Доклады Национальной академии наук Беларуси

2002 **сентябрь—октябрь** **Том 46 № 5**

УДК 52-62+535.36+539.125.523

Н. Н. РОГОВЦОВ

НЕРАВЕНСТВА И АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ НЕВОГНУТОЙ ФОРМЫ

(Представлено академиком П. А. Апанасевичем)

1. Оптические свойства реальных и модельных дисперсных сред (тел), а также их границ, весьма разнообразны и существенно влияют на закономерности многократного рассеяния света (процесса переноса излучения). Важной проблемой теории переноса излучения является представление этих закономерностей в полуаналитическом и аналитическом видах. При этом существенный интерес для оптики дисперсных сред представляет решение многомерных задач, причем без каких-либо жестких ограничений, накладываемых на тип индикатрисы рассеяния. Многомерность же может порождаться сложностью конфигурации системы дисперсная среда — источники излучения. Различные методы решения указанной проблемы были предложены в работах [1—8]. Одним из наиболее эффективных среди них является подход, основанный на использовании общего принципа инвариантности (GPI) и общих соотношений инвариантности (GIR) [3,6]. С его помощью можно, в частности, получать аналитическим образом разнообразные характеристики (и их оценки) полей излучения в дисперсных средах сложной формы.

Ниже на основе указанного подхода в предположениях невогнутости формы дисперсных сред и монохроматичности рассеяния будет получен ряд новых неравенств, асимптотик и асимптотических неравенств для интенсивностей излучения, средних интенсивностей излучения, средних чисел рассеяний фотона, средних времен свечения и некоторых других величин. Будет также произведена их конкретизация для случаев дисперсных сред, имеющих форму шара, сфероида, прямого кругового цилиндра и куба. Данные результаты позволяют судить о зависимостях указанных величин от характеристик, определяющих конфигурацию тел и оптические свойства элементарных объемов дисперсных сред.

2. Пусть V — дисперсная среда, граница S которой не изменяет характеристик излучения, проходящего через нее. Предположим, что внутри V (т. е. в $V^o = V \backslash S$ [3,6]) находятся стационарные источники излучения, описываемые функцией $g(\vec{r},\ \vec{\Omega})$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения, а $\vec{\Omega}$ — единичный вектор, задающий направление испускания (или распространения) излучения. При указанных условиях имеет место такое GIR [3, 6]:

$$\Theta_{V^o}(\vec{r}) I(\vec{r},\vec{\Omega};\ V) = I_g(\vec{r},\vec{\Omega};\ V, V_o) - \iint\limits_{S(V^o)} dS' \int\limits_{\Omega_+} (\vec{n}' \cdot \vec{\Omega}') G_*(\dots) I(\vec{r}',\ \vec{\Omega}';\ V) d\Omega'. \qquad (1)$$

Здесь $\Theta_{V^o}(\vec{r}) \equiv 1$, когда $\vec{r}$ задает точки в V^o, и $\Theta_{V^o}(\vec{r}) \equiv 0$ в противном случае; $I(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ V)$ — интенсивность излучения в V; $\vec{\Omega} \in \Omega$, где Ω — единичная сфера; V_o — дисперсная среда, не имеющая подстилающих поверхностей [6] и содержащая часть, идентичную по своим геометрическим и оптическим свойствам V^o; $G_*(\dots) = G_*(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ \vec{r}',\vec{\Omega}';\ V_o)$, где под $G_*(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ \vec{r}',\vec{\Omega}';\ V_1)$ следует понимать объемную функцию Грина [1] стационарного уравнения переноса излучения (RTE) для случая тела V_1, в котором находится «источник» вида $\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}')$; $S(V^o)$ — внутренняя сторона границы S; $\Omega_+ = \Omega_+(\vec{r}')$ — полусфера, определяемая условием $(\vec{n}'(\vec{r}')\cdot\vec{\Omega}') > 0$, где $\vec{n}' = \vec{n}'(\vec{r}')$ — единичная внешняя нормаль к S в точке, заданной $\vec{r}'$; $I_g(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ V,\ V_o) = \iiint\limits_{V^o} dV' \int\limits_{\Omega} G_*(\vec{r},\ \vec{\Omega};\vec{r}',\ \vec{\Omega}';\ V_o) g(\vec{r}',\ \vec{\Omega}') d\Omega'$.

