Доклады Академии наук Беларуси

1993 ноябрь-декабрь Том 37 № 6

УДК 52-64+535.36+539.125.523+517.937

Н. Н. РОГОВЦОВ, Ф. Н. БОРОВИК

К РЕШЕНИЮ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком Ф. И. Федоровым)

Наибольший интерес для приложений теории переноса излучения представляет получение решений соответствующих уравнений для случая сильно вытянутых индикатрис рассеяния. По-видимому, впервые вопрос о построении точных решений уравнения переноса излучения для однородной бесконечной плоскопараллельной среды $\bar{V}_\infty$, индикатриса рассеяния элементарного объема которой не представима в виде конечной линейной комбинации полиномов Лежандра, был рассмотрен в работе [1]. В ней, в частности, был предложен удобный метод расчета первых коэффициентов в разложении интенсивности излучения по полиномам Лежандра. Что касается задачи о вычислении интенсивности излучения для случая «произвольной» индикатрисы рассеяния, то она практически в литературе не рассматривалась. Следует лишь отметить статью [2], в которой было выполнено качественное исследование и дано формальное решение неоднородного характеристического уравнения, на основе которого в принципе можно записать выражение для интенсивности излучения в $\bar{V}_\infty$ (в [2] предполагалось, что индикатриса рассеяния $x(\chi)$ удовлетворяет условию Гельдера [3]). Заметим, что известный метод Кейза [4] с практической точки зрения оказался мало пригодным для решения уравнения переноса излучения, когда $x(\chi)$ является достаточно сложной функцией.

В работе предложен новый эффективный метод отыскания нулевой азимутальной гармоники интенсивности излучения в $\bar{V}_\infty$. Он применим по крайней мере для гельдеровских индикатрис рассеяния. Данный подход, в значительной степени основанный на использовании цепных дробей, можно использовать также для определения ненулевых азимутальных гармоник искомых величин. В качестве приложения предложенного метода получены явные аналитические выражения для нулевых азимутальных гармоник функций Грина, соответствующих случаям изотропных и мононаправленных плоских источников. Особо подчеркнем, что изложенный ниже подход допускает удобную численную реализацию, что существенно отличает его от метода Кейза.

Нулевая азимутальная гармоника интенсивности излучения для случая среды $\bar{V}_\infty$ удовлетворяет следующему уравнению переноса излучения:

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} = -I(\tau, \mu) + \frac{\Lambda}{2} \int_{-1}^{1} P(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' + g(\tau, \mu), \tag{1}$$

$$-\infty < \tau < \infty.$$

Здесь τ — оптическая глубина; $\mu=\cos\theta$ — косинус угла между направлениями распространения (испускания) излучения и осью оптических глубин; Λ — альбедо однократного рассеяния ($0<\Lambda<1$); $x(\chi)=\sum\limits_{s=0}^{\infty}(2s+1)\times$ $\times f_s P_s(\cos\gamma)$ — индикатриса рассеяния ($\chi=\cos\gamma$), где $P_s(\chi)$ — полином Лежандра s-го порядка, а f_s — соответствующие коэффициенты; $P(\mu,\mu')=$ $=\sum\limits_{s=0}^{\infty}(2s+1)f_s P_s(\mu)P_s(\mu')$; $I(\tau,\mu)$ — нулевая азимутальная гармоника интенсивности излучения в $\overline{V}_\infty$; $g(\tau,\mu)$ — нулевая азимутальная гармоника функции, задающей первичные источники в $\overline{V}_\infty$ (будем предполагать, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(\tau,\mu)\,d\tau$ сходится для $\forall\mu\in[-1,1]$). В дальнейшем будем считать, что $x(\chi)$ удовлетворяет условию Гельдера на отрезке $[-1,1]$. Теперь применим к (1) преобразование Фурье и учтем, что $I(\tau,\mu)\to 0$ при $|\tau|\to\infty$. В итоге придем к неоднородному характеристическому уравнению теории переноса излучения

$$(1-i\omega\mu)\overline{I}(\omega,\mu)=\frac{\Lambda}{2}\int\limits_{-1}^{1}P(\mu,\mu')\overline{I}(\omega,\mu')\,d\mu'+\overline{g}(\omega,\mu), \tag{2}$$

где

$$\overline{I}(\omega,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}I(\tau,\mu)\,d\tau,\quad \overline{g}(\omega,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}g(\tau,\mu)\,d\tau.$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде ряда

$$\overline{I}(\omega,\mu)=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}(2s+1)a_s(\omega)P_s(\mu), \tag{3}$$

