) = \frac{\sin \lambda \frac{x}{l}}{\sin \lambda} - \frac{\operatorname{sh} \lambda \frac{x}{l}}{\operatorname{sh} \lambda}$	$y_i(x) = \frac{\cos \lambda \frac{x}{l}}{\cos \frac{\lambda}{2}} - \frac{\operatorname{ch} \lambda \frac{x}{l}}{\operatorname{ch} \frac{\lambda}{2}}$

**Сведение задачи о нелинейных колебаниях балки с одной степенью свободы к уравнению Дюффинга с мягкой нелинейностью и его решение.** Рассмотрим свободные колебания без учета сил сопротивления шарнирно опертой стальной балки двутаврового поперечного сечения с одной степенью свободы. Будем считать, что материал двутаврового сечения балки подчиняется закону

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma_{\text{lim}}^2} \varepsilon^3, \quad (8)$$

где  $\sigma_{\text{lim}}$ ,  $E$  – предел прочности и начальный модуль упругости материала балки соответственно.

Запишем уравнение свободных незатухающих колебаний массы  $M$ , расположенной посередине балки, в виде

$$M \frac{d^2 Z(x, t)}{dt^2} + R(t) = 0, \quad (9)$$

где  $R(t)$  – возвращающая сила, действующая на массу со стороны балки.

Зададимся законом колебаний балки в виде [7] (табл. 1)

$$Z(x, t) = A(t) \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (10)$$

где  $L$  – пролет балки;  $A(t)$  – неизвестный коэффициент.

Тогда потенциальная энергия изгиба балки выразится формулой [8]

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L dx \iint_{\Omega} \left( E \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{27} \frac{E^3}{\sigma_{\text{lim}}^2} \varepsilon^4 \right) d\Omega = \\ &= \frac{E\pi^4 A^2(t)}{48L^3} (6b_f h^2 t_f + 8b_f t_f^3 + h^3 t_w) - \\ &- \frac{E^3 \pi^8 A^4(t)}{120L^7 \sigma_{\text{lim}}^2} [2b_f (5h^4 t_f + 40h^2 t_f^3 + 16t_f^5) + h^5 t_w], \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\Omega$  – площадь двутаврового сечения;  $h$ ,  $b_f$ ,  $t_f$ ,  $t_w$  – характерные размеры двутавра [8].

На основании теоремы Кастилиано [9] имеем

$$R(t) = \frac{\partial U}{\partial A(t)}. \quad (12)$$

И уравнение (9) принимает вид

$$\ddot{A}(t) + \omega_0^2 A(t) - \alpha^2 A^3(t) = 0, \quad (13)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{1}{M} \frac{\pi^4 E}{24L^3} (6b_f h^2 t_f + 8b_f t_f^3 + h^3 t_w);$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{M} \frac{\pi^8 E^3}{30L^7 \sigma_{\text{lim}}^2} [2b_f (5h^4 t_f + 40h^2 t_f^3 + 16t_f^5) + h^5 t_w].$$

Уравнение (13) известно как уравнение Дюффинга с мягкой нелинейностью [10].

Решение (13) выражается в следующем виде [11]:

$$A(t) = \sqrt{\frac{2C_1}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}} \text{Sn}(u(t), m); \quad (14)$$

$$u(t) = \frac{C_2 + t}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}};$$

$$m = \frac{\omega_0^2 - \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}},$$

где  $\text{Sn}(u, m)$  – эллиптическая функция Якоби [12].

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из начальных условий следующим образом. При начальной скорости массы  $v_0 \neq 0$  графическое представление решения уравнения свободных колебаний балки (14) с одной степенью свободы примет вид, представленный на рис. 4. Тогда на основании (14) получаем при  $t = 0$   $v_0 = 0$  из условия, что  $|S_n(u, m)| \leq 1$ :

$$\frac{2C_1}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}} = Z_0^2. \quad (15)$$

Откуда следует:

$$\frac{2C_1}{Z_0^2} - \omega_0^2 = \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1};$$

$$\left(\frac{2C_1}{Z_0^2} - \omega_0^2\right)^2 = \omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1. \quad (16)$$