Соотношение (1) — следствие GPI. Используя принцип взаимности [1], из (1) можно получить такое GIR:

$$I(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ \mathrm{V}) = I_g(\vec{r},\ \vec{\Omega};\mathrm{V},\mathrm{V_o}) - \iint\limits_{S(V^o)} dS' \int\limits_{\Omega_+} (\vec{n}'\cdot\vec{\Omega}')G_*^-(...)I_g(\vec{r}',\ -\vec{\Omega}';\mathrm{V},\mathrm{V_o})d\Omega', \tag{2}$$

где $G_*^-(...) = G_*(\vec{r}',\ \vec{\Omega}';\ \vec{r},-\vec{\Omega};\mathrm{V})$. GIR (1), (2) связывают между собой решения различных или однотипных краевых задач для RTE и позволяют на основе известной информации о решении одной из них получать сведения о свойствах решения другой. Справедливо следующее представление [2]:

$$G_*(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ \vec{r}',\vec{\Omega}';\ \mathrm{V_1}) = G_*^\times(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ \vec{r}',\vec{\Omega}';\ \mathrm{V_1}) + q(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ \vec{r}',\vec{\Omega}';\mathrm{V_1}), \tag{3}$$

где q(...) — обобщенная функция известного типа, описывающая прямое и рассеянное не более трех раз излучение, а $G_*^\times(...)$ — обычная ограниченная функция. Когда альбедо однократного рассеяния $\Lambda(\vec{r})$ удовлетворяет в любой точке в $\mathrm{V_1}$ условию $0 < C \le \Lambda(\vec{r}) \le 1$ (C = const), функция q(...) стремится при $|\vec{r}-\vec{r}'| \to +\infty$ к нулю быстрее, чем $G_*^\times(...)$. Если $\mathrm{V_1} = \mathrm{V_\infty}$, где $\mathrm{V_\infty}$ бесконечная однородная среда, то можно выписать асимптотики (при $|\vec{r}-\vec{r}'| \to +\infty$) функций, входящих в (3) или выражающихся через них. В частности, для случая консервативного рассеяния (т. е. $\Lambda(\vec{r}) \equiv \Lambda = 1$) справедлива такая асимптотика [9]:

$$G_\infty^\times(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ \vec{r}') \sim \alpha(4\pi \mathrm{R})^{-1}(3 - \mathrm{x_1} + 3\mu(\alpha \mathrm{R})^{-1}),\ \mathrm{R} \to +\infty. \tag{4}$$

Величины в (4), имеют следующий смысл: $\mathrm{R} = |\vec{r}-\vec{r}'|$; $\mu = \left((\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{\Omega}\right)R^{-1}$, $\mathrm{x_1}$ — соответствующий коэффициент разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра; $G_\infty^\times(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ \vec{r}') = \int\limits_\Omega G_*^\times(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ \vec{r}'\ \vec{\Omega}';\ V_\infty\ )d\Omega'$; $\alpha(\vec{r}) \equiv \alpha = \mathrm{const}$ — показатель ослабления. Выражения (1) — (4) в дальнейшем будут использованы в качестве исходных при получении искомых неравенств, асимптотик и асимптотических неравенств.

