ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ СРЕД ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ: АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА, ПРИЛОЖЕНИЯ

Н. Н. РОГОВЦОВ

Введение. Понятие об инвариантности (и его частном случае симметрии) физических объектов, процессов или математических конструкций по отношению к некоторым операциям играет в современной науке фундаментальную роль. Наиболее важный шаг, который нужно сделать в большинстве случаев при проведении исследований в определенной области на основе указанного понятия, состоит в введении операций, оставляющих инвариантными (в частности, неизменными) изучаемые объекты или математические конструкции. Утверждения, указывающие на инвариантность чего-либо при выполнении определенных операций, обычно называют принципами инвариантности (ПИ). Следствия же из них, которые носят более частное содержание, будем именовать соотношениями инвариантности. Отметим, что ПИ не только сами по себе несут фундаментальную информацию, но и выполняют ряд полезных функций, например, эвристических и отбора. Заметим, что алгебраический подход оказался тем математическим аппаратом, на основе которого удалось весьма удобно описать и понять круг идей, связанных с частным случаем инвариантности, а именно с понятием симметрии. Сначала это было сделано в кристаллографии и геометрии, а затем и в теоретической физике. Следует, однако, подчеркнуть, что в данных областях при формулировке ПИ и получении их следствий, в основном, использовалась теория групп и теория представлений групп (см., например, [1]). Исключением является работа [2], где дополнительно к групповым преобразованиям привлекались преобразования двойственности, описываемые булевой алгеброй. Как будет показано ниже, указанные алгебраические понятия недостаточны для формулировки ПИ в теории переноса.

Впервые рассмотрение проблем теории переноса излучения для случая плоскопараллельных сред с точки зрения ПИ было выполне но В. А. Амбарцумяном [3—6]. Им были внесены в теорию переноса излучения ряд новых элементов. Он ввел операции, оставляющие инвариантными искомые характеристики поля излучения в плоскопараллельных средах (при этом в работе [3] был предложен метод «сложения слоев» и сформулирован первый ПИ в теории переноса), и схему, описывающую «взаимодействие» подслоев, на которые операции разбивали исходный слой. К тому же было показано, что указанные операции и схема «взаимодействия» позволяют получить нетривиальные следствия и решить ряд задач теории переноса излучения, ранее не поддававшиеся аналитическому рассмотрению. Бо́льшая часть последующих работ, где формулировались ПИ, и была посвящена обобщению в различных направлениях указанных выше конструктивных элементов. Существенное развитие теории переноса в этом направлении было выполнено в работах [7—9, 11, 12, 14—36]. При этом за исключением работ [11, 18, 24, 31, 34—36] рассматривались задачи для плоских сред.

В данной работе проведено построение множества операций, оставляющих инвариантными поля излучения в рассеивающих, поглощающих телах любой конфигурации, а также указана их алгебраическая природа. Приведена обобщенная формулировка принципа инвариантности [см. также 35], включающая в себя наиболее существенные аспекты данных ранее в теории переноса его формулировок. Для случая произвольных рассеивающих объектов найдены общие следствия ПИ в виде соотношений инвариантности и даны некоторые их приложения. Данное обобщение по существу является непосредственным развитием указанных выше конструктивных элементов метода, введенного в теорию переноса В. А. Амбарцумяном.

Алгебраическая трактовка принципа инвариантности. Рассмотрим множество $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$, элементами которого являются произвольные рассеивающие, поглощающие объемы V_α (α определяет расположение, внешнее окружение, физические и геометрические свойства самого V_α и т. д.; A —множество индексов). Элементы множества $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ будем считать равными, если они полностью идентичны в геометрическом и физическом смыслах во всех точках, принадлежащих им. Отношение равенства разбивает множество $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на классы эквивалентности. Заметим, что эквивалентность тел может определяться разными физическими и геометрическими причинами, в частности симметрией, которая описывается в рамках теории групп. Фактор-множество множества $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ по введенному отношению эквивалентности обозначим через $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ (B—множество индексов). Обозначим через σ_β границу V_β, причем будем считать ее носителем геометрических и физических свойств. Предположим, что σ_β можно представить в виде объединения конечного или счетного числа поверхностей, для которых можно ввести понятие стороны и которые имеют нормали, причем направление нормали для заданной стороны согласуется с переходом через поверхность к другой стороне. Любая часть σ_β может быть подстилающей поверхностью, т. е. такой поверхностью, для которой локальные операторы отражения R и пропускания T не могут быть одновременно соответственно нулевым и единичным (локальные операторы определяют свойства выбранной стороны поверхности в окрестности точки, лежащей на ней; в статье [34] использовалось более общее определение подстилающей поверхности, а именно, часть поверхности σ_β считалась таковой, если хотя бы доля излучения, падающего на нее изнутри V_β каким-либо образом опять попадала в V_β). Пусть задано множество $\{S_j\}_{j\in J}$ поверхностей, каждая из которых в произвольный момент времени t имеет меру нуль в любом ограниченном подмножестве пространства R^3 (под мерой здесь и в дальнейшем будем понимать меру в R^3; J —соответствующее множество индексов). Будем считать, что положение элементов множеств $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$, $\{S_j\}_{j\in J}$ задается в одной и той же системе отсчета. Теперь введем следующие совокупности унарных операций над множеством $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$:

