4217

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 1»

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие для студентов заочной формы обучения

Часть 1

Минск
БНТУ
2012

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие
для студентов заочной формы обучения

В 4 частях

Часть 1

Минск
БНТУ
2012

УДК 519.2 (075.4)
ББК 22.17я7
М34

Авторы:
Т. С. Яцкевич, Л. А. Раевская, В. И. Юринок, Е. А. Герасимова, А. Н. Андриянчик, Н. А. Микулик

Рецензенты:
А. Н. Исаченко, В. А. Нифагин

М34 **Математика** : методическое пособие для студентов заочной формы обучения : в 4 частях. – Минск : БНТУ, 2012. – . – Ч. 1 / Т. С. Яцкевич [и др.]. – 2012. – 210 с.
ISBN 978-985-525-956-6 (Ч. 1).

Настоящее методическое пособие предназначено для студентов первого курса заочной формы обучения.

Работа содержит основные понятия и теоремы из программы по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии, введению в анализ и дифференциальному исчислению функции одной переменной, а также типовые примеры решения задач, задачи для самостоятельной работы и задания для контрольной работы № 1 (30 вариантов).

УДК 519.2 (075.4)
ББК 22.17я7

ISBN 978-985-525-956-6 (Ч. 1)
ISBN 978-985-525-957-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее издание является методическим руководством для изучения дисциплины «Математика» студентами инженерно-технических специальностей заочной формы обучения. В пособии содержатся общие рекомендации студенту заочной формы обучения по работе над дисциплиной, приводятся правила выполнения и оформления контрольных работ, представлена программа дисциплины, соответствующая учебным планам 1-го семестра обучения. изложены основные понятия, определения, свойства, теоремы и т. д. из курса высшей математики, приведены образцы решения типовых примеров, задания для самостоятельной работы студентов и контрольная работа № 1.

Контрольная работа № 1 содержит 8 заданий, в каждом из которых студенту нужно выполнить номер, соответствующий его варианту. Номер варианта определяется двумя последними цифрами шифра зачетной книжки, если это число не больше 30. Если оно больше 30, следует от него отнять число, кратное 30. Например, если шифр содержит две последние цифры 62, то номер варианта будет равен 2. Следовательно, задачами 2-го варианта будут 1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2; 6.2; 7.2; 8.2.

Авторский коллектив выражает благодарность ведущему инженеру-программисту кафедры «Высшая математика № 1» Е. Б. Балашовой за оказанную помощь в подготовке пособия.

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ ПО РАБОТЕ НАД ДИСЦИПЛИНОЙ «МАТЕМАТИКА»

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих этапов:

– изучение теоретического материала по учебникам, учебным пособиям, конспектам лекций и т. д.;

– решение задач и упражнений;

– выполнение контрольных работ.

В помощь студентам заочной формы обучения Белорусский национальный технический университет организует чтение установочных лекций и проведение практических занятий. На кафедре высшей математики № 1 каждую субботу в соответствии с расписанием, которое можно посмотреть как на доске объявлений кафедры, так и на сайте http://www.bntu.by/fitr-vm1.html, с 10.00 до 13.00 проводятся консультации. В соответствии с предложениями деканатов АТФ, МСФ, МТФ, ФИТР для студентов I курса проводятся дополнительные консультации, график которых также можно посмотреть на кафедре и в интернете. Кроме того, студент может обращаться к преподавателям с вопросами для получения письменной консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ.

Завершающим этапом изучения отдельных частей высшей математики является сдача зачетов и экзаменов в соответствии с учебным планом.

Работа студента с учебником

1. Изучая материал по учебнику, к следующему вопросу следует переходить только после правильного понимания предыдущего, производя самостоятельно на бумаге все вычисления (в том числе и те, которые ради краткости опущены в учебнике) и выполняя имеющиеся в учебнике чертежи.

2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

3. Необходимо помнить, что каждая теорема состоит из предположений и утверждения. Все предположения должны обязательно использоваться в доказательстве. Нужно точно представлять то, в каком месте доказательства использовано каждое предположение теоремы. Полезно составлять схему доказательств теорем. Правильному пониманию многих теорем помогает разбор примеров математических объектов, обладающих и не обладающих свойствами, указанными в предположениях и утверждениях теорем.

4. При изучении материала по учебнику полезно вести конспект, в который рекомендуется вписывать определения, формулировки теорем, формулы, уравнения и т. д. На полях следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения письменной или устной консультации преподавателя.

5. Процесс письменного оформления работы студента с учебником имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу приучает студента к необходимому в работе порядку и позволяет ему избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.

6. Выводы, полученные в виде формул, рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой (желательно чернилами другого цвета), чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы дисциплины. Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

Список рекомендованной литературы приведен в конце методического пособия.

Решение задач

1. Чтение учебника должно сопровождаться решением задач, для чего рекомендуется завести специальную тетрадь.

2. При решении задач нужно обосновать каждый этап решения, исходя из теоретических положений. Если студент видит несколько путей решения, то он должен сравнить их и выбрать лучший. До начала вычислений полезно составить краткий план решения.

3. Решения задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями. Если чертеж требует особо тщательного выполнения (например, при графической проверке решения, полученного путем вычислений), то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб.

4. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и, по возможности, в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если они даны). В промежуточных вычислениях не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т. д.

5. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Например, если решалась задача с конкретным физическим или геометрическим содержанием, то полезно прежде всего проверить размерность полученного ответа. Полезно также, если возможно, решить задачу несколькими способами и сравнить полученные результаты.

6. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

1. После изучения определенной темы по учебнику и решения достаточного количества соответствующих задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки и доказательства теорем.

В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, решить ряд задач.

2. Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный раздел.

3. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. Однако здесь следует предостеречь студента от весьма распространенной ошибки, заключающейся в том, что благополучное решение задач воспринимается им как признак усвоения теории. Часто правильное решение задачи получается в результате применения механически заученных формул, без понимания существа дела. Можно сказать, что умение решать

задачи является необходимым, но не достаточным условием хорошего знания теории.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации.

2. В своих запросах студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднение. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать, какой это учебник, год его издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос, и что именно его затрудняет. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

3. За консультацией следует обращаться и при сомнении в правильности ответов на вопросы для самопроверки.

4. Решая задачи из раздела 8, студент также может рассчитывать на помощь преподавателя.

Контрольные работы

1. В процессе изучения дисциплины «Математика» студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых – оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела дисциплины; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольной работы, не решив достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольной работы вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Контрольная работа должна выполняться самостоятельно. Несамостоятельно выполненная работа не дает возможности препода-

вателю-рецензенту указать студенту на недостатки в его работе, в усвоении им учебного материала.

4. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета или экзамена.

Лекции и практические занятия

Во время экзаменационных сессий для студентов заочной формы обучения организуются лекции и практические занятия. Они носят преимущественно обзорный характер. Их цель – обратить внимание на общую схему построения соответствующего раздела дисциплины, подчеркнуть важнейшие места, указать главные практические приложения теоретического материала, привести факты из истории науки, обратить внимание студента на место высшей математики в инженерном образовании. Кроме того, на этих занятиях могут быть более подробно рассмотрены отдельные вопросы программы, отсутствующие или недостаточно полно освещенные в рекомендуемых пособиях.

Зачеты и экзамены

На экзаменах и зачетах выясняется прежде всего усвоение всех теоретических и практических вопросов программы и умение применять полученные знания к решению практических задач. Определения, теоремы, правила должны формулироваться точно и с пониманием существа дела; решение задач в простейших случаях должно выполняться без ошибок и уверенно; всякая письменная и графическая работа должна быть сделана аккуратно и четко.

2. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами синего или черного цвета, но не красного. Необходимо оставлять поля шириной 4–5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины, номер контрольной работы, номер варианта; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в университет и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по положенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

Условие задачи должно быть написано так:

3.12. Найти работу, произведенную силой $\vec{F}(1,-2,5)$, если ее точка приложения перемещается из точки $M_1(0,2,1)$ в точку $M_2(1,3,2)$.

Решение

Ответ: $A = 10$.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, кратко и лаконично объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи. Каждую задачу желательно начинать с новой страницы.

7. После получения прорецензированной работы, как допущенной к собеседованию, так и не допущенной, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решение задач те или иные исправления и дополнения, то в случае незачтенной контрольной работы ее следует представить на повторную рецензию в короткий срок.

При повторном представлении работы обязательно должна быть прорецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому при выполнении контрольной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента.

3. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИКА» НА I СЕМЕСТР

3.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

1. Матрицы. Основные определения. Операции над матрицами.

2. Определители 2-го и 3-го порядков, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Понятие об определителе n-го порядка. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).

3. Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров и элементарными преобразованиями.

4. Системы линейных уравнений. Основные определения. Матричная запись системы линейных уравнений. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера. Матричный способ решения невырожденных систем.

5. Решение произвольных систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса. Системы однородных уравнений.

6. Векторы. Линейные операции над векторами. Базис. Координаты вектора.

7. Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора. Проекция вектора на ось. Направляющие косинусы вектора. Угол между двумя векторами в координатной форме. Условие ортогональности двух векторов. Механический смысл скалярного произведения.

8. Векторное произведение двух векторов, его свойства. Условие коллинеарности двух векторов. Геометрический и механический смысл векторного произведения.

9. Смешанное произведение векторов и его свойства. Геометрический смысл смешанного произведения векторов.

10. Уравнение линии на плоскости. Общие уравнения прямой на плоскости и в пространстве, плоскости в пространстве. Векторные, параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

11. Угол между прямыми, между плоскостью и прямой, между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Расстояние от точки до плоскости и от точки до прямой на плоскости.

12. Кривые второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), их канонические уравнения и исследование геометрических свойств. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду в случае отсутствия члена с произведением переменных.

13. Уравнение поверхности в пространстве. Сфера. Эллипсоид. Гиперболоиды. Параболоиды. Цилиндрические и конические поверхности. Геометрические свойства этих поверхностей, исследование их формы методом сечений.

3.2. Введение в математический анализ

14. Множество действительных чисел. Комплексные числа, формы их записи. Действия над комплексными числами.

15. Ограниченные числовые множества. Верхние и нижние грани множеств. Числовые последовательности. Основные понятия и определения. Предел числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности. Число «е». Натуральные логарифмы.

16. Функция. Предел функции в точке. Односторонние пределы функции. Предел функции на бесконечности. Бесконечные пределы. Теорема о единственности предела. Бесконечно малые функции. Теорема о представлении функции, имеющей предел, в виде суммы ее предела и бесконечно малой функции. Ограниченность функции, имеющей предел. Предел промежуточной функции. Переход к пределу в неравенствах.

17. Первый и второй замечательные пределы.

18. Бесконечно малые функции. Свойства бесконечно малых функций. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями. Теоремы о пределах. Сравнение бесконечно малых функций. Символы 0 и О.

19. Непрерывность функций, их свойства в точке и на отрезке. Точки разрыва функции и их классификация.

3.3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

20. Производная функции. Геометрический и механический смысл производной. Правила дифференцирования. Теорема о непрерывности дифференцируемых функций. Производная сложной функции. Непрерывность и дифференцируемость обратной функции.

21. Производные степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических, обратных тригонометрических, неявно и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производная степенно-показательной функции.

22. Производные и дифференциалы высших порядков. Неинвариантность формы дифференциала выше первого порядка.

23. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя.

24. Формула Тейлора. Разложение функций по формуле Тейлора.

3.4. Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения их графиков

25. Возрастание и убывание функции на заданном промежутке. Условия возрастания и убывания функции на данном промежутке. Точки экстремума функции. Необходимый признак экстремума. Достаточные признаки экстремума функции.

26. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на данном отрезке. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Признаки выпуклости и вогнутости графика функции. Необходимый и достаточный признаки существования точки перегиба. Асимптоты кривой. Общая схема исследования функции и построения графика.

27. Векторная функция скалярного аргумента. Предел, непрерывность и производная векторной функции скалярного аргумента. Геометрический и механический смысл производной. Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой.

28. Кривизна плоской линии. Радиус кривизны и круг кривизны. Понятие эволюты и эвольвенты. Кривизна и кручение пространственной кривой. Формулы Френе.

4. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4.1. Матрицы. Основные определения. Операции над матрицами

Определение. ***Матрицей размера*** $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел $a_{ij}, i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$ вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов. Элементы матрицы A нумеруются двумя индексами. Для обозначения матриц применяются также и квадратные скобки. Так, элемент a_{32} означает принадлежность третьей строке и второму столбцу. Сокращенно будем писать $A = (a_{ij}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$. Если $m = n$, то матрица называется ***квадратной порядка n***. Матрица может содержать только одну строку ($i = 1$) или один столбец ($j = 1$). Для квадратной матрицы $A_{n\times n}$ элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ составляют ***главную диагональ***. ***Нулевой*** называется матрица, все элементы которой равны нулю; ее обозначают буквой O. Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***. Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется ***единичной***. Единичная матрица обозначается буквой E. Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется ***транспонированной***. Ее обозначают A^T. Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & \pi \end{pmatrix}$, то

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 4 & \pi \end{pmatrix}, \text{ причем } A = A_{2\times 3},\ A^T = A^T_{3\times 2},\ \left(A^T\right)^T = A.$$

Основными операциями над матрицами являются: сложение (вычитание) матриц; умножение матриц на число; умножение матриц. Операции сложения (вычитания) вводятся только для матриц одинаковых размеров.

О п р е д е л е н и е . ***Суммой*** $A+B$ ***матриц*** $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковых размеров $m \times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера $m \times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (4.1)$$

Аналогично вводится понятие разности двух матриц $C=A-B$.

О п р е д е л е н и е . ***Произведением матрицы*** $A_{m\times n}$ ***и числа*** α называется матрица $B_{m\times n}$ такая, что $B=\alpha\cdot A=A\cdot\alpha$ и

$$b_{ij}=\alpha a_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (4.2)$$

П р и м е р 4.1. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $X=3A-4E$, где $A=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-4&0&6\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е . В данном случае $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ и, следовательно,

$$X=3\cdot\begin{pmatrix}3&2&-1\\-4&0&6\\1&0&0\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9&6&-3\\-12&0&18\\3&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6&-3\\-12&-4&18\\3&0&-4\end{pmatrix}.$$

Произведение матрицы A и матрицы B вводится только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т. е. если A – матрица размера $m \times n$, то B должна иметь размер $n \times k$.

О п р е д е л е н и е. ***Произведением AB матрицы $A_{m\times n}$ и матрицы $B_{n\times k}$*** называется матрица $C_{m\times k}$, элементы которой c_{ij} находятся по формуле

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \qquad (4.3)$$

или $c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$.

Если существует произведение $A \cdot B$, то произведение $B \cdot A$ может и не существовать. Может быть, что при существовании $B \cdot A$ $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются ***перестановочными*** (или ***коммутирующими***).

П р и м е р 4.2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot(-1)+4\cdot 2+3\cdot 4 & -2\cdot 0+4\cdot(-3)+3\cdot 5 \\ 1\cdot(-1)+(-6)\cdot 2+2\cdot 4 & 1\cdot 0+(-6)\cdot(-3)+2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 3 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 3 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}$.

Заметим, что и произведение $B \cdot A$ существует:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -7 & 26 & 0 \\ -3 & -14 & 22 \end{pmatrix},$$ причем $A \cdot B \neq B \cdot A$.

4.2. Определители. Миноры и алгебраические дополнения

Каждой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие число $\det A$ $\left(|A| \text{ или } \Delta\right)$, которое называется ее ***определителем***. Рассмотрим определители 1-го, 2-го и 3-го порядков.

1. Пусть $n = 1$, $A = (a_{11})$. Определитель $\det A = a_{11}$.

2. Пусть $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Определитель второго порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{4.4}$$

Вычисление определителя 2-го порядка изображается схемой:

3. Пусть $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Определитель третьего порядка

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + \\ + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \tag{4.5}$$

Определители третьего порядка обычно вычисляются с использованием ***правила треугольников*** (или правила ***Саррюса***). Суть его в том, что определитель в (4.5) состоит из трех слагаемых, взятых со знаком «+» по схеме (рис. 4.1, *а*) и трех слагаемых, взятых со знаком «–» по схеме (рис. 4.1, *б*).

(+) *а* (–) *б*

Рис. 4.1

П р и м е р 4.3. Найти определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}21 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. По формуле (4.4) имеем: $\det A=\begin{vmatrix}21 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}=$

$=21\cdot4-(-2)\cdot3=84+6=90$.

П р и м е р 4.4. Найти определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -3\\ 7 & 2 & -1\\ 5 & 4 & 6\end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. По формуле (4.5) имеем: $\det A=(-2)\cdot2\cdot6+$
$+7\cdot4\cdot(-3)+1\cdot(-1)\cdot5-5\cdot2\cdot(-3)-7\cdot1\cdot6-4\cdot(-1)\cdot(-2)=-133$.

Пусть дана квадратная матрица 4-го порядка $n=4$. Выберем в ней произвольно s строк и s столбцов ($1\le s\le n$). Элементы, стоящие на пересечении s строк и s столбцов, образуют матрицу порядка s. Определитель этой матрицы называется ***минором порядка s*** и обозначается **M**. Оставшиеся элементы матрицы образуют определитель, который называется ***дополнительным*** к минору M и обозначается через M'. Так, например, для матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$ при $s=2$ выберем вторую и третью строки, первый и четвертый столбец. Тогда минором второго порядка будет определитель $M=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}$, а дополнительным минором будет определитель $M'=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$.

Каждый элемент матрицы 4-го порядка является минором первого порядка. Дополнительный минор является определителем 3-го порядка, обозначаемый M_{ij}, соответствующий элементу a_{ij}.

Определение. ***Алгебраическим дополнением*** A_{ij} элемента a_{ij} называется дополнительный минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т. е.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{4.6}$$

Тогда будем считать по определению, что определитель матрицы четвертого порядка

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}= \tag{4.7}$$
$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+a_{i4}A_{i4},\ i=\overline{1,4}.$$

Формула (4.7) называется ***разложением определителя четвертого порядка*** по элементам i-й строки. Можно показать, что

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j},\ j = \overline{1,4} \qquad (4.8)$$

(***разложение определителя по элементам j-го столбца***). Аналогично можно ввести понятие определителя n-го порядка.

Назовем строки и столбцы матрицы ее ***рядами***.

Теорема (о разложении определителя по элементам ряда). *Определитель квадратной матрицы порядка* $n\,(n>1)$ *равен сумме произведений элементов некоторого ряда на их алгебраические дополнения, т. е. справедлива формула*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\ \left(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}\right). \quad (4.9)$$

Для $n=3$ и $i=1$ формула (4.9) примет вид

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \qquad (4.10)$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Приведем некоторые свойства определителей:

1) Определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы, т. е. $\det A = \det A^T$.

2) Если поменять местами два столбца (две строки) определителя, то он изменит знак на противоположный.

3) Определитель, имеющий нулевой ряд, равен нулю.

4) Определитель, имеющий два одинаковых параллельных ряда, равен нулю.

5) Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.

6) Если соответствующие элементы двух параллельных рядов определителя пропорциональны, то он равен нулю.

7) Если к элементам одного ряда определителя прибавить элементы другого параллельного ряда, умноженные на число $\lambda \in R$, то величина определителя не изменится.

П р и м е р 4.5. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, разложив его по элементам первой строки.

Р е ш е н и е . Воспользуемся формулой (4.10):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13},$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -2;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 \cdot 2 - 4 \cdot 1) = 8;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -7.$$

$$\det A = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 + 0 \cdot (-7) = -2 - 8 = -10.$$

Заметим, что A_{13} можно было и не вычислять, т. к. $a_{13} = 0$. ⊗

4.3. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если ее определитель не равен нулю, т. е. $\Delta = \det A \neq 0$. Если $\Delta = \det A = 0$, то матрица A называется ***вырожденной***.

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** к квадратной матрице A, если выполняется равенство

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \tag{4.11}$$

где E – единичная матрица.

Теорема. *Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}.*

В случае квадратной матрицы n-го порядка обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A. Для квадратной матрицы третьего порядка формула (4.12) имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

П р и м е р 4.6. Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Так как $\Delta=\det A=-10\neq 0$ (см. пример 4.5), то матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}=1\cdot(6-8)=-2; \qquad A_{11}=-2;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot(-4-4)=8; \qquad A_{12}=8;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot(-4-3)=-7; \qquad A_{13}=-7;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-1\cdot(-2-0)=2; \qquad A_{21}=2;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot(2-0)=2; \qquad A_{22}=2;$$

$$A_{23}=-3; \quad A_{31}=-4; \quad A_{32}=-4; \quad A_{33}=1.$$

Подставляя все данные в (4.13), получаем обратную матрицу

$$A^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2 & 2 & -4\\ 8 & 2 & -4\\ -7 & -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,2 & -0,2 & 0,4\\ -0,8 & -0,2 & 0,4\\ 0,7 & 0,3 & 0,1\end{pmatrix}.$$ ⊗

П р и м е р 4.7. Решить матричное уравнение $X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50 & -20\\ 40 & 10\end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е. Определитель $\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-3-2=-5\neq 0$. Матрица невырожденная, находим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot|3|=3; \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot|2|=-2; \quad A_{21}=-2; \quad A_{22}=-1.$$

Обозначим $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}50 & -20\\ 40 & 10\end{pmatrix}$, тогда матричное уравнение запишется в виде $X\cdot A=B$. Умножим обе части последнего уравнения на A^{-1} справа: $X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}$. Так как $A\cdot A^{-1}=E$, то $X\cdot E=B\cdot A^{-1}\Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$. Найдем обратную матрицу A^{-1} по формуле (4.12) при $n=2$.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}. \qquad \textbf{(4.14)}$$

Следовательно, $A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

Находим матрицу $X=B\cdot A^{-1}$; $X=\begin{pmatrix}50 & -20\\ 40 & 10\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

$$X=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}50\cdot 3+(-20)\cdot(-1) & 50\cdot(-2)+(-20)\cdot(-1)\\ 40\cdot 3+10\cdot(-1) & 40\cdot(-2)+10\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}170 & -80\\ 110 & -90\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{170}{5} & \dfrac{-80}{-5}\\ \dfrac{110}{-5} & \dfrac{-90}{-5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-34 & 16\\ -22 & 18\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}-34 & 16\\ -22 & 18\end{pmatrix}$. ⊠

Отметим некоторые свойства обратных матриц.

1) $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$;

2) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;

3) $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$.

4.4. Ранг матрицы

Определение. ***Рангом матрицы*** называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Если все миноры матрицы равны нулю, то ранг матрицы считается равным нулю.

Обозначения: $\operatorname{rang} A; r_A, r$.

Определение. ***Базисным минором*** матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Для ненулевой матрицы существует базисный минор, вообще говоря, не единственный.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ранг $r_A = 1$, т. к. существует минор 1-го порядка, отличный от нуля (например, $|2| = 2 \neq 0$), а все миноры 2-го порядка равны нулю (в силу пропорциональности строк). Базисным минором является каждый минор 1-го порядка.

Для матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ранг $r_B = 2$, т. к. $\det B = -2 \neq 0$. Единственный базисный минор матрицы B совпадает с ее определителем $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Определение. ***Минором, окаймляющим минор*** M порядка k матрицы A, называется минор порядка $(k+1)$ этой матрицы, содержащий минор M.

Определение. ***Элементарными преобразованиями матрицы*** назовем следующие операции:

1) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца), умноженной на произвольное число;

3) перестановку местами двух строк (столбцов) матрицы.

⚠ ***Известно, что при элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменяется.***

Ранг матрицы можно найти следующими способами.

Метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы состоит в том, что любую ненулевую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к трапециевидной, т. е. к матрице вида

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \vline & b_{1r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \vline & b_{2r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vline & \dots & \dots & \dots \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{\dots} & \underline{b_{rr}} & \vline & b_{rr+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля. Вычеркнем нулевые строки в B. Ранг полученной матрицы равен r – числу ненулевых строк. Следовательно, $r_B = r$, а значит, и $r_A = r$. Базисным минором в матрице B является выделенный минор $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix}$.

Метод окаймляющих миноров вычисления ранга матрицы основан на следующем утверждении.

Теорема. *Если в матрице A имеется минор M порядка r, отличный от нуля, а все миноры, окаймляющие минор M (если они существуют), равны нулю, то* $r_A = r$.

Для нахождения ранга матрицы A необходимо:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 1-го порядка (т. е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r_A = 0$.

2) Вычислять миноры 2-го порядка, окаймляющие минор M_1 до тех пор, пока не найдется минор M_2 , отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r_A = 1$; если есть, то $r_A \geq 2$. и т. д.

Процесс нужно продолжать до тех пор, пока либо все окаймляющие миноры будут равны нулю, либо миноры $(k+1)$ порядка у данной матрицы не существуют. В этом случае $r_A = k$.

⚠ ***Заметим, что при нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой окаймляющий минор k-го порядка для*** $M_{k-1} \neq 0$.

☐ Пример 4.8. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведем матрицу к трапециевидной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{[1]} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 6 & -21 & -33 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \end{pmatrix}^{[2]} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to r_A = 2$$

(это число ненулевых строк).

Здесь цифрами [1], [2] обозначены следующие операции:

[1] – ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на (–2);

к 4-й строке прибавим 1-ю, умноженную на (–7);

к 5-й строке прибавим 1-ю.

[2] – из 3-й и 5-й строки вычли 2-ю строку;

к 4-й строке прибавили 2-ю, умноженную на 3.

Ответ: $r_A = 2$. ⊗

☐ Пример 4.9. Методом окаймляющих миноров найти ранг матрицы и указать один из базисных миноров: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & -5 & 5 \\ 5 & 8 & 2 & -9 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r_A \geq 1$. За основу выберем $M_1 = |1| = 1$, стоящий в левом верхнем углу. Перейдем к вычислению миноров 2-го порядка, окаймляющих выбранный M_1. Выберем $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, стоящий в левом верхнем углу.

Так как $M_2 \neq 0$, то переходим к вычислению миноров 3-го порядка.

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

т. к. третья строка у всех этих миноров равна сумме первых двух.

Аналогично,

$$M_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{(5)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3^{(6)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

т. к. 3-я строка равна сумме 2-й и 1-й, умноженной на 2.

Так как все миноры 3-го порядка, окаймляющие $M_2 \neq 0$, равны нулю, то $r_A = 2$. Одним из базисных миноров является $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. ⊗

4.5. Системы линейных уравнений. Основные понятия. Решение невырожденных линейных систем. Матричный метод. Формулы Крамера

О п р е д е л е н и е. Система m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *линейной*, если она имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.15}$$

где числа a_{ij} $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ называются ***коэффициентами системы***, а числа b_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ – ***свободными членами***.

О п р е д е л е н и е . ***Решением системы*** (4.15) называется упорядоченное множество чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется ***несовместной***.

Совместная система уравнений называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Решить систему уравнений означает выяснить, совместна она или нет, и если совместна, то найти все ее решения.

Две системы уравнений называются ***эквивалентными*** или ***равносильными***, если любое решение одной из них является также решением другой и наоборот.

Эквивалентные системы уравнений получаются в результате следующих преобразований:

1) умножения уравнения системы на число, отличное от нуля;

2) прибавления к одному уравнению другого, умноженного на любое число;

3) перестановки местами двух уравнений системы.

Система уравнений, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), называется ***однородной***.

Однородная система всегда совместна, т. к. она имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, ***хотя оно не обязательно единственно.***

Систему (4.15) можно записать в матричной форме $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – ***матрица системы***;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – ***столбец*** (или ***вектор-столбец***) ***неизвестных***,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – ***столбец свободных членов***.

Матрица $\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ называется ***расширенной матрицей системы***.

Рассмотрим случай системы n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (4.16)$$

или в матричной форме: $AX = B$.

Система (4.16) называется ***невырожденной***, если $\det A = \Delta \neq 0$.

Невырожденная система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено

1) ***матричным методом*** по формуле $X = A^{-1}B$, **(4.17)**

2) ***по формулам Крамера***: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n}$, **(4.18)**

где Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой i-го столбца столбцом свободных членов B.

☐ П р и м е р 4.10. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

по формулам Крамера и матричным способом.

Р е ш е н и е . Матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ее определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, следовательно, система

является невырожденной и имеет единственное решение.

1) Используем формулы Крамера (4.18), найдя предварительно $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 28; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 35; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -21.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{28}{7} = 4; \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{35}{7} = 5; \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-21}{7} = -3.$

Ответ: (4; 5; –3).

2) Найдем $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Тогда по формуле (4.17)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 28 \\ 35 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (4; 5; –3). ⊗

4.6. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Метод Гаусса

Рассмотрим систему (4.15).

Теорема Кронекера–Капелли. *Система линейных уравнений* (4.15) *совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:* $r_A = r_{\tilde{A}}$.

Исследовать систему линейных уравнений означает выяснить, совместна она или нет, а для совместной системы определить, имеет ли она единственное решение или бесконечное множество решений.

При этом возможны три случая:

1) $r_A < r_{\tilde{A}}$ – система несовместна (т. е. решений нет).
2) $r_A = r_{\tilde{A}} = n$ (n – число неизвестных) – система совместна и имеет единственное решение.
3) $r_A = r_{\tilde{A}} < n$ – система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Для исследования систем линейных уравнений можно использовать, например, ***метод Гаусса*** (***метод последовательного исключения неизвестных***). С помощью элементарных преобразований над строками система m линейных уравнений с n неизвестными может быть приведена к виду

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r + \ldots + c_{1n}x_n &= d_1; \\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r}x_r + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots &= \ldots \\ c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_n &= d_r; \\ 0 &= d_{r+1}; \\ \ldots &= \ldots \\ 0 &= d_m, \end{aligned}\right\} \qquad (4.19)$$

где $c_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \quad r \leq n$.

Система (4.19) эквивалентна исходной системе (4.15). Если хотя бы одно из чисел $d_{r+1}, d_{r+2}, \ldots, d_m$ отлично от нуля, то система (4.19), а следовательно, и исходная система (4.15) несовместны (случай $r_A = r < r_{\tilde{A}}$).

Если же $d_{r+1} = d_{r+2} = ... = d_m = 0$, то $r_A = r_{\tilde{A}}$ и система (4.19) совместна. В случае $r_A = r = r_{\tilde{A}} < n$ неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ считаются ***базисными***, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – ***свободными***.

Базисные неизвестные оставляют в левой части уравнений, а свободные переносят в правую. Из уравнений (4.19) выражают последовательно базисные неизвестные $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$ через свободные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, которым придают произвольные значения, получая общее решение системы (4.19), а значит (4.15) (решений у системы будет бесконечное множество).

Если $r_A = r = r_{\tilde{A}} = n$, то система (4.19) будет иметь единственное решение, которое находят, выражая $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$ последовательно через $d_n, d_{n-1}, \ldots, d_2, d_1$.

□ Пример 4.11. Методом Гаусса решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12; \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)^{[1]} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)^{[2]} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 11 & -11 & 66 \end{array}\right)^{[3]} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{array}\right),$$

где цифрами $[1], [2], [3]$ обозначены следующие операции:

$[1]$ – 1-ю и 2-ю строки поменяли местами; $[2]$ – ко 2-й строке прибавили 1-ю, умноженную на (–2); к 3-й прибавили 1-ю, умноженную на (–3); $[3]$ – к 3-й строке прибавили 2-ю, умноженную на (–1).

Этой матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22; \\ \qquad 11x_2 - \ x_3 = 56; \\ \qquad\qquad -10x_3 = 10. \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим

$$x_3 = \frac{10}{-10} = -1; \quad 11x_2 = 56 + x_3; \quad x_2 = \frac{56-1}{11} = 5;$$

$$x_1 = -22 + 4x_2 - 3x_3; \quad x_1 = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -1.$

П р и м е р 4.12. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 16. \end{cases}$$

методом Гаусса.

Р е ш е н и е . Расширенная матрица системы имеет вид

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу $\widetilde{A}$ к трапециевидной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 16 \end{array}\right)^{[1]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right)^{[2]} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

где цифрами $[1]$, $[2]$ обозначены следующие операции:

$[1]$ – из 2-й строки вычитаем 1-ю строку, к 3-й строке прибавляем 1-ю, умноженную на 2;

$[2]$ – к 3-й строке добавляем 2-ю, умноженную на (–2).

Получим, что $r_A = r_{\tilde{A}} = 2 < n = 3$. Следовательно, система совместна и имеет бесконечное множество решений. x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная переменная. Количество базисных неизвестных равно $r_A = 2$; число свободных неизвестных равно $n - r_A = 1$. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ \qquad x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

В левой части уравнений оставим только базисные неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 + x_3; \\ \qquad x_2 = 4 + 2x_3. \end{cases}$$

Подставляя выражение для x_2 в 1-е уравнение, получим $x_1 = -x_3 - 8$.

Полагая $x_3 = C, C \in R$, решение системы будет иметь следующий вид:

$$x_1 = -C - 8; \quad x_2 = 4 - 2C; \quad x_3 = C.$$

Ответ: $(-C - 8; 4 - 2C; C)$, $C \in R$. ⊗

□ П р и м е р 4.13. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Приведем к трапециевидной форме расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -4 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \\ -2 & 0 & -2 & | & 3 \end{pmatrix}^{[1]} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & -2 & | & 4 \\ 0 & 2 & -4 & | & -5 \end{pmatrix}^{[2]} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -4 \\ 0 & 1 & -2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & -13 \end{pmatrix},$$

где [1] – из 2-й строки вычитаем 1-ю;

к 3-й строке прибавим 1-ю, умноженную на 2;

[2] – к 3-й строке прибавим 2-ю, умноженную на (–2).

Так как $r_A = 2 \neq r_{\tilde{A}} = 3$, то система несовместна.

Ответ: система несовместна.

