Доклады Академии наук Беларуси

1992 июль-август Том 36 № 7

УДК 52-64+535.36+539.125.523

Н. Н. РОГОВЦОВ

К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ СРЕД ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

(Представлено академиком АН Беларуси Ф. И. Федоровым)

Впервые вопрос о получении уравнений для коэффициентов диффуз ного отражения и пропускания для случая плоскопараллельных сред облучаемых «бесконечно широкими» пучками излучения, был поставле и решен В. А. Амбарцумяном [1]. При этом вывод соответствующи уравнений был произведен двояким образом, а именно: с помощью прин ципа инвариантности [1] и формальных преобразований исходных урав нений теории переноса излучения. Затем в работах [2, 3] были сформу лированы уравнения для поверхностных функций Грина для плоскопа раллельных сред (двумерных и трехмерных), облучаемых «бесконечно узкими» пучками излучения (в [2, 3] предполагалось, что индикатриса рассеяния является сферической и отсутствуют подстилающие поверх ности). Выведенное в [3] уравнение для поверхностной функции Грина для полубесконечной однородной среды было использовано в ней для получения ряда конкретных аналитических и численных решений. Ниже будет предложен способ вывода уравнений для поверхностных функций Грина, который применим в случае неоднородных анизотропно рас сеивающих сред, имеющих цилиндрическую форму и ограниченных с од ного торца подстилающей поверхностью. Заметим, что изложенная ниже процедура формально проста и может использоваться при полу чении соответствующих уравнений для поверхностных функций Грина для сред более сложной формы.

Рассмотрим рассеивающее поглощающее тело V, ограниченное цилинд рической поверхностью S_0 (при этом будем считать, что направляющая кривая l поверхности S_0 является невогнутой кривой) и двумя парал лельными плоскостями S_1^* и S_2^*, которые перпендикулярны к образу ющим поверхности S_0. Введем прямоугольную декартову правую систему координат $OXYZ$, которую расположим следующим образом: плоскость OXY совпадает с S_1^*; точка пересечения оси Z с S_2^* имеет координаты $(0, 0, z_0)$, где z_0 — длина цилиндра $V = V(z_0)$. Обозначим через S_1 и S_2 части границы тела V, лежащие соответственно на S_1^* и S_2^* (S_1 и S_2 — торцы цилиндра V). Будем предполагать, что только часть S_1 гра ницы цилиндра может быть подстилающей поверхностью. Через $\alpha(x, y, z)$ и $\sigma(x, y, z)$ обозначим показатели ослабления и рассеяния ($\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки «наблюдения» в системе $OXYZ$). Объемную функцию Грина уравнения переноса излучения для цилиндра $V(z_1)$ обоз начим через $G(x, y, z; \mu, \varphi; x', y', z'; \mu', \varphi'; z_1)$, где $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ — радиус-вектор точки расположения точечного мононаправленного «источ ника», описываемого функцией $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}') = \delta(x - x')\,\delta(y - y') \times \delta(z - z')\,\delta(\mu - \mu')\,\delta(\varphi - \varphi')$, причем μ, φ и μ', φ' — угловые коорди наты (в сферической системе координат, согласованной с $OXYZ$) единич ных векторов $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Omega}'$, задающих соответственно направления распростра нения и испускания излучения. Пусть $G_s(x, y, z; \mu, \varphi; x^*, y^*, z^*; \mu^*, \varphi^*;$

z_1) — поверхностная функция Грина (z^* может принимать только следующие значения: $+0$, z_1). Пусть $\chi(\Omega'\cdot\Omega'';\ \mathbf{r}'')=\chi(\mu',\varphi',\mu'',\varphi'';\ x'',y'',z'')$ — индикатриса рассеяния. Заметим, что сделанное выше предположение о невогнутости кривой ι не ограничивает общности рассмотрения.