а. Сечение каждого объема $V_\beta \in C$ (C — любое подмножество $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$) поверхностью $(S_j \cap V_\beta)$, не вносящей дополнительных разрывов в физические характеристики к уже имеющимся в V_β. Элементы, принадлежащие $\{V_\beta\}_{\beta\in B} \setminus C$ остаются без изменений;

б. Замена влияния каждой $\sigma_\beta(V_\beta \in D$, где D — любое подмножество $\{V_\beta\}_{\beta\in B})$ на поле излучения в V_β другой границей, в геометрическом смысле совпадающей с σ_β и на которой расположены излучатели и поглотители. Первые соответственно испускают излучение, равное реализующемуся в исходном объеме V_β и идущего от σ_β в любой выбранной на ней точке в направлениях, определяемых лучами, исходящими из нее и которые пересекают все области $V_\beta \cap E$ (E — любая окрестность данной точки в R^3, а $\mathring{V}_\beta$ – внутренность множества V_β). Поглотители полностью поглощают падающее на них с любого направления излучение. Элементы, принадлежащие $\{V_\beta\}_{\beta\in B} \setminus D$, остаются при этом неизменными;

в. Замена влияния части $\bar\sigma_\beta(\bar\sigma_\beta \subseteq \sigma_\beta)$ каждой границы $\sigma_\beta(V_\beta \in H$, где H — любое подмножество $\{V_\beta\}_{\beta\in B})$ на поле излучения в V_β другой границей $\tilde\sigma_\beta$, в геометрическом смысле совпадающей с $\bar\sigma_\beta$ и на которой расположены излучатели и поглотители. Поглотители полностью поглощают падающее на них излучение. Излучатели испускают излучение, равное реализующемуся в исходном объеме V_β и идущее от $\bar{\gamma}$ в любой выбранной на ней точке в направлениях, определенных лучами, исходящими из нее и которые пересекают все области $V_\beta\bigcap E$ или $(R^3\setminus V_\beta)\bigcap E$ (E – любая окрестность данной точки в R^3). При этом элементы множества $\{V_\beta\}_{\beta\in B}\setminus H$ остаются без изменений;

г. Любая упорядоченная последовательность операций, определенных пунктами а., б., в.

Операции по определению считаются равными, если они переводят равные тела в равные. Множество унарных операций над $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$, введенных выше, обозначим через $\mathcal{R}$. Элементы $e\in\mathcal{R}$ задают отображения $e:\{V_\beta\}_{\beta\in B}\to\{V_\beta\}_{\beta\in B}$. Относительно бинарной операции композиции отображений множество $\mathcal{R}$ является полугруппой. Подполугруппа $\rho\subset\mathcal{R}$, которая содержит только элементы типа а., когда $C=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$, и любые упорядоченные последовательности таких операций, являются регулярной абелевой полугруппой (определение см, например, в работе [37]).

Алгебраическую формулировку принципа инвариантности дадим в следующем виде: поле излучения в любом ограниченном подмножестве каждого $V_\beta\in\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ почти везде инвариантно относительно унарных операций, являющихся элементами полугруппы $\mathcal{R}$.

Заметим, что полугруппу $\mathcal{R}$ и даже подполугруппу ρ нельзя доопределить до группы, т. к. они содержат операции, отображающие различные элементы множества $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ в равные. Из сказанного следует, что в работах В. А. Амбарцумяна было положено начало исследованиям, с алгебраической точки зрения выходящим за рамки традиционного группового описания понятия об инвариантности и его следствий. Отметим, что в работах [3, 6] кроме сугубо полугрупповой операции была фактически использована также и групповая операция (трансляция).

Соотношения инвариантности. Сформулируем на основе ПИ общие соотношения инвариантности в рамках скалярного варианта теории переноса и без учета перераспределения излучения по частотам. Ограничимся также рассмотрением объемов, не меняющих своих параметров с течением времени. Отказ от этих ограничений не является принципиальным, однако, вносит в соотношения инвариантности существенные упрощения.