3. Пусть $G_1^\times(\vec{r},\vec{\Omega})$ и $G_2^\times(\vec{r},\vec{\Omega})$ — максимальное и минимальное значения функции $G_*^\times(\vec{r}',-\vec{\Omega}';\ \vec{r},-\vec{\Omega};\ \mathrm{V_o})$, когда $\vec{r}'$ задает точки на $\mathrm{S(V^o)}$, $\vec{\Omega}' \in \Omega_+(\vec{r}')$, а $\vec{r}$ фиксирует точки в $\mathrm{V^o}$. Тогда, учитывая неравенства для монохроматического потока через $\mathrm{S(V^o)}$ [10], из (1), (3) возможно вывести такие двойные неравенства:

$$W(...) - (G_1^\times(\vec{r},\vec{\Omega})\Pi_2(S;g))(1-\gamma(S))^{-1} \le I(\vec{r},\vec{\Omega};\ V) \le W(...) - (G_2^\times(\vec{r},\vec{\Omega})\Pi_2(S;g))(1-\beta(S))^{-1}. \tag{5}$$

Здесь $\mathrm{W}(...) = I_g(\vec{r},\vec{\Omega};\mathrm{V},\mathrm{V_o}) - Q(\vec{r},-\vec{\Omega};\mathrm{V},\mathrm{V_o})$, где $Q(\vec{r},-\vec{\Omega};\mathrm{V},\mathrm{V_o}) = \iint\limits_{S(V^o)} dS' \int\limits_{\Omega_+} (\vec{n}'\cdot\vec{\Omega}')\times q(\vec{r}',\ -\vec{\Omega}',\vec{r},\ -\vec{\Omega};\ V_o)I(\vec{r}',\ \vec{\Omega}';V)d\Omega'$; $\Pi_2(\mathrm{S},\mathrm{g}) = \iint\limits_{S(V^o)} dS\int\limits_\Omega (\vec{n}\cdot\vec{\Omega})I_g(\vec{r},\ \vec{\Omega};\mathrm{V},\ \mathrm{V_o})d\Omega$; $\gamma(\mathrm{S})$ и $\beta(\mathrm{S})$ — максимальное и минимальное значения величины $I_g(\vec{r},\vec{\Omega};\mathrm{V},\mathrm{V_o})$, когда $\vec{r}$ задает точки на $\mathrm{S(V^o)}$ и $\vec{\Omega} \in \Omega_-(\vec{r})$ ($\Omega_-(\vec{r})$ — полусфера, определяемая условием $(\vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{\Omega}) < 0$), а $g(\vec{r},\vec{\Omega}) = \alpha(\vec{r}) - \sigma(\vec{r})$, где $\sigma(\vec{r})$ — показатель рассеяния.

Обозначим через $\mathrm{W_1}(...) = \mathrm{W_1}(\vec{r};\ \mathrm{V},\mathrm{V_o})$ величину $(4\pi)^{-1}\int\limits_\Omega W(\vec{r},\ \vec{\Omega};V,V_o)d\Omega$, а через $G_1^\times(\vec{r})$ и $G_2^\times(\vec{r})$ — максимальное и минимальное значения функции $(4\pi)^{-1}\int\limits_\Omega G_*^\times(\vec{r}',-\vec{\Omega}';\ \vec{r},\ \vec{\Omega};V_o)d\Omega = (4\pi)^{-1}G_*^\times(\vec{r}',-\vec{\Omega}';\ \vec{r};V_o)$, когда $\vec{r}'$ и $\vec{r}$ определяют соответственно точки на $\mathrm{S(V^o)}$ и в $\mathrm{V^o}$, а $\vec{\Omega}' \in \Omega_+(\vec{r}')$. Тогда аналогично способу получения (5) из (1), (3) несложно получить следующие двойные неравенства для средней интенсивности излучения $I_{\text{ср}}(\vec{r};V) = (4\pi)^{-1}\int\limits_\Omega I(\vec{r},\ \vec{\Omega};\ V)d\Omega$:

$$W_1(...) - (G_1^\times(\vec{r})\Pi_2(S;g))(1-\gamma(S))^{-1} \le I_{cp}(\vec{r};V) \le W_1(...) - (G_2^\times(\vec{r})\Pi_2(S;g))(1-\beta(S))^{-1}. \tag{6}$$