Совокупность $\{V(z_0)\,|\,z_0\in(0,\infty)\}$ образует семейство цилиндрических тел с указанными выше свойствами. Получим уравнения, связывающие между собой поверхностные функции Грина для различных значений z_0 (при этом ограничимся случаем, когда точка «наблюдения» находится на S_2). Для их вывода в качестве исходных используем следующие соотношения инвариантности:

$$G_s(x,y,z_0-2a;\ \mu,\varphi;\ x^*,y^*,+0;\ \mu^*,\varphi^*;\ z_0)=$$
$$=G_s(x,y,z_0-2a;\ \mu,\varphi;\ x^*,y^*,+0;\ \mu^*,\varphi^*;\ z_0-a)- \tag{1}$$
$$-\iint\limits_{S_1}dx'dy'\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_{-1}^{0}\mu' G(x,y,z_0-2a;\ \mu,\varphi;\ x',y',z_0-a;\ \mu'\ \varphi';\ z_0-a)\times$$
$$\times G_s(x',y',z_0-a;\ \mu',\varphi';\ x^*,y^*,+0;\ \mu^*,\varphi^*;\ z_0)\,d\mu',\ \mu^*>0;$$

$$G_s(x,y,z_0-2a;\ \mu,\varphi;\ x^*,y^*,z_0;\ \mu^*,\varphi^*;\ z_0)=$$
$$=-\iint\limits_{S_1}dx'dy'\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_{-1}^{0}\mu' G(x,y,z_0-2a;\ \mu,\varphi;\ x',y',z_0-a;\ \mu',\varphi';$$
$$z_0-a)\,G_s(x',y',z_0-a;\ \mu',\varphi';\ x^*,y^*,z_0;\ \mu^*,\varphi^*;\ z_0)\,d\mu',\ \mu^*<0. \tag{2}$$

Здесь $\mu>0$, $a\in(0,z_0)$. Выражения (1), (2) являются частными случаями общего соотношения инвариантности (2) из [4]. Способы получения и физическая интерпретация подобного рода выражений были изложены в [4—6]. Соотношения инвариантности (1), (2) связывают между собой функции Грина для цилиндров, имеющих длины z_0-a и z_0, причем цилиндр $V(z_0)$ должен содержать часть, идентичную по своим геометрическим и физическим свойствам цилиндру $V(z_0-a)$. В качестве дополнительного пояснения отметим, что (1), (2) фактически являются следствиями инвариантности поля излучения по отношению к алгебраическим операциям типа a и c, введенным в [4] (см. также [5, 6].

Дифференцируя теперь (1) и (2) по параметру a и переходя в полученных таким образом выражениях к пределу $a\to+0$, с учетом правил обращения с обобщенными функциями (см., например, [7—9]), определений объемной и поверхностной функций Грина [10] и уравнения переноса излучения найдем такие искомые уравнения для поверхностных функций Грина:

$$\frac{\partial G_s(x,y,z_0;\ \mu,\varphi;\ x^*,y^*,+0;\ |\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)}{\partial z_0}=$$
$$=-\mu^{-1}\alpha(x,y,z_0)\,G_s(x,y,z_0;\ \mu,\varphi;\ x^*,\ y^*,\ +0;\ |\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)- \tag{3}$$
$$-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\cos\varphi\,\frac{\partial G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x^*,\ y^*,\ +0;\ |\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)}{\partial x}-$$
$$-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\sin\varphi\,\frac{\partial G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x^*,\ y^*,\ +0;\ |\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)}{\partial y}+$$
$$+\frac{\sigma(x,\ y,\ z_0)}{4\pi\mu}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi''\int\limits_0^{1}\chi(\mu,\ \varphi,\ \mu'',\ \varphi'';\ x,y,z_0)\,G_s(x,y,z_0;\ \mu'',\ \varphi'';$$

$$x^*,\ y^*,\ +0;\ |\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)\,d\mu'' + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\sigma(x',\ y',\ z_0)\,dx'dy'\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_0^1 G_s(x,\ y,$$