Пусть внутри V_β содержатся источники излучения $g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ ($\vec{r}$, $\vec{\Omega}$—соответственно радиус-вектор, единичный вектор, задающий направление) и в начальный момент времени интенсивность излучения $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t, V_\beta)$ в V_β равна $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, 0, V_\beta)$. Будем считать, что параметры среды в V_β не зависят от поля излучения, а на σ_β и вне V_β могут от них зависеть. Применим к $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ операцию б., когда $D=\{V_\beta\}$. Поле излучения в V_β при этом не изменится (см. ПИ), а V_β отобразится в объем $V_{\beta_1}(\beta_1 \in B)$, который отличается от V_β только свойствами границы. Из $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ всегда можно выбрать такой объем V_{β_3}, который содержит часть с точки зрения свойств среды и источников идентичную V_{β_2} (V_{β_2} есть V_{β_1}, из которого удалены поглотители и на их место «поставлена» подстилающая поверхность σ_{β_2} с заданными линейными локальными операторами отражения и пропускания), а в $V_{\beta_3} \setminus V_{\beta_2}$ обладает любыми физически допустимыми характеристиками, но не зависящими от поля. Для упрощения положим $g_{\beta_3}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \equiv 0$ вне V_{β_2}. Применив к $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ операцию а., когда $C=\{V_{\beta_3}\}$, а $S_j=\sigma_{\beta_2}$ (равенство понимается только в геометрическом смысле), разобъем V_{β_3} на три подсистемы V_{β_2}, σ_{β_2} и $V_{\beta_3} \setminus V_{\beta_2}$ (эта операция не изменяет поля в V_{β_3}; см. ПИ). Интенсивность $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t, V_{\beta_3})$ излучения в V_{β_3} можно представить двумя способами. Предварительно заметим, что наличие начального поля излучения интенсивности $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, 0, V_\beta)$ в V_β эквивалентно заданию объемных источников вида $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, 0, V_\beta)(v(\vec{r}))^{-1}\delta(t)$, где $v(\vec{r})$ — скорость распространения излучения (символом $\delta(\ldots)$ здесь и везде далее будем обозначать δ-функции). Интенсивность $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t, V_{\beta_3})$ полностью определяется первичными источниками $[g_\beta(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)+I(\vec{r}, \vec{\Omega}, 0, V_\beta)(v(\vec{r}))^{-1}\delta(t)]$ в V_{β_2}, излучателями, расположенными на σ_{β_2}, и функцией Грина $G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', t, \sigma_{\beta_2}, V_{\beta_3})$ уравнения переноса для случая объема V_{β_3}. Подчеркнем, что функции Грина $G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', t, \sigma_{\beta_2}, V_{\beta_3})$ и $G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', t, \sigma_{\beta_2}, V_{\beta_4})$ для объемов V_{β_3} и V_{β_4} равны (V_{β_4} есть объем V_{β_3}, из которого удалены излучатели). Поле излучения в V_{β_3} можно записать, рассматривая «взаимодействие» указанных подсистем. Оно равно сумме двух слагаемых. Первое равно интенсивности поля в исходной задаче для V_β, причем оно совпадает с той интенсивностью излучения, которая возникает за счет фотонов, испущенных в пределах V_{β_2} и непересекающих в процессе многократного рассеяния границу σ_{β_2} до прихода их в точку наблюдения в $\mathring{V}_{\beta_2}$ (это следует из ПИ). При этом под пересечением фотона границы σ_{β_2} понимается переход через нее и отражение от σ_{β_2}. Второе слагаемое дает ту часть вклада в общее поле излучения в V_{β_4}, которая образуется в V_{β_4} за счет выхода тех фотонов, которые испущены исключительно в V_{β_2} и многократно рассеяны только в V_{β_2} до прихода их в точку наблюдения в $\hat{V}_{\beta_2}$ или σ_β (интенсивность излучения, появившегося таким образом и падающего на σ_{β_2} из V_{β_2}, равна той, которая реализуется на σ_β в V_β, т. е. $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t, V_\beta)$, см. ПИ), за пределы V_{β_2} и последующего случайного блуждания их во всем объеме V_{β_4}. Для случая плоскопараллельной среды аналогичные рассуждения при получении соотношений инвариантности были впервые применены в работе [33]. Приравнивая выражения для $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t, V_\beta)$, полученные указанными выше способами, приходим к следующему соотношению инвариантности общего типа

$$\Theta_{V_\beta}(\vec{r})I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t, V_\beta) = \iiint\limits_{V_\beta^0} dV' \int\limits_{\Omega} d\Omega' \int\limits_0^t G_*(\ldots, t-t', \sigma_{\beta_2}, V_{\beta_4})g_\beta(\ldots)dt' -$$

$$- \iint\limits_{\sigma_\beta(V_\beta)} d\sigma' \int\limits_{\Omega} (\vec{n}' \cdot \vec{\Omega}')d\Omega' \int\limits_0^t G_*(\ldots, t-t', \sigma_{\beta_2}, V_{\beta_4}) I(\vec{r}', \vec{\Omega}', t', V_\beta)dt' + \qquad (1)$$

$$+ \iiint\limits_{V_\beta^0} dV' \int\limits_{\Omega} G_*(\ldots, t, \sigma_{\beta_2}, V_{\beta_4}) (v(\vec{r}'))^{-1} I(\vec{r}', \vec{\Omega}', 0, V_\beta)d\Omega',$$

где $G_*(\ldots, t, \sigma_{\beta_2}, V_{\beta_4}) = G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', t, \sigma_{\beta_2}, V_{\beta_4}), g_\beta(\ldots) = g_\beta(\vec{r}', \vec{\Omega}', t')$;

$\Theta_{V_\beta}(\vec{r})$ – характеристическая функция множества (см., например, [38]); $\vec{n}'$ – внешняя нормаль к σ_β в точке, заданной $\vec{r}'$. Интегрирование в поверхностном интеграле в (1) проводится по $\sigma_\beta(V_\beta)$, указывающей все стороны поверхностей, объединение которых есть σ_β, соприкасающиеся с V_β. В качестве пояснения подчеркнем еще, что все мысленные операции, производимые над телами при получении (1), должны выполняться мгновенно и в один и тот же момент. Из (1) можно получить ряд полезных соотношений инвариантности, если конкретизировать свойства σ_β, σ_{β_2}, V_β, V_{β_4} и исходные данные о первичных источниках.