4.7. Векторы. Линейные операции над векторами. Разложение векторов. Координаты вектора

Определение. ***Направленным отрезком*** (или ***связанным вектором***) называется отрезок, на котором задано направление (т. е. для которого известно, какая из двух ограничивающих его точек является началом и какая концом). Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ (рис. 4.2):

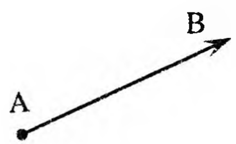
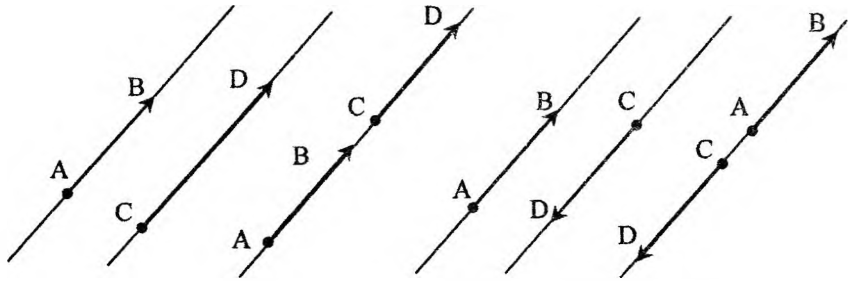


Рис. 4.2

Нулевым направленным отрезком называется пара совпадающих точек (обозначение $\vec{O}$) (т. е. направление его не определено).

Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются ***одинаково направленными*** (или ***сонаправленными***), если лучи AB и CD одинаково направлены, и ***противоположно направленными***, если лучи AB и CD противоположно направлены (рис. 4.3).



Сонаправленные
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$;

Противоположно направленные
$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$;

Рис. 4.3

Нулевой направленный отрезок считается сонаправленным с любым направленным отрезком; его длина равна нулю.

Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются ***эквивалентными***, если они одинаково направлены и имеют одну и ту же длину. Множество всех направленных отрезков разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных друг другу отрезков.

Определение. ***Свободным вектором*** или просто ***вектором*** называется класс эквивалентных направленных отрезков.

Для задания вектора достаточно указать какой-либо один направленный отрезок из этого класса. Обозначать векторы будем малыми латинскими буквами со стрелкой сверху: $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$ или $\vec{a} = \left\{\overrightarrow{AB}\right\}$, указывая при этом один из направленных отрезков, принадлежащих классу вектора $\vec{a}$. Иногда будем писать $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называть просто вектором.

Определение. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными***, если они совпадают как классы эквивалентных направленных отрезков: $\vec{a} = \vec{b}$.

Если заданы вектор $\vec{a}$ и точка A, то существует единственная точка B, такая, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Операцию построения такой точки B будем называть ***откладыванием вектора*** $\vec{a}$ от точки A.

⚠ ***Это означает, что вектор $\vec{a}$ может быть отложен из любой точки пространства.***

Длиной или модулем вектора $\vec{a} = \left\{\overrightarrow{AB}\right\}$ называется длина любого его представителя. Обозначается $|\vec{a}|$; $|\vec{a}| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным вектором***.

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол φ, не превышающий π (развернутого угла), между представителями этих векторов, отложенными от одной точки (рис. 4.4).

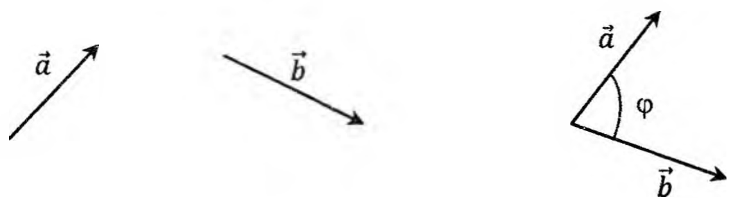


Рис. 4.4

Определение. Векторы называются ***коллинеарными***, если образующие их направленные отрезки параллельны некоторой прямой.

Определение. Векторы называются ***компланарными***, если направленные отрезки, которые их определяют, параллельны некоторой плоскости.

Определение. Векторы называются ***ортогональными***, если угол между ними прямой ($\varphi = \frac{\pi}{2}$).

Можно считать, что нулевой вектор $\vec{O}$ ортогонален любому вектору. Для коллинеарных векторов угол между ними равен нулю, если они сонаправлены, и развернутому, т. е. 180°, если они противоположно направлены.

Определение. ***Линейными операциями*** над векторами называют сложение, вычитание и умножение вектора на число.

Определение. Пусть заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем какую-либо точку O и отложим от нее вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Далее от точки A отложим вектор $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$ называется ***суммой векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

Для геометрического представления суммы векторов используют правила «замыкающей» (его еще называют «правилом треугольника») и «параллелограмма», проиллюстрированные на рис. 4.5, *а* и 4.5, *б* соответственно.

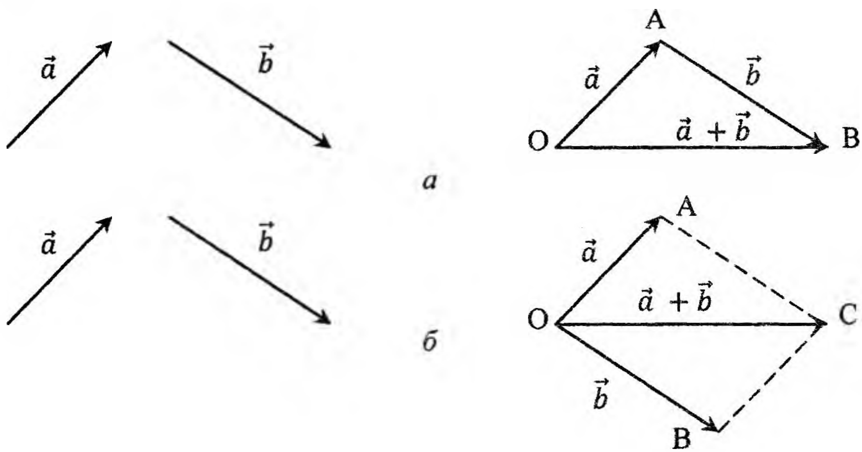


Рис. 4.5

Заметим, что определение операции сложения векторов корректно, т. е. результат не зависит от выбора точки O.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется ***противоположным вектору*** $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и обозначается $-\vec{a}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$.

Определение. ***Произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на действительное число*** α называется вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

б) векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ сонаправлены при $\alpha > 0$ $\left(\vec{a} \uparrow\uparrow \alpha\vec{a}\right)$ и противоположно направлены при $\alpha < 0$ $\left(\vec{a} \uparrow\downarrow \alpha\vec{a}\right)$.

Заметим, что в случае $\alpha = 0, |\alpha\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}| = 0$, т. е. для любого вектора $\vec{a}$ произведение $0 \cdot \vec{a} = \vec{O}$.

Основные свойства линейных операций над векторами

Пусть даны произвольные векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и действительные числа α, β.

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативный или переместительный закон);

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (сочетательный или ассоциативный закон);

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (закон поглощения нулевого вектора);

4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (существование противоположного вектора);

5) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (распределительный или дистрибутивный закон);

6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (распределительный или дистрибутивный закон);

7) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ (сочетательный или ассоциативный закон);

8) $1\vec{a} = \vec{a}$.

Теорема 1 (критерий коллинеарности). *Для того, чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить как произведение другого на число, т.е. чтобы существовало действительное число α такое, что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, или существовало бы число β такое, что $\vec{b} = \beta\vec{a}$.*

Теорема 2 (критерий компланарности). *Для того, чтобы три вектора были компланарными, необходимо и достаточно, чтобы один из них можно было представить в виде линейной комбинации двух других, причем если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарные, то всякий третий компланарный им вектор $\vec{c}$ может быть единственным способом представлен в виде $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.*

Пример 4.14. В треугольнике ABC дано: $\overline{AB} = \vec{a}$; $\overline{AC} = \vec{b}$; точка M – середина стороны BC. Выразить вектор $\overline{AM}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Р е ш е н и е. Для векторов $\overrightarrow{AB}=\vec{a};\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ справедливо равенство: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 4.6). Отсюда $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. Так как $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$. Получаем

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

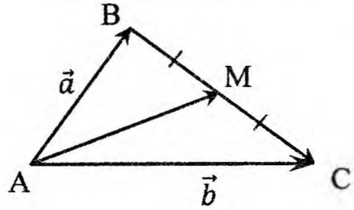


Рис. 4.6

Ответ: $\overline{AM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

П р и м е р 4.15. Какому условию должны удовлетворять ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$,чтобы имело место соотношение $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$?

Решение. Построим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных от точки O, параллелограмм $OADB$ (рис. 4.7). Тогда $\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$. Равенство $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ означает, что длины диагоналей параллелограмма равны, т. е. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|$. Отсюда следует, что данный параллелограмм есть прямоугольник. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

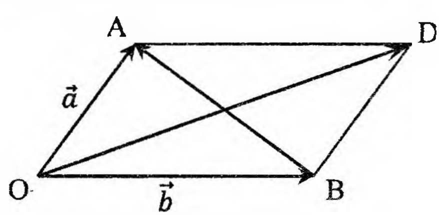


Рис. 4.7

Ответ: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

П р и м е р 4.16. Дан треугольник ABC. Найти вектор, определяющий направление биссектрисы внутреннего угла при вершине A, если $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

Р е ш е н и е . Найдем единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, сонаправленные с векторами $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \vec{e}_2=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Тогда вектор $\vec{e}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$ будет определять направление биссектрисы внутреннего угла при вершине A, т. к. диагонали ромба делят его угол пополам (рис. 4.8), т. е. $\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

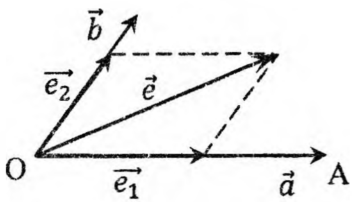


Рис. 4.8

П р и м е р 4.17. Векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ – коллинеарны. Доказать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Р е ш е н и е . Так как векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ – коллинеарны, то согласно критерию коллинеарности вектор $\vec{a}+\vec{b}$ можно выразить через вектор $\vec{a}-\vec{b}$, т. е. записать в виде $\vec{a}+\vec{b}=\alpha(\vec{a}-\vec{b})$. Далее преобразуем это выражение, пользуясь свойствами суммы векторов и произведения векторов и скаляров: $\vec{a}+\vec{b}=\alpha\vec{a}-\alpha\vec{b}$, $(1-\alpha)\vec{a}=(-1-\alpha)\vec{b}$. Если $\alpha \neq 1$, то вектор $\vec{a}$ можно выразить через $\vec{b}$, умножая обе части последнего равенства на число $\frac{1}{1-\alpha} \neq 0$: $\vec{a}=-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\vec{b}$; если

$\alpha=1$, то $\vec{b}=\vec{0}$ и тогда $\vec{b}=\vec{0}\cdot\vec{a}$. Таким образом, по критерию коллинеарности векторов векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. ⊗

Определение. ***Базисом на прямой*** называется любой ненулевой вектор на этой прямой, ***базисом на плоскости*** – упорядоченная пара $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ двух неколлинеарных векторов этой плоскости, ***базисом в пространстве*** – упорядоченная тройка $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ некомпланарных векторов.

Определение. ***Базис*** называется ***ортонормированным***, если образующие его векторы единичной длины и попарно ортогональные. Примером является базис, обозначаемый $\vec{i},\vec{j},\vec{k},\left(\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=\left|\vec{k}\right|=1;\vec{i}\perp\vec{j};\vec{i}\perp\vec{k};\ \vec{j}\perp\vec{k}\right)$. Совокупность фиксированной точки O пространства и ортонормированного базиса $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ называется ***декартовой прямоугольной системой координат***: $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Точка O называется ***началом системы координат***.

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ называется ***правой***, если поворот по кратчайшему пути от первого вектора $\vec{e}_1$ ко второму вектору $\vec{e}_2$ из конца вектора $\vec{e}_3$ виден против часовой стрелки. В противном случае эта тройка называется ***левой*** (рис. 4.9). Соответствующие ***системы координат*** называются ***правыми*** или ***левыми***.

В дальнейшем мы будем пользоваться только правыми системами координат.

Рис. 4.9

Если $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы (орты) координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно прямоугольной системы координат $Oxyz$, то для любого вектора $\vec{a}$ существует единственная упорядоченная тройка действительных чисел (x, y, z) такая, что

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{4.20}$$

Равенство (4.20) называется ***разложением вектора*** $\vec{a}$ ***по базису*** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, а коэффициенты разложения – *координатами вектора* $\vec{a}$ в этом базисе. При этом пишут $\vec{a} = (x, y, z)$ или $\vec{a}(x, y, z)$.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора, причем $\vec{b} \neq 0$. Отложим эти векторы от некоторой точки O; получим векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, пусть точка A_1 – проекция точки A на прямую OB (рис. 4.10).

Определение. ***Проекцией*** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется число $np_{\vec{b}}\vec{a}$, которое определяется следующим образом:

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \begin{cases} \left|\overrightarrow{OA_1}\right|, & \text{если } \overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow \vec{b}; \\ -\left|\overrightarrow{OA_1}\right|, & \text{если } \overrightarrow{OA_1} \uparrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

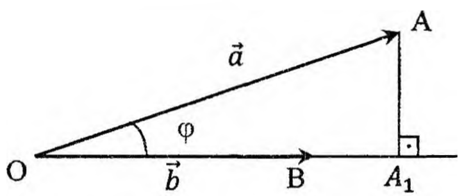


Рис. 4.10

Координаты x, y, z вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – это его проекции на соответствующие координатные оси:

$$x = np_{\vec{i}}\vec{a}, \quad y = np_{\vec{j}}\vec{a}, \quad z = np_{\vec{k}}\vec{a}.$$

Длина вектора $\vec{a}(x, y, z)$ определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{4.21}$$

Определение. ***Направляющими косинусами*** вектора $\vec{a}(x,y,z)$ называются косинусы углов α, β, γ, которые вектор образует с координатными осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ (рис. 4.11). При этом

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \tag{4.22}$$

Имеет место равенство: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Для единичного вектора $\vec{a}^0$, имеющего направление вектора $\vec{a}$, имеем:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{4.23}$$

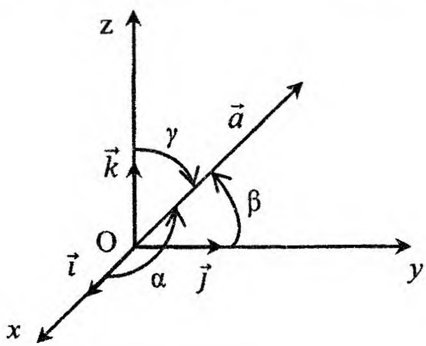


Рис. 4.11

Пусть даны два вектора $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$. Тогда:

1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты, т. е.

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}.$$

2) при сложении векторов их одноименные координаты складываются, при вычитании – вычитаются, при умножении вектора на число – умножаются на это число:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2); \alpha\vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (4.24)$$

Определение. Вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат с произвольной точкой пространства, называется ***радиус-вектором*** точки M.

Определение. ***Координатами точки M*** называются координаты ее радиус-вектора $\vec{r} = (x, y, z)$ или $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ задан точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то его координаты равны разности соответствующих координат конечной и начальной его точек:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \qquad (4.25)$$

При этом

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (4.26)$$

Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, и пусть точка $C(x, y, z)$ такая, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Тогда координаты точки C находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (4.27)$$

Координаты середины отрезка AB (т.е. $\alpha = 1$ в 4.27) определяются равенствами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (4.28)$$

П р и м е р 4.18. Даны две точки $A(3,-4,1)$ и $B(4,6,-3)$. Найти координаты, модуль, направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

Р е ш е н и е. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ находим по формуле (4.25). При этом $x_1 = 3; y_1 = -4; z_1 = 1; x_2 = 4; y_2 = 6; z_2 = -3$, т. е. $\overrightarrow{AB} = (4-3; 6+4; -3-1) = (1;10;-4)$. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ находим по формуле (4.26): $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2 + 10^2 + (-4)^2} = \sqrt{117}$.

Направляющие косинусы вычисляем по формулам (4.22):

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{1}{\sqrt{117}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{10}{\sqrt{117}}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = -\frac{4}{\sqrt{117}}.$$

П р и м е р 4.19. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1;-2;3)$; $B(3;2;1)$; $C(6;4;4)$. Найти его четвертую вершину D.

Р е ш е н и е. Обозначим координаты вершины D через x, y, z, т. е. $D(x, y, z)$. Так как $ABCD$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Находим координаты векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{BC} = (6-3; 4-2; 4-1)$, т. е. $\overrightarrow{BC} = (3;2;3)$; $\overrightarrow{AD} = (x-1; y+2; z-3)$. Из равенства векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ следует, что $x-1=3; y+2=2; z-3=3$. Отсюда находим: $x=4; y=0; z=6$. Значит, $D(4; 0; 6)$.

П р и м е р 4.20. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = \beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?

Р е ш е н и е. Так как $\vec{a}(-2,3,\alpha)$, $\vec{b}(\beta,-6,2)$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то по условию (4.24) $-\frac{2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$. Отсюда $-\frac{2}{\beta} = -\frac{1}{2}$ и $\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $\beta = 4; \alpha = -1$, т. е. при $\alpha = -1$ и $\beta = 4$ векторы коллинеарны.

П р и м е р 4.21. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\sqrt{2}\vec{k}$ и его модуль равен 5.

Р е ш е н и е . Так как и $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$, то можно записать, что $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, где $\alpha < 0$. Следовательно, $\vec{a} = \left(5\alpha; -4\alpha; 2\sqrt{2}\alpha\right)$, причем $|\vec{a}| = \sqrt{(5\alpha)^2 + (-4\alpha)^2 + \left(2\sqrt{2}\alpha\right)^2} = 5$ (см. (4.21)).

Отсюда $25\alpha^2 + 16\alpha^2 + 8\alpha^2 = 25$, или $49\alpha^2 = 25$. Значит, $\alpha = -\frac{5}{7}$, а тогда $\vec{a} = \left(-\frac{25}{7}; \frac{20}{7}; -\frac{10\sqrt{2}}{7}\right)$ или $\vec{a} = -\frac{25}{7}\vec{i} + \frac{20}{7}\vec{j} - \frac{10\sqrt{2}}{7}\vec{k}$.

П р и м е р 4.22. Дана сила $\vec{F} = \left(4; 4; -4\sqrt{2}\right)$. Найти величину и направление силы $\vec{F}$.

Р е ш е н и е . Величину силы $\vec{F}$ находим, используя формулу модуля вектора (4.21). Имеем

$$\vec{F} = \sqrt{4^2 + 4^2 + \left(-4\sqrt{2}\right)^2} = 8.$$

Направляющие косинусы вектора $\vec{F}$ определяем по формулам (4.22): $\cos\alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\cos\beta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\cos\gamma = -\frac{4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Итак,

$$\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60°; \beta = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60°;$$

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} = 135°.$$

Значит, сила $\left|\vec{F}\right| = 8$ действует в направлении вектора, образующего с координатными осями углы $\alpha = 60°; \beta = 60°; \gamma = 135°$.

4.8. Скалярное произведение векторов

О п р е д е л е н и е . ***Скалярным произведением*** ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, которое обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ и определяется равенством

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right), \qquad (4.29)$$

т. е. число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ между ними. По определению $\left(\vec{a},\vec{0}\right)=\left(\vec{0},\vec{a}\right)=0$.

Скалярное произведение обладает следующими ***свойствами***:

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$ (коммутативность);

2) $\left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)$ (дистрибутивность);

3) $\left(\alpha\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\alpha\vec{b}\right)=\alpha\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ (ассоциативность относительно скалярного множителя);

4) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ (или $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$) (критерий ортогональности);

5) $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2\geq 0$ (скалярный квадрат вектора);

6) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами в ортонормированном базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}:\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$; $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$, то

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;

2) $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{\left(\vec{a},\vec{a}\right)}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ (следует из свойства 5);

3) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ (вытекает из формулы (4.29) и формул для вычисления $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ и $|\vec{a}|,|\vec{b}|$).

4) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ (следует из свойства 6).

Механический смысл скалярного произведения – это работа A, производимая силой $\vec{F}$, точка приложения которой перемещается по отрезку M_1M_2 из точки M_1 в точку M_2:

$$A = \left(\vec{F}, \overrightarrow{M_1M_2}\right).$$

П р и м е р 4.23. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 7\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

Р е ш е н и е. Так как векторы $\vec{a}, \vec{b}$ заданы координатами в ортонормированном базисе $\vec{a} = (3;-3;1), \vec{b} = (0;-1;7)$, а $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}$, то

$$(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 0 + (-3)(-1) + 1\cdot 7 = 10; |\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50}.$$

Поэтому $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{10}{\sqrt{50}} = \dfrac{10}{5\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

П р и м е р 4.24. Найти $\left(\vec{a} - 3\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}\right)$, если $|\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 3$; $\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

Р е ш е н и е. Используя свойства 1, 2, 3, 5 скалярного произведения, имеем:

$$\left(\vec{a} - 3\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}\right) = 2(\vec{a},\vec{a}) - 5\left(\vec{a},\vec{b}\right) - 3\left(\vec{b},\vec{b}\right) =$$

$$= 2\cdot|\vec{a}|^2 - 5\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}\right) - 3|\vec{b}|^2 = 2\cdot 2^2 - 5\cdot 2\cdot 3\cdot\cos\frac{\pi}{3} - 3\cdot 3^2 =$$

$$= 8 - 15 - 27 = -34.$$

Ответ: – 34.

П р и м е р 4.25. Какую работу производит сила $\vec{F} = (2;-1;-4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A = (1;-2;3)$ в точку $B = (5;-6;1)$?

Р е ш е н и е . Используя механический смысл скалярного произведения, имеем $A = \left(\vec{F}, \overrightarrow{AB}\right)$.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = \left(5-1; -6-(-2); 1-3\right) = \left(4; -4; -2\right)$.

Тогда $A = \left(\vec{F}, \overrightarrow{AB}\right) = 2\cdot 4 + (-1)\cdot(-4) + (-4)\cdot(-2) = 20$.

Ответ: 20.

4.9. Векторное произведение векторов

О п р е д е л е н и е . ***Векторным произведением*** вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b}\right)$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая (рис. 4.12).

Обозначение: $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

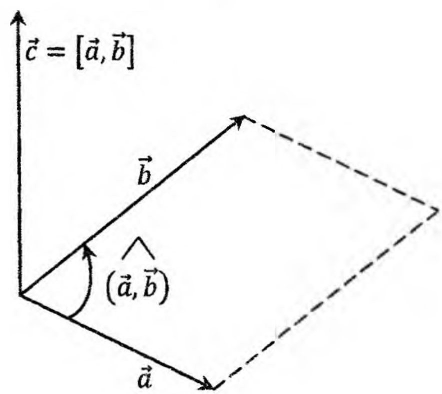


Рис. 4.12

Векторное произведение обладает следующими ***свойствами***:

1) $\left[\vec{b}, \vec{a}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ (антикоммутативность);

2) $\left[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right]$ (дистрибутивность);

3) $\left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{a}, \alpha\vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ (ассоциативность относительно скалярного множителя);

4) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (критерий коллинеарности);

5) ***геометрический смысл*** векторного произведения: модуль векторного произведения $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ равен ***площади параллелограмма***, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных от одной точки:

$S_{\text{паралл}} = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$;

6) ***механический смысл*** векторного произведения: ***момент силы*** $\vec{F}$, приложенной в точке B, относительно точки A определяется равенством: $\vec{M}_A\left(\vec{F}\right) = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{F}\right]$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$; $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \tag{4.30}$$
$$= \vec{i}\left(y_1 z_2 - z_1 y_2\right) - \vec{j}\left(x_1 z_2 - x_2 z_1\right) + \vec{k}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right).$$

П р и м е р 4.26. Найти площадь и длину высоты BD треугольника с вершинами в точках $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$, $C(6, 2, 0)$.

Р е ш е н и е. Поскольку площадь S треугольника ABC равна $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|$, то $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \frac{2S}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$ (рис. 4.13).

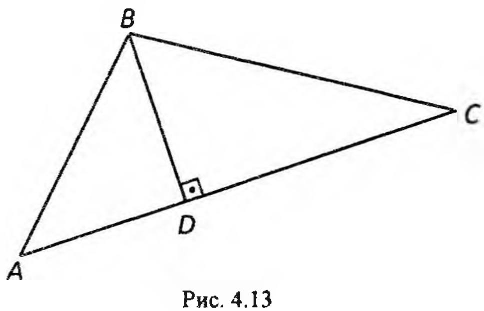


Рис. 4.13

1. Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и длину $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}; \quad \overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{105}.$$

2. Находим S:

$$S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|; \quad \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = -28\vec{j} - 14\vec{k}.$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{(-28)^2 + (-14)^2} = 14\sqrt{5}; \quad S = 7\sqrt{5}.$$

3. $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \dfrac{14\sqrt{5}}{\sqrt{105}} = \dfrac{14}{\sqrt{21}} = 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}.$ ⊗

П р и м е р 4.27. Сила $\vec{F} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ приложена в точке $B(0; 1; -2)$. Найти $\vec{M}_A\left(\vec{F}\right)$, если $A(1; -1; 2)$.

Р е ш е н и е . Согласно определению момента силы $\vec{M}_A\left(\vec{F}\right) = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{F}\right]$, находим координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; -4)$, тогда

$$\vec{M}_A\left(\vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}.$$

Ответ: $\vec{M}_A\left(\vec{F}\right) = (-2; -3; -1)$. ⊗

П р и м е р 4.28. Найти единичный вектор $\vec{c}$, перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a} = (3; -1; 2)$ и $\vec{b} = (-1; 3; -1)$.

Р е ш е н и е . Векторное произведение $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ даст вектор, который ортогонален каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдем $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ (см. (4.30)):

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} + 8\vec{k}; \quad \left|[\vec{a},\vec{b}]\right| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 8^2} = \sqrt{90}.$$

Тогда $\vec{c} = \pm \dfrac{[\vec{a},\vec{b}]}{\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|} = \pm\left(-\dfrac{5}{\sqrt{90}}; \dfrac{1}{\sqrt{90}}; \dfrac{8}{\sqrt{90}}\right) = \pm\left(-\dfrac{5}{3\sqrt{10}}; \dfrac{1}{3\sqrt{10}}; \dfrac{8}{3\sqrt{10}}\right)$.

Ответ: $\pm\left(-\dfrac{5}{3\sqrt{10}}; \dfrac{1}{3\sqrt{10}}; \dfrac{8}{3\sqrt{10}}\right)$. ⊗

4.10. Смешанное произведение векторов

О п р е д е л е н и е . ***Смешанным произведением трех векторов*** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $[\vec{a},\vec{b}]$ умножается скалярно на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$). Таким образом, $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}]\vec{c})$.

Смешанное произведение векторов обладает следующими ***свойствами***:

1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$;

2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$,

т. е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке векторов и меняет знак на противоположный при перемене мест любых двух рядом стоящих векторов – сомножителей;

3) $(\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$;

4) $(\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \alpha\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

5) модуль смешанного произведения равен ***объему параллелепипеда***, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V = \left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|.$$

6) равенство $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$ является ***необходимым и достаточным условием компланарности векторов*** $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Если $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})>0$, то $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка; если $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})<0$ - левая тройка.

Если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ заданы в ортонормированном базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ координатами $\vec{a}(x_1,y_1,z_1)$; $\vec{b}(x_2,y_2,z_2)$; $\vec{c}(x_3,y_3,z_3)$, то

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

П р и м е р 4.29. Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0, 0, 1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(6, 2, 3)$, $D(3, 7, 2)$.

Р е ш е н и е . Рассмотрим три вектора (рис. 4.14):

$$\overline{AB}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k};\quad \overline{AC}=6\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k};\quad \overline{AD}=3\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}.$$

Можно показать, что объем пирамиды $ABCD$ равен шестой части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$.

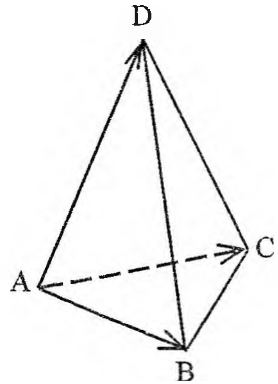


Рис. 4.14

Тогда $V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$, а т. к.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 120, \text{ то } V = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20.$$

Ответ: 20.

П р и м е р 4.30. Доказать, что четыре точки $A_1(3, 5, 1)$, $A_2(2, 4, 7)$, $A_3(1, 5, 3)$, $A_4(4, 4, 5)$ лежат в одной плоскости.

Р е ш е н и е. Достаточно показать, что три вектора $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$, имеющие начало в одной из данных точек, лежат в одной плоскости (т. е. компланарны). Находим координаты векторов $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$:

$$\overline{A_1A_2} = (2-3; 4-5; 7-1) = (-1; -1; 6);$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (1-3; 5-5; 3-1) = (-2; 0; 2);$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (4-3; 4-5; 5-1) = (1; -1; 4).$$

Проверяем условие компланарности векторов (свойство 6 смешанного произведения):

$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 12 - 0 - 2 - 8 = 0.$$

Следовательно, векторы $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$ компланарны, а значит, точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости.

П р и м е р 4.31. Образуют ли векторы $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (5;7;4)$, $\vec{c}(2;7;-4)$ базис в трехмерном пространстве? Если да, то определите, какой тройкой является тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правой или левой.

Решение. Вычислим смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -49.$$

Так как $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq 0$, то векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не компланарны, а значит, образуют базис в пространстве. Учитывая, что $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) < 0$, то тройка векторов – левая. ⊗

4.11. Полярная система координат. Уравнение линии на плоскости

4.11.1. Полярная система координат

Полярная система координат задается точкой O, называемой ***полюсом***, лучом Op, называемым ***полярной осью***, и ***единичным вектором*** $\vec{e}$ того же направления, что и луч Op.

Положение точки M на плоскости определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (рис. 4.15) и отсчитываемым в положительном направлении.

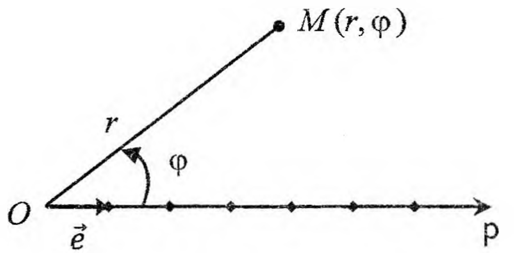


Рис. 4.15

Определение. Числа r и φ называются ***полярными координатами*** точки M: r называют ***полярным радиусом***, φ – ***полярным углом***.

Если рассматривать значения r в промежутке $[0; +\infty)$, а значение φ в $(-\pi; \pi]$ (или в $[0; 2\pi)$), то каждой точке плоскости (кроме O) соответствует единственная пара чисел r и φ, и наоборот.

Если совместить полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось – с положительной полуосью Oxy (рис. 4.16), то связь между полярными и прямоугольными координатами точки (кроме точки O) устанавливается формулами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi; \end{cases} \tag{4.31}$$

и

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \tag{4.32}$$

Откуда, в частности, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, где $x \neq 0$.

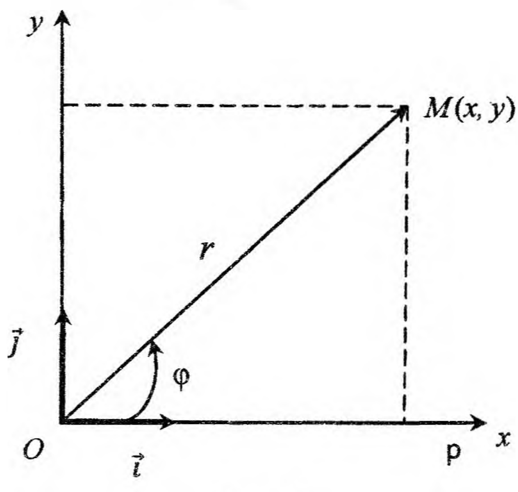


Рис. 4.16

□ П р и м е р 4.32. Найти прямоугольные координаты точки M с полярными координатами $\left(2;-\frac{2}{3}\pi\right)$.

Р е ш е н и е . Имеем $r=2, \varphi=-\frac{2}{3}\pi$. По формулам (4.31) находим

$$x=2\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,\ y=2\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}.$$

Итак, $M\left(-1;-\sqrt{3}\right)$. ⊗

□ П р и м е р 4.33. Найти полярные координаты точки M с прямоугольными координатами $\left(-\sqrt{3};-1\right)$.

Р е ш е н и е . Имеем $x=-\sqrt{3};\ y=-1$. По формулам (4.32) находим $r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2, \operatorname{tg}\varphi=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Точка M лежит в III четверти, следовательно, с учетом того, что $-\pi<\varphi\le\pi$, получаем $\varphi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5}{6}\pi$. Итак, $M\left(2;-\frac{5}{6}\pi\right)$. ⊗

4.11.2. Уравнение линии на плоскости

О п р е д е л е н и е . ***Уравнением линии на плоскости Оху*** называется уравнение $F(x,y)=0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней. Переменные x и y в уравнении линии называются ***текущими координатами*** точек линии.

Задача нахождения точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x,y)=0$ и $F_2(x,y)=0$, сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0; \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Аналогично вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат: $F(r,\varphi)=0$.

Линию на плоскости можно рассматривать как траекторию пути, пройденного точкой, движущейся по какому-нибудь закону. Если абсцисса точки $M(x;y)$ изменяется по закону $x = x(t)$, а ордината – по закону $y = y(t)$, где t – переменная, называемая ***параметром***, то уравнение линии записывается в виде

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2].$$

Эти уравнения называются ***параметрическими уравнениями линии***.

Линию на плоскости можно задать ***векторным уравнением*** $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где t – скалярный параметр; при изменении t конец вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ описывает некоторую линию, называемую ***годографом*** (рис. 4.17). Параметрические уравнения годографа: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$.

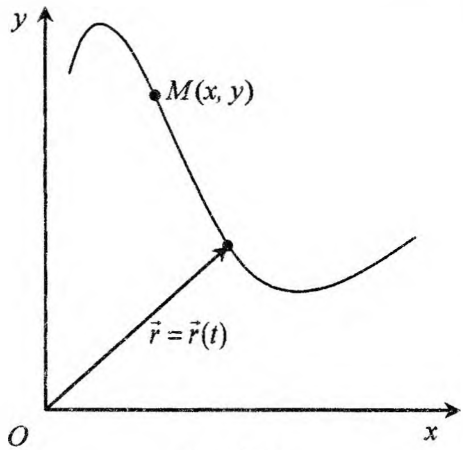


Рис. 4.17

Так, например, параметрическими уравнениями окружности с центром в точке O и радиуса R являются $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$, а эллипса с полуосями a и b – $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Здесь в качестве параметра t использован угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$, где M – текущая точка кривой.

Примером векторного уравнения кривой является уравнение окружности диаметра $2R$, центр которой лежит на полярной оси, а полюс системы координат лежит на окружности: $r = 2R\cos\varphi$.

