5. Ziętala M. et al. The microstructure, mechanical properties and corrosion resistance of 316 L stainless steel fabricated using laser engineered net shaping //Materials Science and Engineering: A. – 2016. – Т. 677. – С. 1-10.
6. Власов, В.М. Работоспособность упрочненных трущихся поверхностей / В.М. Власов – М.: Машиностроение.–1987. – 304 с.

УДК 621.835-41:514.764

МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ПРОФИЛЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕТАЛЕЙ ШАГАЮЩИХ ХОДОВЫХ СИСТЕМ ПО ЗАДАННОМУ ЗАКОНУ КРИВИЗНЫ

В.Н. Жуковец, *ФММП БНТУ, г. Минск*

Резюме - представлено теоретическое обоснование различных математических методов расчета плоских кривых по заданному закону кривизны. Разрабатываемые методы могут быть применены в системах автоматизированного проектирования, когда необходимо построить криволинейную цилиндрическую поверхность детали. Полученная форма рабочей поверхности детали позволит повысить её долговечность и улучшить эффективность работы колесно-шагающей ходовой системы в целом.

Ключевые слова: профиль поверхности, дифференциальная геометрия, кривизна плоских линий, дифференциальные уравнения, колесно-шагающий движитель, автоматизированное проектирование

Введение. При проектировании деталей и узлов машин различного назначения часто возникает проблема обеспечения контактной прочности соприкасающихся поверхностей. Кроме выбора материалов, внимание следует также уделять геометрическим параметрам деталей, в частности, кривизне профилей контактирующих криволинейных цилиндрических поверхностей. Также, от кривизны поверхности конкретной детали зависят кинематические и динамические характеристики машинного агрегата в целом.

Основная часть. В процессе проектирования деталей машин, совершающих вращательное движение, требуется описание различных конструктивных параметров в полярных координатах. Общеизвестно [1], что кривизна плоской линии в полярных координатах определяется согласно формуле:

$$K(\varphi)=\frac{\left|\rho^2+2\cdot\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2-\rho\cdot\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\right|}{\left(\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (1)$$

Если требуется найти выражение для построения линии $\rho(\varphi)$, используя заданную функцию кривизны $K(\varphi)$, то поиск решения уравнения (1) в этом виде затруднителен. Задача может быть решена, если применить метод представления кривых, изложенный в публикации [2]. В этой работе были получены выражения:

$$\begin{cases}\dfrac{dH}{d\varphi}=H\cdot\operatorname{tg}\gamma;\\[2mm] R=\dfrac{H}{\left(1-\dfrac{d\gamma}{d\varphi}\right)\cdot\cos\gamma}-r.\end{cases} \qquad (2)$$

В системе (2): $H(\varphi)$ – расстояние между осями вращения кулачка и ролика, мм; $\gamma(\varphi)$ – угол давления кулачка на ролик, радианы; $R(\varphi)$ – радиус кривизны профиля кулачка, мм; r – радиус ролика, мм; φ – угол поворота кулачкового вала, радианы.

Принимаем обозначение: $K=\dfrac{1}{R+r}$ – кривизна линии, описываемой осью ролика при его относительном движении вокруг профиля кулачка, 1/мм. При этом $K=f(\varphi)$, $H(\varphi)=\rho(\varphi)$.

После выполнения преобразований выражений (2), получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{d\rho}{d\varphi}=\rho\cdot\operatorname{tg}\gamma;\\[2mm] \dfrac{d\gamma}{d\varphi}=1-\dfrac{\rho\cdot K}{\cos\gamma}.\end{cases} \qquad (3)$$

Следует отметить, что данные уравнения (3) имеют большое прикладное значение при решении широкого круга вопросов проектирования. Помимо построения кулачкового профиля для механизмов различного назначения, требуют решения задачи автоматизированного проектирования деталей и узлов перспективной шагающей ходовой системы [3, 4].

Созданный в БНТУ образец колесно-шагающего движителя сферой своего применения предполагает сельское хозяйство. Также конструкция движителя позволяет перешагивать препятствия (бордюры, камни, бревна), что открывает широкие перспективы по его применению в лесном хозяйстве, горной промышленности, при ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций [3].