1. Если $V_\beta \subseteq V_{\beta_1}$ (т. е. V_β является реально частью V_{β_1} и σ_{β_2} имеет те же локальные операторы отражения и пропускания, что и σ_β), $g_\beta(\dots)=\delta(t')\times\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_1)\delta(\vec{\Omega}'-\vec{\Omega}_1)$, то имеем из (1)

$$\Theta_{V_\beta}(\vec{r})G_*(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{r}_1,\vec{\Omega}_1,t,\sigma_\beta,V_{\beta_1})=$$

$$=\Theta_{\bar{V}_\beta}(\vec{r}_1)G_*(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{r}_1,\vec{\Omega}_1,t,\sigma_\beta,V_{\beta_1})- \tag{2}$$

$$-\iint\limits_{\sigma_\beta(\bar{V}_\beta)}d\sigma'\int\limits_{\Omega}(\vec{n}\,'\cdot\vec{\Omega}')d\Omega'\int\limits_0^t G_*(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{r}\,',\vec{\Omega}',t-t',\sigma_\beta,V_{\beta_1})\times$$

$$\times G_*(\vec{r}\,',\vec{\Omega}',\vec{r}_1,\vec{\Omega}_1,t',\sigma_\beta,V_{\beta_1})dt'.$$

При выводе (2) предполагалось также, что свойства V_β и V_{β_1} не зависят от поля излучения. В остальном они могут быть произвольными.

2. Пусть $\sigma_\beta=\sigma_{\beta'}\cup\sigma_{\beta''}$, $\sigma_{\beta'}\cap\sigma_{\beta''}$ — кривая линия или пустое множество $\varnothing$, $\sigma_{\beta'}$ — поглотитель, $\sigma_{\beta''}$ — часть σ_β, для которой операторы R и T равны соответственно нулевому и единичному почти во всех точках $\sigma_{\beta''}$ (т. е. почти везде на $\sigma_{\beta''}$ $R=0$ и $T=E$); $\sigma_{\beta_2}=\sigma_{\gamma'}\cup\sigma_{\gamma''}$, $\sigma_{\gamma'}$ и $\sigma_{\gamma''}$ в геометрическом смысле идентичны соответственно $\sigma_{\beta'}$ и $\sigma_{\beta''}$; на $\sigma_{\gamma'}$ почти везде $R=0$, $T=E$, $\sigma_{\gamma''}$ — поглотитель ($\beta',\beta'',\gamma',\gamma''\in B$). Тогда из (1) получаем

$$\Theta_{V_\beta}(\vec{r})I(\vec{r},\vec{\Omega},t,V_\beta)=\iiint\limits_{\bar{V}_\beta}dV'\int\limits_{\Omega}d\Omega'\int\limits_0^t G_*(\dots,t-t',\sigma_{\beta_2},V_{\beta_1})g_\beta(\dots)dt'-$$

$$-\iint\limits_{\sigma_{\beta'}(\bar{V}_\beta)}d\sigma'\int\limits_{\Omega+}(\vec{n}\,',\vec{\Omega}')d\Omega'\int\limits_0^t G_*(\dots,t-t',\sigma_{\beta_2},V_{\beta_1})I(\vec{r}\,',\vec{\Omega}',t',V_\beta)dt'- \tag{3}$$

$$-\iint\limits_{\sigma_{\beta''}(\bar{V}_\beta)}d\sigma'\int\limits_{\Omega-}(\vec{n}\,',\vec{\Omega}')d\Omega'\int\limits_0^t G_*(\dots,t-t',\sigma_{\beta_2},V_{\beta_1})I(\vec{r}\,',\vec{\Omega}',t',V_\beta)dt'+$$

$$+\iiint\limits_{\bar{V}_\beta}dV'\int\limits_{\Omega}G_*(\dots,t,\sigma_{\beta_2},V_{\beta_1})(v(\vec{r}\,'))^{-1}I(\vec{r}\,',\vec{\Omega}',0,V_\beta)d\Omega'.$$

Интегрирование в (3) проводится по тем сторонам кусков поверхностей (их объединение есть $\sigma_{\beta'}$ и $\sigma_{\beta''}$), которые соприкасаются с V

(это и отражено в обозначениях $\sigma_{\beta}(V_{\beta})$ и $\sigma_{\beta'}(\overset{\circ}{V}_{\beta})$); Ω_+ и Ω_- задают полусферы, которые задаются соответственно условиями $(\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}') > 0$ и $(\vec{\Omega}' \cdot \vec{n}') < 0$.

3 Если $\sigma_{\beta_1} = \sigma_{\beta}$ или $\sigma_{\beta_2} = \sigma_{\beta}$, $I(\vec{r}', \vec{\Omega}', 0, V_{\beta}) = 0$, то выражение (3) переходит соответственно в соотношения инвариантности «первого» или «последнего» пересечения (для случая плоскопараллельных сред такие соотношения встречаются, например, в работе [29]; на основе вероятностных соображений такого типа соотношения независимо были получены также Пикичяном).