4.12. Прямая на плоскости

Будем считать, что на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy.

4.12.1. Различные виды уравнений прямой

Положение прямой на плоскости однозначно определяется какой-либо фиксированной точкой $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на ней, и либо:

1) ненулевым вектором $\vec{n}(A, B) \neq \vec{0}$, перпендикулярным к прямой, который называется ***нормальным вектором*** прямой;

2) ненулевым вектором $\vec{s}(m, n) \neq \vec{0}$, параллельным прямой, который называется ***направляющим вектором*** прямой;

3) ***угловым коэффициентом*** прямой k, который равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox;

4) ***еще одной точкой*** $M_1(x_1, y_1)$, не совпадающей с точкой $M_0(x_0, y_0)$.

В каждом из перечисленных случаев получаются свои уравнения прямой.

1) Заданы точка $M_0(x_0, y_0)$, лежащая на прямой, и нормальный вектор $\vec{n}(A, B)$, т. е. $\vec{n}(A, B) \neq \vec{0}$ и перпендикулярен прямой. Имеем следующие уравнения:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \qquad (4.33)$$

откуда получаем

$$Ax + By + C = 0. \qquad (4.34)$$

где $C = -(Ax_0 + By_0)$, причем $A^2 + B^2 \neq 0$ (т. к. $\vec{n} \neq \vec{0}$).

О п р е д е л е н и е. Уравнение (4.34) называется ***общим уравнением прямой*** на плоскости.

Уравнение $Ax+By+C=0$ с условием $A^2+B^2\neq 0$ называется уравнением ***первой степени с двумя переменными***.

Если в уравнении (4.34) $A\neq 0; B\neq 0; C\neq 0$, то его можно привести к виду $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Это уравнение называется ***уравнением прямой в отрезках***, где a и b – длины отрезков с учетом знака, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно.

2) Даны точка $M_0(x_0,y_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{s}(m,n)$, т. е. $\vec{s}\neq\vec{0}$ и $\vec{s}$ параллелен прямой.

Имеем уравнения:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \end{cases}, t\in R, \qquad (4.35)$$

или при условии $m\neq 0, n\neq 0$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (4.36)$$

О п р е д е л е н и е. Уравнения (4.35) называются ***параметрическими*** уравнениями, а (4.36) – ***каноническим уравнением прямой*** на плоскости.

Несложными алгебраическими преобразованиями уравнения (4.35) и (4.36) могут быть сведены к общему уравнению (4.34), т. е. к уравнению первой степени относительно x и y.

Замечание. В случае, когда одна из координат направляющего вектора $\vec{s}(m,n)$ равна нулю, запись уравнения прямой в канонической форме сохраняется в виде (4.36). При этом если в знаменателе стоит нуль, то к нулю нужно приравнять и числитель. Полученное равенство (или $y=\text{const}$, или $x=\text{const}$) и будет уравнением прямой на плоскости.

3) Если заданы точка $M_0(x_0, y_0)$ прямой и ее угловой коэффициент k, то ***уравнение с угловым коэффициентом*** имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (4.37)$$

После приведения подобных членов (4.37) можно записать и так: $y = kx + b$.

4) На прямой заданы две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Тогда ***каноническое уравнение прямой, проходящей через две точки***, имеет следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \qquad (4.38)$$

Все уравнения (4.35–4.38) можно записать в виде уравнения первой степени относительно x и y.

⚠ ***Вывод. Каждая прямая на плоскости Oxy определяется уравнением первой степени с двумя переменными x и y:***

$Ax + By + C = 0;\ A^2 + B^2 \neq 0$.

Верно и обратное: каждое такое уравнение первой степени относительно x и y задает на плоскости прямую.

Заметим, что нормальный и направляющий векторы прямой на плоскости связаны следующим образом: если $\vec{n}(A, B)$, то $\vec{s}(B, -A)$ (т. к. $(\vec{n}, \vec{s}) = AB - AB = 0$, то $\vec{s} \perp \vec{n}$).

Расстояние $\rho(M_0, l)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l, заданной уравнением (4.34), вычисляется по формуле

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (4.39)$$

☐ П р и м е р 4.34. Составить каноническое и общее уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2;1)$ и $M_2(-1;2)$. Найти угловой коэффициент этой прямой.

Р е ш е н и е. Для составления канонического уравнения воспользуемся формулой (4.38):

$$\frac{x-2}{-1-2}=\frac{y-1}{2-1} \text{ или } \frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{1} \text{ – каноническое уравнение.}$$

Общее уравнение получим из данного канонического, умножая обе части равенства на – 3, перенося все слагаемые в левую часть и приводя подобные члены:

$$x-2+3(y-1)=0 \Leftrightarrow x+3y-5=0 \text{ – общее уравнение.}$$

Чтобы получить угловой коэффициент прямой, выразим из общего уравнения y:

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ – уравнение с угловым коэффициентом вида $y=kx+b$. Следовательно, $k=-\frac{1}{3}$. ⊠

П р и м е р 4.35. Составить уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M(-1, 2)$ перпендикулярно вектору, проходящему через точки $M_1(3, 1)$ и $M_2(4, -2)$. Найти расстояние от точки M до прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

Р е ш е н и е. Уравнение прямой запишем в виде (4.33):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

где x_0, y_0 – координаты точки M, а A и B – координаты нормального вектора.

Так как $\vec{n}=\overline{M_1M_2}=(1,-3)$, то уравнение имеет вид $1(x+1)-3(y-2)=0$ или $x-3y+7=0$.

Для нахождения расстояния от точки M до прямой M_1M_2 запишем уравнение этой прямой в виде (4.38):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \text{ т. е. } \frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{3},$$

или $3x+y-10=0$.

Подставляя в формулу (4.39) координаты $x_0=-1$, $y_0=2$ точки M, получаем

$$\rho(M,l)=\frac{|3(-1)+1\cdot 2-10|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{11}{\sqrt{10}}. ⊠$$

□ П р и м е р 4.36. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1; -2)$ и образующей с осью Ox угол $\alpha = 60°$.

Р е ш е н и е. Найдем угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$. Подставляя координаты данной точки M_0 и значение углового коэффициента в уравнение (4.37) получим искомое уравнение прямой: $y + 2 = \sqrt{3}(x - 1)$ или $y - \sqrt{3}x + 2 + \sqrt{3} = 0$ – общее уравнение прямой. ⊗

4.12.2. Взаимное расположение прямых на плоскости

Две прямые на плоскости либо пересекаются, либо параллельны, либо совпадают.

О п р е д е л е н и е. Под ***углом между прямыми в плоскости*** понимают наименьший (острый) из углов, образованных этими прямыми. Один из углов, образованных пересечением прямых, совпадает с углом между векторами нормали или направляющими векторами прямых.

1. Если две прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то величина φ угла между ними вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{n}_1 \widehat{\,,\,} \vec{n}_2\right)\right| = \frac{\left|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad (4.40)$$

где $\vec{n}_1(A_1, B_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ – векторы нормали прямых.

Условие ***пересечения*** прямых:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}, \quad (4.41)$$

в частности, условие ***перпендикулярности*** прямых:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \quad (4.42)$$

Условие ***параллельности*** прямых:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}, \tag{4.43}$$

условие ***совпадения*** прямых:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{4.44}$$

2. Если прямые l_1 и l_2 заданы ***каноническими*** (***параметрическими***) уравнениями: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$, то

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\widehat{\vec{s}_1,\vec{s}_2}\right)\right|=\frac{\left|(\vec{s}_1,\vec{s}_2)\right|}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}}, \tag{4.45}$$

где $\vec{s}_1(m_1,n_1)$, $\vec{s}_2(m_2,n_2)$ – направляющие векторы прямых.

Условие ***пересечения*** прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}\neq\frac{n_1}{n_2}, \tag{4.46}$$

параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}, \tag{4.47}$$

перпендикулярности прямых:

$$m_1m_2+n_1n_2=0. \tag{4.48}$$

3. Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с ***угловым коэффициентом*** $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Условие ***пересечения*** прямых: $k_1 \neq k_2$;
параллельности прямых:

$$k_1 = k_2;\ b_1 \neq b_2;$$

совпадения прямых:

$$k_1 = k_2;\ b_1 = b_2;$$

перпендикулярности прямых:

$$k_1 \cdot k_2 = -1,\ \text{т. е.}\ k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Для нахождения точек пересечения прямых l_1 и l_2 нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1}, \\ \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2. \end{cases} \qquad (4.49)$$

□ Пример 4.37. Найти острый угол между прямыми, определяемыми уравнениями $9x - 3y + 7 = 0$ и $6x + 3y - 4 = 0$. Найти точку пересечения этих прямых.

Решение. Запишем векторы нормалей этих прямых $\vec{n}_1(9;-3)$; $\vec{n}_2(6;3)$ и воспользуемся формулой (4.40):

$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|9 \cdot 6 + (-3) \cdot 3|}{\sqrt{9^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{45}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{45}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45°$. Для того, чтобы найти точку пересечения прямых, составим и решим систему уравнений (4.49):

$$\begin{cases} 9x - 3y + 7 = 0 \\ 6x + 3y - 4 = 0 \end{cases}.$$

Складывая оба уравнения, получим $\begin{cases} 15x + 3 = 0 \\ 6x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$, откуда

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5}, \\ y = \frac{26}{15}. \end{cases}$$ ⊗

Пример 4.38. Дана прямая $3x - 4y = 7$. Через точку $M_0(3;\ 2)$ проведена прямая: а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой. Составить ее уравнение.

Решение. а) $\vec{n}(3; -4)$ – вектор нормали исходной прямой. В силу параллельности прямых его можно считать и вектором нормали искомой прямой. Составляем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;\ 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(3; -4)$ (см. (4.33)):

$3(x-3) + (-4)(y-2) = 0$, или $3x - 4y - 1 = 0$.

б) В силу перпендикулярности прямых вектор нормали $\vec{n}(3; -4)$ будет направляющим вектором для перпендикулярной прямой: $\vec{s} = \vec{n}(3; -4)$. Составим каноническое уравнение прямой, походящей через точку $M_0(3;\ 2)$ параллельно вектору $\vec{s}(3; -4)$ (см. (4.36)):

$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-4} \Rightarrow -4x + 12 = 3y - 6 \Rightarrow 4x + 3y - 18 = 0$ – искомое уравнение. ⊗

4.13. Плоскость в пространстве

Будем считать, что в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$.

4.13.1. Различные виды уравнения плоскости

Однозначное расположение плоскости определяется

1) либо фиксированной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой плоскости, и ненулевым вектором $\vec{n}(A, B, C)$, перпендикулярным к плоскости, который называется ***нормальным вектором***;

2) либо тремя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащими на одной прямой.

Рассмотрим эти случаи.

1. ***Уравнение плоскости, проходящей через точку*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***перпендикулярно вектору*** $\vec{n}(A, B, C)$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4.50)$$

Если раскрыть скобки, привести подобные члены, обозначить $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, то будем иметь уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, \qquad (4.51)$$

которое называется ***общим уравнением плоскости.***

Если в (4.51) все коэффициенты не равны нулю, то путем деления обеих частей уравнения (4.51) на $(-D)$ получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (4.52)$$

которое называется ***уравнением плоскости в отрезках***. Здесь a, b, c – абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с координатными осями Ox, Oy, и Oz соответственно.

2. ***Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки*** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.53)$$

Если вычислить этот определитель, то мы придем к уравнению вида (4.51), т. е. к общему уравнению плоскости.

Уравнением первой степени с тремя переменными называют уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\ .$$

Вывод. Каждая плоскость в пространстве Oxyz определяется уравнением первой степени с тремя переменными

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\ .$$

И наоборот, каждое уравнение первой степени относительно x, y, z определяет некоторую плоскость в пространстве.

4.13.2. Взаимное расположение плоскостей

Пусть две плоскости заданы своими общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0\ , \tag{4.54}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0\ . \tag{4.55}$$

Различают следующие случаи взаимного расположения плоскостей: 1) пересекаются по прямой; 2) параллельны; 3) совпадают.

Условие ***пересечения***: соответствующие коэффициенты при x, y, z в (4.54), (4.55) не пропорциональны, т. е. $\vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2$, здесь $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$; $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$. При этом условие ***перпендикулярности*** плоскостей имеет вид:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0\ . \tag{4.56}$$

Условия ***параллельности*** плоскостей (4.54) и (4.55):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}\ ; \tag{4.57}$$

совпадения плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \qquad (4.58)$$

Углом между плоскостями (4.54) и (4.55) называется угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2,B_2,C_2)$.

Поэтому косинус угла φ между ними находится по формуле

$$\cos\varphi=\cos\left(\vec{n}_1\,\hat{,}\,\vec{n}_2\right)=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad 4.59)$$

Величина меньшего угла между плоскостями вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (4.60)$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (4.61)$$

□ Пример 4.39. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(2;\,1;\,-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(1;-2;3)$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.50):

$$1\cdot(x-2)+(-2)(y-1)+3(z-(-1))=0.$$

Отсюда $x-2-2y+2+3z+3=0$, а значит, $x-2y+3z+3=0$ – общее уравнение искомой плоскости.

□ Пример 4.40. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2;\,3;\,1)$ параллельно плоскости Oxy.

Решение. В качестве вектора нормали плоскости Oxy можно взять базисный вектор $\vec{k}=(0;0;1)=\vec{n}$, который будет служить и вектором нормали искомой плоскости. Далее по формуле (4.50) $0\cdot(x+2)+0\cdot(y-3)+1\cdot(z-1)=0$ или $z-1=0$.

Пример 4.41. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(1;0;-1)$, $M_2(2;2;3)$, $M_3(0;-3;1)$.

Решение. Используя формулу (4.53), получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 2-1 & 2-0 & 3+1 \\ 0-1 & -3-0 & 1+1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - y\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(x-1)-6y-(z+1)=0 \Rightarrow 16x-6y-z-17=0 \quad -$$

общее уравнение искомой плоскости.

Пример 4.42. Найти угол между двумя плоскостями: $x-2y-z+1=0$, $x+3z-7=0$.

Решение. Нормальный вектор первой плоскости $\vec{n}_1(1;-2;-1)$, второй – $\vec{n}_2(1;0;3)$. Следовательно, по формуле (4.59)

$$\cos\varphi=\cos\left(\vec{n}_1\,\hat{}\,,\vec{n}_2\right)=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=$$

$$=\frac{1\cdot1+(-2)\cdot0+(-1)\cdot3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+3^2}}=\frac{-2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}}=\frac{-1}{\sqrt{15}}$$

Значит, угол φ тупой, $\varphi=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{15}}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$. Острый угол находится из соотношения: $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{15}}$; $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$.

□ **Пример 4.43.** Вычислить расстояние между параллельными плоскостями: $x-2y-2z-12=0$, $x-2y-2z-6=0$.

Решение. $\vec{n}(1;-2;-2)$ – вектор нормали обеих плоскостей. Для решения задачи найдем какую-либо точку на первой плоскости и вычислим расстояние от этой точки до второй плоскости. Для этого положим в первом уравнении $x=0, y=0$, тогда $-2z-12=0$. Отсюда $z=-6$. Следовательно, $M_0(0;\ 0;\ -6)$ – точка, лежащая на первой плоскости. Тогда по формуле (4.61) имеем:

$$d=\frac{|1\cdot 0-2\cdot 0-2\cdot(-6)-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{6}{3}=2\text{, т. е. } d=2. \otimes$$

4.14. Прямая в пространстве

4.14.1. Различные уравнения прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве однозначно определяется:

1) заданием точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ этой прямой и ненулевого вектора $\vec{s}(m,n,p)$, параллельного прямой, который называется ***направляющим вектором*** прямой;

2) заданием двух точек $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ на этой прямой;

3) пересечением двух непараллельных плоскостей.

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $\vec{s}(m,n,p)$, $\vec{s}\neq\vec{0}$, имеют следующий вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (4.62)$$

а ее ***параметрические уравнения***:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt, \quad t\in R, \\ z=z_0+pt, \end{cases} \qquad (4.63)$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4.64)$$

Общими уравнениями прямой называется система уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (4.65)$$

т. е. прямая задается пересечением двух плоскостей. Направляющий вектор прямой (4.65) находится по формуле:

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (4.66)$$

4.14.2. Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \qquad (4.67)$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \qquad (4.68)$$

Возможны следующие случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве: 1) прямые параллельны; 2) совпадают; 3) пересекаются в одной точке; 4) прямые скрещиваются.

Условия ***параллельности*** прямых (4.67) и (4.68):

$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 : \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$; и вектор $\overline{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ не коллинеарен векторам $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$.

Условия ***совпадения*** прямых:

$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overline{M_1M_2}$.

Условия ***пересечения*** прямых:

$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$ (условие компланарности векторов $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$) и векторы $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ неколлинеарны.

Условия ***скрещивающихся*** прямых (т. е. прямые не лежат в одной плоскости):

$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (условие некомпланарности векторов $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$).

Заметим, что $\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overline{M_1M_2}\right) = 0$ является условием того, что прямые (4.67) и (4.68) ***лежат в одной плоскости.***

Под ***углом между прямыми*** (4.67), (4.68) понимают угол между направляющими векторами $\vec{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2(m_2, n_2, p_2)$. Величина этого угла φ определяется формулой:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (4.69)$$

Условие ***перпендикулярности*** двух прямых:

$(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$, т.е. $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

П р и м е р 4.44. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(4;\ 3;\ -2)$ параллельно 1) вектору $\vec{s}(3;-6;5)$; 2) прямой $\begin{cases} x+3y+z-6=0, \\ 2x-y-4z+1=0. \end{cases}$

Р е ш е н и е. 1) Вектор $\vec{s}(3;-6;5)$ является направляющим вектором искомой прямой, проходящей через точку M_0. Тогда по формуле (4.62) канонические уравнения прямой примут вид:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z+2}{5}.$$

Используя (4.63), параметрические уравнения прямой запишутся в виде:

$$\begin{cases} x=4+3t \\ y=3-6t \\ z=-2+5t \end{cases},\quad t\in R.$$

2) Направляющий вектор $\vec{s}_1$ заданной в условии прямой находим по формуле (4.66):

$$\vec{s}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-11\vec{i}+6\vec{j}-7\vec{k},$$

т. е. $\vec{s}_1=(-11;6;-7)$.

Вектор $\vec{s}_1$ может служить направляющим вектором и искомой прямой, т. к. прямые параллельны. Получаем канонические уравнения:

$$\frac{x-4}{-11}=\frac{y-3}{6}=\frac{z+2}{-7},$$

а параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x=4-11t, \\ y=3+6t \\ z=-2-7t, \end{cases},\quad t\in R.$$

□ Пример 4.45. Найти уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(2;\,2;\,2)$ и $M_2(6;\,2;\,1)$.

Решение. Воспользуемся уравнениями (4.64):

$$\frac{x-2}{6-2}=\frac{y-2}{2-2}=\frac{z-2}{1-2} \text{ или } \frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-2}{-1}.$$

Запись уравнений прямой в канонической форме сохраняется и в случае обращения отдельных координат вектора $\vec{s}$ в ноль. Если в знаменателе стоит ноль, то нулю нужно приравнять и числитель, т. е. уравнения можно записать в виде: $\begin{cases} y-2=0, \\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{z-2}{-1}, \end{cases}$ или

$\begin{cases} y=2, \\ x+4z-10=0, \end{cases}$ – это общие уравнения прямой в пространстве. При этом параметрические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} x=2+4t, \\ y=2, \\ z=2-t. \end{cases}$$ ⊗

□ Пример 4.46. Найти угол между прямыми $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{-8}$ и $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-4}{-8}=\dfrac{z+1}{-7}$.

Решение. $\vec{s}_1(7;2;-8)$ и $\vec{s}_2(11;-8;-7)$ – направляющие векторы первой и второй прямых соответственно. Тогда по формуле (4.69)

$$\cos\varphi=\cos\left(\vec{s}_1\,\hat{,}\,\vec{s}_2\right)=\frac{(\vec{s}_1,\vec{s}_2)}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{7\cdot 11+2\cdot(-8)+(-8)(-7)}{\sqrt{7^2+2^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}}=$$

$$=\frac{117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\vec{s}_1\,\hat{,}\,\vec{s}_2\right)=45^\circ.$$ ⊗

Пример 4.47. Установить взаимное расположение прямых:

1) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-2}$ и $\begin{cases} x=5-8t, \\ y=4-6t, \\ z=3+4t. \end{cases}$

2) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{1}$ и $\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{4}$.

Решение. 1) Выпишем направляющие векторы первой и второй прямых: $\vec{s}_1(4;3;-2)$, $\vec{s}_2(-8;-6;4)$. Так как координаты этих векторов пропорциональны: $\dfrac{4}{-8}=\dfrac{3}{-6}=\dfrac{-2}{4}$, то $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$. Следовательно, данные прямые параллельны или совпадают. Возьмем точки $M_1(2;\ 0;\ -1)$ и $M_2(5;\ 4;\ 3)$, лежащие на прямых. Получим вектор $\overline{M_1M_2}=(3;4;4)$. Так как $\overline{M_1M_2} \nparallel \vec{s}_1$ и $\overline{M_1M_2} \nparallel \vec{s}_2$, то прямые параллельны.

2) Координаты направляющих векторов $\vec{s}_1(2;-3;1)$, $\vec{s}_2(3;2;4)$ данных прямых не пропорциональны: $\dfrac{2}{3}\neq-\dfrac{3}{2}\neq\dfrac{1}{4}$. Следовательно, прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся. Проверим условие принадлежности двух прямых одной плоскости: $\left(\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overline{M_1M_2}\right)=0$. Данные прямые проходят через точки $M_1(0;\ 1;\ -2)$ и $M_2(-4;\ -3;\ 1)$. Имеем:

$$\begin{vmatrix} -4-0 & -3-1 & 1-(-2) \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=$$

$$=-4\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4\cdot(-14)+4\cdot5+3\cdot13=115\neq0.$$

Следовательно, данные прямые – скрещивающиеся.

Пример 4.48. Общие уравнения прямой $\begin{cases} x+2y-3z+2=0, \\ 2x-2y+z-5=0, \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

Р е ш е н и е. Нам надо знать какую-либо точку на прямой и ее направляющий вектор $\vec{s}$. Выберем точку на прямой следующим образом: положим, например, $z=0$; тогда для нахождения абсциссы x и ординаты y этой точки получим систему уравнений: $\begin{cases} x+2y+2=0, \\ 2x-2y-5=0, \end{cases}$ из которой находим $x=1, y=-\dfrac{3}{2}$. Значит, $M_0\left(1;-\dfrac{3}{2};0\right)$ – точка прямой. Направляющий вектор $\vec{s}$ прямой находим по формуле (4.66):

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}-7\vec{j}-6\vec{k},$$

т. е. $\vec{s}=(-4;-7;-6)$. Тогда, согласно формуле (4.62): $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y+\frac{3}{2}}{-7}=\dfrac{z}{-6}$ – искомые канонические уравнения прямой. ⊗

4.15. Прямая и плоскость в пространстве

Пусть прямая задана каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (4.70)$$

а плоскость задана общим уравнением:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (4.70а)$$

Различают следующие случаи расположения прямой и плоскости: 1) прямая пересекается с плоскостью в одной точке; 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит в плоскости. Укажем для каждого из этих случаев условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнений (4.70) и (4.70 а). Выпишем направляющий вектор $\vec{s}(m,n,p)$ прямой (4.70), нормальный вектор $\vec{n}(A,B,C)$ плоскости (4.70а), координаты точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ прямой (4.70).

Условие ***пересечения*** прямой и плоскости:

$$(\vec{s},\vec{n})\neq 0 \Leftrightarrow Am+Bn+Cp\neq 0; \qquad (4.71)$$

условия параллельности прямой и плоскости:

$$\begin{cases}(\vec{s},\vec{n})=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Am+Bn+Cp=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0.\end{cases} \qquad (4.72)$$

Условия, при котором ***прямая*** (4.70) ***лежит в плоскости*** (4.70а):

$$\begin{cases}(\vec{s},\vec{n})=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}Am+Bn+Cp=0,\\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.\end{cases} \qquad (4.73)$$

Углом между прямой и плоскостью называется угол φ (острый) между прямой и ее проекцией на плоскость. Величина угла φ определяется по формуле:

$$\sin\varphi=\left|\cos\left(\widehat{\vec{s},\vec{n}}\right)\right|=\frac{|(\vec{s},\vec{n})|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (4.74)$$

Условие ***перпендикулярности прямой и плоскости***:

$$\vec{s}\parallel\vec{n} :\Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (4.75)$$

Для нахождения ***точки пересечения прямой и плоскости*** удобно использовать параметрические уравнения прямой (4.63):

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt.\end{cases}$$

Координаты точки пересечения находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt;\ y = y_0 + nt;\ z = z_0 + pt; \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \qquad (4.76)$$

□ Пример 4.49. Найти угол (в градусах) между прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ и плоскостью $3x - 4y + z - 2 = 0$.

Решение. В данном случае направляющий вектор прямой $\vec{s} = (3; 1; 2)$; а вектор нормали плоскости $\vec{n} = (3; -4; 1)$.

Воспользуемся формулой (4.74). Получим:

$$\sin\varphi = \frac{|9-4+2|}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{9+16+1}} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} = \frac{7}{2\sqrt{13\cdot 7}} = \frac{7}{2\sqrt{91}} \approx 0{,}37.$$

Откуда $\varphi = \arcsin 0{,}37 \approx 21{,}5°$.

□ Пример 4.50. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4; -3; 6)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-2}$.

Решение. Направляющий вектор $\vec{s} = (2; 1; -2)$ прямой может служить нормальным вектором для искомой плоскости: $\vec{n} = \vec{s} = (2; 1; -2)$. Теперь воспользуемся формулой (4.50):

$2(x-4) + 1\cdot(y-(-3)) + (-2)\cdot(z-6) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 7 = 0$ – общее уравнение искомой плоскости.

□ Пример 4.51. Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3;4;5)$ относительно плоскости $x - 2y + z - 6 = 0$.

Решение. Точка M_2, симметричная точке M_1 относительно плоскости, находится на перпендикуляре к плоскости и является концом отрезка M_1M_2, для которого серединой будет точка N пересечения прямой M_1M_2 и плоскости. Направляющий вектор перпендикуляра к плоскости – это нормальный вектор этой плоскости

$\vec{n}=(1;-2;1)$. Уравнения перпендикуляра к плоскости, проведенного через точку M_1, имеют вид $(\vec{s}=\vec{n}=(1;-2;1))$:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-5}{1}(=t)\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+t,\\ y=4-2t,\\ z=5+t.\end{cases}$$

Координаты точки N пересечения перпендикуляра с плоскостью найдем, решая систему (4.76):

$$\begin{cases}x=3+t;\ y=4-2t;\ z=5+t;\\ x-2y+z-6=0.\end{cases}$$

Подставляя выражения для x, y, z в последнее уравнение системы, получим:

$$(3+t)-2(4-2t)+(5+t)-6=0\Leftrightarrow 6t-6=0\Leftrightarrow t=1.$$

Теперь, подставляя найденное значение t в x, y, z, будем иметь: $x=3+1=4;\ y=4-2=2;\ z=5+1=6$, т. е. $N(4;2;6)$ – точка пересечения перпендикуляра и плоскости. А так как N – середина отрезка M_1M_2, то $x_N=\dfrac{x_{M_1}+x_{M_2}}{2};\ y_N=\dfrac{y_{M_1}+y_{M_2}}{2};\ z_N=\dfrac{z_{M_1}+z_{M_2}}{2}$.

Имеем: $4=\dfrac{3+x_{M_2}}{2};\ 2=\dfrac{4+y_{M_2}}{2};\ 6=\dfrac{5+z_{M_2}}{2}$. Отсюда находим: $x_{M_2}=5;\ y_{M_2}=0;\ z_{M_2}=7$. Значит, точка M_2 имеет координаты $(5;0;7)$.

4.16. Кривые второго порядка

Считаем, что на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy.

Уравнением второй степени с двумя переменными называется уравнение вида

$$\boxed{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,\quad A^2+B^2+C^2\neq 0.\quad (4.77)}$$

Линией (кривой) второго порядка называется множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют какому-либо уравнению 2-й степени (4.77).

Линиями 2-го порядка являются ***окружность***, ***эллипс***, ***гипербола***, ***парабола***. Рассмотрим уравнения этих линий в наиболее простом (каноническом) виде, который достигается определенным выбором системы координат.

4.16.1. Окружность

Определение. ***Окружностью*** называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки $N(a,b)$, называемой ***центром***, на одно и то же расстояние R, называемое ***радиусом*** окружности (рис. 4.18).

Каноническое уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (4.78)$$

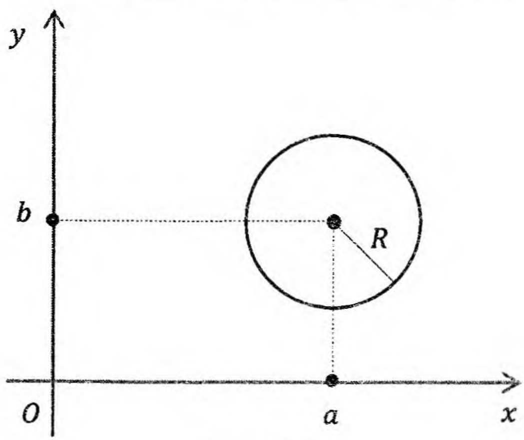


Рис. 4.18

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, т. е. $a=b=0$, то уравнение (4.78) имеет вид

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (4.79)$$

4.16.2. Эллипс

О п р е д е л е н и е . ***Эллипсом*** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, бо́льшая, чем расстояние между фокусами.

Если фокусы эллипса F_1 и F_2, $|F_1F_2| = 2c$, расположить на оси Ox симметрично относительно начала координат, то $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$. Обозначив через $2a$ сумму расстояний от точки кривой до фокусов $(2a > 2c)$, получим ***каноническое уравнение эллипса***:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.80}$$

В этом уравнении $a > b; b > 0$ и числа a, b, c связаны соотношением:

$$c^2 = a^2 - b^2. \tag{4.81}$$

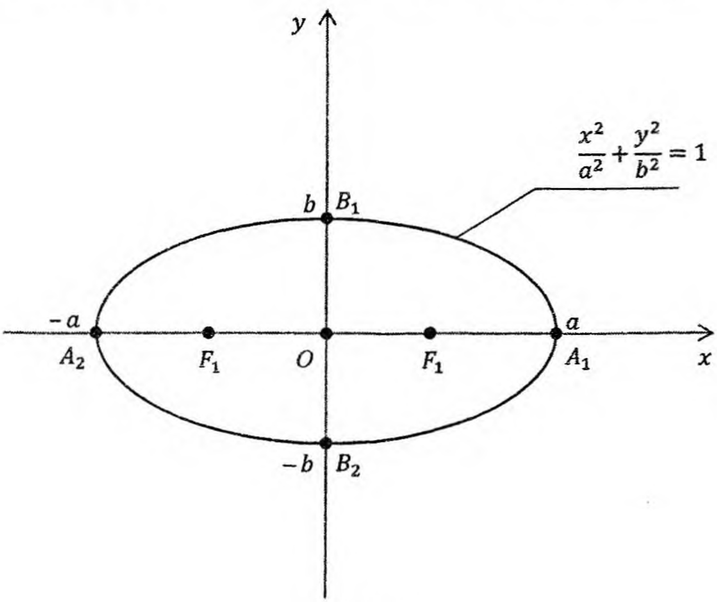


Рис. 4.19

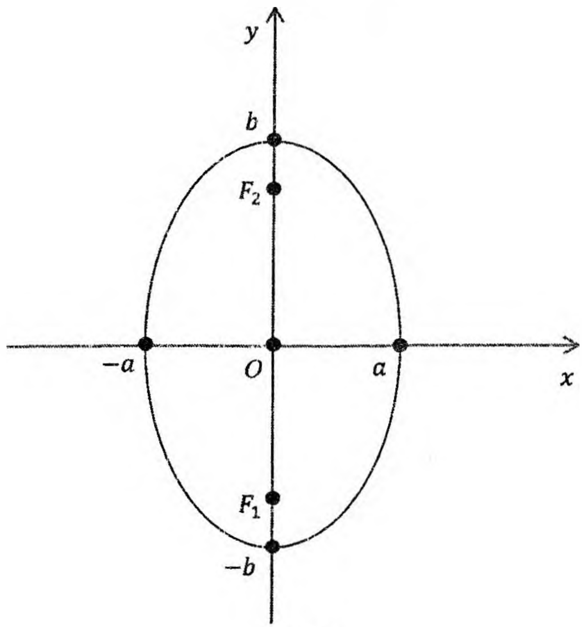


Рис.4.20

Числа a и b называются ***полуосями*** эллипса, a – ***большая полуось***, b – ***малая полуось***.

Точки $A_1(a;0)$; $A_2(-a;0)$; $B_1(0;b)$; $B_2(-b;0)$ называются ***вершинами*** эллипса (это точки пересечения эллипса с осями координат), точка $O(0;0)$ – ***центром*** эллипса. Эллипс, заданный уравнением (4.80) изображен на рис. 4.19.

Эксцентриситетом эллипса называется число ε, равное отношению расстояния между фокусами эллипса $2c$ к длине большой оси $2a$:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (0 \le \varepsilon < 1,\ \text{т. к. } c < a). \qquad (4.82)}$$

Замечания. 1) При $a < b$ уравнение (4.80) также задает эллипс, но его фокусы лежат на оси Oy, при этом $c^2 = b^2 - a^2$; $F_1(0;-c)$; $F_2(0;c)$; $\varepsilon = \frac{c}{b}$ (рис. 4.20).

2) Если $a = b$, то уравнение (4.80) определяет окружность радиуса a с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = a^2$. В этом случае $c = 0$. Следовательно, окружность – это частный случай эллипса с совпадающими фокусами, при этом $\varepsilon = 0$.

3) Уравнение эллипса с осями параллельными координатным имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \qquad (4.83)$$

где x_0, y_0 – координаты центра эллипса.

4) Уравнения: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0; 2\pi]$, являются параметрическими уравнениями эллипса.