Так как движитель испытывает серьезные нагрузки, требуется обеспечение контактной прочности касающихся поверхностей различных деталей. Известно, что величина контактных напряжений в немалой степени зависит от кривизны рабочих поверхностей. Этот вопрос, применительно к колесно-шагающим ходовым системам, был достаточно подробно проанализирован [5]. Воспользуемся основными положениями данной работы, чтобы усовершенствовать и углубить методику расчета плоских кривых по заданному закону кривизны. Произведем преобразования в системе уравнений (3) и получим вместо двух уравнений первого порядка нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$K\cdot\gamma''_{\varphi\varphi}-K\cdot\operatorname{tg}\gamma\cdot(\gamma'^2_{\varphi}-1)-K'_{\varphi}\cdot\gamma'_{\varphi}=-K'_{\varphi}. \qquad (4)$$

Для облегчения процесса нахождения решения уравнения (4), представим его в более простой форме. Применив преобразования [6, стр. 581, п. 6.53], получаем замену переменной и подстановки следующего вида:

$$\eta(\varphi)=\sin\gamma;\ \gamma'_{\varphi}=\frac{\eta'_{\varphi}}{\cos\gamma};\ \gamma''_{\varphi\varphi}=\frac{\eta''_{\varphi\varphi}}{\cos\gamma}+\frac{\left(\eta'_{\varphi}\right)^2\cdot\eta}{\cos^3\gamma}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (4) примет вид:

$$K\cdot\eta''_{\varphi\varphi}-K'_{\varphi}\cdot\eta'_{\varphi}+K\cdot\eta+K'_{\varphi}\cdot\sqrt{1-\eta^2}=0. \qquad (5)$$

Для определения уравнения кривой $\rho(\varphi)$ в полярных координатах при заданной формуле кривизны $K(\varphi)$, необходимо из уравнения (5) найти функцию $\eta(\varphi)$, а затем воспользоваться выражением [5]:

$$\rho=-\frac{\left(\eta''_{\varphi\varphi}+\eta\right)}{K'_{\varphi}}. \qquad (6)$$

Очевидно, что важнейшим вопросом является интегрирование уравнения (5), чтобы получить функцию вида $\eta(\varphi)$. Проблема осложняется тем обстоятельством, что данное уравнение не упоминается в широко известных справочниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям [6, 7], поэтому определение и описание способа его решения представляет собой нетривиальную задачу. При проведении дальнейших преобразований, будем исходить из условия, что угол $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому $\cos\gamma=\sqrt{1-\eta^2}>0$.

Представим уравнение (6) в виде:

$$\eta''_{\varphi\varphi}+\eta=-K'_{\varphi}\cdot\rho. \qquad (7)$$

После интегрирования получим:

$C_1(\varphi)=I_1+C_1$, $C_2(\varphi)=I_2+C_2$, где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

$I_1=-\int K'_{\varphi}\cdot\rho\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi$; $I_2=\int K'_{\varphi}\cdot\rho\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi$ – первообразные функции без учета постоянных величин интегрирования. Отсюда получаем решение:

$$\eta=(C_1+I_1)\cdot\sin\varphi+(C_2+I_2)\cdot\cos\varphi. \qquad (8)$$

$$\eta'_{\varphi}=(C_1+I_1)\cdot\cos\varphi-(C_2+I_2)\cdot\sin\varphi. \qquad (9)$$

$$\eta''_{\varphi\varphi}=I'_{1\varphi}\cdot\cos\varphi-I'_{2\varphi}\cdot\sin\varphi-(C_1+I_1)\cdot\sin\varphi-(C_2+I_2)\cdot\cos\varphi. \qquad (10)$$

Определим постоянные интегрирования C_1, C_2 исходя из выражений (8-9), используя при этом следующие начальные условия: $\varphi=\varphi_0$, $\eta=\sin\gamma_0$, $\eta'_{\varphi}=\cos\gamma_0-\rho(\varphi_0)\cdot K(\varphi_0)$. После преобразований получим:

$$A=\cos(\gamma_0-\varphi_0)-\rho(\varphi_0)\cdot K(\varphi_0)\cdot\cos\varphi_0. \qquad (11)$$

$$B=\sin(\gamma_0-\varphi_0)+\rho(\varphi_0)\cdot K(\varphi_0)\cdot\sin\varphi_0. \qquad (12)$$

$$\eta=A\cdot\sin\varphi+B\cdot\cos\varphi+(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\sin\varphi+(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\cos\varphi. \qquad (13)$$

$$\eta'_{\varphi}=A\cdot\cos\varphi-B\cdot\sin\varphi+(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\cos\varphi-(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\sin\varphi. \qquad (14)$$

$$\eta''_{\varphi\varphi}=-A\cdot\sin\varphi-B\cdot\cos\varphi-(I_1-I_1(\varphi_0))\cdot\sin\varphi-(I_2-I_2(\varphi_0))\cdot\cos\varphi-K'_{\varphi}\cdot\rho. \qquad (15)$$