Таким образом, для нахождения  $C_1$  получено уравнение

$$\frac{4C_1^2}{Z_0^4} - 4\frac{C_1}{Z_0^2}\omega_0^2 + 2\alpha^2 C_1 = 0. \quad (17)$$

Для определения  $C_2$  находим первый нуль эллиптического синуса  $Sn(u, m)$  [12]

$$\frac{C_2 + t}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}} = 0, \quad (18)$$

при  $t = -C_2$   $Sn(u, m) = 0$ . Поэтому на графике (рис. 4)  $C_2$  характеризует отрезок от начала координат до первой нулевой точки на левой временной оси.

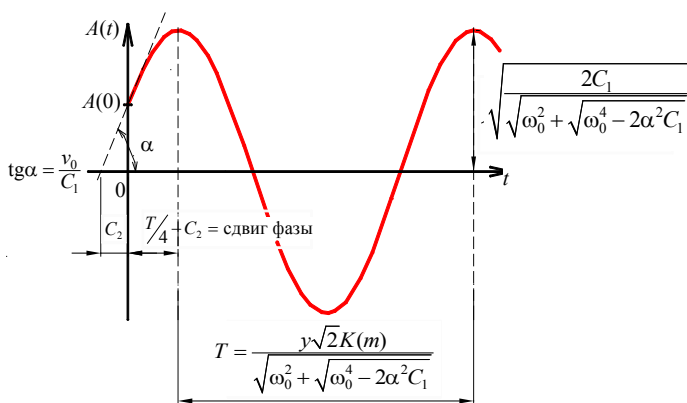


Рис. 4

Для определения  $C_1$  и  $C_2$  принимаем в момент времени  $t = 0$  вертикальное перемещение массы и ее начальную скорость равными  $Z = Z_0$  и  $v = v_0$ , т. е.

$$\text{при } t = 0 \quad A(0) = Z_0; \quad \dot{A}(0) = v_0. \quad (19)$$

Тогда, выполняя начальные условия (19), получаем систему из двух нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2C_1}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}} Sn(u(0), m) = Z_0; \\ \sqrt{C_1} Cn(u(0), m) Dn(u(0), m) = v_0, \end{cases} \quad (20)$$

где  $Cn(u, m)$ ,  $Dn(u, m)$  – также эллиптические функции Якоби [12].

На основании (17) и (18) (рис. 4) получаем начальные приближения для итерационного решения нелинейной системы уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 &= Z_0^2 \left( \omega_0^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 Z_0^2 \right); \\ C_2 &= \frac{1}{4} \frac{4\sqrt{2}K(m)}{\sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $m$  определяется по (14).

Система (20) легко решается численными методами [13]. После решения системы можно определить амплитуду  $A$  и период колебаний  $T$  массы  $M$  на балке. Действительно, так как  $|Sn(u, m)|$  – функция периодическая и

$$|Sn(u, m)| \leq 1, \quad (22)$$

то амплитуда колебаний массы  $M$  на балке будет равна

$$A = \sqrt{\frac{2C_1}{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}}. \quad (23)$$

Ввиду очевидного равенства [12] имеем

$$\begin{aligned} (C_2 + t + T) \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}}{\sqrt{2}} &= \\ = (C_2 + t) \frac{\sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}}{\sqrt{2}} + 4K(m), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $K(m)$  – полный эллиптический интеграл [12]. После упрощений из (24) получаем формулу для определения периода колебаний массы на балке

$$T = \frac{4\sqrt{2}K(m)}{\sqrt{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 2\alpha^2 C_1}}}. \quad (25)$$

Отметим, что результаты, полученные в [14], и результаты численного расчета [15] согласуются с полученными авторами в настоящей работе.