4.16.3. Гипербола

Определение. ***Гиперболой*** называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами, и отличная от нуля. Если фокусы гиперболы F_1 и $F_2, |F_1F_2| = 2c$, расположить на оси Ox симметрично относительно начала координат: $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$; и обозначить модуль разности расстояний от точки кривой до фокусов через $2a(0 < a < c)$, то ***каноническое уравнение гиперболы*** имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.84)$$

в котором $b > 0$, причем $c^2 = a^2 + b^2$. (4.85)

Гипербола (4.84) пересекает ось Ox в точках $A_1(a;0); A_2(-a;0)$, которые называются ***вершинами*** гиперболы, а ось Oy гипербола не пересекает.

Та ось гиперболы, которую она пересекает, называется ***действительной***, а та, которую не пересекает – ***мнимой***. Числа a и b называются ***полуосями*** гиперболы; (a – ***действительная***, b – ***мнимая*** полуоси). Точка $O(0;0)$ называется ***центром*** гиперболы.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются ***асимптотами*** гиперболы. При неограниченном удалении от начала координат гипербола бесконечно близко приближается к своей асимптоте, не пересекая ее. Гипербола (4.84) изображена на рис. 4.21.

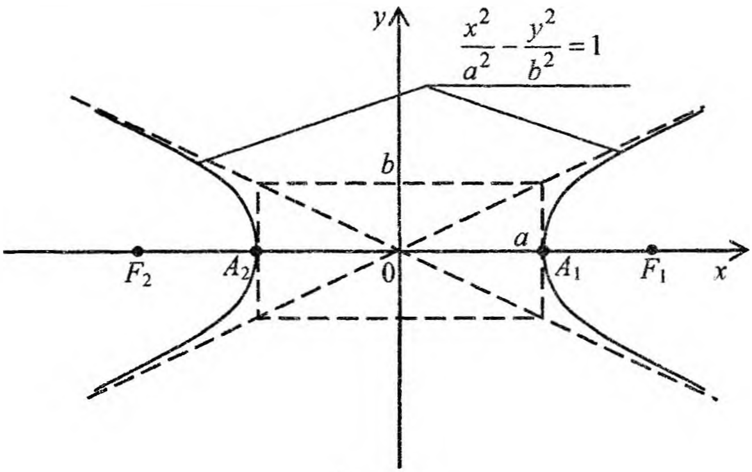


Рис. 4.21

Эксцентриситетом гиперболы называется число ε, равное отношению половины расстояния между фокусами гиперболы к ее действительной полуоси:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon > 1,\ \text{т. к. } c > a). \tag{4.86}$$

Замечания. 1) Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \tag{4.87}$$

Действительной осью гиперболы (4.87) является ось Oy, а мнимой – ось Ox. Гиперболы, заданные уравнениями (4.84) и (4.87), называются ***сопряженными***. Сопряженные гиперболы имеют одинаковые асимптоты, а действительные оси их взаимно перпендикулярны. Для гиперболы (4.87) $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$. Она изображена на рис. 4.22.

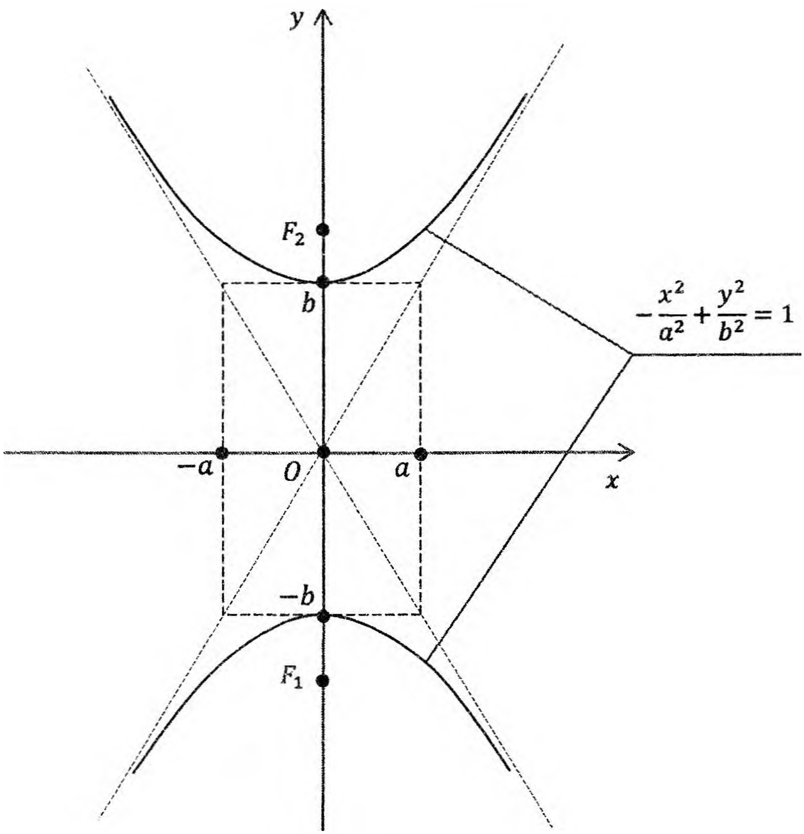


Рис. 4.22

2) Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным, имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \qquad (4.88)$$

где (x_0, y_0) – координаты центра гиперболы.

4.16.4. Парабола

О п р е д е л е н и е . ***Параболой*** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от данной точки, называемой ***фокусом F***, и данной прямой l, называемой ***директрисой***.

Если расстояние от фокуса F до директрисы l обозначить через p, расположить фокус F на оси Ox, которая перпендикулярна директрисе l, а ось Oy – посередине между фокусом и директрисой параллельно последней, то парабола задастся уравнением

$$y^2 = 2px, \qquad (4.89)$$

которое называется каноническим уравнением параболы (рис. 4.23).

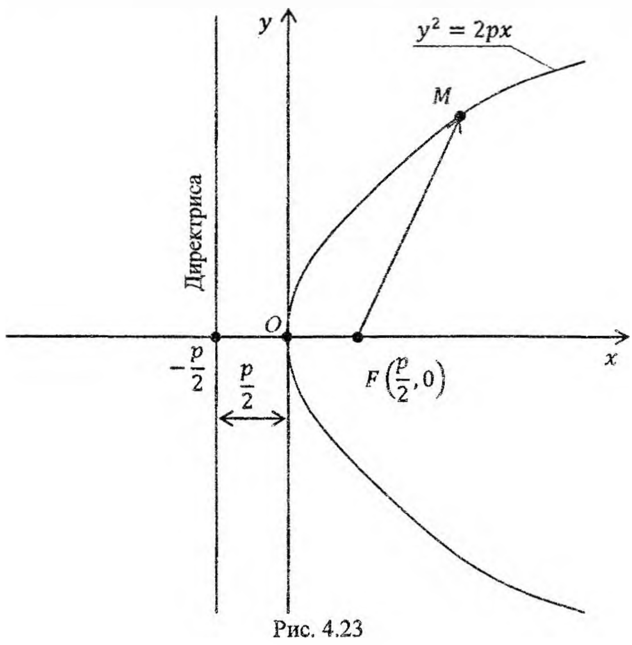


Рис. 4.23

Число p, равное расстоянию от фокуса F до директрисы l, называется ***параметром*** параболы, точка $O(0;0)$ – ее ***вершиной***, а ось Ox – ***осью симметрии*** параболы. ***Уравнение директрисы*** l имеет вид: $x=-\frac{p}{2}$. ***Эксцентриситет*** ε ***параболы*** по определению считается равным 1: $\varepsilon=1$.

Замечания. 1) Уравнение $y^2=-2px$ также задает параболу, симметричную относительно оси Ox (рис. 4.24). Фокус F имеет координаты $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, а уравнение директрисы: $x=\frac{p}{2}$.

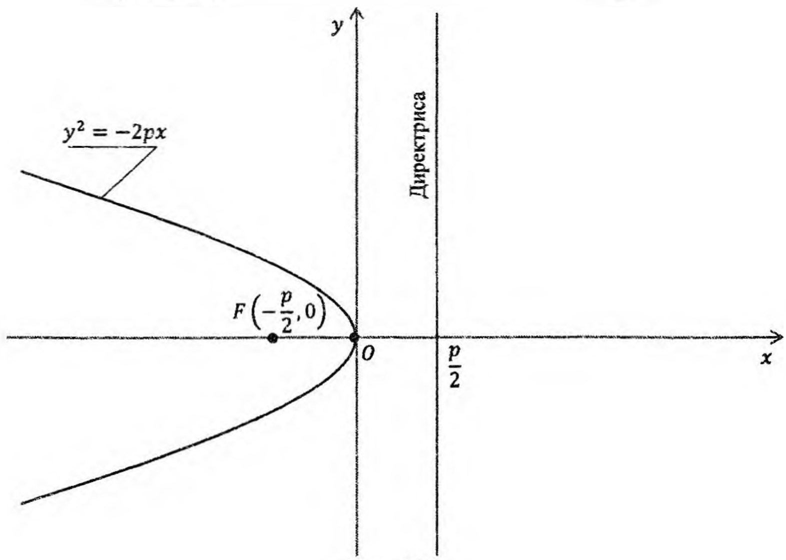


Рис. 4.24

2) Уравнения $x^2=2py$; $x^2=-2py$ также задают параболы, но симметричные относительно оси Oy. У параболы $x^2=2py$ фокус $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, уравнение директрисы $y=-\frac{p}{2}$ (рис. 4. 25). Для параболы $x^2=-2py$ фокус $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, а уравнение директрисы $y=\frac{p}{2}$ (рис. 4. 26).

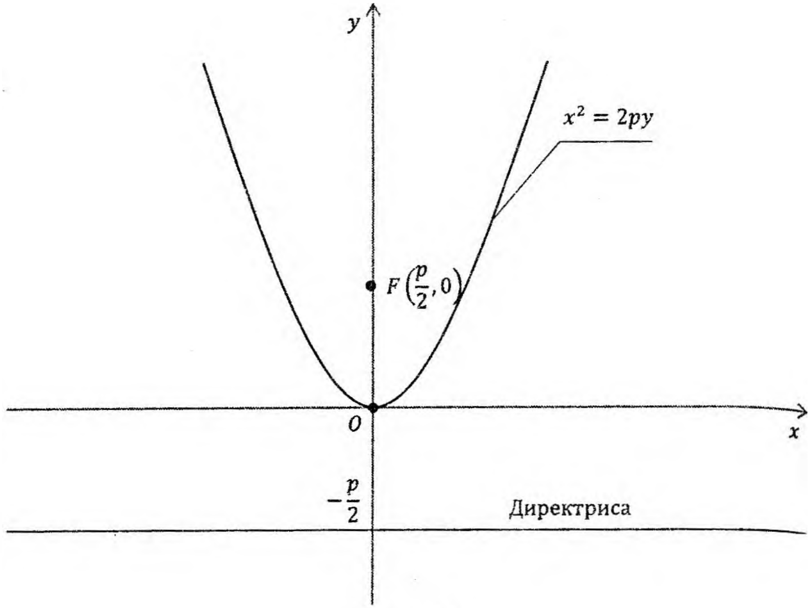


Рис. 4.25

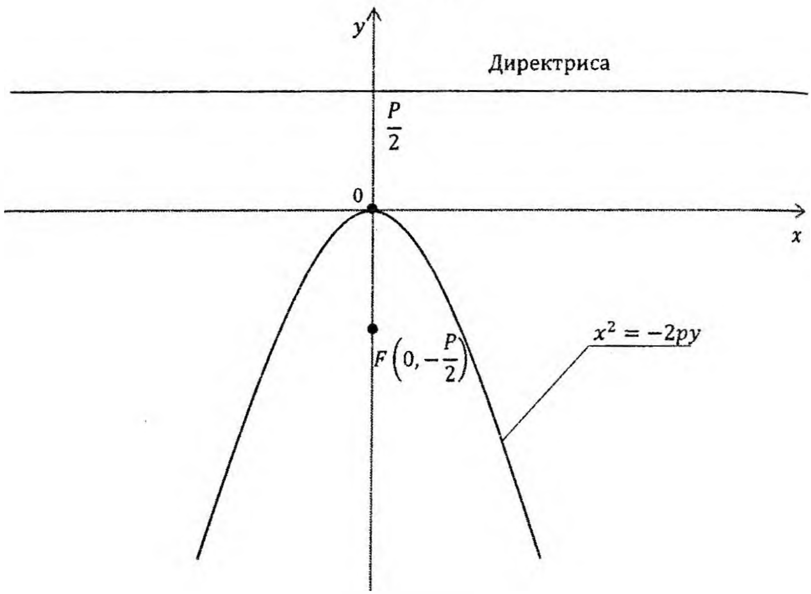


Рис. 4.26

3) Уравнения парабол с осями симметрии, параллельными координатным осям, имеют вид:

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0); \quad (x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0).$$

Известно, что для любой линии второго порядка на плоскости существует прямоугольная декартова система координат, в которой эта линия задается каноническим уравнением.

Покажем на конкретных примерах, как практически привести уравнение линии 2-го порядка, не содержащее члена с произведением переменных, т. е. $B=0$ в (4.77), к каноническому виду.

Пример 4.52. Линия второго порядка задана уравнением

$$3y^2-12x-6y+11=0. \qquad (4.90)$$

Определить вид этой линии и нарисовать ее.

Решение. Уравнение (4.90) не является каноническим. Выделим полный квадрат, включающий в себя все слагаемые с переменной y, ***причем коэффициент при y^2 обязательно выносим за скобки.***

$$3(y^2-2y)-12x+11=0 \Leftrightarrow 3((y^2-2y+1)-1)-12x+11=0 \Leftrightarrow$$

$$3(y-1)^2-3-12x+11=0 \Leftrightarrow 3(y-1)^2=12x-8 \Leftrightarrow (y-1)^2=4\left(x-\frac{2}{3}\right).$$

Применив преобразование параллельного переноса $X=x-\frac{2}{3}$; $Y=y-1$, из последнего уравнения получаем каноническое уравнение $Y^2=4X$. Отсюда видим, что рассматриваемая линия – парабола, симметричная относительно оси O_1X.

Чтобы нарисовать эту линию, изобразим на одном рисунке обе системы координат Oxy и O_1XY. При параллельном переносе координатные оси перемещаются параллельно самим себе, поэтому для определения их расположения достаточно определить положение нового начала координат. В точке O_1 $X=0$ и $Y=0$, значит, $x=\frac{2}{3}$; $y=1$. Через точку $O_1\left(\frac{2}{3};1\right)$ проводим оси, сонаправленные осям Ox

и Oy, и получаем новую систему координат. В этой системе рисуем параболу $Y^2 = 4X$, вершина которой находится в начале координат, а ветви направлены в сторону положительного направления оси O_1X симметрично этой оси (рис. 4.27). ⊗

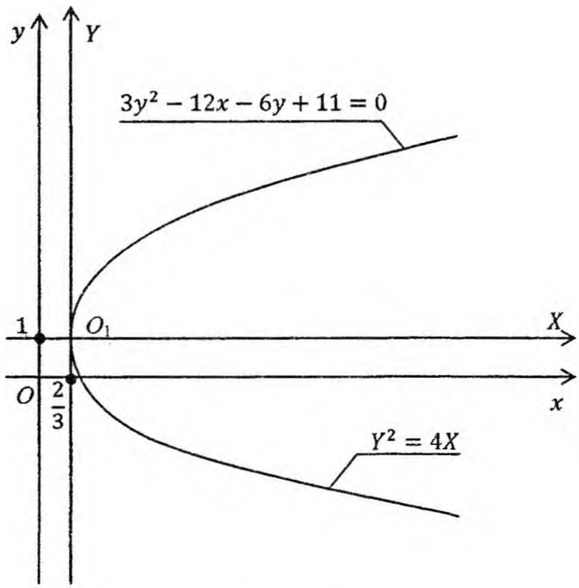


Рис. 4.27

☐ П р и м е р 4.53. Упростить уравнение $2x^2+5y^2-12x+10y+13=0$, пользуясь переносом начала координат. Построить линию, определяемую этим уравнением.

Р е ш е н и е. Выделим полные квадраты по переменным x и y соответственно.

$$2\left(x^2-6x\right)+5\left(y^2+2y\right)+13=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left(x^2-6x+9\right)-18+5\left(y^2+2y+1\right)-5+13=0 \Leftrightarrow$$

$$2(x-3)^2+5(y+1)^2=10 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-3)^2}{5}+\frac{(y+1)^2}{2}=1.$$

Обозначая $x - 3 = X$, $y + 1 = Y$, получим каноническое уравнение эллипса $\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{2} = 1$. Начало новой системы координат – точка $O_1(3, -1)$; оси O_1X, O_1Y параллельны осям Ox и Oy соответственно. Большая полуось эллипса $a = \sqrt{5}$, малая полуось $b = \sqrt{2}$. Изобразим кривую на рис. 4.28. ⊗

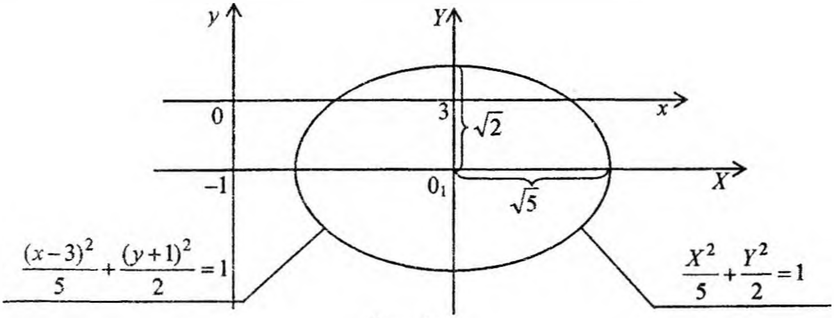


Рис. 4.28

□ Пример 4.54. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $N(2;-5)$ и радиус, равный 4.

Решение. Подставим значения координат центра и радиуса в уравнение (4.78), получим $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$. ⊗

□ Пример 4.55. Дано уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$. Найти: 1) длины его полуосей; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

Решение. Приведем уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$ к каноническому виду (4.80), разделив обе части равенства на 1176: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, из которого вытекают следующие соотношения:

1) $a^2 = 49, b^2 = 24$, т. е. $a = 7$ – большая полуось; $b = 2\sqrt{6}$ – малая полуось.

2) Используя равенство (4.81), найдем $c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 24 = 25, c = 5$. Значит, $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$.

3) По формуле (4.82) $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{7}$. ⊗

□ **Пример 4.56.** Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1\left(2;-4\sqrt{3}\right)$, $M_2\left(-1;2\sqrt{15}\right)$.

Решение. Уравнение эллипса ищем в виде (4.80): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Так как эллипс проходит через точки M_1, M_2, то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса: $\begin{cases} \frac{4}{a^2}+\frac{48}{b^2}=1, \\ \frac{1}{a^2}+\frac{60}{b^2}=1. \end{cases}$

Умножая второе равенство на (–4) и складывая с первым, находим: $-\frac{192}{b^2}=-3$, т. е. $b^2=64$. Подставляя полученное значение b^2 во второе равенство, получаем $\frac{1}{a^2}+\frac{60}{64}=1$, откуда $a^2=16$. Искомое уравнение эллипса имеет следующий вид: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$. ⊗

□ **Пример 4.57.** Дано уравнение гиперболы $16x^2-9y^2=144$. Найти: 1) длины полуосей гиперболы; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

Решение. Разделим обе части уравнения на 144, тем самым приведя его к каноническому виду (4.84): $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

1) Из последнего уравнения $a^2=9, b^2=16$, т. е. $a=3$ – действительная полуось, $b=4$ – мнимая полуось.

2) Используя равенство (4.85): $c^2=a^2+b^2$, получим: $c^2=25$, а $c=5$. Значит, $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$.

3) По формуле (4.86) $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

4) Уравнения асимптот имеют вид: $y=\pm\frac{b}{a}x$. В нашем случае $y=\pm\frac{4}{3}x$. ⊗

Пример 4.58. Составить каноническое уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

Решение. Искомое уравнение имеет вид (4.87): $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$. Согласно условию $2b=8, 2c=10$. Значит, $b=4, c=5$. Из (4.85) $c^2=a^2+b^2$. Найдем мнимую полуось a: $a^2=c^2-b^2=5^2-4^2=9$, т. е. $a=3$. Искомое уравнение гиперболы: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

Пример 4.59. Дана парабола $x^2=4y$. Найти: 1) координаты фокуса; 2) уравнение директрисы.

Решение. Парабола задана каноническим уравнением $x^2=2py$. Следовательно, $2p=4$, $p=2$. Откуда получаем: 1) $F\left(0;\frac{p}{2}\right)\Rightarrow F(0;1)$;

2) $y=-\frac{p}{2}\Rightarrow y=-1$ – уравнение директрисы.

Пример 4.60. Составить уравнение параболы, если ее вершина совпадает с началом координат, а фокус находится в точке $F(2;0)$.

Решение. Так как фокус параболы находится всегда на ее оси симметрии, то в нашем случае осью параболы будет ось Ox, причем $F\left(\frac{p}{2};0\right)\Rightarrow F(2;0)$. Отсюда $\frac{p}{2}=2$, значит, $p=4$. При этом каноническим уравнением параболы будет $y^2=2px$, т. е. в данном случае $y^2=8x$. Отметим, что уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$, т. е. $x=-2$.

4.17. Поверхности второго порядка

Мы будем рассматривать в данном параграфе только прямоугольную систему координат $Oxyz$.

4.17.1. Цилиндры и конусы

Пусть в пространстве заданы некоторая линия L и прямая α, пересекающая L.

О п р е д е л е н и е . ***Цилиндрической поверхностью или цилиндром*** называется поверхность, образованная прямой α при ее перемещении параллельно самой себе так, что она все время пересекает линию L. Прямые, полученные при перемещении прямой α, называются ***образующими*** этого цилиндра, а линия L – его ***направляющей.*** Если цилиндр имеет ось симметрии, а направляющая, лежащая в перпендикулярной этой оси плоскости, является окружностью, то цилиндр называется ***круговым***.

Заметим, что если в уравнении поверхности отсутствует одна из координат, то это уравнение задает цилиндр с образующими, параллельными координатной оси, определяемой отсутствующей координатой. Уравнение направляющей этого цилиндра, лежащей в перпендикулярной образующим координатной плоскости, совпадает с уравнением самого цилиндра.

Так, уравнение $F(x,y)=0$ задает цилиндр с образующими, параллельными оси Oz. Если это уравнение рассматривать в системе координат Oxy (т. е. в плоскости $z=0$), то получим уравнение направляющей этого цилиндра.

Уравнения $F(x,z)=0$ и $F(y,z)=0$ задают цилиндры с образующими, параллельными осям Oy и Ox соответственно.

Пусть в пространстве задана некоторая линия L и точка O'.

О п р е д е л е н и е . ***Конической поверхностью*** или ***конусом*** называется поверхность, образованная прямыми, проходящими через O' и пересекающими кривую L. Прямые, из которых состоит конус, называются его ***образующими***, а точка O' – его ***вершиной***. Если конус имеет ось симметрии, а все его образующие наклонены к ней под одним и тем же углом, то конус называется ***круговым***.

4.17.2. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

О п р е д е л е н и е . ***Поверхностью второго порядка*** называется множество всех точек пространства, удовлетворяющих в некоторой системе координат какому-либо уравнению 2-й степени, т. е. уравнению вида

$$\boxed{Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+R=0\,.(4.91)}$$

Уравнение (4.91) называется ***общим уравнением*** поверхности второго порядка (коэффициенты A, B, C, D, E, F не равны нулю одновременно).

Для любой поверхности 2-го порядка в пространстве существует прямоугольная декартова система координат, в которой эта поверхность задается каноническим уравнением. Перечислим все принципиально возможные типы канонических уравнений 2-й степени с тремя переменными и таким образом классифицируем поверхности 2-го порядка.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – эллипсоид (рис. 4.29);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ – мнимый эллипсоид;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ – точка $O(0,0,0)$;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – однополостный гиперболоид (рис. 4.30);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ – двуполостный гиперболоид (рис. 4.31);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ – конус второго порядка (рис. 4.32);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ – эллиптический параболоид (рис. 4.33);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллиптический цилиндр (рис. 4.34);

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ – мнимый эллиптический цилиндр;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ – прямая (ось Oz);

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z$ – гиперболический параболоид (рис. 4.35);

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – гиперболический цилиндр (рис. 4.36);

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ или $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \end{array}\right.$ – пара пересекающихся плоскостей;

$y^2 = 2px$ – параболический цилиндр (рис. 4.37);

$y^2 = a^2$, или $\left[\begin{array}{l} y = a \\ y = -a \end{array}\right.$ – пара параллельных плоскостей;

$y^2 = 0$ – сдвоенная плоскость;

$y^2 = -a^2$ – пара мнимых параллельных плоскостей.

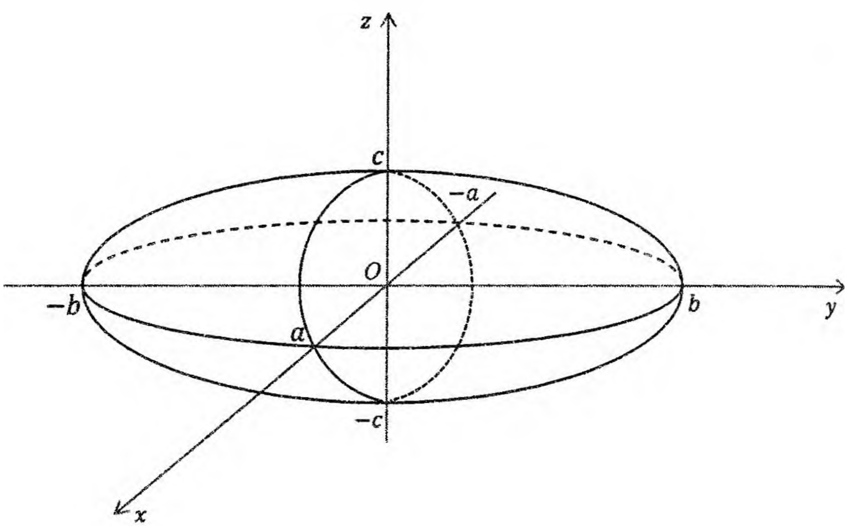


Рис. 4.29

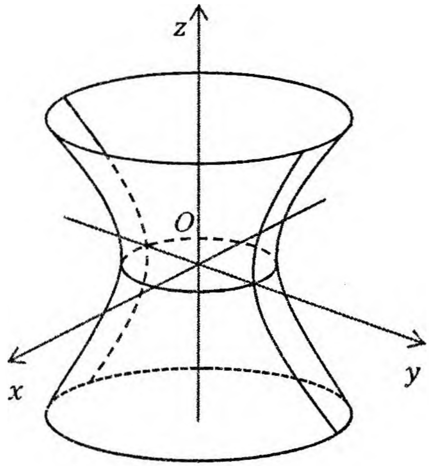


Рис. 4.30

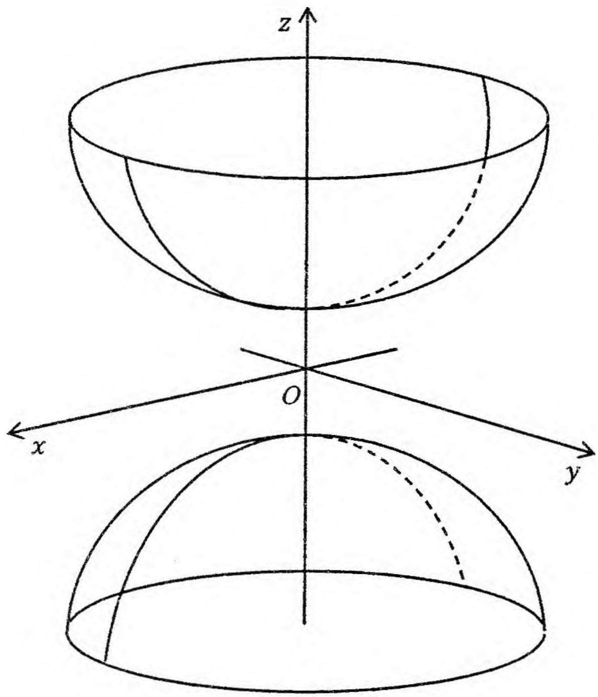


Рис. 4.31

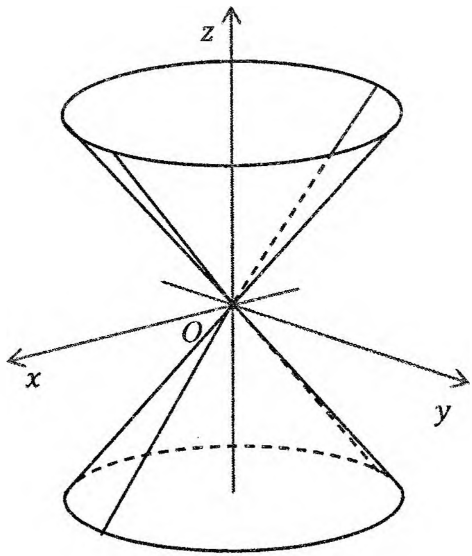


Рис. 4.32

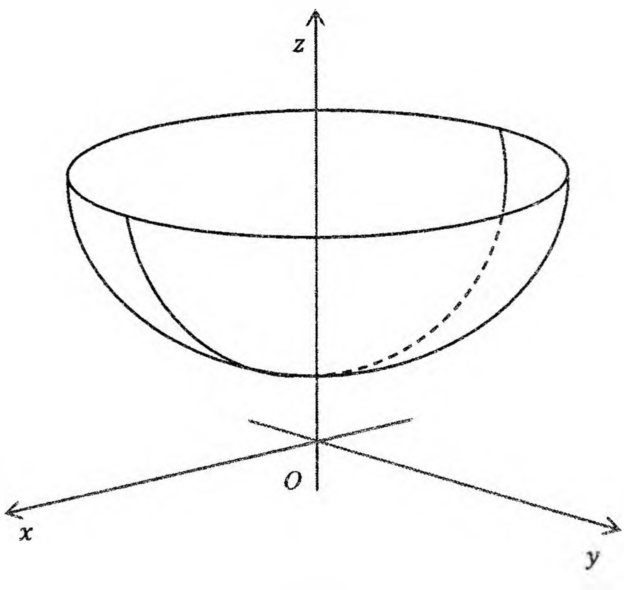


Рис. 4.33

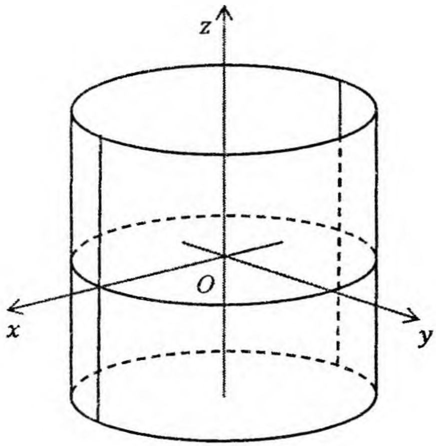


Рис. 4.34

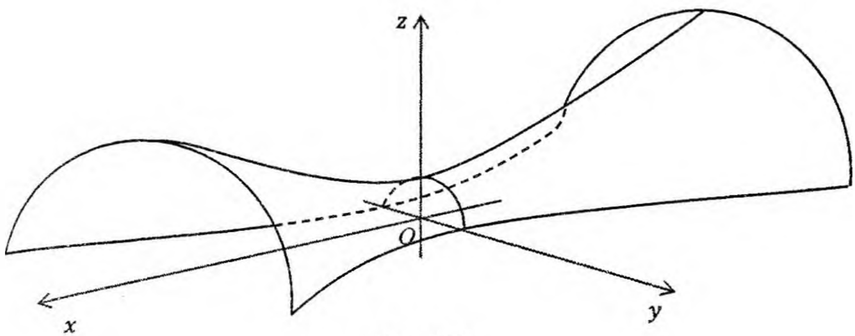


Рис. 4.35

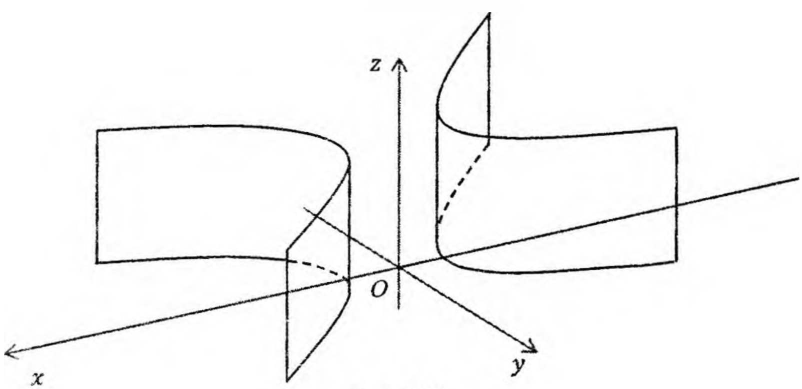


Рис. 4.36

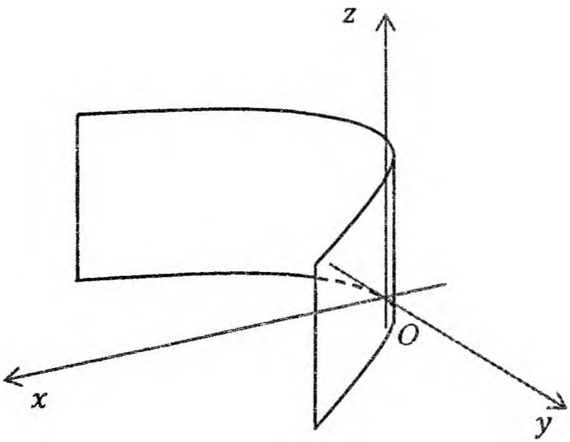


Рис. 4.37

Числа a, b и c в уравнениях эллипсоида, двуполостного и однополостного гиперболоидов, конуса 2-го порядка, эллиптического и гиперболического цилиндров называются их ***полуосями***. Все эти поверхности симметричны относительно всех координатных плоскостей и относительно начала координат. Точки пересечения двуполостного гиперболоида и эллиптического параболоида с осями симметрии называются их ***вершинами***. ***Вершиной конуса*** называется его центр симметрии.

Чтобы по каноническому уравнению определить вид поверхности без формального заучивания уравнений, полезно рассуждать в следующей последовательности.

Если каноническое уравнение не содержит одной из переменных, то это один из цилиндров. При этом его образующие параллельны координатной оси, определяемой отсутствующей переменной, а уравнение направляющей, лежащей в координатной плоскости, перпендикулярной этой оси, совпадает с уравнением самой поверхности.