4. Допустим, что источники описываются ограниченной на множестве $V^o \times \Omega$ функцией $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$. Пусть $\gamma(S;\ g)$ и $\beta(S;\ g)$ имеют смысл максимума и минимума функции $I_g(\vec{r}\,', -\vec{\Omega}'; V, V_o)$, когда $\vec{r}\,'$ задает точки на $S(V^o)$ и $\vec{\Omega}' \in \Omega_+(\vec{r}\,')$. Тогда из (2) и неравенств из работы [10] следуют такие двойные неравенства:

$$I_g(...) - \gamma(S;\ g)(1-\gamma(S))^{-1}\Pi_2(...) \le I(\vec{r}, \vec{\Omega};\ V) \le I_g(...) - \beta(S;\ g)(1-\beta(S))^{-1}\Pi_2(...), \tag{7}$$

где $I_g(...) = I_g(\vec{r}, \vec{\Omega}; V, V_o)$, $\Pi_2(...) = \Pi_2\ (S; \delta; \vec{r}, -\vec{\Omega}) = \iint\limits_{S(V^\circ)} dS' \int\limits_{\Omega_+} (\vec{n}\,' \cdot \vec{\Omega}')G_*(\vec{r}\,', \vec{\Omega}', \vec{r}, -\vec{\Omega};\ V_o)d\Omega'$.

Если проинтегрировать (7) по $\vec{\Omega}$ в пределах Ω и умножить результат на $(4\pi)^{-1}$, то получим соответствующие более простые двойные неравенства для $I_{\text{ср}}(\vec{r}; V)$, которые для краткости выписывать не будем.

5. При проведении оценок средних чисел рассеяний фотона $N_\Lambda(V)$ [11], средних длительностей свечения t* тела V [9] и энергии излучения $E_g(V)$, рассчитанной на единичный спектральный интервал и находящейся в пределах V, можно использовать нижние и верхние оценки для величины $E_g(V) = \iiint\limits_{V^\circ} dV \int\limits_{\Omega} I(\vec{r}, \vec{\Omega};\ V)d\Omega$. Интегрируя (1) по $\vec{r}$; $\vec{\Omega}$ на множестве $V^\circ \times \Omega$, используя неравенства из [10] и определения $\gamma(S;\, g)$ и $\beta(S;\, g)$, получим:

$$\beta(S; 1)(1-\beta(S))^{-1}\Pi_2(S;\ g) \le B_g(V,\ V_o) - E_g(V) \le \gamma(S;\ 1)(1-\gamma(S))^{-1}\Pi_2(S;\ g), \tag{8}$$

$$\beta(S;\ g)(1-\beta(S))^{-1}\Pi_2(S;\ 1) \le B_g(V,\ V_o) - E_g(V) \le \gamma(S;\ g)(1-\gamma(S))^{-1}\Pi_2(S;\ 1), \tag{9}$$

где $B_g(V, V_o) = \iiint\limits_{V^\circ} dV \int\limits_{\Omega} I_g(\vec{r}, \vec{\Omega}; V, V_o)d\Omega$. Частный вариант неравенств (8) для случая консервативного рассеяния был получен ранее в [10].

Пусть V — однородное тело, содержащее в V^o источники $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$. Тогда, как показано в [11], величина $N_\Lambda(V)$ для фотонов, гибнущих в V^o и выходящих из V, можно вычислить посредством выражения $N_\Lambda(V) = \sigma b_g E_g(V) = \sigma \left[\iiint\limits_{V^\circ} dV \int\limits_{\Omega} g(\vec{r}, \vec{\Omega})d\Omega\right]^{-1} E_g(V)$, значение которого зависит от $\Lambda(\vec{r}) = \Lambda = \text{const} \in [0,\ 1](\sigma(\vec{r}) \equiv \sigma = \text{const})$. Следовательно, умножив (8), (9) на σb_g, получим двойные неравенства для $N_\Lambda(V)$. Если умножить (8), (9) на υ^{-1}, где υ — скорость света в среде V, то получим соответствующие неравенства для $E_g(V)$.