$$z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x',\ y',\ z_0;\ -|\mu'|,\ \varphi';\ z_0)\,\frac{d\mu'}{|\mu'|}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi''\int\limits_0^1\chi(-|\mu'|,\ \varphi'\ \mu'',\ \varphi'';$$

$$x',\ y',\ z_0)\,G_s(x',\ y',\ z_0;\ \mu'',\ \varphi'';\ x^*,\ y^*,\ +0;\ |\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)\,d\mu'';$$

$$\frac{\partial G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x^*,\ y^*,\ z_0;\ -|\mu^*|,\ \varphi^*;z_0)}{\partial z_0} = \tag{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\cos\varphi\,\frac{\partial G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x^*,\ y^*,\ z_0;\ -|\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)}{\partial x} -$$

$$-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}\sin\varphi\,\frac{\partial G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x^*,\ y^*,\ z_0;\ -|\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)}{\partial y} +$$

$$+\frac{\sqrt{1-(\mu^*)^2}}{|\mu^*|}\cos\varphi^*\,\frac{\partial G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x^*,\ y^*,\ z_0;\ -|\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)}{\partial x^*} +$$

$$+\frac{\sqrt{1-(\mu^*)^2}}{|\mu^*|}\sin\varphi^*\,\frac{\partial G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x^*,\ y^*,\ z_0;\ -|\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)}{\partial y^*} -$$

$$-\mu^{-1}\alpha(x,\ y,\ z_0)\,G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x^*,\ y^*,\ z_0;\ -|\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0) -$$

$$-|\mu^*|^{-1}\alpha(x^*,\ y^*,\ z_0)\,G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x^*,\ y^*,\ z_0;\ -|\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0) +$$

$$+\frac{\sigma(x,\ y,\ z_0)}{4\pi\mu}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi''\int\limits_0^1\chi(\mu,\ \varphi,\ \mu'',\ \varphi'';\ x,\ y,\ z_0)\,G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu'',\ \varphi'';$$

$$x^*,\ y^*,\ z_0;\ -|\mu^*|,\ \varphi^*,\ z_0)\,d\mu'' + \frac{\sigma(x^*,\ y^*,\ z_0)}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_0^1 G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;$$

$$x^*,\ y^*,\ z_0;\ -|\mu'|,\ \varphi',\ z_0)\chi(|\mu'|,\ \varphi',\ |\mu^*|,\ \varphi^*;\ x^*,\ y^*,\ z_0)\,\frac{d\mu'}{|\mu'|} +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\sigma(x',\ y',\ z_0)\,dx'dy'\int\limits_0^{2\pi}d\varphi'\int\limits_0^1 G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x',\ y',\ z_0;\ -|\mu'|,$$

$$\varphi',\ z_0)\,\frac{d\mu'}{|\mu'|}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi''\int\limits_0^1\chi(-|\mu'|,\ \varphi',\ \mu'',\ \varphi'';\ x',\ y',\ z_0)\,G_s(x',\ y',\ z_0;\ \mu'',\ \varphi'';$$

$$x^*,\ y^*,\ z_0;\ -|\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)\,d\mu'' + \frac{\sigma(x,\ y,\ z_0)}{4\pi\mu}\chi(\mu,\ \varphi,\ -|\mu^*|\ \ \varphi^*;$$

$$x,\ y,\ z_0)\,\delta(x-x^*)\,\delta(y-y^*),$$

где $\mu > 0$, $z_0 \in (0,\ \infty)$, $(x,\ y,\ 0) \in S_1$. При решении уравнений (3), (4) необходимо учесть граничные условия (они отражают факт отсутствия внешнего облучения боковой поверхности цилиндра $V(z_0)$):

$$G_s(x,\ y,\ z_0;\ \mu,\ \varphi;\ x^*,\ y^*,\ +0;\ |\mu^*|,\ \varphi^*;\ z_0)\Big|_{\substack{P\in\gamma\\ \mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{\Omega}_\perp>0}} = 0, \tag{5}$$

$$G_s(x, y, z_0; \mu, \varphi; x^*, y^* z_0; -|\mu^*|, \varphi^*; z_0)\Big|_{\substack{P\in\tilde{l} \\ \mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{\Omega}_\perp>0}} = 0 \qquad (6)$$