Если каноническое уравнение содержит все переменные, проверим, все ли они в квадратах. Если присутствует слагаемое первой степени, то это один из параболоидов. Какой из них, легко понять по левой части уравнения.

Если в каноническом уравнении присутствуют квадраты всех трех переменных, посмотрим на знаки коэффициентов при квадратах.

В случае, когда все эти коэффициенты одного знака, мы имеем либо эллипсоид, действительный или мнимый, либо точку. При $a = b = c$ из уравнения эллипсоида получаем частный случай – уравнение сферы.

Если в каноническом уравнении присутствуют квадраты всех трех переменных, но они разных знаков, то рассматриваемая поверхность либо один из гиперболоидов, либо конус второго порядка. Конус выделяется тем, что он проходит через начало координат, что легко проверяется подстановкой. Так как переменных всего три, то два коэффициента при квадратах будут иметь одинаковый знак, а третий – противоположный. Таким образом, две переменные будут равноправными, а третья – особенной. Конус или гиперболоид всегда «вытянуты» вдоль оси, определяемой особенной переменной. Чтобы отличить однополостный гиперболоид от двуполостного, следует положить равной нулю эту особенную переменную. Если в сечении получился эллипс, то гиперболоид однополостный, если пустое множество – двуполостный.

П р и м е р 4.61. Построить тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$.

Р е ш е н и е. Тело ограничено снизу поверхностью параболоида: $x^2 + y^2 = 3z$, а сверху – поверхностью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Тело изображено на рис. 4.38.

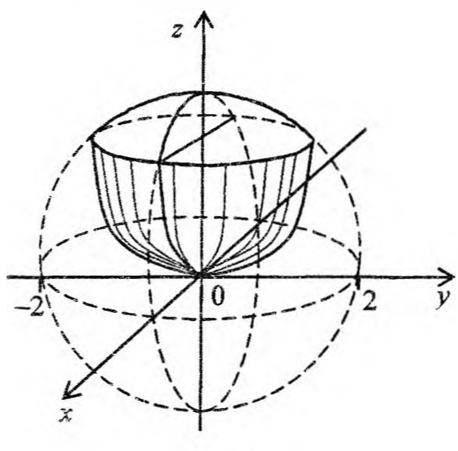


Рис. 4.38

Пример 4.62. Построить тело, ограниченное поверхностями

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1, \quad x=0, z=0 \quad (x\ge 0, z\ge 0), \quad y=3, y=-3.$$

Решение. Поверхность $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ – эллиптический цилиндр. Он пересечен плоскостями $x = 0$, $z = 0$ (координатные плоскости Ozy и Oxy). По оси Oy тело ограничено плоскостями $y = 3$, $y = -3$ (рис. 4.39).

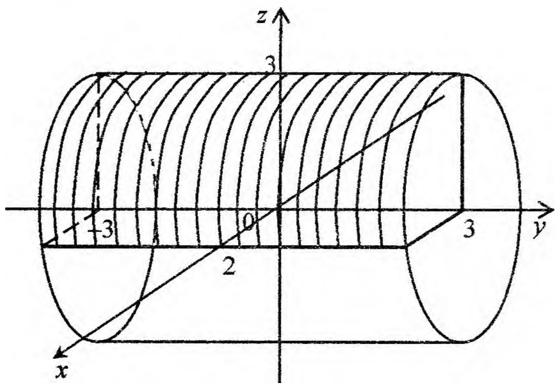


Рис. 4.39

5. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

5.1. Числовая последовательность, предел числовой последовательности. Функция и предел функции

Определение. Под ***числовой последовательностью*** (или просто ***последовательностью***) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ понимается функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве N натуральных чисел. Отдельные числа x_n называются ***членами*** (или ***элементами***) числовой последовательности: x_1 – ***первый*** член числовой последовательности, x_2 – ***второй*** и т. д. Кратко последовательность обозначается $\{x_n\}$, $n \in N$; а символом x_n обозначается ***общий член числовой последовательности***.

Примеры:

1. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\};\ x_n = \frac{1}{n}$.

2. $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\};\ x_n = \frac{n-1}{n}$.

3. $\{-1, 2, -3, 4, \ldots\} = \{(-1)^n \cdot n\};\ x_n = (-1)^n \cdot n$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \le M$. В противном случае последовательность называется ***неограниченной***. Очевидно, что последовательности в примерах 1 и 2 ограничены; в примере 3 – неограничена.

Если все элементы последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу, то ее называют ***постоянной***.

Последовательность $\{x_n\}$ назывется ***возрастающей*** (***убывающей***), если для любого $n \in N$ выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$. Возрастающие и убывающие последовательности называются ***монотонными***.

Определение. Число a называется ***пределом*** числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение предела последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***. Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***.

Теорема Больцано–Вейерштрасса. 1. *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.* 2. *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно малой*** числовой последовательностью. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно большой***, если для любого $M > 0$ существует число N такое, что $|x_n| > M$ для всех $n > N$. Тогда пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Определение. Пусть даны два непустых множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция f. Говорят, что ***функция f отображает множество X на множество Y***.

Множество X называется ***областью определения функции*** f (обозначается $D(f)$), а множество Y называется ***областью значений функции*** f (обозначается $E(f)$).

Определение. Число A называется ***пределом функции f(x) в точке*** x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение предела функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to x_0$, то справедливы следующие **теоремы о пределах**:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

Теорема (предел сжатой функции). *Если* $u(x), v(x), z(x)$ *определены в окрестности точки* $x = x_0$ *и при* $x \to x_0$ *выполняются условия* $u(x) \le z(x) \le v(x)$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to x_0} z(x) = A$.

При вычислении пределов числовых последовательностей и функций часто используются известные пределы:

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \text{ или } \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Из приведенных формул следуют: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha}$, $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha}$, α – любое число. Выражения, предел которых не может быть найден непосредственно с помощью теорем о пределах, называют ***неопределенностями. Раскрыть неопределенность***, значит, вычислить указанный предел. Например, отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно малые функции, представляет неопределенность, которую символически записывают как $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие функции, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Раскрытие неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ возможно после предварительного упрощения выражения, либо использования ***замечательных пределов***, либо применения ***правила Лопиталя***. Другие виды неопределенностей $(0\cdot\infty; \infty-\infty; 1^{\infty}; 0^0; \infty^0)$ могут быть преобразованы к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

П р и м е р ы . Найти пределы:

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{3^n}+\frac{3^n}{3^n}}{\frac{2^n}{3^n}-\frac{3^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=-1.$$

2. $$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to-2}\frac{x(x+1)}{x-3}=-\frac{2}{5}.$$

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+3}{8x^3+2x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}}{8+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{5}{8}.$$

4. $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0.$$

5. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}\left(1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right)}{1+\frac{1}{5}}=\frac{1}{6}.$$

6. $$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-1-x^2+7x-3}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{5}{2}.$$

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)\cdot 3x}{\left(\dfrac{\sin 7x}{7x}\right)\cdot 7x}=\dfrac{3}{7}.$

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x-\operatorname{arctg}x}{2x+\arcsin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-(\operatorname{arctg}x)/x}{2+(\arcsin x)/x}=\dfrac{1}{3},$

так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}=[\arcsin x=y]=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y}{\sin y}=1$ и $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.$

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{c}\frac{\pi}{2}-x=y\\ x\to\frac{\pi}{2};\quad y\to0\end{array}\right]=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{y^2}=$

$$=\lim_{y\to0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{2\sin\frac{y}{2}}{2\frac{y}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{y}{2}}{2\frac{y}{2}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3+2}{x+3}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}2-3}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right)^{2}\times$$

$$\times\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{-3}=e^{2}\cdot 1^{-3}=e^{2}.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\begin{array}{cc} a^{x}-1=y, & a^{x}=1+y \\ x\to 0,\quad y\to 0 & x\ln a=\ln(1+y)\end{array}\right]=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\ln a,$$

так как $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{1/y}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{y\to\infty}(1+y)^{1/y}}=\frac{1}{\ln e}=1.$ ⊗

5.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой функцией*** при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Свойства бесконечно малых функций:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть бесконечно малая функция.

4. **Теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции.** *Если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, *то* $f(x) = b + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$. *Если* $f(x) = b + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая функция при* $x \to x_0$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to x_0$ и существует предел их отношения $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$. Тогда:

1) Если $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бесконечно малыми одного порядка малости***. Если $c = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** (обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$).

2) Если $c = 0$, то $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой более высокого порядка малости, чем*** $\beta(x)$ (обозначение $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to x_0$).

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых функций каждую из них можно заменить эквивалентной ей бесконечно малой, т. е. если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Приведем важнейшие эквивалентные бесконечно малые функции, которые используются при вычислении пределов. Если $\alpha(x) \underset{x \to x_0}{\to} 0$, то:

1) $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;

2) $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$;

3) $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;

4) $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$;

5) $1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{\alpha(x)^2}{2}$;

6) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$;

7) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \cdot \ln a$;

8 $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$.

□ Пример 5.1. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)}$.

Решение. При $x\to\frac{1}{2}$ функции $\alpha(x)=1-2x$ и $\beta(x)=$ $=\arcsin(1-2x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми. Поэтому

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{\arcsin(1-2x)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{1-2x} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(-(2x+1)\right) = -2. \otimes$$

Определение. Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x\to x_0$, если для любого положительного числа M существует такое число $\delta>0$, что при всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)|>M$, и обозначается $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

|| **Теорема.** *Всякая функция, имеющая предел, ограничена.*

Обратное утверждение неверно.

5.3. Непрерывность функции. Точки разрыва функции и их классификация

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной*** при $x\to x_0$, если, задав любое $\varepsilon>0$, можно указать такое $M>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x)|\le M$.

Из определения непрерывности функции в точке x_0 следует:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;

2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0;

3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Или другими словами:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;

2) существуют конечные односторонние пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ и } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0);$$

3) эти пределы равны между собой и равны значению функции в точке x_0.

Часто используется другое определение непрерывности функции в точке. Пусть Δy – приращение функции в любой точке x: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке $x = x_0$, если предел приращения функции в этой точке равен нулю при $\Delta x \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Определение. ***Точкой разрыва функции*** называется точка, в которой функция не является непрерывной. Другими словами, точка x_0, в которой не выполняется хотя бы одно из трех условий непрерывности функции, называется ***точкой разрыва функции***.

Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$, такие что $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 называется ***точкой разрыва первого рода***. Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода***. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, но функция в точке x_0 не определена или если $f(x)$ в точке x_0 определена, но $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***.

Укажем основные свойства непрерывных функций.

1. Простейшие элементарные функции
(C, x^{α}, a^{x}, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$) непрерывны во всех точках, где они определены.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ непрерывны в точке x_0.

3. Если $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Определение. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a,b]$, если она непрерывна на интервале (a,b), непрерывна справа в точке a (т. е. $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$) и слева в точке b (т. е. $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(b)$).

Укажем основные свойства непрерывных на отрезке функций.

1. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$ достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений. (А, следовательно, функция , непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке.)

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах его принимает неравные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между A и B.

3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка $[a,b]$ существует хотя бы одна точка c, в которой функция обращается в нуль, т. е. $f(c) = 0, c \in (a,b)$.

Пример 5.2. Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{e^{x} - 1}{x}$ и определить их вид.

Р е ш е н и е . Так как функции e^x-1 и x непрерывны, то непрерывным будет и их отношение $\frac{e^x-1}{x}$ во всех точках, кроме точки $x=0$. При $x=0$ $f(x)$ не определена, следовательно, разрывна. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (см. п. 5.1 пример 12), то $x=0$ – точка устранимого разрыва. Если положить $f(0)=1$, то функция

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{(e^x-1)}{x} & \text{при} \quad x\neq 0;\\ 1 & \text{при} \quad x=0,\end{cases}$$

будет непрерывной при всех x. ⊗

П р и м е р 5.3. Установить вид точек разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{при} \quad -\infty<x\leq 0;\\ x+1 & \text{при} \quad 0<x\leq 3;\\ 6-x & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$$

Р е ш е н и е . Область определения функции $f(x)$ – вся числовая ось $(-\infty;+\infty)$. Разрывы возможны только в точках $x=0$ и $x=3$, в которых изменяется аналитическое задание функции. Найдем односторонние пределы в точке $x=0$ и значение функции в этой точке:

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}(x^2+1)=1;\ \lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}(x+1)=1, f(0)=1.$$

Следовательно, в точке $x=0$ функция непрерывна.

Рассмотрим точку $x=3$:

$$\lim_{x\to 3-0}f(x)=\lim_{x\to 3-0}(x+1)=4;\quad \lim_{x\to 3+0}f(x)=\lim_{x\to 3+0}(6-x)=3.$$

Так как эти пределы конечны, но не равны между собой, то $x=3$ – точка разрыва первого рода. График функции $f(x)$ изображен на рис. 5.1. ⊗

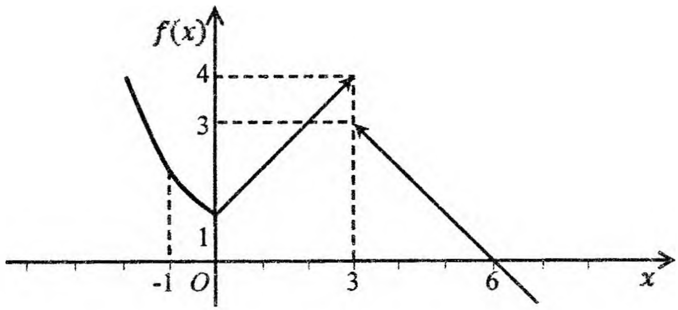


Рис. 5.1

П р и м е р 5.4. Установить вид точек разрыва функции $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$.

Р е ш е н и е. Данная функция непрерывна всюду, кроме точки $x=-1$, в которой $f(x)$ не определена.

Поскольку $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0} e^{\frac{1}{x+1}}=0$ (т.к. $\frac{1}{x+1}\to-\infty$ при $x\to-1-0$), $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0} e^{\frac{1}{x+1}}=+\infty$ (т. к. $\frac{1}{x+1}\to+\infty$ при $x\to-1+0$), т. е. правосторонний предел бесконечен, то $x=-1$ - точка разрыва второго рода.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Производная. Касательная и нормаль к графику функции. Геометрический и физический смысл производной

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную в интервале $(a;b)$. Зафиксируем точку $x_0 \in (a;b)$. Пусть $x_0 \in (a;b)$, тогда $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента в точке x_0, которому соответствует приращение функции $\Delta y = f(x - x_0) - f(x_0)$ в той же точке. Иногда удобнее Δy обозначать через $\Delta f(x_0)$.

Определение. ***Производной*** функции в данной точке называют предел, если он существует, отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее произвольным образом стремится к нулю. Производную функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначим $f'(x_0)$, тогда по определению

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \text{ или } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (6.1)}$$

Если x – произвольная точка, то производная функции $f(x)$ является также функцией аргумента x, т.е.

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Производная обозначается y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$.

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 является значением функции $f'(x)$ в точке x_0.

Определение. Если $f'(x)$ существует, то функция называется ***дифференцируемой*** в точке x.

Пусть дана кривая $y = f(x)$ (рис. 6.1), проведем через точки $M(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ прямую MM_1. Прямую, проведенную через любые две точки графика функции $y = f(x)$, называют ***секущей*** графика функции $f(x)$. Предельное положение MT секущей MM_1, когда M_1, передвигаясь по кривой, стремится к точке M, называется ***касательной*** к кривой в точке M (рис. 6.1).

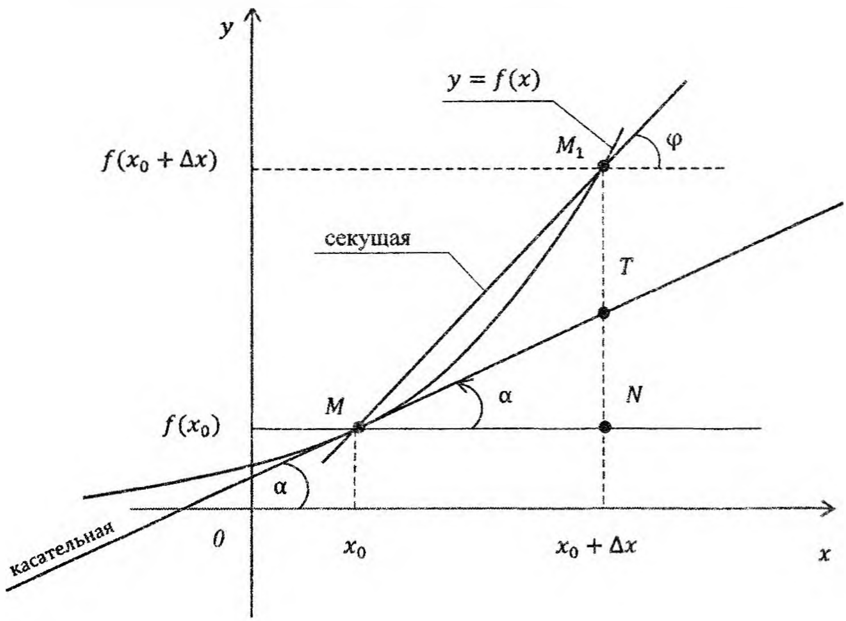


Рис. 6.1

Пусть k_1 – угловой коффициент секущей MM_1, т. е. тангенс угла, который образует прямая MM_1 с осью абсцисс, k – угловой коффициент касательной MT, тогда из определения касательной $k = \lim\limits_{M_1 \to M} k_1$.

Так как $k_1 = \dfrac{M_1N}{MN} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, поэтому $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, т. е. производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0, а именно $k = f'(x_0)$.

Уравнение касательной запишем, используя уравнение прямой $y = ax + b$. Так как $a = k = f'(x_0)$, тогда $y = f'(x_0)x + b$. Так как прямая проходит через точку $(x_0, f(x_0))$, то $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$. Отсюда $b = f(x_0) - f'(x_0)$. Тогда уравнение касательной имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.2}$$

Прямая, проходящая через точку касания $M(x_0, f(x_0))$ перпендикулярно к касательной, называется ***нормалью*** к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Уравнение нормали запишем в виде

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{6.3}$$

Выясним геометрический и физический смысл производной.

Величина угла прямой (секущей) M_1M к оси Ox обозначена через φ (см. рис. 6.1), $\varphi = \angle M_1MN$. Из прямоугольного треугольника M_1MN имеем: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{M_1N}{MN} \Rightarrow k_1 = \operatorname{tg}\varphi, \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Обозначим через α угол наклона касательной MT к оси Ox, $\alpha = \angle TMN$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{TN}{MN}$. Если $M_1 \to M$ (и, следовательно, $\Delta x \to 0$), то $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{M_1 \to M} \operatorname{tg}\varphi$, или $\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{M_1 \to M} \dfrac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Получаем равенство $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Это равенство выражает геометрический смысл производной:

производная функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ равна тангенсу угла между касательной к графику функции в точке $M(x_0, y_0)$ и положительным направлением оси Ox.

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней. Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной.

Рассмотрим задачу о скорости неравномерного прямолинейного движения. Неравномерное прямолинейное движение точки M осуществляется по закону $x = f(t)$, где $x = OM$ – длина пути, $f(t)$ –

заданная функция времени t. Пусть в момент времени t_0 точка M занимала положение M_0. За промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ пройден путь $M_0M = \Delta x = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = \Delta f(t_0)$. Средней скоростью $v_{\text{ср}}$ за промежуток времени Δt называют отношение приращения пути Δx к соответствующему приращению времени $\Delta t : v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. ***Скоростью*** точки M в данный момент времени t_0 (мгновенной скоростью) называют предел средней скорости при $\Delta x \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ или } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Таким образом, мгновенная скорость определена как предел отношения приращения пути к приращению времени при $\Delta t \to 0$.

Из определения производной и последней формулы следует, что эта формула выражает физический смысл производной:
скорость движения точки в момент времени t_0 равна производной от пути по времени при $t = t_0$.

6.2. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Таблица производных

Определение. ***Дифференцированием*** функции называют операцию нахождения производной функции.

Основные правила дифференцирования указывают, как найти производную суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций.

Пусть C – постоянная, а $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда

1) $C' = 0$;
2) $(Cu)' = Cu'$;
3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
4) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;
5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, (v \neq 0)$.

Теорема (производная сложной функции). *Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u = u(x)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x и ее производная равна*

$$y'(x) = f'_u(u) \cdot u'(x) \text{ или } y'_x = f'_u \cdot u'_x.$$

Приведем таблицу производных основных элементарных функций.

1. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, $\alpha \neq 0$; (в частности, $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$)

2. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;

5. $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$; $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

12. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;

13. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;

14. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$; $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

П р и м е р 6 .1. Найти производные функций:

а) $y=\sqrt{x^2-3x+4}$; б) $y=3^{\sqrt{x}}\cdot\cos^2 5x$; в) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3\frac{x}{7}}{\log_8 e^{x^4}}$.

Р е ш е н и е . Используя правила дифференцирования, терему о производной сложной функции и таблицу производных, получим:

$$\text{а) } y'=\left(\left(x^2-3x+4\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\left(x^2-3x+4\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(x^2-3x+4\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2-3x+4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-3+0)=\frac{2x-3}{2\sqrt{\left(x^2-3x+4\right)}};$$

б) используем производную произведения:

$$y'=\left(3^{\sqrt{x}}\right)'\cdot\cos^2 5x+3^{\sqrt{x}}\cdot\left(\cos^2 5x\right)'=3^{\sqrt{x}}\cdot\ln 3\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\cos^2 5x+$$

$$+3^{\sqrt{x}}\cdot 2\cos 5x\cdot(\cos 5x)'=3^{\sqrt{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\cos^2 5x+$$

$$+3^{\sqrt{x}}\cdot 2\cos 5x\cdot(-\sin 5x)\cdot 5=\frac{\ln 3}{2\sqrt{x}}\cdot 3^{\sqrt{x}}\cdot\cos^2 5x-5\cdot 3^{\sqrt{x}}\cdot\sin 10x;$$

в) используем правило для производной частного:

$$y'=\left(\frac{\operatorname{tg}^3\frac{x}{7}}{\log_8 e^{x^4}}\right)'=\frac{\left(\operatorname{tg}^3\frac{x}{7}\right)'\cdot\log_8 e^{x^4}-\left(\log_8 e^{x^4}\right)'\cdot\operatorname{tg}^3\frac{x}{7}}{\left(\log_8 e^{x^4}\right)^2}=$$

$$=\frac{3\operatorname{tg}^2\frac{x}{7}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{7}}\cdot\dfrac{1}{7}\cdot\log_8 e^{x^4}-\dfrac{1}{e^{x^4}\ln 8}e^{x^4}\cdot 4x^3\cdot\operatorname{tg}^3\frac{x}{7}}{\left(\log_8 e^{x^4}\right)^2}.$$

Результат оставим без упрощения.

6.3. Производная показательно-степенной функции. Логарифмическое дифференцирование

Показательно-степенной функцией или сложно-показательной функцией называется функция вида $y(x)=u(x)^{v(x)}$. Логарифмическое дифференцирование состоит в нахождении производной от логарифма некоторой функции, что упрощает вычисление производной. Если $y=f(x)$, то $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$.

П р и м е р 6.2. Найти производную показательно-степенной функции

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}.$$

Р е ш е н и е. Логарифмируя, а затем дифференцируя левую и правую части равенства, получим

$$\ln y=2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right);\quad (\ln y)'=\left(2x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)';$$

$$\frac{y'}{y}=2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Умножая обе части равенства на y, имеем:

$$y'=2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right).$$

П р и м е р 6.3. Найти производную функции $y=\sqrt{\dfrac{x(1-3x)}{(4x-21)^5}}$.

Р е ш е н и е. Логарифмируем функцию: $\ln y=\ln\sqrt{\dfrac{x(1-3x)}{(4x-21)^5}}$. Используя свойства логарифмов, имеем:

$$\ln y=\frac{1}{2}(\ln x+\ln(1-3x)-5\ln(4x-21)).$$

Дифференцируем левую и правую части равенства:

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{1-3x}-\frac{5\cdot 4}{4x-21}\right).$$

Откуда

$$y'=y\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{1-3x}-\frac{20}{4x-21}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x(1-3x)}{(4x-21)^5}}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{1-3x}-\frac{20}{4x-21}\right).$$ ⊗

6.4. Производные функций, заданных неявно и параметрически

Функция $y=f(x)$, $x\in(a;b)$, ***неявно*** задана уравнением $F(x,y)=0$, если для всех $x\in(a;b)$ выполняется равенство $F(x,f(x))=0$.

Для вычисления производной функции, заданной неявно, следует тождество $F(x,f(x))=0$ продифференцировать по x (рассматривая левую часть как сложную функцию от x), а затем полученное уравнение решить относительно $f'(x)$.

□ Пример 6.4. Уравнение $x^3+y^5=e^{x^2}+y$ неявно определяет функцию $y=y(x)$. Требуется найти производную y'.

Решение. Дифференцируя по x тождество $x^3+y^5(x)=e^{x^2}+y(x)$, получим $3x^2+5y^4(x)\cdot y'(x)=e^{x^2}\cdot 2x+y'(x)$.

Отсюда $5y^4\cdot y'-y'=2xe^{x^2}-3x^2$. Из этого равенства находим y':

$$y'=\frac{2xe^{x^2}-3x^2}{5y^4-1}.$$ ⊗

□ Пример 6.5. Найти производную функции $y=f(x)$, заданной неявно уравнением $x^2-2x^2y^2+5x+y-5=0$.

Решение. Дифференцируя по x тождество $x^2-2x^2y^2(x)+5x+$ $+y(x)-5=0$, получим $2x-4xy^2-4x^2yy'+5+y'=0$. Выражая y' из этого равенства, находим:

$$y'=\frac{4xy^2-2x-5}{1-4x^2y}.$$ ⊗

П р и м е р 6.6. Вывести правило дифференцирования обратной функции.

Р е ш е н и е. Если $y = f(x), x \in D, y \in E$, то если существует $x = f^{-1}(y)$, то $x = f^{-1}(y)$ есть функция, обратная к $y = f(x)$, при этом для всех $y \in E$ выполняется равенство $f\left(f^{-1}(y)\right) - y = 0$. Значит функция $x = f^{-1}(y)$ есть функция, заданная неявно уравнением $f(x) - y = 0$. Для нахождения производной x'_y дифференцируем равенство $f(x) - y = 0$ по y: $f'_y(x(y)) \cdot x'_y(y) - 1 = 0$, откуда получаем формулу для производной обратной функции:

$$\boxed{x'_y(y) = \frac{1}{f'_x(x(y))} \text{ или } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \qquad (6.4)}$$

П р и м е р 6.7. Найти производную функции $\operatorname{arcsh} x$.

Р е ш е н и е. Функция $\operatorname{arcsh} x$ является обратной по отношению к функции $y = \operatorname{sh} x$ ($\operatorname{sh} x$ – синус гиперболический x). По определению $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Так как $(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \ \forall x \in R$, то $\operatorname{sh} x$ монотонно возрастает при всех $x \in (-\infty; +\infty)$ и, следовательно, имеет обратную функцию $\operatorname{arcsh} x$.

Применяем формулу (6.4) следующим образом:

$$x'_y = (\operatorname{arcsh} x)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(\operatorname{sh} x)'} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{учтем, что} \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \text{ и} \\ \operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}; \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Из соотношения $(\operatorname{arcsh} y)' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ следует, что

$(\operatorname{arcsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. ⊗

Пусть заданы функции

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), t \in (\alpha;\beta) \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in (\alpha;\beta). \end{cases} \qquad (6.5)$$

Если функция $x = \varphi(t)$ на интервале $(\alpha;\beta)$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, то определена новая функция $y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, называемая ***функцией, заданной параметрически*** соотношениями (6.5). Дифференцируя $y(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ по x и используя формулу (6.4) имеем соотношение

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (6.6)$$

П р и м е р 6.8. Найти касательную к окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t, t \in [0; 2\pi]$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение касательной в виде $y = y(x_0) + y'_x(x_0)(x - x_0)$. Здесь $x_0 = x(t_0) = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$,

а $y_0 = y(x_0) = 2\sin\left(\arccos\frac{x_0}{2}\right) = 2\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$

Найдем производную y'_x по формуле (6.6): $y'_t = (2\sin t)'_t = 2\cos t$; $x'_t = (2\cos t)'_t = -2\sin t$, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-2\sin t}{2\cos t} = -\operatorname{tg} t$.

Тогда $y'_x(x_0) = -\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{x_0}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$.

Окончательно имеем: $y = \sqrt{2} - 1(x - \sqrt{2})$ или $y = -x + 2\sqrt{2}$ (рис. 6.2).

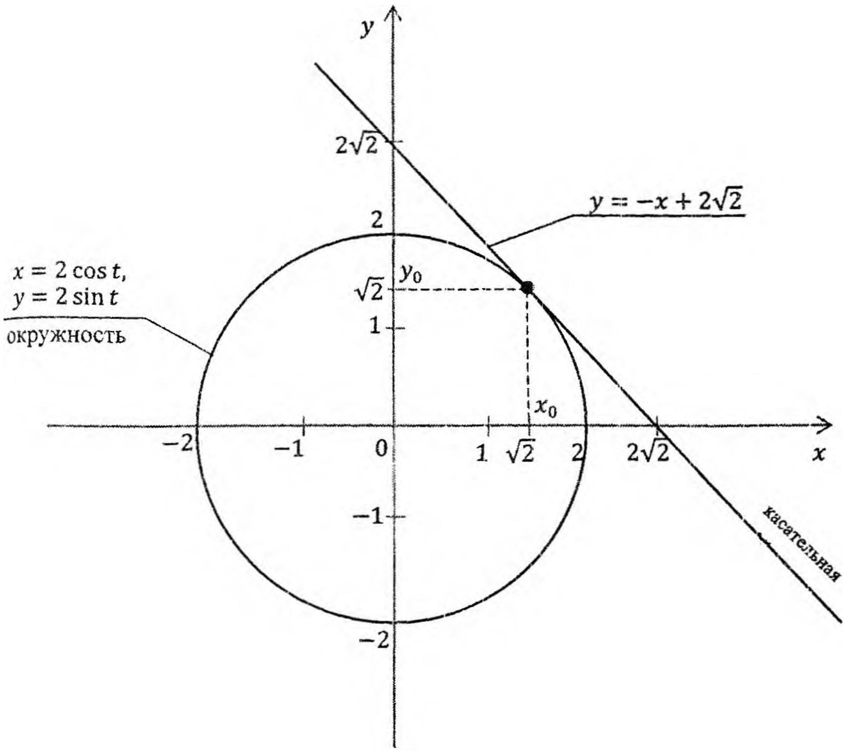


Рис. 6.2

6.5. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a; b)$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ и $\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Из последнего равенства получаем, что $\Delta y(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$.

О п р е д е л е н и е . Произведение $f'(x_0) \cdot \Delta x$, являющееся ***главной линейной частью приращения функции***, называется ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению Δx и обозначается $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$, а для произвольной точки x

$dy = f'(x)\cdot\Delta x$. Дифференциал независимой переменной x будет равен $dx = 1\cdot\Delta x$, поэтому

$$\boxed{dy = f'(x)\cdot dx. \qquad (6.7)}$$

П р и м е р 6.9. Найти дифференциал функции $y = \arcsin\frac{x}{3}$.

Р е ш е н и е. Находим производную $f'(x) = \left(\arcsin\frac{x}{3}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}\cdot\frac{1}{3}$,

тогда $dy = \frac{1}{3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$. ⊗

Основные свойства дифференциала аналогичны правилам дифференцирования (п. 6.2).

1. $d(C) = 0$;
2. $d(Cu) = Cdu$;
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4. $d(u\cdot v) = v\cdot du + u\cdot dv$;
5. $d\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\cdot du - udv}{v^2}, (v \neq 0)$;
6. $df(u) = f'(u)du$, где $u = \varphi(x)$.

Последнее свойство называется ***инвариантностью формы дифференциала первого порядка***.

Геометрически дифференциал представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ (рис. 6.3) в точке $M_0(x_0, y_0)$ при приращении аргумента, равном Δx. Это следует из того, что $\frac{AB}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, тогда $AB = f'(x_0)\Delta x = dy$. Здесь AB – приращение ординаты касательной TT_1.

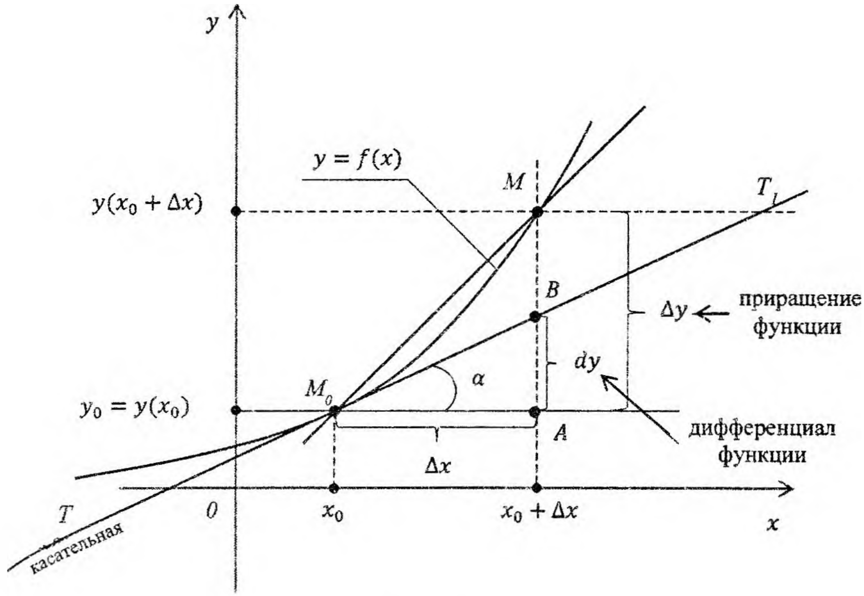


Рис. 6.3

При достаточно малых Δx $\Delta y \approx dy$, т. е. $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$, а в точке x_0 можно записать приближенную формулу

$$y(x_0+\Delta x) \approx y(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{6.8}$$

П р и м е р 6.10. Найти приближенно $\sqrt[3]{128}$.

Р е ш е н и е. Применим формулу (6.8), записав, что $\sqrt[3]{128} = 5\cdot\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{125}}$.