4. Соотношение инвариантости (1) существенно упрощается, когда $R=0$ и $T=E$ на σ_{β_2}. Если дополнительно к этому объем V_{β} в $\overset{\circ}{V}_{\beta_2}$ и объем V_{β_1} вне V_{β} не имеют подстилающих поверхностей, то можно получить ряд соотношений инвариантности, отличающихся по форме от (1) (см. [34]). Выпишем для примера одно соотношение инвариантности из этой работы

$$\Theta_{V_\beta}(\vec{r}) I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t, V_\beta) = \int\int\limits_{V_\beta}\int dV' \int\limits_{\Omega} d\Omega' \int\limits_{0}^{t} G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', t-t' V_{\beta_1}, \bar{\xi}_0) \times$$

$$\times [g_\beta(\vec{r}', \vec{\Omega}', t') + (v(\vec{r}'))^{-1} I(\vec{r}', \vec{\Omega}', 0, V_\beta)\delta(t')] dt' - \tag{4}$$

$$-\int\int\limits_{\sigma_\beta(\bar{\xi}_0)} d\sigma' \int\limits_{\Omega} (\vec{n}' \cdot \vec{\Omega}') d\Omega' \int\limits_{0}^{t} G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', t-t', V_{\beta_1}, \bar{\xi}_0) I(\vec{r}', \vec{\Omega}', t', V_\beta) dt'.$$

В отличие от (1) здесь $G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', t, V_{\beta_1}, \bar{\xi}_0)$ — усеченная функция Грина, введенная в работах [33, 34]. В данных статьях была поставлена и в известной мере решена задача о восстановлении поля излучения внутри произвольной среды по его характеристикам на границах тела. Соотношения инвариантности, полученные в этих работах на основе физических рассуждений и метода инвариантного доопределения, и давали решение задачи о восстановлении. Интересно отметить, что задача, решенная Кирхгофом [см., например, 39] с целью обоснования принципа Гюйгенса-Френеля, имеет по своей постановке формально много общего с указанным выше вопросом.

5. Пусть $R=0$, $T=E$ на σ_{β} и σ_{β_2}; в V_{β} и V_{β_1} отсутствуют подстилающие поверхности, $g_\beta(\ldots)=0$; $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, 0, V_\beta)=0$. Тогда с учетом прин-

ципа взаимности (см. [12]) из (1) или (4) можно получить такое соотношение инвариантности:

$$\iint\limits_{\sigma_3(\Gamma_3^*)} d\sigma' \int\limits_{\Omega} (\vec{n}' \cdot \vec{\Omega}')d\Omega' \int\limits_0^t I_1(\vec{r}', \vec{\Omega}', t-t', V_{3_4}) I(\vec{r}', -\vec{\Omega}', t', V_3)dt' = 0, \quad (5)$$

где $I_1(\ldots)$ — интенсивность излучения в объеме V_{3_4} при произвольном внешнем облучении V_{3_4} $(t \geqslant 0)$.

Замечание 1. Для получения соотношений инвариантности для стационарного случая достаточно в выписанных соотношениях положить $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, 0, V_3) = 0$ и заменить свертки функций произведением их стационарных аналогов.

Замечание 2. Для вывода следствий ПИ в дифференциальной форме (в отличие от интегральной, описанной выше) надо рассматривать последовательности или семейства, зависящие от некоторых параметров, операций, принадлежащих $\mathscr{R}$. Отметим, что в работах [33—35] получены соотношения инвариантности, содержащие функцию источников, а также одно общее соотношение инвариантности другого типа.

Замечание 3. Соотношения инвариантности (2) и (5) являются специфическими «нелинейными интегралами» уравнения переноса.

Приложения. Кратко сформулируем ряд следствий соотношений инвариантности, приведенных выше.

1. **Формула удвоения.** Рассмотрим однородный рассеивающий объем V_3 с невогнутой полностью прозрачной для излучения границей $\sigma_{3'}$. Предположим, что после проведения сечения V_3 поверхностью σ_3, которая получена из σ_3 посредством трансляции на вектор $\vec{a}$ вглубь среды, из V_3 можно выделить часть $V_{3'}$, в геометрическом смысле совпадающую с V_3 с точностью до трансляции на вектор $(-\vec{a})$. Следствием соотношения инвариантности типа «последнего пересечения» является в этом случае следующая формула удвоения:

$$G_{\sigma_3}(\vec{r}^*_{\sigma_3} + 2\vec{a}, \vec{\Omega}, \vec{r}_{\sigma_3}, \vec{\Omega}_{\sigma_3}, t, V_3) = \quad (6)$$

$$= \int\limits_{\sigma_3(\bar{V})} d\sigma'' \int\limits_{\Omega-} d\Omega' \int\limits_0^t G_{\sigma_3}(\vec{r}^*_{\sigma_3} + \vec{a}, \vec{\Omega}, \vec{r}'', \vec{\Omega}', t-t', V_3) G_{\sigma_3}(\ldots)dt'.$$

Здесь $G_{\sigma_3}(\ldots) = G_{\sigma_3}(\vec{r}'' + \vec{a}, \vec{\Omega}', \vec{r}_{\sigma_3}, \vec{\Omega}_{\sigma_3}, t', V_3)$ поверхностная функция

Грина объема V_β; $\vec{r}^*_{\sigma_\beta}$ и $\vec{r}_{\sigma_\beta}$ задают точки на σ_β. Из (6) видно, что $G_{\sigma_\beta}(\ldots)$ на бо́льших глубинах, отсчитываемых от границы вдоль направления, определенного вектором $\vec{a}$, выражается через свои "значения" на меньших глубинах.