в котором величины $a_s(\omega)$ подлежат определению. Из (2), (3) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}i\omega(s+1)a_{s+1}(\omega)+i\omega s a_{s-1}(\omega)=c_s a_s(\omega)-v_s(\omega),\\ a_{-1}(\omega)\equiv 0,\ c_s=(2s+1)(1-\Lambda f_s),\ s\in N_0=\{0,1,2,\ldots\}.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь

$$a_s(\omega)=\int\limits_{-1}^{1}P_s(\mu)\overline{I}(\omega,\mu)\,d\mu,\quad v_s(\omega)=(2s+1)\int\limits_{-1}^{1}P_s(\mu)\overline{g}(\omega,\mu)\,d\mu. \tag{5}$$

После определения функциональной последовательности $\{a_s(\omega)\}$ величину $I(\tau,\mu)$ можно найти с помощью формул

$$\begin{gathered}I(\tau,\mu)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Theta(\tau-\tau',\mu)g(\tau',\mu)\,d\tau'+\\ +\Lambda(2\sqrt{2\pi})^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega\tau)}{1-i\omega\mu}\overline{W}(\omega,\mu)\,d\omega=\\ =\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Theta(\tau-\tau',\mu)g(\tau',\mu)\,d\tau'+\frac{\Lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Theta(\tau-\tau',\mu)W(\tau',\mu)\,d\tau'=\\ =\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{\infty}(2s+1)h_s(\tau)P_s(\mu),\quad \Theta(\tau,\mu)=|\mu|^{-1}\exp\left(-\left|\frac{\tau}{\mu}\right|\right)\theta(\tau\mu),\end{gathered} \tag{6}$$

$$\overline{W}(\omega,\ \mu)=\sum_{s=0}^{\infty}(2s+1)f_s a_s(\omega)P_s(\mu),$$

$$W(\tau,\ \mu)=\sum_{s=0}^{\infty}(2s+1)f_s h_s(\tau)P_s(\mu),$$

$$h_s(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega\tau)\,a_s(\omega)\,d\omega,$$

которые получены посредством использования обратного преобразования Фурье, соотношений (2), (3) и теоремы о свертке [5] ($\theta(x)$ — функция Хэвисайда).

Найдем теперь точное решение системы (4). Сразу отметим, что даже система, полученная из (4) посредством процедуры усечения (т. е. перехода от бесконечной системы к конечной), не удовлетворяет для $\forall\omega\in\in(-\infty,\ \infty)$ достаточным условиям корректности и устойчивости, гарантирующим применимость метода прогонки [6]. Как показано в [1, 7], удобным подходом для качественного исследования и построения решений конечных и бесконечных систем типа (4) является использование аппарата цепных дробей [8], тождеств, следующих непосредственно из (4), и свойств решений неоднородного характеристического уравнения (2). Используя схему доказательства теоремы 5 из работы [1], можно доказать, что существует и единственно решение системы (4) в классе квадратично суммируемых последовательностей l_2, если функция $\bar{g}(\omega,\mu)$ является непрерывной по μ на отрезке $[-1,\ 1]$ для $\forall\omega\in\mathbf{C}\setminus\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}==\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2$, $\mathbf{C}$ — комплексная плоскость, $\mathfrak{A}_1=\{\omega\,|\,\omega=\pm ik_l,\ \ k_l\in(-1,\ 1),\ \ l==\overline{1,\ p},\ p<\infty\}$, $\mathfrak{A}_2=\{\omega\,|\,\omega=iy,\ y\in[1,\ \infty)\cup(-\infty,\ -1]\}$. Для того чтобы найти решение (4) в замкнутой форме, достаточно учесть такое ее важное свойство, отмеченное и использованное в [7]. Оно заключается в том, что любая бесконечная часть системы (4), состоящая из уравнений (4), при $s\geqslant n_0\geqslant 1$ приводится к форме, которую имеет сама система (4). С учетом этого замечания, результатов работ [1, 7] и линейности системы (4) можно показать, что искомое решение имеет следующий вид:

$$a_0(\omega)=\mathfrak{D}_0(\omega^2)\sum_{n=0}^{\infty}v_n\Psi_n(\omega),\quad a_1(\omega)=\mathfrak{D}_0(\omega^2)\Psi_1(\omega)v_0+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}((i\omega)^{-1}+i\omega\mathfrak{D}_0(\omega^2)\mathfrak{D}_1(\omega^2))\Psi_n(\omega)v_n,\quad a_m(\omega)|_{m\geqslant 2}=\mathfrak{D}_0(\omega^2)\Psi_m(\omega)v_0+ \tag{7}$$

$$+\sum_{n=1}^{m-1}(i\omega)^{m-n}(n+1)M(\omega,\ m,\ n+1)a_{n,n}(\omega)v_n+\sum_{n=m}^{\infty}J(\omega,\ n,\ m)v_n,$$