Здесь $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x_0=1,\ \Delta x=\dfrac{3}{125},\ f'(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Тогда

$$\sqrt[3]{128} \approx 5\left(\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}}\cdot\frac{3}{125}\right)=5\left(1+\frac{1}{125}\right)=5(1+0{,}008)=5\cdot 1{,}008=5{,}04.$$

Точное значение $\sqrt[3]{128}$ равно 5,0396842….

П р и м е р 6.11. Найти приближенное значение объема шара, радиус которого равен 1,02 м.

Р е ш е н и е . Воспользуемся формулой $V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Тогда $V' = 4\pi r^2$. Полагая $r = 1, \Delta r = 0{,}02$, получим $V(1{,}02) \approx V(1) + V'(1)0{,}02 =$
$= \frac{4}{3}\pi + 4\pi 0{,}02 \approx 4{,}43$ м^3. ⊗

6.6. Производные и дифференциалы высших порядков

Производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$, т. е. $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = (y')'$. Аналогично определяются производные более высоких порядков $y''' = (y'')', \ldots, y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Дифференциалы высших порядков функции $y = f(x)$ (x – независимая переменная) вычисляются по формулам

$$d^2y = y''(dx)^2, \ldots, d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрически соотношениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем $x'(t) \neq 0$, то ее первая y'_x и вторая y''_{xx} производные находятся по формулам:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}; \text{ или} \qquad (6.9)$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}. \qquad (6.10)$$

П р и м е р 6.12. Найти выражение для производной n-го порядка функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение.

$$y' = -\frac{1}{x^2};\quad y'' = \frac{2}{x^3};\quad y''' = -\frac{2\cdot 3}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}, \ldots, y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Пример 6.13. Найти производную 2-го порядка от функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Решение. По правилу дифференцирования функции, заданной неявно, получаем: $\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}(y'x-y)}{x^2+y^2}$. Отсюда, используя равенство $e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = \sqrt{x^2+y^2}$, имеем:

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y'x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ или } x+yy' = y'x-y.$$

Следовательно, $y' = \frac{x+y}{x-y}$. Дифференцируя последнее равенство и используя найденное для y' выражение, получим:

$$y'' = \frac{(1+y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{x-y+xy'-yy'-x-y+xy'}{(x-y)^2} +$$

$$+\frac{yy'}{(x-y)^2} = \frac{2xy'-2y}{(x-y)^2} = \frac{2(x\frac{x+y}{x-y}-y)}{(x-y)^2} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.$$

Пример 6.14. Найти производную 2-го порядка функции, заданной параметрически: $y = \ln t$, $x = t^2$, $t \in (0;+\infty)$.

Решение. $y'_t = \frac{1}{t}$, $x'_t = 2t$, $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{2t^2}$,

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{1}{2t^2}\right)'_t}{2t} = \frac{-\frac{1}{t^3}}{2t} = -\frac{1}{2t^4}.$$

П р и м е р 6.15. Найти дифференциалы 1-го, 2-го, ..., n-го порядков функции $y=(2x-3)^3$.

Р е ш е н и е. $dy=3(2x-3)^2 2dx=6(2x-3)^2 dx$,

$$d^2y=12(2x-3)2(dx)^2=24(2x-3)(dx)^2,\ d^3y=48(dx)^3,$$

$$d^4y=0(dx)^4=0,\dots,d^ny=0.$$

6.7. Приложения теорем Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя

Теорема Ролля. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *дифференцируема на интервале* $(a;b)$ *и* $f(a)=f(b)$, *то существует хотя бы одна точка* $\xi\in(a;b)$ *такая, что* $f'(\xi)=0$.

Теорема Лагранжа. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и дифференцируема на интервале* $(a;b)$, *то существует точка* $\xi\in(a;b)$ *такая, что*

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\quad \textit{(формула Лагранжа)}. \qquad (6.11)$$

Теорема Коши. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a;b]$, *дифференцируемы на интервале* $(a;b)$ *и* $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a;b)$, *то существует точка* $\xi\in(a;b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\quad \textit{(формула Коши)}. \qquad (6.12)$$

П р и м е р 6.16. Доказать, что уравнение $3x^5+15x-8=0$ имеет только один действительный корень.

Р е ш е н и е. Поскольку функция $f(x)=3x^5+15x-8$ непрерывна и на концах отрезка $[0;1]$ принимает значение разных знаков $(f(0)<0,\ f(1)>0)$, то по первой теореме Больцано–Коши на интервале $(0;\ 1)$ уравнение $f(x)=0$ имеет корень. Предположим, от противного, что это уравнение имеет два действительных корня $x=a,\ x=b,\ f(a)=f(b)=0$.

Тогда по теореме Ролля на интервале $(a;b)$ существовала бы точка ξ, в которой $f'(\xi)=0$. Но $f'(x)=15x^4+15\neq 0$ при действительных x. Полученное противоречие доказывает, что действительный корень – единственный.

Пример 6.17. Используя формулу Лагранжа, доказать неравенство $|\sin x_2-\sin x_1|\leq|x_2-x_1|$.

Решение. Функция $f(x)=\sin x$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на любом отрезке $[x_1;x_2]$; $f'(x)=\cos x$. Поэтому $\sin x_2-\sin x_1=\cos\xi\cdot(x_2-x_1)$. Отсюда, учитывая, что $|\cos\xi|\leq 1$, имеем $|\sin x_2-\sin x_1|=|\cos\xi||x_2-x_1|\leq|x_2-x_1|$.

Пример 6.18. Написать формулу Коши и найти значение ξ для функций $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Все условия теоремы Коши выполнены: $g'(x)=-\sin x\neq 0, x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0}=\frac{\cos\xi}{-\sin\xi};\quad -1=\operatorname{ctg}\xi,\quad \xi=-\frac{\pi}{4}.$$

Правило Лопиталя (раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$).

Теорема. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на $\overset{\circ}{U}(x_0)$; $g'(x)\neq 0, x\in\overset{\circ}{U}(x_0)$. Если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ (или $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$), то*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad (6.13)$$

при условии, что существует предел отношения производных.

З а м е ч а н и я :

1. Аналогичная теорема справедлива и в случае $x_0 = \infty$.

2. Если частное $f'(x)/g'(x)$ в точке x_0 также есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ и производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д.

3. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$ алгебраическими преобразованиями функции приводятся к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, и далее применяется правило Лопиталя.

4. В случае неопределенности вида 0^0, ∞^0, 1^∞ следует прологарифмировать функцию и предварительно найти предел ее логарифма.

☐ П р и м е р 6.19. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{\arcsin x}$.

Р е ш е н и е . Используем формулу (6.13)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{\arcsin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos 2x - 3\cos 3x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = -1. \quad ◈$$

☐ П р и м е р 6.20. Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{3^x}$.

Р е ш е н и е . Имеем:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{3^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{3^x \ln 3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{3^x \ln^2 3} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{3^x \ln^3 3} = 0. \quad ◈$$

Пример 6.21. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x+1+1}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 6.22. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность вида 1^{∞}. Обозначим $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. Логарифмируя и применяя правило Лопиталя (6.13), получим

$$\lim_{x\to 0}(\ln y)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

(здесь дважды использован предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$).

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}(\ln y)=-\frac{1}{6}$, то $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

6.8. Формула Тейлора и ее приложения

Если функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз в окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ точки x_0, то для любого $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ имеет место ***формула Тейлора*** *n*-го порядка:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$ – ***остаточный член в форме Лагранжа***.

Приведем разложения некоторых функций по формуле Тейлора при $x = 0$, которые называются ***формулами Маклорена***:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x);$$

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \cos(\theta x) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x}{(2n)!} + R_{2n+1}(x);$$

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \cos(\theta x) \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!};$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x);$$

$$R_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot(1+\theta x)^{n+1}};$$
$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x);$$
$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\dots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1};\quad 0<\theta<1.$$

Остаточный член формулы Тейлора может быть представлен в *форме Пеано*: $R_n(x)=0\left(|x-x_0|^n\right)$ при $x\to x_0$.

П р и м е р 6.23. Разложить многочлен $f(x)=x^4-2x^2+13x+9$ по степеням двучлена $x+2$.

Р е ш е н и е. Поскольку $f(x)$ – многочлен 4-й степени, то $f^{(5)}(x)=0$ и формула Тейлора при $x_0=-2$ имеет вид

$$f(x)=f(-2)+\frac{f'(-2)}{1!}(x+2)+\frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2+$$
$$+\frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3+\frac{f^{IV}(-2)}{4!}(x+2)^4.$$

Подставляя в эту формулу значения $f(-2)=-9$, $f'(-2)=\left(4x^3-4x+13\right)\Big|_{x_0=-2}=-11$, $f''(-2)=\left(12x^2-4\right)\Big|_{x_0=-2}=44$, $f'''(-2)=24x\Big|_{x_0=-2}=-48$, $f^{IV}(-2)=24$, получим

$$f(x)=-9-11(x+2)+22(x+2)-8(x+2)^3+(x+2)^4.$$

П р и м е р 6.24. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x)=10^x$ в точке $x_0=0$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$f(x)=10^x;\ f'(x)=10^x\ln 10;\ f''(x)=10^x\ln^2 10;\ f'''(x)=10^x\ln^3 10;$

$f^{(IV)}(x)=10^x\ln^4 10;\ f(0)=1;\ f'(0)=\ln 10,\ f''(0)=\ln^2 10,$

$f'''(0)=\ln^3 10,\ f^{(IV)}(\theta x)=10^{\theta x}\cdot\ln^4 10.$

По формуле Тейлора получаем

$$10^x = 1 + (\ln 10)x + \frac{\ln^2 10}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 10}{3!}x^3 + \frac{10^{\theta x} \cdot \ln^4 10}{4!}x^4, \ 0 < \theta < 1.$$

П р и м е р 6.25. Вывести приближенную формулу $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ и оценить ее точность при $|x| < 0{,}05$.

Р е ш е н и е . Запишем формулу Тейлора 4-го порядка для функции $\sin x$ в точке $x_0 = 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_4(x), \text{ где } R_4(x) = \frac{\cos \theta x \cdot x^5}{5!}, \ 0 < \theta < 1.$$

При $|x| < 0{,}05$ имеем $\Delta = |R_4(x)| \le |\cos \theta x| \cdot \frac{|x|^5}{5!} \le \frac{(0{,}05)^5}{5!} < 3 \cdot 10^{-9}$.

Поэтому $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ с точностью $\Delta < 3 \cdot 10^{-9}$.

П р и м е р 6.26. Вычислить $e^{0,2}$ с точностью до 10^{-3}.

Р е ш е н и е . Формула Тейлора для функции e^x имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \text{ где } R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \ 0 < \theta < 1.$$

Полагая $x = 0{,}2$, получим $e^{0,2} = 1 + \frac{0{,}2}{1!} + \frac{0{,}2}{1!} + \frac{0{,}2^2}{2!} + \cdots + \frac{0{,}2^n}{n!} + R_n(0{,}2)$,

где $R_n(0{,}2) = \frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!}e^{0,2\theta}, \ 0 < \theta < 1$.

Так как $0 < \theta < 1$; $2 < e < 3$; $1 < e^{0,2\theta} < 3$, то $R_n(0{,}2) < 3\frac{0{,}2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Определим наименьшее значение n так, чтобы выполнялось неравенство $R_n(0{,}2) < 10^{-3}$.

Если $n=2$, то $R_2 < 3\cdot\frac{0{,}2^3}{3!} \approx 0{,}0013$, а если $n=3$, то $R_3 < 3\frac{0{,}2^4}{4!} \approx$ $\approx 0{,}00018 < 10^{-3}$. Поэтому $e^{0{,}2} \approx 1+\frac{0{,}2}{1!}+\frac{0{,}2^2}{2!}+\frac{0{,}2^3}{3!} = 1{,}221$ с точностью до 10^{-3}.

Пример 6.27. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$.

Используем формулу Тейлора с остаточными членами в форме Пеано:

$$\sin x = x + 0(x), \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+0(x^5), e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+0(z^3).$$

Из последней формулы при $z=-\frac{x^2}{2}$ получим

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+0(x^6).$$

Искомый предел может быть переписан в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+0(x^6)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+0(x^5)}{x^4+0(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{24}+\frac{0(x^5)}{x^4}+\frac{0(x^6)}{x^4}}{1+\frac{0(x^4)}{x^4}} = \frac{1}{8}-\frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

(поскольку $\frac{0(x^5)}{x^4}\to 0$, $\frac{0(x^6)}{x^4}\to 0$ при $x\to 0$).

7. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

Одним изважнейших приложений производной является ее применение к исследованию функций и построению графиков функций.

7.1. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума функции

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) в интервале (a,b), если из неравенства $x_1<x_2$, где $x_1,x_2\in(a,b)$, следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (или, соответственно, $f(x_1)>f(x_2)$).

Функция $f(x)$ называется ***постоянной*** на интервале (a,b), если она принимает на этом интервале одно и то же значение.

Теорема 1 (достаточное условие возрастания (убывания) функции). *Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x)>0$ для всех $x\in(a,b)$, то функция $f(x)$ возрастает на (a,b), если же $f'(x)<0$ для всех $x\in(a,b)$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.*

Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными***. Определим условия постоянства функции.

Теорема 2 (необходимое и достаточное условия постоянства функции). *Функция $y=f(x)$ постоянна на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда $f'(x)=0$ в каждой точке интервала.*

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 ***минимум*** (локальный минимум) (***максимум***), если существует δ-окрестность точки x_0 ($x_0-\delta,x_0+\delta$) такая, что для всякой точки $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$ (или $f(x)<f(x_0)$). Точки минимума и максимума функции $f(x)$ называются ее ***точками экстремума,***

а значения функции $f(x)$ в этих точках называются ***экстремумами функции***.

Сформулируем условия существования экстремума функции.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума). *Если x_0 – точка экстремума функции $f(x)$, то в этой точке $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.*

Точка x_0, в которой $f'(x)$ обращается в ноль или $f'(x)$ не существует, называется ***критической точкой функции*** $f(x)$.

Теорема 4 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ критической точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума функции $f(x)$. Если же $f'(x)$ сохраняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 не является точкой экстремума функции.*

Теорема 5 (второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в критической точке x_0 и в некоторой ее окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Тогда, если $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума $f(x)$. Если же $f''(x_0)=0$, то требуются дополнительные исследования.*

Отметим, что в точках экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси *Ox*.

На рис. 7.1 приведены примеры экстремумов функции.

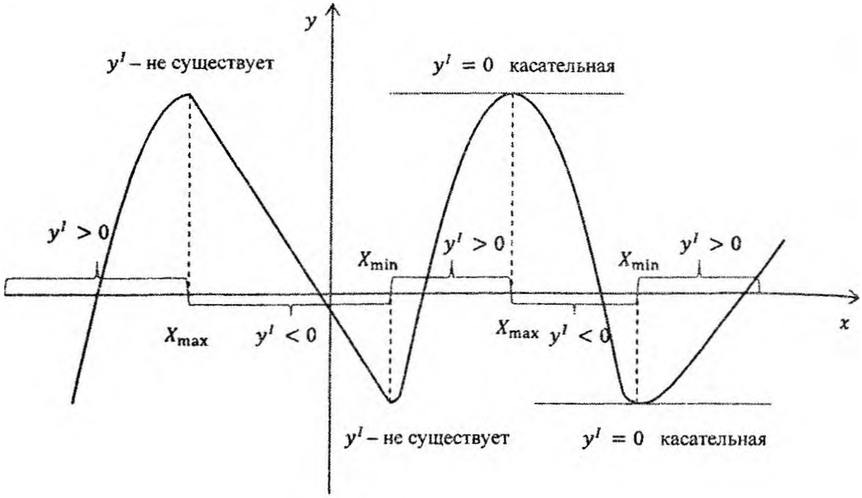
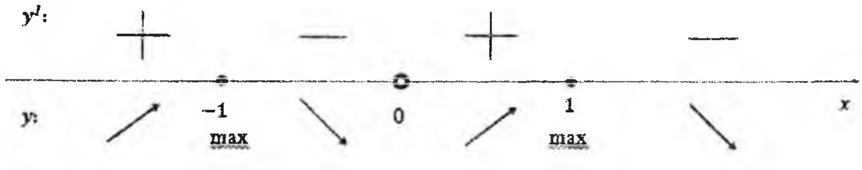


Рис. 7.1

Пример 7.1. Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$.

Решение. Область определения этой функции: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Найдем производную: $y' = \dfrac{4(1 - x^2)}{x^5}$. Приравняв к нулю эту производную, получим $1 - x^2 = 0$. Следовательно, $x_1 = 1, x_2 = -1$ – критические точки функции (в точке $x_3 = 0$ y' не существует, но $x_3 = 0$ не входит в область определения функции). Эти точки разбивают область определения функции на интервалы монотонности. Исследуем знаки производной y' на этих интервалах, укажем вид интервалов монотонности функции, характер критических точек.



Следовательно, $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ – функция возрастает, $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ – функция убывает, $x=-1, x=1$ – точки максимума функции, $y(1)=y(-1)=1$ – максимумы функции. Точек минимума нет.

7.2. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке. Эти значения функция может принимать либо во внутренних точках (тогда это критические точки функции), либо на границе отрезка $[a,b]$.

Получаем следующую схему нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$:

1. Найти производную $f'(x)$ и критические точки функции на интервале (a,b) (из условия $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует).

2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка $[a,b]$.

3. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.

П р и м е р 7.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=-3x^4+18x^2-5$ на отрезке $[-1,2]$.

Р е ш е н и е.

1. Находим $y'=-12x^3+36x=12x(3-x^2)=12x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)$. Критические точки функции на отрезке $[-1,2]$ $x_1=0, x_2=\sqrt{3}$ (точка $x=-\sqrt{3}$ не входит в $[-1,2]$).

2. Вычисляем $y(0)=-5, y(\sqrt{3})=22$. Находим значения функции на концах отрезка: $y(-1)=10, y(2)=29$.

3. Итак, $y_{\text{наиб}}=y(2)=29, y_{\text{наим}}=y(0)=-5$.

7.3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

О п р е д е л е н и е. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется ***выпуклым*** (***вогнутым***) на интервале (a,b), если дуга кривой на этом интервале расположена ниже (выше) всякой касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ на (a,b).

Определение. Точка $(x_0, f(x_0))$, при переходе через которую направление выпуклости меняется на противоположное, называется точкой ***перегиба*** графика функции $y = f(x)$.

На рис. 7.2 график функции $y = f(x)$ на интервале (a, x_0) – вогнутый, на интервале (x_0, b) – выпуклый, а точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика.

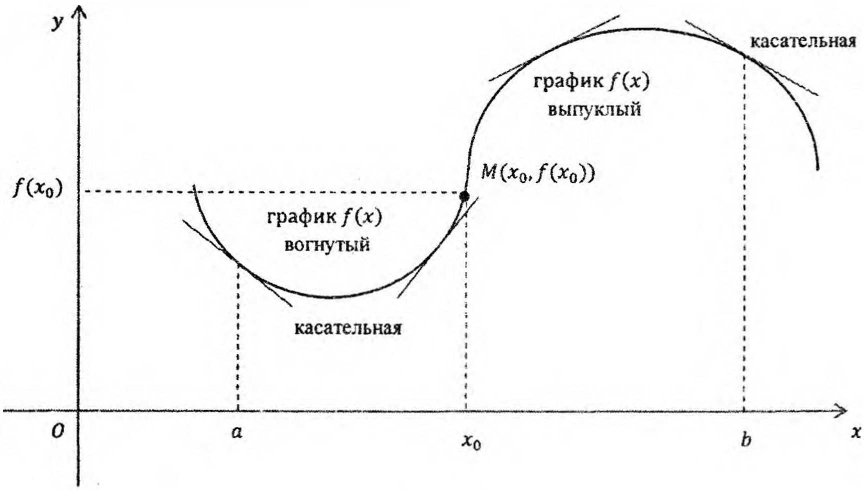


Рис. 7.2

Теорема 6 (достаточные условия выпуклости (вогнутости) графика функции). *Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a,b) имеет вторую производную и $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, то график функции на интервале (a,b) выпуклый (вогнутый).*

Теорема 7 (необходимое условие точки перегиба). *Если точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x)$ не существует при $x = x_0$.*

Точки, в которых $f''(x)$ обращается в ноль или $f''(x)$ не существует, называются ***критическими точками второй производной.***

Теорема 8 (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, в которой $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует Если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.*

Таким образом, область определения функции $y = f(x)$ разбивается на конечное число интервалов с постоянным направлением выпуклости (вогнутости). Каждый из этих интервалов ограничен точками, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует.

П р и м е р 7 .3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции $y = \ln(1 + x^2)$.

Р е ш е н и е.

Находим $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $y'' = \dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$. Критическими точками второй производной являются точки $x_1 = 1, x_2 = -1$. Эти точки разбивают область определения функции на 3 интервала, на каждом из которых сохраняется направление вогнутости или выпуклости. Определим знаки второй производной на этих интервалах, характер точек $x_1 = 1, x_2 = -1$.

Таким образом, на $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ – функция выпукла; на $(-1, 1)$ – функция вогнута; точки $M_1(1, \ln 2)$, $M_2(-1, \ln 2)$ – точки перегиба графика функции.

7.4. Асимптоты графика функции

Определение. Прямая l называется ***асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до прямой l стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат.

Асимптоты могут быть ***вертикальными, наклонными*** и ***горизонтальными***.

Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x)$ равен бесконечности. В этом случае точка $x = a$ является точкой разрыва 2-го рода функции $y = f(x)$.

Так, например, кривая $y = \dfrac{1}{x-2}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 2$, так как $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

Для существования ***наклонной асимптоты*** $y = kx + b$ необходимо и достаточно существование двух пределов

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ \text{или } x \to -\infty}} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Если в уравнении $y = kx + b$ коэффициент k равен нулю, то имеем ***горизонтальную асимптоту*** $y = b$.

Заметим, что не всегда прямая, являющаяся асимптотой графика функции при $x \to +\infty$, будет являтся асимптотой того же графика при $x \to -\infty$. Поэтому при отыскании наклонных асимптот нужно отдельно исследовать случаи при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Пример 7.4. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 1}$.

Решение. Прямые $x = 1, x = -1$ являются вертикальными асимптотами графика функции, так как

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{2x^3}{x^2-1}=+\infty,\ \lim_{x\to 1-0}\frac{2x^3}{x^2-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{2x^3}{x^2-1}=-\infty,\ \lim_{x\to -1+0}\frac{2x^3}{x^2-1}=+\infty.$$

Следует отметить, что точки $x=1, x=-1$ являются точками разрыва 2-го рода функции $y=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$.

Наклонную асимптоту ищем в виде: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-1}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x^3-2x^3+2x)}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-1}=0.$$

Следовательно, прямая $y=2x$ – наклонная асимптота. ⊗

7.5. Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции и построение ее графика удобно выполнять по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной, периодической.
3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва.
4. Найти асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные).
5. Исследовать функцию с помощью первой призводной: установить интервалы монотонности функции, найти точки экстремума функции, вычислить значения функции в этих точках.
6. Исследовать функцию с помощью второй призводной: определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба.

7. Используя результаты проведенного исследования, построить график функции. При необходимости уточнения отдельных участков кривой можно вычислить координаты нескольких дополнительных точек (в частности, координаты точек пересечения графика с осями координат).

П р и м е р 7.5. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. Областью определения функции является совокупность интервалов $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Функция общего вида, т. к. $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$. Функция не периодическая. Функция не определена при $x=1$. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2-x+1}{x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2-x+1}{x-1}=+\infty .$$

Следовательно, $x=1$ – точка разрыва 2-го рода, а, значит, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. Найдем наклонную асимптоту $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{(x-1)x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0.$$

$y=x$ – наклонная асимптота.

Находим $y' = \left(\dfrac{x^2-x+1}{x-1}\right)' = \dfrac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

Решаем уравнение $y'=0$.

$\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$ при $x=0, x=2$.

Укажем интервалы монотонности.

На $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ – функция возрастает, на $(0,1)\cup(1,2)$ – функция убывает.

Тогда $x=0$ – точка максимума, $y(0)=-1$; $x=2$ – точка минимума, $y(2)=3$.

Найдем интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{2(x-1)((x-1)^2-x^2+2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Находим критические точки второй производной.

y'' не обращается в ноль, но в точке $x=1$ y'' не существует (хотя в этой точке функция не определена).

Точек перегиба нет. Точки пересечения с осью Ox найдем из уравнения $f(x)=0$, а точки пересечения с Oy получим при $x=0$:

$\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=0 \Rightarrow x^2-x+1 \neq 0$, т. к. $D<0$. А $f(0)=-1$, значит, $(0,-1)$ – точка пересечения с осью Oy.

Строим график функции (рис. 7.3).

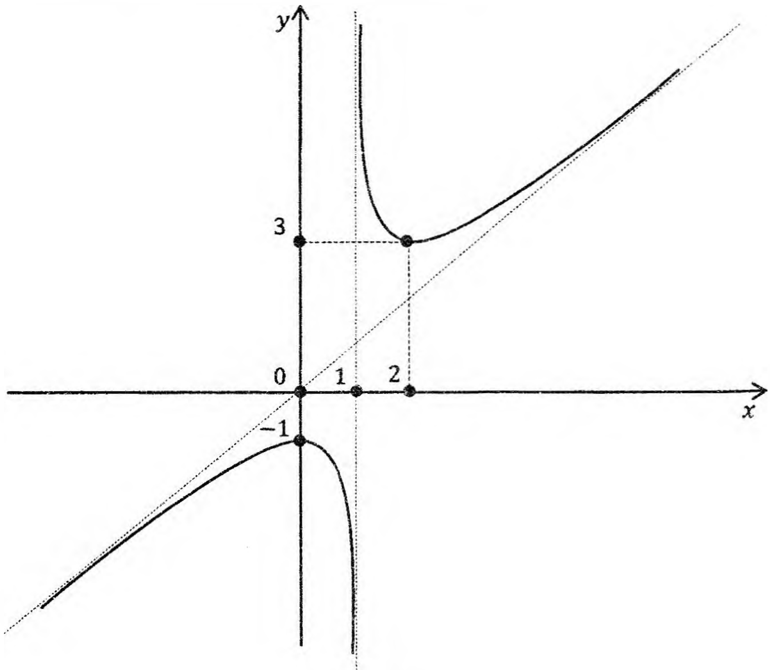


Рис. 7.3

7.6. Векторная функция скалярного аргумента

Эта часть высшей математики – приложения дифференциального исчисления к геометрии в пространстве.

Определение. Если каждому значению действительной переменной $t \in D \subset R$ поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(t) \in R^3$, то говорят, что на множестве D задана ***вектор-функция*** $\vec{a}=\vec{a}(t)$ действительной переменной t.

Множество D называют ***областью определения функции*** $\vec{a}(t)$.

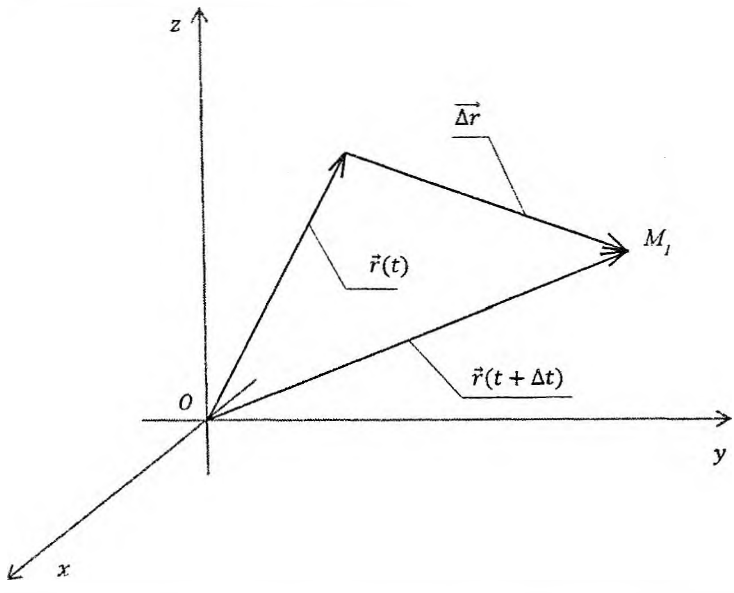
Задание вектор-функции $\vec{a} = \vec{a}(t)$ равносильно заданию трех числовых функций $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ – координат вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}(t) = a_x(t) \cdot \vec{i} + a_y(t) \cdot \vec{j} + a_z(t) \cdot \vec{k}$$

или кратко $\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$.

Если вектор $\vec{a}$ является ***радиусом-вектором*** точки $A(x, y, z)$, то соответствующую вектор-функцию принято обозначать

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} .$$



Очевидно, что область определения функций $x(t), y(t), z(t)$ совпадает с D.

При различных значениях t положение конца вектора $\vec{r}(t)$ будет, вообще говоря, изменяться.

Определение. ***Годографом*** вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется линия, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{r}(t)$.

Таким образом, всякую линию в пространстве можно рассматривать, как годограф некоторой вектор-функции.

Точка O называется ***полюсом годографа***. Выражение

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

называют ***векторно-параметрическим*** уравнением годографа, а

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

называют ***параметрическими*** уравнениями годографа.

Пример 7.6. Найти годограф вектор-функции

$$\vec{r}(t) = 3t\cdot\vec{i} + \left(2t - t^2\right)\cdot\vec{j}, \quad t \in R.$$

Решение.

$$\begin{cases} x(t) = 3t, \\ y(t) = 2t - t^2. \end{cases} \qquad t = \frac{x}{3} \qquad y = 2\cdot\frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{9} = -\frac{1}{9}\left(x^2 - 6x + 9 - 9\right) = -\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1$$

$$y - 1 = -\frac{1}{9}(x-3)^2, \quad y = -\frac{1}{9}x^2 \quad \text{или} \quad Y = -\frac{1}{9}X^2$$

Годографом является парабола (рис. 7.4).

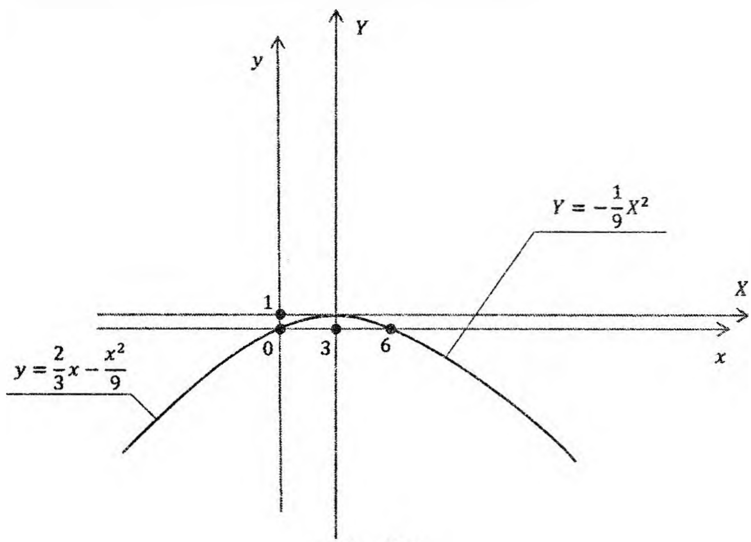


Рис. 7.4

7.7. Предел, непрерывность и производная векторной функции скалярного аргумента

Предположим, что $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=x_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t)=y_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} z(t)=z_0$.

Тогда говорят, что вектор $\vec{r}_0 = x_0\cdot\vec{i}+y_0\cdot\vec{j}+z_0\cdot\vec{k}$ есть ***предел вектора*** $\vec{r}=\vec{r}(t)$ и пишут $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}_0$.

Из последнего равенства

$$\lim_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)-\vec{r}_0\right| = \lim_{t\to t_0}\sqrt{[x(t)-x_0]^2+[y(t)-y_0]^2+[z(t)-z_0]^2}=0.$$

Это означает, что $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec{r}(t)\right|=\left|\vec{r}\right|$. Если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$, то векторная функция называется ***непрерывной*** в точке t_0. Рассмотрим вектор-функцию $\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}$ в точке M (рис. 7.5). Дадим t приращение Δt, тогда получим вектор $\vec{r}(t+\Delta t)=x(t+\Delta t)\cdot\vec{i}+$ $+y(t+\Delta t)\cdot\vec{j}+z(t+\Delta t)\cdot\vec{k}$, который определяет на кривой некоторую точку M_1.

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)=[x(t+\Delta t)-x(t)]\cdot\vec{i}+$$
$$+[y(t+\Delta t)-y(t)]\cdot\vec{j}+[z(t+\Delta t)-z(t)]\cdot\vec{k}.$$

Рассмотрим вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$, который коллинеарен вектору $\Delta\vec{r}$. Тогда

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\cdot\vec{i}+\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\cdot\vec{j}+\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\cdot\vec{k}.$$

Если $x(t), y(t), z(t)$ имеют производные, то множители, стоящие при $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ при $\Delta t\to 0$ обратятся в $x'(t), y'(t), z'(t)$. Следовательно, в этом случае предел $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$ существует и равен $x'(t)\cdot\vec{i}+y'(t)\cdot\vec{j}+z'(t)\cdot\vec{k}$, т. е. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=x'(t)\cdot\vec{i}+y'(t)\cdot\vec{j}+z'(t)\cdot\vec{k}$.

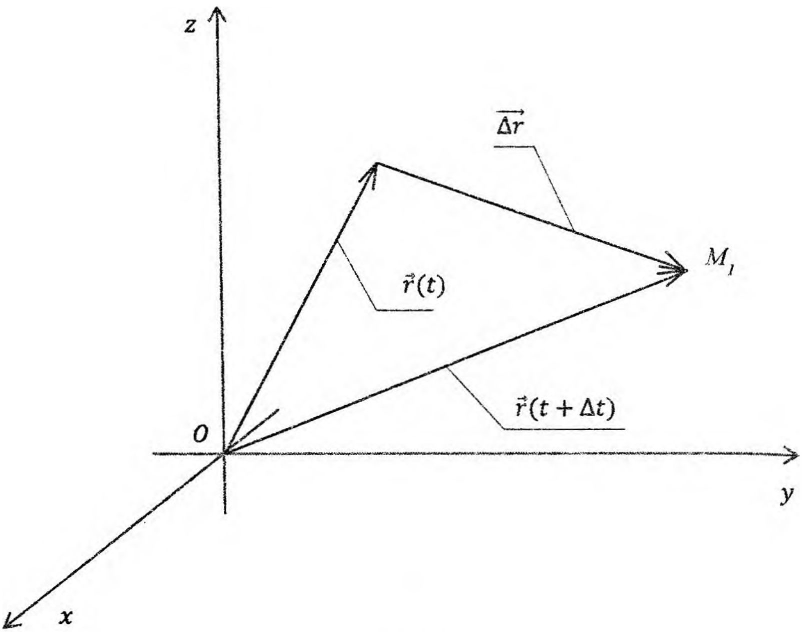


Рис. 7.5

Определение. Вектор, определяемый последним равенством, называется ***производной*** от вектора $\vec{r}(t)$ по скалярному аргументу ***t***.