2. **Связь функции Грина конечного объема с функцией Грина на бесконечной среды и обобщенным коэффициентом яркости.**

Если σ_β полностью прозрачна для излучения, то с учетом принципа взаимности из (1) или (4) можно получить

$$G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, t, \sigma_\beta, V_\beta) = G^*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, t, V_\infty) - \tag{7}$$

$$-\iint\limits_{\sigma_\beta(\vec{r}_\beta)} d\sigma' \int\limits_{\Omega_+} (\vec{n}', \vec{\Omega}')d\Omega' \int\limits_0^t G_*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}', t-t', V_\infty) G_*(\vec{r}', \vec{\Omega}', \vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, t', \sigma_\beta, V_\beta)dt';$$

$$G_*(\vec{r}', \vec{\Omega}', \vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, t, \sigma_\beta, V_\beta) = G^*(\vec{r}', \vec{\Omega}', \vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, t, V_\infty) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\sigma_\beta(\vec{r}_\beta)} d\sigma'' \int\limits_{-\Omega} (\vec{n}'' \cdot \vec{\Omega}'')\left(\int\limits_0^t G_*(\vec{r}'', \vec{\Omega}'', \vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, t-t', V_\infty)\mathrm{P}(\ldots)dt'\right)d\Omega'',$$

где $\mathrm{P}(\ldots) = \mathrm{P}(\vec{r}'', \vec{\Omega}'', \vec{r}', \vec{\Omega}', t', \sigma_\beta, V_\beta) = (\pi/|\vec{n}' \cdot \vec{\Omega}'|)G_{\sigma_\beta}(\vec{r}'', -\vec{\Omega}'', \vec{r}', -\vec{\Omega}', t', V_\beta)$ – обобщенный коэффициент яркости, V_∞ – бесконечная среда; векторы $\vec{r}$, $\vec{r}^*$ и $\vec{r}'$, $\vec{r}''$ задают точки, лежащие соответственно в V_β и на σ_β. Заметим, что функция Грина для бесконечной среды и $\mathrm{P}(\ldots)$ – канонические функции теории переноса.

3. **Обобщенные поглощательные способности рассеивающих тел произвольной формы.** По определению под обобщенной поглощательной способностью тела V_β будем понимать отношение

$$a_{V_\beta}(\vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, t, V_{\beta_1}) = (E_0(t))^{-1}[\Theta(\vec{r}_\beta)(\vec{r}^*)E_0(t) - E_{\sigma_\beta}(\vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, t, V_\beta, V_{\beta_1})], \tag{8}$$

где $E_0(t)$ – энергия, испускаемая в единицу времени точечным мононаправленным или изотропным (в этом случае из обозначения для $a_{V_\beta}(\ldots)$ будем убирать $\vec{\Omega}^*$) источником, который расположен в $\mathring{V}_\beta$, на σ_β или вне причем V_β может быть частью объема V_{β_1} ($\beta_1 \in B$); $\vec{r}^*$ и $\vec{\Omega}^*$ задают координаты источника); $E_{\sigma_\beta}(\ldots)$ – энергия, выходящая в единицу времени за пределы V_β через σ_β. Если границы объемов V_β и

V_{β_1} полностью прозрачны для излучения и $E_0(t)$ пропорционально $\varphi(t)$ (предполагаем, что функция $\varphi(t)=0$ при $t<0$, дифференцируема при $t>0$ и имеет размерность интенсивности излучения), то следствием соотношения инвариантности (2) является такое выражение

$$\varphi(t)a_{V_\beta}(\vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, t, V_{\beta_1})= \tag{9}$$

$$=\iiint\limits_{V_\beta} dV \int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_0^t G_\beta(\vec{r}^*, -\vec{\Omega}^*, \vec{r}, \vec{\Omega}, t, -t', \sigma_1, V_{\beta_1})[(\alpha(\vec{r})-$$

$$-\sigma(\vec{r}))\varphi(t')+\frac{1}{v(\vec{r})}(\varphi(0)\delta(t')+\varphi'(t'))]dt',$$

где $\alpha(\vec{r})$, $\sigma(\vec{r})$ —коэффициенты ослабления и рассеяния. Формула (9) является одним из обобщений классического закона Кирхгофа (относительно других обобщений и соотношений, примыкающих к этому закону см. работы [34, 36, 10, 40]. Нетрудно заметить, что все члены в (9) физически легко интерпретируемы.