Рассмотрим консервативно рассеивающее однородное тело V, содержащее нестационирные источники $g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ (t — время). Средняя длительность свечения t* этого тела выражается через $N_1(V)$ с помощью формулы $t^* = t_o^* + N_1(V)\,\bar{t}$ [11]. Здесь $\bar{t} = (\alpha\upsilon)^{-1}$ — среднее время полета фотона между рассеяниями; $N_1(V)$ — среднее число рассеяний, когда $\Lambda = 1$ и в V^o находятся стационарные источники вида $g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = g_1(\vec{r}, \vec{\Omega}) = T^{-1}\int\limits_{-0}^{+\infty} g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)dt$ (T— единица измерения времени); t_o^* — средняя длительность свечения первичных источников [9]. Из сказанного следует, что если записать (8), (9) для источников $g_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$, а затем умножить полученные неравенства на $\sigma\ \ b_{g_1}\bar{t}$ и прибавить ко всем их частям величину $(-t_o^*)$, то получим двойные неравенства для t*.

6. Приведем ряд примеров использования полученных неравенств применительно к случаям оптически толстых однородных сред.

6.1. Пусть $V = V_1$ — «вытянутый» сфероид, оптические длины полуосей которого равны $\tilde{a}, \tilde{a}, \ \tilde{c}$ ($\tilde{a} < \tilde{c}$; $\tilde{a} = \alpha a, \tilde{c} = \alpha c$, где a, a, c — полуоси V_1). Если $\Lambda = 1$ и в центре симметрии тела V_1 находится точечный изотропный нестационарный источник, причем $t_o^* \le \text{const} < +\infty$, то с учетом (3), (4), (9) и формулы $t^* = t_o^* + N_1(V)\,\bar{t}$ можно получить асимптотические неравенства

$$6^{-1}\eta\tilde{a}^2 \le t_{one}^* \le \left[(4w)^{-1}\ln\left((1+w)/(1-w)\right) - 3^{-1}\right]\eta\tilde{a}^2, \quad \tilde{a} \to \infty, \tag{10}$$

где $\eta = \dfrac{3 - x_1}{\alpha\upsilon}$, $w = \sqrt{1 - (\tilde{a}\tilde{c}^{-1})^2}$, t^*_{one} — главный член асимптотики для t* тела V_1.

6.2. Допустим, что $V = V_2$ — «сжатый» сфероид (т. е. $\tilde{c} < \tilde{a}$) и верны допущения о Λ, t^*_o и источнике, указанные в пп.6.1. Тогда придем к таким асимптотическим неравенствам:

$$6^{-1}\eta\tilde{c}^2 \le t^*_{one} \le (1 + w_1)\left[(2p)^{-1}\operatorname{arctg}p - (3\sqrt{1 + w_1})^{-1}\right]\eta\tilde{c}^2,\ \tilde{c} \to +\infty,\ p = \sqrt{w_1},\ w_1 = (\tilde{a}\tilde{c}^{-1})^2 - 1. \quad (11)$$

6.3. Предположим, что $V = V_3$ — прямой круговой цилиндр, оптические диаметр $\tilde{a}$ и высота $\tilde{h}$ которого равна друг другу. Пусть в V_3 распределены источники $g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \equiv C = \text{const}$ и $\Lambda = 1$. Тогда, приняв во внимание (3), (4), (6), придем к следующим асимптотическим неравенствам:

$$(24)^{-1}\eta_1\tilde{a}^2 \le (I_{\text{ср}}(\vec{0};\ V_3))_{one} \le 8^{-1}\left[\ln tg(3\pi/8) + 2^{-1/2} - 1\right]\eta_1\tilde{a}^2,\ \ \tilde{a} \to +\infty, \quad (12)$$

где $\eta_1 = C\alpha^{-1}(3 - x_1)$, $\left(I_{\text{ср}}(\vec{0}; V_3)\right)_{one}$ — главный член асимптотики для средней интенсивности излучения в центре симметрии тела V_3. Заметим, что множители перед $\eta_1\tilde{a}^2$ в левой и правой частях (12) соответственно приближенно равны 0,0417 и 0,0736.