где

$$\mathfrak{D}_l(\omega^2)=(c_l\mathfrak{N}_l(\omega^2))^{-1},\quad M(\omega,\ n,\ s)=\frac{n!}{s!}\prod_{l=s}^{n}\mathfrak{D}_l(\omega^2), \tag{8}$$

$$\Psi_n(\omega)|_{n\geqslant 1}=(i\omega)^n M(\omega,\ n,\ 1),\ \ \Psi_0(\omega)\equiv 1,\ \ J(\omega,\ n,\ m)=$$

$$=\sum_{s=1}^{m}(i\omega)^{n-2s+m}M(\omega,\ n,\ s)\,U(\omega,\ m,\ s)+\mathfrak{D}_0(\omega^2)\Psi_m(\omega)\Psi_n(\omega),$$

$$a_{n,n}(\omega) = \sum_{s=1}^{n} (i\omega)^{2(n-s)} M(\omega,\ n,\ s)\, U(\omega,\ n,\ s) + \mathfrak{D}_0(\omega^2)\,\Psi_n^2(\omega),$$

$$U(\omega,\ m,\ s) = (1-\delta_{ms})(s+1)\, M(\omega,\ m,\ s+1) + \delta_{ms},\quad w_r = c_r^{-1},$$

$$\nu_r = (r+1)^2 w_r w_{r+1},\quad \mathfrak{N}_r(\omega^2) = 1 + \cfrac{\nu_r\omega^2}{1 + \cfrac{\nu_{r+1}\omega^2}{1+\dots}},\quad r \in N_0.$$

Бесконечная цепная дробь $\mathfrak{N}_0^{-1}(\omega^2)$ является аналитической функцией и сходится в любой точке множества $\mathbf{C}\backslash\mathfrak{A}$, причем $\mathfrak{A}_1$ состоит из нулей цепной дроби $\mathfrak{N}_0(\omega^2)$. При этом $\mathfrak{N}_0(\omega^2)$ может иметь нули только первого порядка. Цепные дроби $\mathfrak{N}_r(\omega^2)$ при $r \geqslant 1$ не могут обращаться в нуль, когда $\omega \in \mathfrak{A}_1$. Функции $\prod_{s=0}^{n} (\mathfrak{N}_s(\omega^2))^{-1}$ для $\forall n \in \{1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$ являются аналитическими в области $\mathbf{C}\backslash\mathfrak{A}$. При доказательстве этих свойств была, в частности, использована теорема Принсгейма [8]. Подчеркнем, что несмотря на внешнюю громоздкость формул (7), (8), вычисление по ним величин $a_s(\omega)$ весьма эффективно, что связано с простотой расчета цепных дробей $\mathfrak{N}_r(\omega^2)$. Отметим, что если $f_s = 0$ для $\forall s \in \{n,\ n+1,\ \dots\}$ и $n \geqslant 1$, то величины $\mathfrak{N}_r(\omega^2)$ непосредственно выражаются через функции Лежандра второго рода.

Сформулируем еще ряд общих свойств решений системы (4), которые нужно учитывать при отыскании точных выражений для нулевых азимутальных гармоник $G_\infty(\tau,\ \mu)$ и $G_\infty(\tau,\ \mu,\ \mu_1)$ функций Грина уравнения переноса излучения соответственно для случаев наличия в $\overline{V}_\infty$ изотропного $(g(\tau,\ \mu) = \delta(\tau))$ и мононаправленного $(g(\tau,\ \mu) = (2\pi)^{-1} \times \delta(\tau)\,\delta(\mu-\mu_1))$ плоских источников (μ_1 — косинус угла между направлениями испускания излучения мононаправленным источником и осью оптических глубин). Непосредственно из (4) следует, что для $m \geqslant 1$ имеет место

$$a_m(\omega) = \tilde{\Psi}_m(1/i\omega)\, a_0(\omega) + \sum_{l=1}^{m} \Phi_{m,l}(1/i\omega)\, v_{m-l}, \tag{9}$$