Производную обозначают символом $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ или $\vec{r}\,'$. Итак,

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}=x'(t)\cdot\vec{i}+y'(t)\cdot\vec{j}+z'(t)\cdot\vec{k} \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot\vec{i}+\frac{dy}{dt}\cdot\vec{j}+\frac{dz}{dt}\cdot\vec{k}\,. \quad (7.1)}$$

Пример 7.7. Найти производную вектор-функции
$\vec{r}(t)=\sin t\cdot\vec{i}+\cos^2 t\cdot\vec{j}+\sin t\cos t\cdot\vec{k}$.

Решение.

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot\vec{i}+\frac{dy}{dt}\cdot\vec{j}+\frac{dz}{dt}\cdot\vec{k}\,,$$

где $x(t)=\sin t,\quad \dfrac{dx}{dt}=(\sin t)'=\cos t;$

$$y(t)=\cos^2 t,\quad \frac{dy}{dt}=\left(\cos^2 t\right)'=-2\cos t\sin t=-\sin 2t;$$

$$z(t)=\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t,\quad \frac{dz}{dt}=\frac{1}{2}2\cos 2t=\cos 2t.$$

Итак, $\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\cos t\cdot\vec{i}-\sin 2t\cdot\vec{j}+\cos 2t\cdot\vec{k}$.

С ***геометрической*** точки зрения вектор $\vec{r}'(t)$ – это вектор, направленный по касательной к годографу функции $\vec{r}(t)$ в сторону возрастания параметра t.

С ***механической*** точки зрения $\vec{r}'(t)$ есть вектор мгновенной скорости движения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции $\vec{r}(t)$.

7.8. Касательная прямая и нормальная плоскость к пространственной кривой

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Так как вектор $\vec{s}(m,n,p)$ коллинеарен $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то в точке $(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ следующие уравнения

$$\boxed{\frac{x-x(t_0)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)\Big|_{t=t_0}}=\frac{y-y(t_0)}{\left(\frac{dy}{dt}\right)\Big|_{t=t_0}}=\frac{z-z(t_0)}{\left(\frac{dz}{dt}\right)\Big|_{t=t_0}}\qquad(7.2)}$$

есть уравнения ***касательной*** к пространственной кривой $x=x(t)$, $y=y(t), z=z(t)$.

Пример 7.8. Написать уравнения касательной к годографу

$\vec{r}(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + bt \cdot \vec{k}$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$, (это винтовая линия, рис. 7.6).

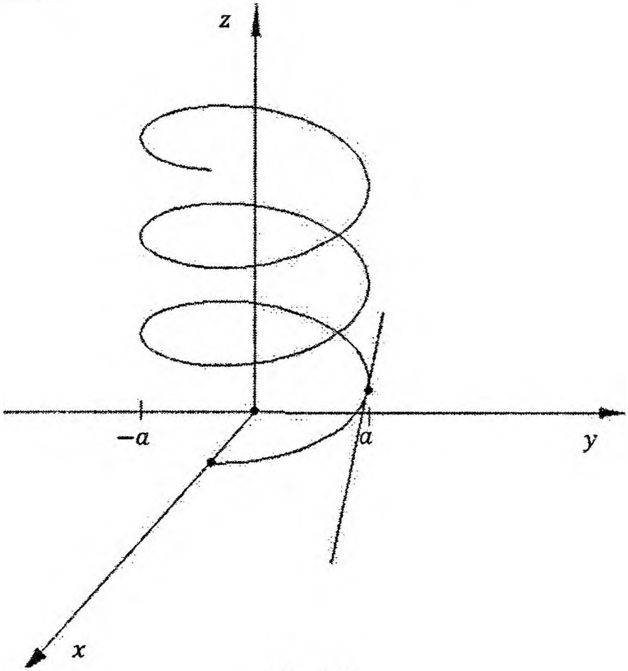


Рис. 7.6

Решение.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t; \quad \frac{dy}{dt} = a\cos t; \quad \frac{dz}{dt} = b;$$

$$x(t_0) = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = a\cos\frac{\pi}{4} = a\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y(t_0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = a\sin\frac{\pi}{4} = a\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z(t_0) = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = b\frac{\pi}{4};$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -a\sin\frac{\pi}{4} = -a\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = a\cos\frac{\pi}{4} = a\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = b.$$

Подставив в формулу (7.2), имеем:

$$\frac{x-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{-\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{y-\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{z-b\frac{\pi}{4}}{b}$$ – уравнения касательной к винтовой линии в точке $t_0=\frac{\pi}{4}$. ⊗

Плоскость, проходящая через точку касания $M(t_0)$ и перпендикулярная к касательной, называентся ***нормальной плоскостью*** к кривой в этой точке.

Ее уравнение имеет вид:

$$\frac{dx(t_0)}{dt}(x-x_0)+\frac{dy(t_0)}{dt}(y-y_0)+\frac{dz(t_0)}{dt}(z-z_0)=0. \qquad (7.3)$$

П р и м е р 7 .9. Написать уравнение нормальной плоскости к винтовой линии $\vec{r}(t)=a\cos t\cdot\vec{i}+a\sin t\cdot\vec{j}+bt\cdot\vec{k}$ в точке $t_0=\frac{\pi}{4}$ (см. предыдущий пример).

Р е ш е н и е . Так как все необходимые величины найдены, то имеем по формуле (7.3):

$$-\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(y-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)+b\left(z-b\frac{\pi}{4}\right)=0. \text{ ⊗}$$

7.9. Кривизна плоской линии

Одним из элементов, характеризующих форму кривой, является степень ее искривленности.

Рассмотрим кривую, которая не пересекает саму себя и имеет определенную *касательную*. Возьмем две точки A и B.

Углом смежности дуги AB называется угол поворота касательной при переходе от точки A к точке B (рис. 7.7).

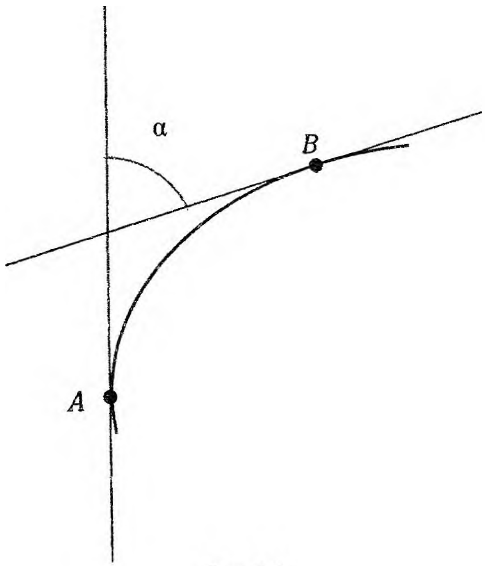


Рис. 7.7

У двух дуг, имеющих одинаковую длину, больше изогнута та дуга, у которой угол смежности больше. Однако, степенью искривленности нельзя оценить форму дуги различной длины с одним и тем же углом смежности.

Средней кривизной $k_{ср}$ дуги $\overset{\cup}{AB}$ называется отношение соответствующего угла смежности α к длине дуги:

$$k_{ср} = \frac{\alpha}{|\overset{\cup}{AB}|}.$$

Для одной и той же кривой средняя кривизна ее различных частей (дуг) может быть различна.

Кривизной k_A линии в данной точке A называется предел средней кривизны дуги $\overset{\cup}{AB}$, когда длина этой дуги стремится к нулю (когда $B \to A$):

$$k_A = \lim_{B \to A} k_{ср} = \lim_{|\overset{\cup}{AB}| \to 0} \frac{\alpha}{|\overset{\cup}{AB}|}.$$

Предположим, что кривая задана в декартовой системе координат уравнением вида $y = f(x)$ и пусть $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную.

Тогда кривизна плоской линии определяется по формуле

$$k = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right]^{3/2}}. \qquad (7.4)$$

Заметим, что кривизна не может быть отрицательной.

Если кривая задана параметрически, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_t''x_t' - x_t''y_t'}{(x_t')^3}.$$

Подставляя это в (7.4), получим кривизну плоской линии, заданной параметрически

$$k = \left|\frac{\begin{vmatrix} x_t' & y_t' \\ x_t'' & y_t'' \end{vmatrix}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}\right|. \qquad (7.5)$$

П р и м е р 7.10. Найти кривизну кривой $y = x^3$ в точке $M(2;8)$.

Р е ш е н и е . Найдем производные: $\frac{dy}{dx} = 3x^2$,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_M = 3\cdot 2^2 = 12; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x, \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_M = 12.$$

Тогда кривизна равна $k = \frac{|12|}{\left(1+(12)^2\right)^{3/2}} = \frac{12}{\sqrt{(1+144)^3}} = \frac{12}{\sqrt{145^3}}$.

7.10. Понятие эволюты и эвольвенты

Величина R, обратная кривизне линии в данной точке M, называется ***радиусом кривизны*** этой линии в рассматриваемой точке, т. е.

$$R = 1/k, \quad R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2 y}{dx^2}\right|}.$$

Построим в точке M нормаль к кривой, направленной в сторону вогнутости кривой, и отложим на этой нормали отрезок MC, равный радиусу R (рис. 7.8) кривизны кривой l в точке M. Точка C называется ***центром кривизны*** данной кривой в точке M, круг радиуса R с центром в точке C (проходящий через точку M) называется ***кругом кривизны*** данной кривой в точке M.

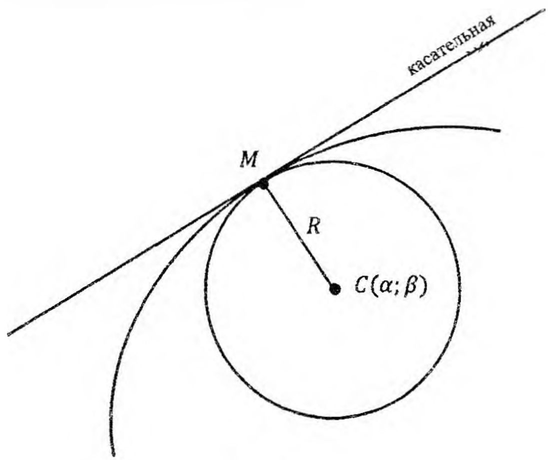


Рис. 7.8

Рассмотрим кривую $y = f(x)$. Если в точке $M_1(x, y)$ данной линии кривизна отлична от нуля, то этой точке соответствует вполне определенный центр кривизны $C_1(\alpha, \beta)$.

Совокупность всех центров кривизны данной линии образует некоторую новую линию, называемую ***эволютой*** по отношению к первой. Или: геометрическое место центров кривизны данной линии называется ее эволютой. По отношению к своей эволюте данная линия называется ***эвольвентой*** (***инволютой*** или ***разверткой***).

Теорема (свойство эволюты). *Нормаль к данной кривой является касательной к ее эволюте.*

7.11. Кривизна и кручение пространственной кривой. Формулы Френе

В любой точке $M(x,y,z)$ пространственной кривой $\vec{r}=\vec{r}(t)= = x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ можно построить три взаимно перпендикулярных вектора:

$$\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{dt} \text{ – направляющий вектор касательной к } \vec{r}(t); \qquad (7.6)$$

$$\vec{B}=\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right] \text{ – направляющий вектор бинормали к } \vec{r}(t); \qquad (7.7)$$

$$\vec{N}=\left[\vec{B},\vec{T}\right] \text{ – направляющий вектор главной нормали к } \vec{r}(t). \qquad (7.8)$$

Определим соответствующие им единичные векторы по формулам:

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{T}}{\left|\vec{T}\right|},\quad \vec{\beta}=\frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|},\quad \vec{\nu}=\frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}. \qquad (7.9)$$

Трехгранник с вершиной в точке M_0, ребрами которого служат касательная, главная нормаль, бинормаль, называется ***естественным трехгранником*** или ***трехгранником Френе***. Гранями его являются плоскость ***соприкасающаяся*** (проходит через $\vec{\tau},\vec{\nu}$), ***нормальная*** (проходит через $\vec{\nu},\vec{\beta}$), ***спрямляющая*** (проходит через $\vec{\beta},\vec{\tau}$) (рис. 7.9).

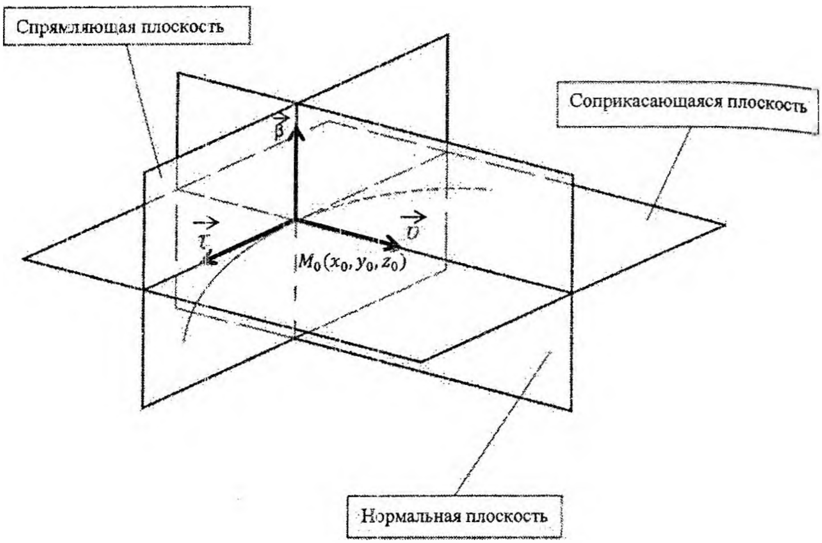


Рис. 7.9

Уравнения главной нормали имеют вид

$$\frac{x-x_0}{N_x}=\frac{y-y_0}{N_y}=\frac{z-z_0}{N_z}, \tag{7.10}$$

где $\vec{N}=N_x\vec{i}+N_y\vec{j}+N_z\vec{k}$.

Уравнения бинормали:

$$\frac{x-x_0}{B_x}=\frac{y-y_0}{B_y}=\frac{z-z_0}{B_z}, \tag{7.11}$$

где B_x, B_y, B_z – координаты вектора $\vec{B}$, т.е. $\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$.

Заметим, что уравнения касательной могут быть записаны аналогично уравнению (7.2) в виде

$$\frac{x-x_0}{T_x}=\frac{y-y_0}{T_y}=\frac{z-z_0}{T_z}, \tag{7.12}$$

где T_x, T_y, T_z – координаты вектора $\vec{T}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Уравнение нормальной плоскости:

$$T_x(x-x_0)+T_y(y-y_0)+T_z(z-z_0)=0. \qquad (7.13)$$

Уравнение соприкасающейся плоскости:

$$B_x(x-x_0)+B_y(y-y_0)+B_z(z-z_0)=0. \qquad (7.14)$$

Уравнение спрямляющей плоскости:

$$N_x(x-x_0)+N_y(y-y_0)+N_z(z-z_0)=0. \qquad (7.15)$$

Кривизна пространственной кривой $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ определяется аналогично кривизне плоской кривой и в точке M вычисляется по формуле

$$k=\frac{1}{R}=\frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^3}. \qquad (7.16)$$

Кручением пространственной кривой в точке M называется число $\sigma=\lim\limits_{N\to M}\frac{\theta}{\Delta s}$, где θ – угол поворота бинормали, соответствующий дуге $\overset{\smile}{MN}$. Если $\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, то кручение σ вычисляется по формуле

$$\sigma=\frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2},\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)}{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|^2}. \qquad (7.17)$$

□ П р и м е р 7.11. Найти единичные векторы $\vec{\tau}, \vec{\beta}, \vec{\nu}$, уравнения касательной, нормали, бинормали, уравнения соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей, кривизну и кручение в точке $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ винтовой линии $\vec{r}(t) = 2\cos t \cdot \vec{i} + 2\sin t \cdot \vec{j} + 3t \cdot \vec{k}$ (рис. 7.10).

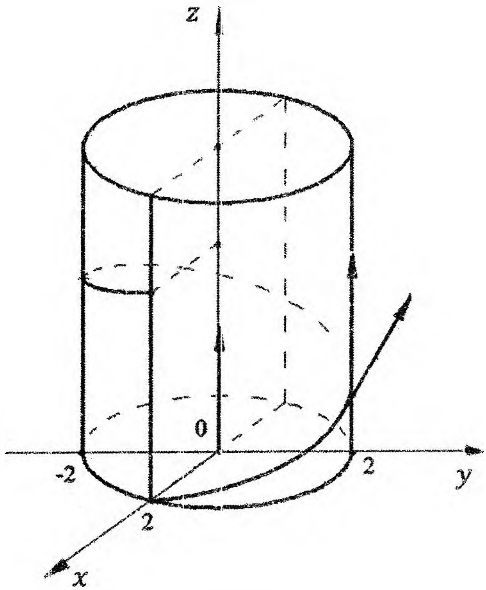


Рис. 7.10

Р е ш е н и е . Находим

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -2\sin t \cdot \vec{i} + 2\cos t \cdot \vec{j} + 3\vec{k};$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -2\cos t \cdot \vec{i} - 2\sin t \cdot \vec{j};$$

$$\frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = 2\sin t \cdot \vec{i} - 2\cos t \cdot \vec{j}.$$

При $t=\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \vec{T}=\left.\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|_M=-2\vec{i}+3\vec{k}$,

$$\vec{B}=\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}=6\vec{i}+4\vec{k}$$

$$\vec{N}=\left[\vec{B},\vec{T}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 4\\ -2 & 0 & 3\end{vmatrix}=-8\vec{j}$$

Находим единичные векторы $\vec{\tau},\vec{\beta},\vec{\nu}$:

$$\vec{\tau}=\frac{\vec{T}}{|\vec{T}|}=\frac{-2\vec{i}+3\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}=-\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{k};$$

$$\vec{\beta}=\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{6\vec{i}+4\vec{k}}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{6}{\sqrt{52}}\vec{i}+\frac{4}{\sqrt{52}}\vec{j};$$

$$\vec{\nu}=\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}=\frac{-8\vec{j}}{|-8|}=-\vec{j}.$$

Записываем уравнения граней трехгранника Френе:

– нормальная плоскость к винтовой линии в точке $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$ $=M\left(0;2;\dfrac{3\pi}{2}\right)$:

$$-2(x-0)+0\cdot(y-0)+3\left(z-\frac{3\pi}{2}\right)=0$$

или $-2x+3z-\dfrac{9\pi}{2}=0$;

– соприкасающаяся плоскость к винтовой линии в точке $M\left(0;2;\dfrac{3\pi}{2}\right)$:

$$6(x-0)+0\cdot(y-2)+4\left(z-\frac{3\pi}{2}\right)=0 \text{ или } 6x+4z-6\pi=0;$$

– спрямляющая плоскость к винтовой линии в точке $M\left(0;2;\dfrac{3\pi}{2}\right)$:

$$0\cdot(x-0)-8\cdot(y-2)+0\cdot\left(z-\frac{3\pi}{2}\right)=0 \text{ или } y-2=0.$$

Уравнения касательной в точке M:

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-\frac{3\pi}{2}}{3};$$

уравнения нормали в точке M:

$$\frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z-\frac{3\pi}{2}}{0};$$

уравнения бинормали в точке M:

$$\frac{x-0}{6}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-\frac{3\pi}{2}}{4}.$$

Находим кривизну винтовой линии в точке M:

$$k=\frac{\left|\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]\right|}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}=\frac{|\vec{B}|}{|\vec{T}|}=\frac{\sqrt{6^2+4^2}}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}=\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{52}{13}}=\sqrt{4}=2.$$

Найдем $\dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3}$ в точке M: $\dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3}\Big|_M=2\vec{i}$.

Кручение винтовой линии в точке M:

т. к. $\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt},\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2},\dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=12$, то $\sigma=\dfrac{12}{|\vec{B}|^2}=\dfrac{12}{52}=\dfrac{3}{13}$. ⊗

8. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Тема 1. Матрицы. Определители

1. Найти матрицу, транспонированную матрице A:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} a & a & a \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти а) $2A$; б) $2A+3B-C$; в) $-2C^T$.

3. Найти $3A+2E$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица третьего порядка.

4. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^2 & -a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \sqrt[4]{a} & a \\ -1 & \sqrt[4]{a^3} \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} \ln x & \ln y \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определители третьего порядка различными способами:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

6. Найти обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$.

7. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$.

8. Построить график функции $y = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

9. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответы к теме 1

1. а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A^T = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 6 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 3 \\ 33 & -3 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -6 & -12 & -6 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 8 & 15 & -12 \\ -3 & -7 & 3 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. **4.** а) 13; б) $-2a^2$; в) $\sin 2x$; г) $2a$; д) $\ln\dfrac{x^5}{y^2}$.

5. а) 78; б) 0; в) $\sin 2\alpha$; г) 78; д) 100; е) – 6.

6. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

г) не существует. **7.** $x = -3$. **8.** Прямая $y = 2x - 2$.

9. а) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. **10.** а) 2; б) 2.

Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений

1. Убедиться, что система является невырожденной, и решить ее по формулам Крамера и матричным способом:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 4x + 5y + 6z = 8, \\ 7x + 8y \quad\; = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21. \end{cases}$

2. Решить системы методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 \quad\; - 2x_3 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 4x - 3y + 3z = 0, \\ x + 3y \quad\; = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6 = 9, \\ 7x + 8y \quad\; = -6. \end{cases}$

Ответы к теме 2

1. а) (–2;2;1); б) (1;2;–3); в) (–3;3;0).

2. а) $(-C-8;2C+4;C)$; $C\in R$; б) несовместна;

в) $(-3C;C;5C)$; $C\in R$; г) (–2;1;2).

Тема 3. Векторы

1. Как должны быть связаны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы выполнялись соотношения:

1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$;

3) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; 4) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

2. Даны точки $A(4,4,0)$, $B(0,0,0)$, $C(0,3,4)$, $D(1,4,4)$. Докажите, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

3. При каких α и β векторы $\vec{a}=\alpha\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ ортогональны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}=2\vec{i}+\vec{j}+\beta\vec{k}$ коллинеарны?

4. Дан треугольник с вершинами в точках $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$, $C(1;0;2)$. Найти: а) внутренний угол при вершине C; б) площадь треугольника ABC; в) длину высоты, опущенной из вершины C на AB.

5. Даны векторы $\vec{a}=(1;-3;4)$, $\vec{b}=(3;-4;2)$, $\vec{c}=(-1;1;4)$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

6. Какую работу производит сила $\vec{F}=(2;-1;-4)$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $A=(1;-2;3)$ в точку $B=(5;-6;1)$?

7. Найдите какой-либо ненулевой вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(0;2;5)$.

8. Вычислите синус угла, образованного векторами $\vec{a}=6\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}$.

9. Выясните, компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}=(0;1;1)$, $\vec{b}=(1;1;1)$, $\vec{c}=(1;0;0)$;

б) $\vec{a}=(4;-2;0)$, $\vec{b}=(-3;6;3)$, $\vec{c}=(1;4;-5)$

10. Вычислите объем тетраэдра $ABCD$ и длину высоты, опущенную из точки D на основание ABC, если известны координаты его вершин $A(0,0,1)$, $B(-3,2,3)$, $C(2,-1,3)$, $D(1,3,8)$.

11. Сила $\vec{F}=(3;4;2)$ приложена к точке $C=(-2;1;-2)$. Определите величину и направляющие косинусы момента силы относительно начала координат.

12. Даны три силы $\vec{F}_1=(2;-1;3)$, $\vec{F}_2=(3;2;-1)$, $\vec{F}_3=(-4;1;-3)$, приложенные к точке $C=(-1;4;-2)$. Определите величину и направляющие косинусы момента равнодействующей силы относительно точки $A=(2;3;-1)$.

Ответы к теме 3

1. 1) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; 2) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}, |\vec{a}|\geq|\vec{b}|$; 3) $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$; 4) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}, \vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$.

3. а) $\alpha=-5$; б) $\alpha=-10; \beta=-\frac{3}{5}$. **4.** а) $\arccos\frac{18}{\sqrt{494}}$; б) $\frac{\sqrt{170}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{170}}{3}$. **5.** 5. **6.** 20. **7.** $\vec{c}=4\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$. **8.** $\sqrt{\frac{23}{185}}$.

9. а) да; б) нет. **10.** $\frac{29}{6}, \frac{29}{18\sqrt{137}}$.

11. $15; \cos\alpha=\frac{2}{3}; \cos\beta=-\frac{2}{15}; \cos\gamma=-\frac{11}{15}$.

12. $\sqrt{66}; \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{66}}; \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{66}}; \cos\gamma=\frac{7}{\sqrt{66}}$.

Тема 4. Прямая на плоскости

1. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;1)$, $M_2(4;5)$, и найти точки ее пересечения с осями координат.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4;3)$, являющуюся основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

3. При каком значении A прямая $Ax+4y-13=0$ образует с осью Ox угол $\alpha=45°$?

4. Даны вершины треугольника $A(2;-3)$, $B(4;5)$, $C(-3;4)$. Найти: а) уравнение стороны AB; б) уравнение медианы, проведенной из вершины C; в) уравнение высоты, проведенной из вершины C.

5. Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе второго координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3.

6. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-3)$: а) параллельно прямой $y=2x-9$; б) перпендикулярно прямой $x+3y-2=0$.

7. Каково взаимное расположение двух прямых, угловые коэффициенты которых равны –2,5 и –0,4.

8. Найдите расстояние от точки $M(-1;2)$ до прямой:

а) $\begin{cases} x=-1+t, \\ y=2+3t, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=5+2t, \\ y=-3-3t. \end{cases}$

9. Какие прямые данной пары пересекаются, параллельны или совпадают? Если прямые пересекаются, найдите координаты точки их пересечения:

а) $2x+y-1=0$ и $x-3y-2=0$; б) $2x+6y=2$ и $x+3y-1=0$;

в) $-x-y=3$ и $3x+3y+1=0$; г) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}$ и $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-2}{1}$.

Ответы к теме 4

1. $2x-y-3=0$; $(0;-3)$, $(1{,}5;0)$. **2.** $4x+3y-25=0$. **3.** –4.
4. а) $4x-y-11=0$; б) $x+2y-5=0$; в) $x+4y-13=0$.
5. $y=-x+3$. **6.** а) $2x-y-7=0$; б) $3x-y-9=0$.
7. Пересекаются. **8.** а) 0; б) $\dfrac{8}{\sqrt{13}}$. **9.** а) $\left(\dfrac{5}{7};-\dfrac{3}{7}\right)$;
б) совпадают; в) параллельны; г) $(9;-5)$.

Тема 5. Плоскость и прямая в пространстве

1. Даны точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(4;-2;-1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ и $M_3(2;0;2)$.

3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-1;0)$ параллельно векторам $\vec{a}=(0;2;3)$ и $\vec{b}=(-1;4;2)$.

4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;-3;-2)$ параллельно плоскости $3x-2y+4z-3=0$.

5. Найдите угол между плоскостями $x+4y-z+1=0$ и $x+y-z-3=0$.

6. Дана пирамида с вершинами $A(2;2;-3)$, $B(3;1;1)$, $C(-1;0;5)$, $D(4;-2;-3)$. Найдите длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

7. Установите, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

1) $x-y+3z+1=0$ и $2x-y+5z-2=0$;

2) $3x+2y-z+2=0$ и $6x+4y-2z+1=0$;

3) $2x+6y+2z-4=0$ и $3x+9y+3z-6=0$.

8. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;0;-3)$ параллельно вектору $\vec{a}=(2;-3;5)$.

9. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x+y+2z-3=0, \\ x-y+z-1=0. \end{cases}$$

10. Найдите угол между прямыми $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{-1}$ и $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-10}{6}$.

11. При каких значениях a прямые $\frac{x-1}{a}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-(a-2)^2}{a}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z}{1}$:

1) пересекаются; 2) скрещиваются; 3) параллельны; 4) совпадают?

12. Выясните взаимное расположение прямой и плоскости: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{5}$ и $x-3y+2z-5=0$.

13. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;-1;3)$ перпендикулярно плоскости $3x-y+2z-4=0$.

14. Найдите угол между прямой и плоскостью:

а) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-6}$ и $4x+4y-7z+1=0$;

б) $\begin{cases} x+4y-2z+7=0, \\ 3x+7y-2z=0 \end{cases}$ и $3x+y-z+1=0$.

15. Найдите координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x-y+2z+5=0$.

16. Найдите точку A, симметричную точке $P(6;-5;5)$ относительно плоскости $2x-y+z-4=0$.

Ответы к теме 5

1. $x-y-3z+2=0$. **2.** $3x+3y+z-8=0$. **3.** $8x+3y-2z-5=0$.

4. $3x-2y+4z-1=0$. **5.** $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. **6.** $h=5$.

7. 1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают.

8. $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; $\begin{cases} x=2+2t, \\ y=-3t, \\ z=-3+5t. \end{cases}$; **9.** $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}$; $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=1+t, \\ z=-2t. \end{cases}$

10. $\frac{\pi}{2}$. **11.** 1) $a=3$; 2) $a\neq\pm1; a\neq3$; 3) $a=-1$; 4) $a=1$.

12. Прямая параллельна плоскости. **13.** $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{2}$.

14. а) $\arcsin\left(\frac{62}{63}\right)$; б) $\arcsin\left(\frac{19}{11\sqrt{7}}\right)$. **15.** $(-3;-4;0)$. **16.** $A(-2;7;1)$.

Тема 6. Кривые второго порядка

1. Для следующих эллипсов и гипербол найдите: а) полуоси; б) расстояние между фокусами; в) эксцентриситет ε; г) координаты фокусов; д) координаты вершин; е) для гипербол составьте уравнения асимптот.

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=-1$; 4) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.

2. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс и симметричны относительно начала координат, если:
1) его полуоси равны 1 и 7;
2) расстояние между фокусами равно 8 и малая полуось равна 3;
3) большая полуось равна 5 и точка $M_0(3;-2;4)$ лежит на эллипсе.

3. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат и симметричны относительно начала координат, если:
1) его полуоси равны 2 и 5;
2) расстояние между фокусами равно 12 и большая полуось – 13;
3) малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{12}{13}$.

4. Составьте уравнение гиперболы, если:
1) ее фокусы находятся в точках $F_1(7;0)$, $F_2(-7;0)$, а действительная полуось равна 5;
2) гипербола проходит через точку $M_0(6;-2{,}5\sqrt{3})$, а ее вершины находятся в точках $A_1(-4;0)$, $A_2(4;0)$.

5. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси ординат и симметричны относительно начала координат, если:

1) ее действительная и мнимая полуоси равны 11 и 4 соответственно;

2) расстояние между фокусами равно 10, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{3}$;

3) уравнение одной из асимптот $y=\frac{3}{4}x$, а действительная полуось равна 6.

6. Составьте каноническое уравнение параболы, если:

1) ее вершина совпадает с началом координат, а фокус находится в точке $F(2;0)$;

2) ветви направлены вверх, а параметр равен 4;

3) уравнение директрисы $y=3$, а фокус находится в точке $F(0;-3)$;

4) ее вершина совпадает с началом координат, парабола проходит через точку $M_0(9;-6)$ и ось абсцисс является осью параболы.

7. Определите вид и расположение линии 2-го порядка:

1) $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$;

2) $9x^2-16y^2+54x+64y-127=0$;

3) $x^2-10x-8y+49=0$;

4) $y^2-2x-4y-2=0$;

5) $4x^2-9y^2-16x-18y+7=0$;

6) $x^2+4y^2+4x-32y+68=0$.

Ответы к теме 6

1. 1) а) $a=4; b=5$; б) $2c=6$; в) $\varepsilon=\frac{3}{5}$; г) $F_1(0;-3), F_2(0;3)$; д) $(4;0), (-4;0), (0;5), (0;-5)$; **2)** а) $a=5; b=4$; б) $2c=6$; в) $\varepsilon=\frac{3}{5}$; г) $F_1(3;0), F_2(-3;0)$; д) $(5;0), (-5;0), (0;4), (0;-4)$; **3)** а) $a=12; b=5$; б) $2c=26$; в) $\varepsilon=\frac{13}{5}$; г) $F_1(0;-13), F_2(0;13)$; д) $A_1(0;-5), A_2(0;5)$; е) $y=\pm\frac{5}{12}x$; **4)** а) $a=12; b=5$; б) $2c=26$; в) $\varepsilon=\frac{13}{12}$; г) $F_1(13;0), F_2(-13;0)$; д) $A_1(-12;0), A_2(12;0)$; е) $y=\pm\frac{5}{12}x$.

2. 1) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{1}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

3. 1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$; 2) $\frac{x^2}{133}+\frac{y^2}{169}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$.

4. 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{15}=1$.

5. 1) $\frac{y^2}{121}-\frac{x^2}{16}=1$; 2) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$; 3) $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$.

6. 1) $y^2=8x$; 2) $x^2=8y$; 3) $x^2=-12y$; 4) $y^2=4x$.

7. Во всех задачах новые координатные оси Ox, Oy, Oz сонаправлены старым, начало координат новой системы координат находится в точке O'.

1) эллипс $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}=1, O'(1;-2)$;

2) гипербола $\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1, O'(-3;2)$;

3) парабола $X^2=8Y, O'(5;3)$;

4) парабола $Y^2=2X, O'(-3;2)$;

5) пара пересекающихся прямых $2x-3y-7=0$ и $2x+3y-1=0$;

6) точка $O'(-2;4)$.

Тема 7. Поверхности второго порядка

1. Определите вид поверхностей и их расположение относительно координатных осей:

1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$; **2)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1$; **3)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=1$;

4) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{49}=-1$; **5)** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=2z$; **6)** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=0$;

7) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=-1$; 8) $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{25}=-2x$; 9) $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{100}=1$;

10) $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$; 11) $z^2=18x$.