Примем обозначения для особой части решения уравнения и выразим его производные:

$$\mu_1 = (I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \sin\varphi . \qquad (16)$$
$$\mu_2 = (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \cos\varphi . \qquad (17)$$
$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = (I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \sin\varphi + (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \cos\varphi . \qquad (18)$$
$$\mu'_\varphi = \mu'_{1\varphi} + \mu'_{2\varphi} = (I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \cos\varphi - (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \sin\varphi . \qquad (19)$$
$$\mu''_{\varphi\varphi} = \mu''_{1\varphi\varphi} + \mu''_{2\varphi\varphi} = -(I_1 - I_1(\varphi_0)) \cdot \sin\varphi - (I_2 - I_2(\varphi_0)) \cdot \cos\varphi - K'_\varphi \cdot \rho . \qquad (20)$$

Очевидно, что при начальном значении угла $\varphi = \varphi_0$ будут выполняться начальные условия:

$\mu_1(\varphi_0) = 0$, $\mu_2(\varphi_0) = 0$, $\mu(\varphi_0) = 0$, $\mu'_{1\varphi}(\varphi_0) = 0$, $\mu'_{2\varphi}(\varphi_0) = 0$, $\mu'_\varphi(\varphi_0) = 0$.

Следовательно:
$$\eta = A \cdot \sin\varphi + B \cdot \cos\varphi + \mu . \qquad (21)$$
$$\eta'_\varphi = A \cdot \cos\varphi - B \cdot \sin\varphi + \mu'_\varphi . \qquad (22)$$
$$\eta''_{\varphi\varphi} = -A \cdot \sin\varphi - B \cdot \cos\varphi + \mu''_{\varphi\varphi} . \qquad (23)$$

Используя формулы (6, 21, 23), получаем:
$$\rho = -\frac{\left(\mu''_{\varphi\varphi} + \mu\right)}{K'_\varphi} . \qquad (24)$$

В ряде случаев поиск решения можно рационализировать, если в исходном уравнении (5) заменить выражение с квадратным корнем – разложением в ряд по формуле бинома Ньютона [1]:

$$\sqrt{1-\eta^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\cdot\eta^2 - \frac{1}{8}\cdot\eta^4 - \frac{1}{16}\cdot\eta^6 - \frac{5}{128}\cdot\eta^8 - \frac{7}{256}\cdot\eta^{10} - \frac{21}{1024}\cdot\eta^{12} - \frac{33}{2048}\cdot\eta^{14} - \frac{429}{32768}\cdot\eta^{16} - \frac{715}{65536}\cdot\eta^{18} -$$
$$- \frac{2431}{262144}\cdot\eta^{20} - \frac{4199}{524288}\cdot\eta^{22} - \frac{29393}{4194304}\cdot\eta^{24} - \frac{52003}{8388608}\cdot\eta^{26} - \frac{185725}{33554432}\cdot\eta^{28} - \frac{334305}{67108864}\cdot\eta^{30} .$$

Также, можно получить решение в виде разложения в ряд по формуле Тейлора [1], используя систему:

$$\begin{cases} \rho'_\varphi = \dfrac{\rho \cdot \eta}{K \cdot \rho + \eta'_\varphi} ; \\ \eta''_{\varphi\varphi} = -K'_\varphi \cdot \rho - \eta . \end{cases} \qquad (25)$$

Заключение. Разработанное теоретическое обоснование методов построения плоских кривых по заданному закону кривизны, необходимо в дальнейшем использовать для создания детально описанных методик математических расчетов, областью практического применения которых являются системы автоматизированного проектирования. Следует в дальнейшем разработать и подробно описать расчеты плоских кривых для конкретных законов кривизны. Ближайшей целью исследований является получение аналитических зависимостей, которые будут обладать достаточной для инженерной практики точностью, которая требуется при проектировании колесно-шагающих ходовых систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы: Справочник. Под ред. Богданова Ю.С. – Мн.: Выш. шк. 1995. – 380 с.

2. Жуковец В.Н. Профиль плоского кулачка в виде замкнутой кривой, описанной системой уравнений в параметрическом виде. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2006. № 1. С. 76–86.

3. Скойбеда, А.Т. Колесно-шагающий движитель и его динамические преимущества по сравнению с колесом / А.Т. Скойбеда, И.М. Комяк, В.Н. Жуковец / Механика-2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике, Минск, 26 – 28 окт. 2011 г.: в 2 т. – Минск, 2011. – Том 1. – Стр. 138-144.

4. Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Рациональный профиль опорных башмаков колесно-шагающего движителя // Наука и техника. Международный научно-технический журнал. 2013. № 6. – С. 38–42.

5. Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Колесно-шагающие движители для транспортного средства высокой проходимости // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2013 г., вып. 28. – С. 228–233.

6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: «Наука», 1965. – 704 с.

7. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: «Факториал», 1997. – 512 с.

8. Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Решение автономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка при построении плоских кривых // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Выпуск 33. 2018. – С. 388–397.