где функции $\tilde{\Psi}_m(z)$, $\Phi_{m,l}(z)$ являются полиномами от z соответственно порядков m и l. При этом величины $\tilde{\Psi}_m(z)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{gathered}(s+1)\,\tilde{\Psi}_{s+1}(z) + s\tilde{\Psi}_{s-1}(z) = zc_s\tilde{\Psi}_s(z),\\ \tilde{\Psi}_{-1}(z) \equiv 0,\quad \tilde{\Psi}_0(z) \equiv 1,\quad z = (i\omega)^{-1},\quad s \in N_0.\end{gathered} \tag{10}$$

Из (4), (7) видно, что последовательность $\{\Psi_s(\omega)\}$ удовлетворяет системе (4), когда $v_s = c_0\mathfrak{N}_0(\omega^2)\,\delta_{0s}$ $(s \in N_0)$. С учетом этого из (9) получим, что справедлива формула

$$\Psi_s(\omega) = \tilde{\Psi}_s(1/i\omega) + \Phi_{s,s}(1/i\omega)\, c_0\mathfrak{N}_0(\omega^2),\quad s \geqslant 1. \tag{11}$$

Сравнивая (4) с (10) и учитывая (7), приходим к выводу, что функции $\tilde{\Psi}_m(1/i\omega)$ для $\forall m \in \{0,\ 1,\ \dots,\ r\}$ $(r \geqslant 1)$ равны $a_m(\omega)$ и даются формулами (7), в которых следует положить $v_n = ((i\omega)^r\, r!)^{-1} \prod_{k=0}^{r} c_k\mathfrak{N}_k(\omega^2)\,\delta_{nr}$. Таким образом, $\tilde{\Psi}_s(1/i\omega)$ тоже можно выразить через цепные дроби. Из (11) следует, что

$$\Psi_s(\pm ik_l) = \tilde{\Psi}_s\left(\mp\frac{1}{k_l}\right),\quad s \in N_0,\quad l = \overline{1,\ p}. \tag{12}$$

Заметим, что собственные функции $\varphi_{l\pm}(\mu)$ [4], соответствующие дискретным корням $z=\pm k_l^{-1}$ однородного характеристического уравнения, выражаются через $\tilde{\Psi}_s(\pm k_l^{-1})$. Имеют место

$$\varphi_{l\pm}(\mu)=\Lambda(2(1\mp k_l\mu))^{-1}\sum_{s=0}^{\infty}(2s+1)f_s\tilde{\Psi}_s(\pm k_l^{-1})P_s(\mu). \tag{13}$$

Если $\operatorname{Im} v_s=0$ для $\forall s\in N_0$, то с учетом единственности решения системы (4) в классе l_2 нетрудно доказать такие свойства симметрии:

$$\begin{gathered}\bar{a}_s(-\bar{\omega})=a_s(\omega),\quad \operatorname{Re}a_s(x+iy)=\operatorname{Re}a_s(-x+iy),\quad \operatorname{Im}a_s(x+iy)=\\ =-\operatorname{Im}a_s(-x+iy),\quad \omega=x+iy,\quad \bar{\omega}=x-iy,\quad s\in N_0.\end{gathered}\tag{14}$$

Теперь выпишем явные выражения для функций $G_\infty(\tau,\mu)$, $G_\infty(\tau,\mu,\mu_1)$. Одно из искомых выражений для $G_\infty(\tau,\mu)$ дается формулой (6), в которой следует заменить $I(\tau,\mu)$ на $G_\infty(\tau,\mu)$ и положить $g(\tau,\mu)=\delta(\tau)$, $a_m(\omega)=$ $=(2/\pi)^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{D}_\theta(\omega^2)\Psi_m(\omega)$ (это следует из (6), (7) и определения $G_\infty(\tau,\mu)$). Для того чтобы использовать приведенные выше результаты для получения функции $G_\infty(\tau,\mu,\mu_1)$, необходимо учесть, что

$$G_\infty(\tau,\mu,\mu_1)=\frac{1}{2\pi}\Theta(\tau,\mu)\delta(\mu-\mu_1)+G_\infty^1(\tau,\mu,\mu_1), \tag{15}$$