Здесь $\mathbf{\Omega}_\perp = (\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\ \sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,\ 0)$, $\mathbf{OP} = \mathbf{r}_\perp = (x, y, 0)$, $\mu > 0$, $\tilde{l}$ — граница S_1, $\mathbf{n}_\perp$ — внутренняя нормаль к кривой $\tilde{l}$ в точке P. К уравнениям (3), (4) следует также добавить начальные условия

$$G_s(x, y, +0; \mu, \varphi; x^*, y^*, +0; |\mu^*|, \varphi^*; +0) = \delta(x-x^*)\delta(y-y^*)\delta(\mu - |\mu^*|)\delta(\varphi-\varphi^*), \qquad (7)$$

$$G_s(x, y, +0; \mu, \varphi; x^*, y^*, +0; -|\mu^*|, \varphi^*; +0) = R(x, y; \mu, \varphi; x^*, y^*; |\mu^*|, \varphi^*), \qquad (8)$$

где $R(...)$ — коэффициент, описывающий отражательные свойства поверхности S_1, $\mu>0$. Заметим, что уравнение (4) и условия (6), (8) независимы от (3), (5), (7). Поэтому следует сначала решить задачу (4), (6), (8), а затем (3), (5), (7). Отметим, что задача (4), (6), (8) существенно упрощается для однородных цилиндрических сред. Если существуют пределы функций $\alpha(x, y, z_0)$, $\sigma(x, y, z_0)$, $\chi(...; x, y, z_0)$ при $z_0\to\infty$, то при $z_0\to\infty$ в уравнении (4) будет стремиться к нулю частная производная по z_0. В результате такого предельного перехода фактически получается уравнение для определения «значений» функции $G_s(...)$ на торце S_2 полубесконечного $(z_0=\infty)$ цилиндра $V(\infty)$, облучаемого мононаправленным «бесконечно» узким пучком излучения, падающим на торец S_2. Из (4) несложно получить уравнение, найденное ранее в [3]. Задачи (3), (5), (7) и (4), (6), (8) имеют наиболее простой вид, когда S_1, S_2 являются плоскостями и среда однородна (V в данном случае является слоем). Если S_1 задается условиями $z=0$, $0\leqslant x\leqslant b<\infty$, $-\infty<y<\infty$ и среда однородна, то в (4) число частных производных можно уменьшить на единицу (при $z_0\to\infty$ на две единицы). В заключение подчеркнем, что на основе общих соотношений инвариантности [4, 6] можно получить систему уравнений для определения обобщенных коэффициентов отражения и пропускания, не содержащих производных по z_0.

Summary

By means of the general invariance relations the equations have been found for Green's surface function of the equation of radiative transfer for a case of scattering media having the cylindrical form.

Литература

1. Амбарцумян В. А. // Научные труды. Ереван, 1960. 2. Bellman R., Kalaba R., Ueno S. // J. Math. Phys. 1963. Vol. 7, N 1. P. 91—99. 3. Кацев И. Л. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1974. Т. 10, № 4. С. 425—430. 4. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 5. С. 420—423. 5. Роговцов Н. Н. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16, № 3. С. 244—253. 6. Роговцов Н. Н. // Журн. прикладной спектроскопии. 1981. Т. 34, № 2. С. 335—342. 7. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М., 1965. 8. Шварц Л. Математические методы для физических наук. М., 1965. 9. Гермогенова Т. А. Задачи с сосредоточенными источниками в стационарной теории переноса. М., 1971 (Препринт Ин-та прикладной математики АН СССР: 23). 10. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., 1972.

Белорусская государственная политехническая академия

Поступило 05.02.92