В качестве примера рассмотрим балку из двутавра 30Б2  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\sigma_{lim} = 4 \cdot 10^8$  Па;  $L = 6$  м;  $M = 110$  кг;  $Z_0 = 0,03$  м;  $v_0 = 0,5$  м/с. С помощью пакета Mathematica-5 [13] получено:

$$\alpha = 526,073 \frac{1}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}; \quad \omega_0 = 119,681 \frac{1}{\text{с}};$$

$$C_1 = 13,14121 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2};$$

$$C_2 = 0,0119687 \text{ с}; \quad A = 0,030321 \text{ м}; \\ T = 0,0525813 \text{ с}.$$

На рис. 5 приведены графики колебаний массы  $M$  на балке в линейной ( $\sigma = E\varepsilon$ ) и нелинейной (8) постановках (1 – нелинейные колебания, 2 – линейные).

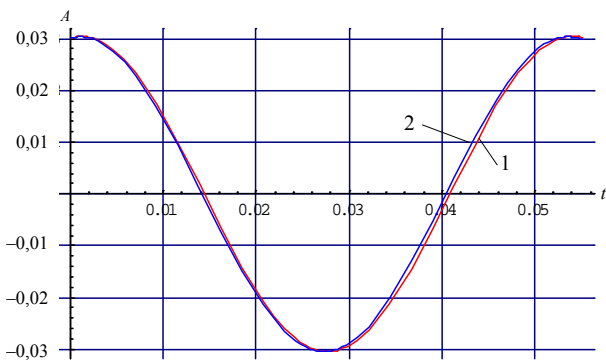


Рис. 5. Графики колебаний массы в линейной и нелинейной постановках

### ВЫВОДЫ

1. В статье излагается подход, позволяющий исследовать нелинейные колебания одномассовых балочных систем.

2. Получены точные формулы для периода и амплитуды колебаний шарнирно опертой балки с одной степенью свободы из физически нелинейного материала, что может найти применение при динамических расчетах строительных конструкций.

3. Предложенная методика может быть применена ко всем без исключения нелинейным колебаниям одномассовых систем. Отличие может заключаться в способах определения возвращающей силы  $R(t)$ , где в ряде случаев полезно воспользоваться результатами [16].

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Киселев, В. А.** Строительная механика: спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений / В. А. Киселев. – М.: Мир, 1980. – 548 с.
2. **Бетонные и железобетонные конструкции:** СНБ 5.03.01–02. – Минск, 2003. – 139 с.
3. **Ректорис, К.** Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
4. **Пановко, Я. Г.** Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – М.: Наука, 1991. – 255 с.
5. **Босаков, С. В.** Метод Рунге в примерах и задачах по строительной механике и теории упругости / С. В. Босаков. – Минск: БГПА, 2000. – 144 с.
6. **Фаддеева, В. Н.** О фундаментальных функциях оператора  $x^{IV}$  / В. Н. Фаддеева // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1949. – Т. XXVIII. – С. 157–159.
7. **Тимошенко, С. П.** Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
8. **Босаков, С. В.** К теории свободных колебаний балок из физически нелинейного материала / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Вестник БНТУ. – 2006. – № 1. – С. 10–14.
9. **Ржаницын, А. Р.** Строительная механика / А. Р. Ржаницын. – М.: Высш. шк., 1991. – 438 с.
10. **Найфэ, А.** Методы возмущений / А. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
11. **Камке, Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – 6-е изд. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
12. **Янке, Э.** Специальные функции / Э. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1968. – 344 с.
13. **Кулешов, А. А.** Уравнения математической физики в системе Mathematica / А. А. Кулешов. – Минск: БГУ, 2004. – 294 с.
14. **Морозов, А. Д.** К вопросу о полном качественном исследовании уравнения Дюффинга / А. Д. Морозов // Журнал вычислительной математики и математической физики. АН СССР. – 1973. – Т. 13, № 5. – С. 1134–1152.
15. **Hayashi, С.** Periodic solutions of Duffing's equation with reference to doubly asymptotic solutions / С. Hayashi, Y. Ueda, H. Kawakami // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1970. – № 2. – С. 507–521.
16. **Босаков, С. В.** Об одном свойстве зависимости «момент – кривизна» для балок и его использовании в инженерных расчетах / С. В. Босаков, Н. С. Щетько // Строительная наука и техника. – 2006. – № 1. – С. 58–61.

Поступила 22.02.2007