где $G_\infty^1(\tau,\mu,\mu_1)$ — решение уравнения (1) при $g(\tau,\mu)=g_1(\tau,\mu)=(\Lambda/4\pi)\times$ $\times\Theta(\tau,\mu_1)P(\mu,\mu_1)$. Функцию $G_\infty^1(\tau,\mu,\mu_1)$ можно представить в виде (6), где $g(\tau,\mu)=g_1(\tau,\mu)$, а величины $a_m(\omega)$ даются формулами (7), в которых $v_n=(2n+1)\Lambda f_n((2\pi)^{-\frac{3}{2}}(1-i\omega\mu_1))^{-1}P_n(\mu_1)$ $(n\in N_0)$. Указанные формулы для $G_\infty(\tau,\mu)$ и $G_\infty^1(\tau,\mu,\mu_1)$ можно записать в различных формах, если использовать контурное интегрирование. Приведем только один вариант такого рода выражений для этих функций. Принимая во внимание формулы (6), (7), (9), (11), (12), (14), (15), линейность системы (4), определения $G_\infty(\tau,\mu)$, $G_\infty(\tau,\mu,\mu_1)$ и теорему о свертке [5], можно показать, что

$$\begin{gathered}G_\infty(\tau,\mu)=\Theta(\tau,\mu)+\frac{\Lambda}{2c_0}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(\tau-\tau',\mu)\times\\ \times\Big[\sum_{l=1}^{p}(k_l\Upsilon_l)^{-1}\exp(-k_l|\tau'|)\mathfrak{C}(\tau',k_l,\mu)+\\ +(2/\pi)\int_1^{\infty}\exp(-y|\tau'|)\mathfrak{C}(\tau',y,\mu)\operatorname{Im}(\mathfrak{N}_0^{-1}(-y^2-0i))\,dy\Big]d\tau';\end{gathered}\tag{16}$$

$$\begin{gathered}G_\infty(\tau,\mu,\mu_1)=(1/2\pi)\Theta(\tau,\mu)\delta(\mu-\mu_1)+(\Lambda/4\pi)P(\mu,\mu_1)\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(\tau-t,\mu)\times\\ \times\Theta(t,\mu_1)\,dt+(\Lambda^2/4\pi c_0)\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(\tau-t,\mu)\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(t-t',\mu_1)\times\\ \times\Big[\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p}(k_l\Upsilon_l)^{-1}\exp(-k_l|t'|)\mathfrak{C}(t',k_l,\mu)\mathfrak{C}(t',k_l,\mu_1)+\end{gathered}\tag{17}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_1^\infty \exp(-y|t'|)\,\mathfrak{C}(t',\ y,\ \mu)\,\mathfrak{C}(t',\ y,\ \mu_1)\,\mathrm{Im}\,(\mathfrak{N}_0^{-1}(-y^2-0i))\,dy\Bigg]\,dt',$$

$$\mathfrak{C}(\tau,\ u,\ \mu)=\sum_{s=0}^{\infty}(2s+1)\,f_s P_s(\mu)\,\tilde{\Psi}_s\left(\frac{\operatorname{sign}\tau}{u}\right),\quad \Upsilon_l=\left.\frac{d\mathfrak{N}_0(z)}{dz}\right|_{z=-k_l^2}.$$

Заметим, что интегралы по τ', t, t' в (16), (17) нетрудно вычислить в явном виде. Из (16), (17) (или (6)) несложно получить асимптотики функций $G_\infty(...)$ при $|\tau|\to\infty$. В частности, справедливы формулы

$$G_\infty(\tau,\ \mu,\ \mu_1)\sim(1/2\pi c_0)\sum_{l=1}^{n}(k_l\Upsilon_l)^{-1}\exp(-k_l|\tau|)\,\varphi_{l\pm}(\mu)\,\varphi_{l\pm}(\mu_1),\quad \tau\to\pm\infty. \tag{18}$$

Summary

The new effective method for obtaining azimuthal harmonics of radiative intensity in an infinite homogeneous scattering medium is proposed. The accurate expressions of zeroth azimuthal harmonic of Green's function of the radiative transfer equation is obtained for an arbitrary scattering indicatrix.

Литература

1. Боровик Ф. Н., Роговцов Н. Н., Самсон А. М. К решению конечных и бесконечных систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы переноса излучения и многофотонного бесстолкновительного возбуждения молекул. Минск, 1991 (Препринт / ИФ АН БССР: 620). 2. Гермогенова Т. А. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 4. С. 841—844. 3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977. 4. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., 1972. 5. Князев П. Н. Интегральные преобразования. Минск, 1969. 6. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978. 7. Роговцов Н. Н. // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 600—607. 8. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщение к вопросам приближенного анализа. М., 1956.

Белорусская государственная политехническая академия

Поступило 01.02.93