4. **Выражение для поглощательной способности шара.** Рассмотрим бесконечную среду V_∞, возбуждаемую точечным изотропным стационарным источником. Выпишем для случая изотропного рассеяния формулу для доли энергии, поглощаемой шаром, находящимся в однородной бесконечной среде и в центре которого находится источник (эту величину обозначим через $a_{V_\beta}(V_\infty)$; она является обобщенной поглощательной способностью для случая стационарного источника). Для указанной ситуации с учетом стационарного аналога формулы (9) приходим к такому выражению для $a_{V_\beta}(V_\infty)$

$$a_{V_\beta}(V_\infty)=\frac{2(1-\lambda)}{\lambda}\left(\int\limits_0^{\tau_0}\Phi_\infty(\tau,\lambda)d\tau-\tau_0\Phi_\infty(\tau_0,\lambda)\right), \tag{10}$$

где λ — вероятность выживания кванта, $\Phi_\infty(\tau,\lambda)$ — известная функция, $\tau_0=\alpha r_0$, где r_0 — радиус шара.

5. **Оценка светимости произвольного невогнутого тела.** Пусть $R=0$ и $T=E$ на σ_β, объем V_β не облучается внешним излучением (это ограничение несущественно), но содержит внутренние стационарные источники возбуждения $g_\beta(\ldots)$. Тогда светимость $L(V_\beta)$ тела V_β удовлетворяет неравенству

$$L(V_\beta)\geqslant \iint\limits_{\sigma_\beta(1^s)} d\sigma \int\limits_{\Omega}(\vec{n}\cdot\vec{\Omega})d\Omega \iiint\limits_{V_\beta} dV^* \int\limits_{\Omega^*} g_\beta(\vec{r}^*, \vec{\Omega}^*)\times$$

$$\times G^*(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, \sigma_{\beta_1}, V_{\beta_1})d\Omega^* = L_1, \quad \beta_1 \in B, \tag{11}$$

где V_{β_1} — объем, содержащий часть, с точки зрения параметров и источников, идентичную V_β. Наиболее простой вид (11) принимает тогда, когда V_{β_1} является однородной бесконечной средой, т. к. в такой ситуации можно в принципе найти L_1. Особенно просто это сделать для изотропного рассеяния. В этом случае (11), в частности, допускает такое уточнение

$$L(V_\beta) = L_1 + \Delta = L_1 + o(1-\lambda), \quad \lambda \to 1, \tag{12}$$

где $\Delta \geqslant 0$.

6. **Стационарный точечный мононаправленный источник в среде, ограниченной ламбертовской подстилающей поверхностью и имеющей сферическую или цилиндрическую симметрию.** Пусть V_β имеет указанные симметрию и границу σ_β. Выпишем выражение для энергии $E(\vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, V_\beta)$, падающей в единицу времени на всю границу $\sigma_\beta(\vec{r}^*, \vec{\Omega}^*)$ — координаты источника). Оно имеет вид

$$E(\vec{r}^*, \vec{\Omega}^*, V_\beta) = (1 - I^*(\vec{r}^*, -\vec{\Omega}^*, V_\beta'))(1 - \pi\rho + \rho E_1(V_\beta'))^{-1} E_0, \tag{13}$$

$$E_1(V_\beta') = \int_{\Omega_-} |\vec{n}' \cdot \vec{\Omega}'| I^*(\vec{r}', -\vec{\Omega}', V_\beta') d\Omega', \quad E_0(t) = E_0 = \mathrm{const}. \tag{14}$$

Здесь $I^*(\vec{r}, \vec{\Omega})$ — решение уравнения переноса в среде V_β', в которой $g_\beta(\ldots) = (\alpha(\vec{r}) - \varepsilon(\vec{r}))$ (V_β' — объем, который получается из V_β заменой σ_β на полностью прозрачную для излучения границу σ_β'); $\vec{r}'$ задает точку на σ_β', $\pi\rho$ — альбедо поверхности σ_β'). Формулы (9), (13) сводят вычисление искомых величин для случая мононаправленного точечного источника к рассмотрению задач для распределенных источников, которые уже можно решать, в частности, и численными методами.

7. **Заключительные замечания.** Соотношения инвариантности (1), (3), (4) при $\vec{r} = \vec{r}_{\sigma_\beta} - 0 \cdot \vec{n}$ с учетом реальных граничных условий, могут служить основой для получения различных систем уравнений для интенсивностей излучения на границах σ_β (см. также работы [32—34]). В данном аспекте изложенный выше подход имеет сходные черты с методом поверхностных псевдоисточников (см., например, статью [41]), основная идея которого основывается на теореме единственности. Однако изложенный в данной работе подход, основанный на ПИ, выходит, по существу, за рамки целей и возможностей метода поверхност-

ных псевдоисточников как со стороны общности и гибкости возможных схем рассуждений, так и с точки зрения получения конструктивной информации о полях излучения в средах сложных конфигураций, содержащих произвольные подстилающие поверхности. Заметим, что частный случай стационарного аналога формулы (4), когда в ней стоит функция Грина для бесконечной среды, был получен Кейзом из фундаментального тождества [13]. При этом не рассматривались среды с подстилающими поверхностями и не было дано физической интерпретации результатов. Один из вариантов формулировки ПИ для случая однородных тел произвольной формы (считалось, что подстилающих поверхностей нет) был предложен в работе [11]. В данной статье был использован групповой аспект ПИ, предложенного В. А. Амбарцумяном.

В заключение, подчеркнем, что в рамках терминологии, предложенной Е. Вигнером, ПИ носит по существу характер динамического принципа инвариантности.