6.4. Рассмотрим тело $V = V_4$, имеющее форму куба, оптическая длина ребра которого равна $\tilde{a}$, и содержащее источники $g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \equiv C = \text{const}$. Аналогично способу получения (12) для главного члена $\left(I_{\text{ср}}(\vec{0};\ V_4)\right)_{one}$ можно получить такие асимптотические неравенства:

$$(24)^{-1}\eta_1\tilde{a}^2 \le (I_{\text{ср}}(\vec{0};\ V_4))_{one} \le (4\pi)^{-1}\left[\iiint_{\tilde{V}_5^0}\left|\vec{\tilde{r}}\right|^{-1} d\tilde{V} - (2/\sqrt{3})\right]\eta_1\tilde{a}^2,\ \ \tilde{a} \to +\infty,\ \ \Lambda = 1, \quad (13)$$

где $\tilde{V}_5$ — куб с оптической длиной ребра, равного 1, а $\vec{\tilde{r}} = \alpha\vec{r}$ — безразмерный радиус-вектор, начало которого находится в центре симметрии куба. Множитель перед $\eta_1\tilde{a}^2$ в правой части (13) равен приближенно 0,0975.

6.5. Неравенства, приведенные выше, полезны и для отыскания асимптотик. Пусть $V = V_6$ — консервативно рассеивающая среда, имеющая форму шара и оптический радиус τ_o. Тогда при наличии в V_6 источников $g(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \text{const}\left|\vec{r}\right|^{\omega} f(t)(\omega \in [0, +\infty)$; начало $\vec{r}$ находится в центре шара; $\int_{-0}^{+\infty} t^l f(t)dt < +\infty$ при $l \in \{0,\ 1\}$; $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$) будет верна следующая асимптотика для среднего времени t* свечения V_6:

$$t^* = (1 - (x_1/3))\left((\alpha\upsilon)(\omega + 5)\right)^{-1}\tau_o{}^2 + O\left((\alpha\upsilon)^{-1}\tau_o\right),\quad \tau_o \to \infty. \quad (14)$$

Summary

Some inequalities and asymptotic formulae are found for characteristics of radiation fields in non-concave scattering media.

Литература

1. К е й з К., Ц в а й ф е л ь. Линейная теория переноса. М., 1972.
2. Г е р м о г е н о в а Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М., 1986.
3. Р о г о в ц о в Н. Н. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 5. С. 420—423.
4. D a v i s A., M a r s h a k A., C a h a l a n R., W i s c o m l e W. // J. Atmosh. Sci. 1997. Vol. 54, N 2. P. 241—260.
5. L i J., G e l d a r t D. J. W., C h y l e k P. // J. Atmosh. Sci. 1994. Vol. 51, N 14. P. 2110—2122.
6. Р о г о в ц о в Н. Н. Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению задач математической физики. Ч. 1. Мн., 1999.
7. Р о м а н о в а Л. М. // Изв. РАН. ФАО. 2001. Т. 37, № 6. С. 811—819.
8. T s a y S i - C h e, G a b r i e l P. M., K i n g M. D., S t e p h e n s G. L. // J. Atmosh. Sci. 1996. Vol. 53, N 23. P. 3450—3467.
9. Р о г о в ц о в Н. Н. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1988. № 2. С. 101—106.
10. Р о г о в ц о в Н. Н. // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21, № 10. С. 1111—1112.
11. Р о г о в ц о в Н. Н., С а м с о н А. М. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31, № 4. С. 320—323.

Белорусский национальный технический университет

Поступило 01.03.2002