INVARIANCE PRINCIPLE APPLICATION FOR MEDIA OF ARBITRARY CONFIGURATION: ALGEBRAIC TREATMENT APPLICATIONS

N. N. ROGOVTSOV

A set of operations is introduced which leave invariant the fields of radiation in media of arbitrary configurations. The set is shown to form a semi-group. An algebraic treatment of principle of invariance is given. The works of V. A. Ambartsumian are shown to give rise to a new branch of general theory of invariance. A number of general invariance relations are obtained which represent an interest to radiative and neutron transfer theory. On basis of these and some other relations obtained by the authors earlier solutions of a number of transfer theory problems are given in the case of media having composite configurations. Particularly, one possible generalization of the Kirchoff law is given for the case of inequilibrium nonstationary radiation also the expression for generalizied absorption ability of a sphere is obtained, and one generalization of doubling formulas is given. Besides that an estimate of luminescence of a nonconcave body si obtained and on basis of example of spherically and cyllindrically symmetric media it is shown now the solution of the problem in presence of underlying surfaces should be reduced to the corresponding problem in their absence.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вигнер Е.** Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. М., ИЛ, 1961, 443 с.
2. **Левашев А. Е.** Движение и двойственность в релятивистской электродинамике. Минск, Изд. БГУ, 1979, 320 с.
3. **Амбарцумян В. А.** ДАН СССР, **38,** 257, 1943.
4. **Амбарцумян В. А.** ЖЭТФ, **13,** 224, 1943.
5. **Амбарцумян В. А.** ДАН СССР, **43,** 106, 1944.
6. **Амбарцумян В. А.** Научные труды, т. 1. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1960, 430 с.
7. **Чандрасекар С.** Перенос лучистой энергии. М., ИЛ, 1953.
8. **Соболев В. В.** Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., Гостехиздат, 1956.
9. **Соболев В. В.** Рассеяние света в атмосферах планет. М., Физматгиз, 1972, 335 с.
10. **Соболев В. В.** Астрофизика, **9,** 515, 1973.
11. **Кадомцев Б. Б.** ДАН СССР, **112,** 831, 1957.
12. **Case K. M.** Rev. Mod. Phys., **29,** 651, 1957.
13. **Case K. M.** : in Transport Theory. — SIAM —AMS proceeding (Providence, 1969), vol, 1, p. 17—36.
14. **Bellman R. E. Kalaba R. E., Ueno S.** J. Math. Analysis and Appl. **9,** 424, 1964.
15. **Van de Hulst H. C.** A New Look at Multiple Scattering. — Rep. Inst. for Space Studies, New York, 1963.
16. **Енгибарян Н. Б.** Астрофизика, **2,** 267, 1966
17. **Shimizu A.** Nucl. Sci. and Engin., **32,** 184, 1968:
18. **Bellman R, E., Kagiwada H. H., Kalaba R. E.** J. of Math. Phys., **9,** 909 1968.
19. **Hunt G. E., Grant I. P.** J. of Atmosph sci. **26,** 963, 1969.
20. **Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А.** ДАН СССР, **217,** 533, 1974.
21. **Гермогенова Т. А., Коновалов Н. В.** Ж. вычисл. мат. и мат. физ., **14,** 928, 1974.
22. **Иванов В. В.** Астрон. ж., **52,** 217, 1975.
23. **Мнацаканян М. А.** ДАН СССР, **225,** 1049, 1975.
24. **Мнацаканян М. А.** Сообщ. Бюраканской обс., вып. L, 1978.
25. **Даниелян Э. Х., Мнацаканян М. А.** Сообщ. Бюраканской обсерв., вып. XLVI, 1975.
26. **Касти Дж., Калаба Р.** Методы погружения в прикладной математике. М., Мир, 1976, 223 с
27. **Домке Х., Иванов В. В.** Астрон. ж., **52,** 1034, 1975.
28. **Пикичян О. В.** Астрофизика, **14,** 169, 1978.
29. **Иванов В. В., Волков Е. В.** Труды Астрон. обс. ЛГУ, вып. 57, 1979.
30. **Яновицкий Э. Г.** Астрон. ж., **56,** 833, 1979.
31. **Яновицкий Э. Г.** Общий принцип инвариантности для полей излучения в плоских неоднородных атмосферах и его следствия. Киев, 1979, 39 с. (Препринт/ИТФ-79-117Р).
32. **Роговцев Н. Н., Самсон А. М.** Ж. прикл. спектр., **25,** 512, 1976.
33. **Роговцов Н. Н.** Изв. АН СССР, ФАО, **16,** 244, 1980.
34. **Роговцов Н. Н.** Ж. прикл. спектр., **24,** 335, 1981.
35. **Роговцов Н. Н.** ДАН БССР, **25,** 420. 1981.
36. **Роговцов Н. Н.** Ж. прикл. спектр. **35,** 1044. 1981.
37. **Курош А. Г.** Общая алгебра. М., Физматгиз, 1974, 159 с.

38. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М., Физматгиз, 1974, 318 с.
39. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М., Физматгиз, 1970, 855 с.
40. **Nikoghossian A. G., Haruthyunian H. A.** Astrophys. and Sp. Sci. **64**, 285, 1979.
41. **Лалетин Н. И.** В сб.: Вычислительные методы в теории переноса М., Атомиздат, 1969, с. 228—245.