2. Привести к каноническому виду уравнение 2-го порядка, используя преобразование параллельного переноса, определить вид поверхности и ее расположение относительно новой системы координат:

1) $9x^2+4y^2+4z^2-18x+16z-11=0$;

2) $9x^2+4y^2-4z^2-18x-16z-43=0$;

3) $9x^2-4y^2+4z^2+18x+16z+25=0$;

4) $9y^2+4z^2=36x+72$; 5) $x^2+y^2+6x-4y+12=0$;

6) $y^2=4x+16$; 7) $x^2+y^2+z^2+6x-4y+2z-10=0$.

Ответы к теме 7

1. 1) эллипсоид; 2) двуполостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Oz; 3) двуполостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Ox; 4) двуполостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Oy; 5) эллиптический параболоид, вытянутый в положительном направлении оси Oz; 6) конус, вытянутый вдоль оси Ox; 7) однополостный гиперболоид, вытянутый вдоль оси Ox; 8) эллиптический параболоид, вытянутый в отрицательном направлении оси Ox; 9) эллиптический цилиндр, образующие параллельны оси Oy; 10) гиперболический цилиндр, образующие параллельны оси Oy; 11) параболический цилиндр, образующие параллельны оси Oy.

2. Во всех задачах новые координатные оси OX, OY, OZ сонаправлены старым, начало координат новой системы координат находится в точке O'.

1) эллипсоид $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}+\frac{Z^2}{9}=1$; $O'(1;0;-2)$;

2) однополостный гиперболоид $\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{9}-\frac{Z^2}{9}=1$, вытянутый вдоль оси OZ, $O'(1;0;-2)$;

3) конус второго порядка $9X^2 - 4Y^2 + 4Z^2 = 0$, вытянутый вдоль оси OY, $O'(-1;0;-2)$;

4) эллиптический параболоид $\frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{9} = X$, вытянутый в положительном направлении оси OX, $O'(-2;0;0)$;

5) эллиптический цилиндр (круговой) $X^2 + Y^2 = 1$, образующие параллельны оси OZ, $O'(-3;2;0)$;

6) параболический цилиндр $Y^2 = 4X$, образующие параллельны оси OZ, $O'(-4;0;0)$;

7) сфера $X^2 + Y^2 + Z^2 = 4$, $O'(-3;2;-1)$.

Тема 8. Пределы функций

Найти следующие пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2 + 2x - 3\right)$. **2.** $\lim\limits_{x\to -3}(x+3)^2(x-1)$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-3x-x^2}{2x^2+x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$. **5.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x+1}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{4-x^2}$. **7.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-27}{x^4-81}$.

8. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$. **9.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. **10.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

11. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{\sqrt{x}-2}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$. **13.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{3x^2}$. **15.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}7x}{2x}$. **16.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 5x\cdot\cos 2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+4}-2}$. **18.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-2x}{2x^5+x^2+1}$. **19.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{x^4-3x^2+4}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x^2+x^3}{2x+1}$. **21.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+1}{x^2-x+1}$. **22.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$. **24.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+4}\right)^{2x}$. **25.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-6}{x+5}\right)^{x+2}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^x$. 27. $\lim\limits_{x\to 0}(1-7x)^{3/x}$. 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{6x-3}\right)^x$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}-1}{5x}$. 30. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+2)-\ln x)$.

Ответы к теме 8

1. 1; **2.** 0; **3.** –1/3; **4.** ∞; **5.** 0; **6.** –3; **7.** 1/6; **8.** 2/5; **9.** 6; **10.** 1/6; **11.** 3/2; **12.** 2/5; **13.** 1/2; **14.** –4/3; **15.** 7/2; **16.** 9/25; **17.** 12; **18.** 1/2; **19.** 0; **20.** ∞; **21.** 5; **22.** 3/2; **23.** 1/4; **24.** e^2; **25.** e^{-11}; **26.** e^{-2}; **27.** e^{-21}; **28.** 0; **29.** –2/5; **30.** 2.

Тема 9. Непрерывность функций. Точки разрыва и их классификация

Исследовать функции на непрерывность. В случае существования точек разрыва установить их тип:

1. $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+x+1}$. 2. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-3}$. 3. $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$.

4. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x(x^2+1)}$.

5. $f(x)=\begin{cases}-x^2, x<0\\ x+4, 0\le x<2,\\ 6, x\ge 2\end{cases}$ 6. $f(x)=\begin{cases}2-x, x<0\\ x+2, 0<x\le 1\\ \dfrac{4}{x}, x>1\end{cases}$

Ответы к теме 9

1. Непрерывна на R. **2.** $x=3$ – точка разрыва 2-го рода.

3. $x=0$ – точка разрыва 1-го рода. **4.** $x=0$ – точка устранимого разрыва.

5. $x=0$ – точка разрыва 1-го рода. **6.** $x=0$ – точка устранимого разрыва, $x=1$ – точка разрыва 1-го рода.

Тема 10. Производные функций

Найти производные первого порядка явно заданных функций:

1. $y=\frac{1}{5}x^5-4x^3+3x-4$. **2.** $y=\sqrt[3]{x^5}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$. **3.** $y=\ln x-7^x+\pi^2$.

4. $y=e^{2x}\cos x$. **5.** $y=\frac{5+3x}{2-x^2}$. **6.** $y=\frac{\operatorname{arctg} x}{3\left(1+x^2\right)}$. **7.** $S=\left(2-3t-8t^5\right)^4$

8. $\rho=5\cos^3(1-2\varphi)$. **9.** $y=\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)$. **10.** $y=\operatorname{arctg}^2 5x$.

11. $y=\log_2 \arccos\sqrt{x}$. **12.** $S=2\sin^3 v^2$. **13.** $y=\frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\cos 2x)}$.

14. $y=\log_5\left(t^3-3\cos\frac{t}{3}\right)$. **15.** $y=\ln \operatorname{arctg} 5^x$. **16.** $y=x^3\arccos\ln^2 x$.

17. $y=\sin\left(5^{x\operatorname{ctg}3x}\right)$. **18.** $r=\cos^2\varphi\sin\varphi^2$. **19.** $y=(\operatorname{tg}x)^{4-x^2}$.

20. $y=(\cos x)^{5/x}$. **21.** $y=x^{\frac{1}{2x}}$. **22.** $y=(\operatorname{arctg}x)^{1+x^2}$.

Найти производные указанного порядка явно заданных функций:

23. $y=\frac{2}{x^5}$, $y'''=?$ **24.** $r=5\cos 2\varphi$, $\frac{d^4r}{d\varphi^4}=?$

25. $f(x)=x^5-4x^4-3$, $f^{(4)}(1)=?$ **26.** $f(x)=e^{3x+1}$, $f'''(0)=?$

Найти $\frac{dy}{dx}$ функций, заданных неявно:

27. $2x^2+y^2+5xy-4=0$. **28.** $xy^3+\cos(x+y)=\pi$.

29. $(x-4)^2+(y+3)^2=25$. **30.** $y^2e^{2y}=2e^{3x-1}$.

31. $3x^4-xy+5y^2=2$. **32.** $2y-3x^2=\ln y$.

Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ для функций, заданных параметрически:

33. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ **35.** $\begin{cases} x = e^{-at} \\ y = e^{at} \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

37. $\begin{cases} x = \mathrm{arctg}\, t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} x = \mathrm{tg}\, t \\ y = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$

Ответы к теме 10

1. $x^4 - 12x^2 + 3$. **2.** $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$. **3.** $\frac{1}{x} - 7^x \ln 7$.

4. $e^{2x}(2\cos x - \sin x)$. **5.** $\frac{3x^2 + 10x + 6}{(2-x^2)^2}$. **6.** $\frac{1 - 2x\,\mathrm{arctg}\, x}{3(1+x^2)^2}$.

7. $4(2 - 3t - 8t^5)^3(-3 - 40t^4)$. **8.** $30\cos^2(1-2\varphi)\sin(1-2\varphi)$.

9. $\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$. **10.** $\frac{10\,\mathrm{arctg}\, 5x}{1+25x^2}$. **11.** $\frac{-1}{2\ln 2\sqrt{x-x^2}\arccos\sqrt{x}}$.

12. $12v\cos v^2 \sin^2 v^2$. **13.** $\frac{2(\mathrm{ctg}\, 2x \ln(\cos 2x) + \mathrm{tg}\, 2x \ln(\sin 2x))}{\ln^2(\cos 2x)}$.

14. $\frac{3t^2 + \sin\frac{t}{3}}{\left(t^3 - 3\cos\frac{t}{3}\right)\ln 5}$. **15.** $\frac{5^x \ln 5}{\mathrm{arctg}\, 5^x (1+5^{2x})}$.

16. $x^2\left(3\arccos \ln^2 x - \frac{2\ln x}{\sqrt{1-\ln^4 x}}\right)$.

17. $\cos\left(5^{x\,\mathrm{ctg}\, 3x}\right)5^{x\,\mathrm{ctg}\, 3x}\ln 5\left(\mathrm{ctg}\, 3x - \frac{3x}{\sin^2 3x}\right)$.

18. $2\varphi\cos^2\varphi\cos\varphi^2 - \sin 2\varphi \sin\varphi^2$.

19. $2(\mathrm{tg}\,x)^{4-x^2}\left(\dfrac{4-x^2}{\sin 2x}-x\ln\mathrm{tg}\,x\right)$. **20.** $\dfrac{-5(\ln\cos x+x\,\mathrm{tg}\,x)(\cos x)^{5/x}}{x^2}$.

21. $\dfrac{1-\ln x}{2x^2}\cdot x^{\frac{1}{2x}}$. **22.** $\left(2x\ln\mathrm{arctg}\,x+\dfrac{1}{\mathrm{arctg}\,x}\right)(\mathrm{arctg}\,x)^{1+x^2}$.

23. $-\dfrac{420}{x^8}$. **24.** $80\cos 2\varphi$. **25.** 24. **26.** 27e. **27.** $\dfrac{-4x-5y}{2y+5x}$.

28. $\dfrac{\sin(x+y)-y^3}{3xy^2-\sin(x+y)}$. **29.** $\dfrac{4-x}{y+3}$. **30.** $\dfrac{3e^{3x-1}}{ye^{2y}(1+y)}$. **31.** $\dfrac{y-12x^3}{10y-x}$.

32. $\dfrac{6xy}{2y-1}$. **33.** $t; \dfrac{1}{6t}$. **34.** $-\mathrm{ctg}\,t; \dfrac{-1}{a\sin^3 t}$. **35.** $-e^{2at}; 2e^{3at}$.

36. $t; -\sqrt{1-t^2}$. **37.** $2t; 2(1+t^2)$. **38.** $\sin t; \cos^3 t$.

Тема 11. Правило Лопиталя для вычисления пределов функций

Вычислить пределы, пользуясь правилом Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$. **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x-1}{x^2+4x+2}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-1}{\mathrm{tg}\,3x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. **6.** $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{3}{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. **9.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\,\mathrm{arctg}\,x}{e^{3/x}-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{1/x^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$. **14.** $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

Ответы к теме 11

1. 7/2; **2.** 5; **3.** –1/3; **4.** 7/3; **5.** 2; **6.** 3; **7.** 1/2; **8.** 1/2; **9.** 2/3; **10.** 2; **11.** 1; **12.** e^{-2}; **13.** 1; **14.** e^2.

Тема 12. Исследование функций. Построение графиков функций

1. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

а) $y = 15 - x^2 - 2x$; б) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

в) $y = x\sqrt{1 - x^2}$; г) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^4}$.

2. Исследовать функции на экстремум:

а) $y = 4x^3 - 9x^2 + 6x$; б) $y = e^{3x} - 3x + 2$;

в) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$; г) $y = x\ln^2 x$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функций на заданных промежутках:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на $[-1;5]$; б) $y = x\ln x - x$ на $[1/e; e]$;

в) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ на $[0;4]$; г) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - x}{1 + x}$ на $[0;1]$.

4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графиков следующих функций:

а) $y = \ln(1 + x^2)$; б) $y = e^{-8x^2 + 4x}$;

в) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$; г) $y = (x + 2)(x - 3)^2$.

5. Найти асимптоты графиков функций:

а) $y = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

в) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 9}$; г) $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$.

6. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y = -x(x + 1)^2$; б) $y = x^4 - 4x^2 + 5$;

в) $y = e^{2x - x^2}$; г) $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$.

Ответы к теме 12

1. а) $(-\infty;-1)$ – возрастает; $(-1;+\infty)$ – убывает;

б) $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ – возрастает; $(-1;3)$ – убывает;

в) $\left(-1;-1/\sqrt{2}\right)\cup\left(1/\sqrt{2};1\right)$ – убывает; $\left(-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2}\right)$ – возрастает;

г) $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ – возрастает; $(-1;0)\cup(1;+\infty)$ – убывает.

2. а) $x=\dfrac{1}{2}$ – локальный максимум, $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}, x=1$ – локальный минимум, $y(1)=1$; б) $x=0$ – локальный минимум, $y(0)=3$;

в) $x=-1$ – локальный минимум, $y(-1)=-1$; $x=1$ – локальный максимум, $y(1)=1$;

г) $x=e^{-2}$ – локальный максимум, $y\left(e^{-2}\right)=4/e^2, x=1$ – локальный минимум, $y(1)=0$.

3. а) $y_{наим.}=y(1)=-6; y_{наиб.}=y(5)=266$;

б) $y_{наиб.}=y(e)=0; y_{наим.}=y(1)=-1$;

в) $y_{наиб.}=y(4)=0{,}6; y_{наим.}=y(0)=-1$;

г) $y_{наиб.}=y(0)=\dfrac{\pi}{4}; y_{наим.}=y(1)=0$.

4. а) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ – функция выпукла; $(-1;1)$ – функция вогнута; $(-1;\ln 2),(1;\ln 2)$ – точки перегиба;

б) $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ – функция выпукла; $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ – функция вогнута; $(0;1),\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ – точки перегиба;

в) $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ – функция вогнута; точек перегиба нет;

г) $(-\infty;4/3)$ – функция выпукла; $(4/3;+\infty)$ – функция вогнута; $\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{250}{27}\right)$ – точка перегиба.

5. а) $x=-1; y=x$; б) $x=0; y=0$;

в) $x=3, x=-3, y=1$; г) $y=3x+\dfrac{\pi}{2}$ (правая), $y=3x-\dfrac{\pi}{2}$ (левая).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Задание 1. **а) Проверить невырожденность системы линейных уравнений и решить ее по формулам Крамера и матричным способом.**

б) Исследовать систему на совместность и в случае совместности решить ее, используя метод Гаусса.

1.1. а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21, \\ 7x_1 - x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

1.2. а) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -3, \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

1.3. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

1.4. а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 = 0. \end{cases}$

1.5. а) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 9x_1 - 3x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

1.6. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

1.7. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ -5x_1 + x_2 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

1.8. а) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

1.9. а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

1.10. а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 1, \\ x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

1.11. а) $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

1.12. а) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

1.13. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 - 4x_3 = -6, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

1.14. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

1.15. а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$

1.16. а) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases}$

1.17. а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$

1.18. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

1.19. а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

1.20. а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases}$

1.21. а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

1.22. а) $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = -6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

1.23. а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

1.24. а) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

1.25. а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

1.26. а) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

1.27. а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$

1.28. а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

1.29. а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

1.30. а) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

Задание 2. Заданы координаты точек *A*, *B*, *C*. Требуется найти: 1) $\text{пр}_{\overline{AC}}\overline{AB}$; 2) площадь треугольника с вершинами в точках A, B, C.

2.1. A(7,1,4),	B(9,–2,0),	C(0,3,–3).
2.2. A(3,1,4),	B(–3,–1,0),	C(2,1,–3).
2.3. A(2,1,0),	B(3,–1,–4),	C(0,2,–2).
2.4. A(3,–1,–1),	B(3,1,4),	C(1,0,5).
2.5. A(2,1,–1),	B(7,–1,3),	C(0,3,3).
2.6. A(2,–3,7),	B(–3,–1,5),	C(9,0,1).
2.7. A(7,–3,4),	B(3,2,–1),	C(4,1,1).
2.8. A(1,1,0),	B(2,1,–4),	C(0,1,0).
2.9. A(1,–1,4),	B(2,3,–4),	C(1,0,–5).
2.10. A(2,–4,7),	B(8,1,0),	C(–1,–3,0).
2.11. A(1,–1,0),	B(0,1,7),	C(–1,–2,–3).
2.12. A(0,9,–3),	B(1,3,4),	C(0,2,–5).
2.13. A(1,–1,3),	B(2,–2,4),	C(1,0,1).
2.14. A(2,–2,–3),	B(–1,–4,7),	C(0,4,–3).
2.15. A(1,0,0),	B(–3,1,–1),	C(1,–2,–3).
2.16. A(1,3,7),	B(7,3,–5),	C(–1,–4,0).
2.17. A(1,–1,1),	B(0,1,0),	C(1,4,–5).
2.18. A(2,–2,3),	B(1,–1,4),	C(0,1,–1).
2.19. A(2,0,–1),	B(1,–1,1),	C(0,1,7).
2.20. A(1,–1,3),	B(2,1,–4),	C(0,1,0).
2.21. A(1,–2,2),	B(2,0,1),	C(1,4,–7).
2.22. A(1,2,–3),	B(2,–1,4),	C(2,3,–4).
2.23. A(7,9,–3),	B(1,0,–1),	C(0,3,0).
2.24. A(1,–2,0),	B(2,4,–1).	C(7,1,0).
2.25. A(3,–1,4),	B(–4,2,3),	C(0,1,–1).

2.26.	A(6,–3,0),	B(3,0,1),	C(2,–4,3).
2.27.	A(4,5,–1),	B(6,–4,2),	C(0,3,–1).
2.28.	A(3,–1,2),	B(3,6,–4),	C(0,1,–1).
2.29.	A(1,1,–1),	B(3,4,0),	C(0,5,–2).
2.30.	A(1,0,2),	B(3,4,7),	C(5,–1,1).

Задание 3. Найти угол (в градусах) между прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+1}{3}$ **и плоскостью, проходящей через точки** M_1, M_2, M_3.

3.1.	$M_1(1,-3,4)$,	$M_2(0,-2,-1)$,	$M_3(1,1,-1)$.
3.2.	$M_1(1,1,4)$,	$M_2(-2,1,1)$,	$M_3(1,3,6)$.
3.3.	$M_1(1,2,-1)$,	$M_2(-1,0,4)$,	$M_3(-2,-1,1)$.
3.4.	$M_1(1,2,3)$,	$M_2(4,-1,-2)$,	$M_3(4,0,3)$.
3.5.	$M_1(1,3,-1)$,	$M_2(-3,1,-9)$,	$M_3(1,0,-7)$.
3.6.	$M_1(1,-2,-1/2)$,	$M_2(2,1,3)$,	$M_3(0,-1,-1)$.
3.7.	$M_1(1,1,4)$,	$M_2(2,-1,0)$,	$M_3(3,2,1)$.
3.8.	$M_1(-13,3,2)$,	$M_2(-3,-2,-4)$,	$M_3(0,0,-3)$.
3.9.	$M_1(1,-1,-3)$,	$M_2(0,6,1)$,	$M_3(2,2,-2)$.
3.10.	$M_1(2,3,-10)$,	$M_2(1,-1,-9)$,	$M_3(0,-1,-4)$.
3.11.	$M_1(1,1,4)$,	$M_2(2,0,2)$,	$M_3(0,3,3)$.
3.12.	$M_1(2,1,-3)$,	$M_2(1,1,0)$,	$M_3(-1,2,7)$.
3.13.	$M_1(1,0,1)$,	$M_2(0,0,2)$,	$M_3(1,1,1)$.
3.14.	$M_1(-5,-1,1)$,	$M_2(-2,0,1)$,	$M_3(-1,1,0)$.
3.15.	$M_1(2,1,3)$,	$M_2(0,0,4)$,	$M_3(1,1,1)$.
3.16.	$M_1(2,3,1)$,	$M_2(4,-4,-2)$,	$M_3(1,0,0)$.
3.17.	$M_1(-1,0,1)$,	$M_2(3,-2,-1)$,	$M_3(-4,-1,2)$.
3.18.	$M_1(2,-2,9)$,	$M_2(-2,0,1)$,	$M_3(-4,1,3)$.
3.19.	$M_1(1,2,-1)$,	$M_2(2,3,-10)$,	$M_3(0,4,1)$.
3.20.	$M_1(1,-2,1)$,	$M_2(0,-1,2)$,	$M_3(2,-1,-1)$.
3.21.	$M_1(1,-2,-5)$,	$M_2(2,3,2)$,	$M_3(-1,0,5)$.
3.22.	$M_1(1,3,4)$,	$M_2(0,1,2)$,	$M_3(2,5,0)$.
3.23.	$M_1(1,-1,0)$,	$M_2(-3,-4,1)$,	$M_3(-1,-1,2)$.
3.24.	$M_1(-1,2,0)$,	$M_2(6,3,1)$,	$M_3(-15,0,2)$.
3.25.	$M_1(1,2,3)$,	$M_2(2,4,1)$,	$M_3(2,0,-3)$.
3.26.	$M_1(-1,1,0)$,	$M_2(3,-4,5)$,	$M_3(-2,0,2)$.
3.27.	$M_1(2,-3,5)$,	$M_2(1,-2,12)$,	$M_3(4,-1,7)$.
3.28.	$M_1(3,-1,2)$,	$M_2(4,-1,-1)$,	$M_3(2,0,2)$.
3.29.	$M_1(1,3,1)$,	$M_2(4,0,7)$,	$M_3(-2,1,2)$.
3.30.	$M_1(1,-1,1)$,	$M_2(5,4,-2)$,	$M_3(-1,-2,2)$.

Задание 4. **Упростить уравнение кривой и изобразить ее на рисунке**

4.1. $x^2+2y^2-2x+8y+7=0$

4.2. $9x^2+y^2-36x+2y+28=0$

4.3. $x^2+8x+2y+20=0$

4.4. $4x^2+9y^2-40x-36y+100=0$

4.5. $x^2-y^2+2x+6y-12=0$

4.6. $x^2+y^2+4x-10y+20=0$

4.7. $9x^2+4y^2-54x-32y+109=0$

4.8. $25x^2-9y^2-150x-72y-144=0$

4.9. $2x^2+8x-y+12=0$

4.10. $9x^2+4y^2-18x=0$

4.11. $x^2-4y^2-4x+40=0$

4.12. $x^2-4y^2+6x+16y-11=0$

4.13. $9x^2+10y^2+40y-50=0$

4.14. $9x^2-16y^2-18x+64y+89=0$

4.15. $x^2+4y^2-6x+8y=3$

4.16. $x^2+4y^2+2x=0$

4.17. $4x^2-y^2-24x-6y+43=0$

4.18. $x=2y^2-12y+14$

4.19. $y^2+4y=2x$

4.20. $2x^2-5y^2+4x+40y-58=0$

4.21. $4x^2-9y^2+4x=0$

4.22. $x^2-8x+y+15=0$

4.23. $3x^2+4y^2+30x-24y+99=0$

4.24. $3x^2-4y^2+18x+15=0$

4.25. $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$

4.26. $y^2-6x+6y+27=0$

4.27. $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$

4.28. $4x^2+8x-y+7=0$

4.29. $y^2+2x-4y+14=0$

4.30. $x^2-5x-y+7=0$

Задание 5. Найти пределы функций

5.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3-4x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$.

5.2. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{3x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{1-\sqrt{1-x^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

5.3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2-6}{2x^4-x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}$.

5.4. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$.

5.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+2)^2+(x+1)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2x\operatorname{tg}4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{e^{-x^2}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

5.6. а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)\ln(1-x)$.

5.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x^2-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{2-\sqrt{4-x^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^2-4x-5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

5.8. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^3-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{2x\operatorname{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$.

5.9. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2-2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5-5x^2-1}{20x^4-4x+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3^x+x\right)^{\frac{2}{x}}$.

5.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x}{2x^4-3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\cos 2x-\cos 5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-e^{-\frac{1}{x}}}{\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

5.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{7x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\dfrac{3}{x}$.

5.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$.

5.13. а) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{5x^2+9x-44}{2x^2+5x-12}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x^2-1}{4x^4+x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{3^x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

5.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^2+3x^3}{4x^3-2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{5}{x^2-x-20}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(x+e^{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.15. а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-x-6}{3x^2-x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+5x^2-4x^3}{8-6x+x^5}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos3x-e^{-x}}$.

5.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-12x+17}{5x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos5x-\cos2x}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\operatorname{ctg}x}$.

5.17. а) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{20+x-x^2}{3x^2-11x-20}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2+3x^3}{x^2+2x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{3x\operatorname{tg}3x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln^2x}{1-x}$.

5.18. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+0}\ln2x\ln(2x-1)$.

5.19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5-3x^2+1}{5+2x^3+x^4+3x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x+1)-\ln(2x-1))$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}-x}{\sin x+x}$.

5.20. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+2x^2-3}{3x^4+x^3+2x^2+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\cos 3x-\cos 5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+3^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-5}{4x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{2x^2-9x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-4)(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin 2x-2x}$.

5.22. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x^3-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+2}\right)^{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{\cos^3 2x-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}{(x-1)^2}$.

5.23. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-5x+1}{8x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

5.24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 7x}$; г) $\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

5.25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+1}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x+7}{5x^4+x^2+11}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+5)(\ln(x-2)-\ln(x-1))$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{e^x-e^{-x}-2x}$.

5.26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-100x^2+1}{100x^2+15x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}{\operatorname{tg}x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.27. а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1-\sqrt{4+x}}{5-\sqrt{22-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+9x^3-12}{4x^3+x^2-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)(\ln(1-3x)-\ln(5-3x))$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

5.28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2+(x-1)^2}{(x+1)^3-(x-1)^3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2-8x}{1-\sqrt{3-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\arcsin 3x}{\cos 2x-\cos 6x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.29. а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2+x}+x}{x^3-4x^2-5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+4x^2+x-3}{5x^2+2x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-2}\right)^{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to1+0}\ln(x-1)\ln x$.

5.30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-2}{7x^4+3x^3+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^3-5x^2-9}{x^2+x-12}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arcsin 3x}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}$; г) $\lim\limits_{x\to+0}(\ln\operatorname{ctg}x)^{\operatorname{tg}x}$.

Задание 6. **Исследовать функции на непрерывность и установить характер точек разрыва, если таковые имеются. В пункте *б* дополнительно построить график функции**

6.1. а) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$; б) $f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 2^x, & 0<x\le2,\\ x+3, & x>2.\end{cases}$

6.2. а) $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 3,\\ x-3, & x>3.\end{cases}$

6.3. а) $f(x)=\dfrac{|x+4|}{x^2+4x}$; б) $f(x)=\begin{cases}2, & x<0,\\ \cos x+1, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x>\pi.\end{cases}$

6.4. а) $f(x)=\dfrac{\sin(x+2)}{x^2+x-2}$; б) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\le 1,\\ x-1, & 1<x\le 4,\\ x^2-10, & x>4.\end{cases}$

6.5. а) $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2+2x}$; б) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & -\infty<x\le 0,\\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

6.6. а) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2-x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1,\\ x-1, & 1<x\le 3,\\ -\sqrt{x}, & x>3.\end{cases}$

6.7. а) $f(x)=\dfrac{2}{1+3^{1/x}}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\infty<x\le \pi,\\ x-\pi, & \pi<x\le 2\pi,\\ \cos x, & x>2\pi.\end{cases}$

6.8. а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-x^3-x^2+x}$; б) $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0,\\ 3^x, & 0<x\le 1,\\ 2x+2, & x>1.\end{cases}$

6.9. а) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; б) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \ln x, & 0<x\le e,\\ x-e, & x>e.\end{cases}$

6.10. а) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$; б) $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le\pi,\\ 1-x, & x>\pi.\end{cases}$

6.11. а) $f(x)=e^{\frac{1}{2x+4}}$; б) $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ x^2+1, & 1<x\le 2,\\ \dfrac{2}{x}+3, & x>2.\end{cases}$

6.12. а) $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{x^2-x}$; б) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 0,\\ 4^x, & 0<x\le 1,\\ 6-x^2, & x>1.\end{cases}$

6.13. а) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & -2\le x\le 2,\\ x-2, & 2<x\le 4,\\ -2\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$

6.14. а) $f(x)=\dfrac{1-3^{\frac{1}{x}}}{1+3^{\frac{1}{x}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{tg} x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{2}{\pi}x, & \dfrac{\pi}{4}<x<\pi,\\ \sin x+2, & x\ge\pi.\end{cases}$

6.15. а) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$; б) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & -\infty<x\le 1,\\ \dfrac{2}{x}, & 1<x<4,\\ \dfrac{x-2}{4}, & x>4.\end{cases}$

6.16. а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1}$; б) $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x\le 0,\\ 3^x, & 0<x\le 2,\\ 6-x, & x>2.\end{cases}$

6.17. а) $f(x)=\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^3-x}$; б) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -\infty<x\le 3,\\ 3x-7, & 3<x\le 4,\\ 3+\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$

6.18. а) $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}$; б) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1-x, & 0<x\le 3,\\ x^2-5, & x>3.\end{cases}$

6.19. а) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$; б) $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0,\\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

6.20. а) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-3x+2}$; б) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ x^2+1, & x>1.\end{cases}$

6.21. а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$; б) $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le 1,\\ 3^x, & 1<x<2,\\ -x+5, & x\ge 2.\end{cases}$

6.22. а) $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x^2-3x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ \sqrt{x}+1, & x>1.\end{cases}$

6.23. а) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$; б) $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le 1,\\ \ln x, & 1<x\le e,\\ -3x+4, & x>e.\end{cases}$

6.24. а) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{3x^2-x^3}$; б) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0,\\ -\sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ (x-4)^2, & x>4.\end{cases}$

6.25. а) $f(x)=\dfrac{1}{1+4^{\frac{1}{x-1}}}$; б) $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0,\\ \operatorname{ctg} x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ x-\dfrac{\pi}{2}, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

6.26. а) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x^2-2x}$; б) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0,\\ x^2-3, & 0<x<2,\\ x-1, & x\ge 2.\end{cases}$

6.27. а) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2\left(\sqrt{x+3}-1\right)}$; б) $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ \operatorname{tg} x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ \dfrac{4}{\pi}x, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

6.28. а) $f(x)=\dfrac{\arcsin(x+1)}{x^2+x}$; б) $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 1,\\ \dfrac{3}{x}-1, & x>1.\end{cases}$

6.29. а) $f(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x-x^3}$; б) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1-x^2, & 0<x\le 1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$

6.30. а) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x^2+3x}$; б) $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2, & x\le -2,\\ \sqrt{4-x^2}, & -2<x\le 0,\\ x, & x>0.\end{cases}$

Задание 7. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ функций

7.1. а) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{2x+1}{4}$; б) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$;

в) $x^y-y^x=0$; г) $x=\arcsin t;\quad y=\sqrt{1-t^2}$.

7.2. а) $y=\sin^2\dfrac{x}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}$;

в) $y^2\cos x=4\sin 3x$; г) $x=2\cos^2 t;\quad y=2\sin^2 t$.

7.3. а) $y=\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$; б) $y=x^{\arcsin x}$;

в) $x^4-6x^2y^2+9y^4-5x^2+15y^2-100=0$;

г) $x=t^2+2;\quad y=\frac{1}{3}t^3-1$.

7.4. а) $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$; б) $y=x^{\ln x}$;

в) $\sin\left(y-x^2\right)-\ln\left(y-x^2\right)+2\sqrt{y-x^2}-3=0$;

г) $x=\cos^3 t;\quad y=\sin t$.

7.5. а) $y=\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$; б) $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $xy^2-3\frac{y}{x}+2x^3=0$; г) $x=1+e^t;\quad y=t+e^{-t}$.

7.6. а) $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; б) $y=\frac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$;

в) $e^x+e^y-2^{xy}-3=0$; г) $x=5t^2;\quad y=4t^3+\mathrm{tg}\,t$.

7.7. а) $y=\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; б) $y=(\sin x)^{\cos x}$;

в) $x^2\sin y+y^3\cos x-2x-3y+1=0$; г) $x=11\cos^2 t;\quad y=11\sin^3 t$.

7.8. а) $y=\arccos\sqrt{1-e^x}+\frac{5}{x^4}$; б) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$;

в) $e^y+xy=3$; г) $x=e^t\cos t;\quad y=e^t\sin t$.

7.9. а) $y=\arcsin\frac{2x^3}{1+x^6}$; б) $y=x^{\sin x}$;

в) $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=0$; г) $x=2(t-\sin t);\quad y=2(1-\cos t)$.

7.10. а) $y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$; б) $y=x^2e^{x^2}\sin 2x$;

в) $x^4+y^4=x^2\cdot y^2$; г) $x=\arcsin t;\quad y=\ln\left(1-t^2\right)$.

7.11. а) $y=\log_2(\sin^2 x)-3^{x^2}\sqrt{1+x}$; б) $y=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

в) $x\sin y+y\sin x=0$; г) $x=\ln(1+t^2)$; $y=t-\operatorname{arctg} t$.

7.12. а) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x}}$; б) $y=(x^2+3x-1)^{\frac{4}{x}}$;

в) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; г) $x=\ln t$; $y=t^2-1$.

7.13. а) $y=\operatorname{arctg}(x+1)+\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$; б) $y=(x+1)^{\frac{3}{x}}$;

в) $2y\ln y=x$; г) $x=\arccos\sqrt{t}$; $y=\sqrt{t-t^2}$.

7.14. а) $y=\sqrt[5]{(x+4)^2}\arcsin 7x^2$; б) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\cos\sqrt{x}}$;

в) $\ln y-xy=5$; г) $x=t-\ln\sin t$; $y=t+\ln\cos t$.

7.15. а) $y=e^x-\sin e^x\cos^3 e^x$; б) $y=x^2e^{x^2}\ln x$;

в) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{7xy}$; г) $x=4t\cos t$; $y=4t\sin t$.

7.16. а) $y=\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}$; б) $y=\dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$;

в) $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$; г) $x=\operatorname{arctg} t$; $y=\ln(1+t^2)$.

7.17. а) $y=\dfrac{2+\operatorname{ctg}^3(2x-3)}{\ln\left(\sqrt{x}+2\right)}$; б) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$;

в) $y^2-5^{\cos^2 x}+\operatorname{tg} y=0$; г) $x=\operatorname{tg} t$; $y=\operatorname{ctg} t$.

7.18. а) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^2 x$; б) $y=(\ln x)^x$;

в) $e^x\sin y-e^y\cos x=0$; г) $x=\dfrac{1}{\cos t}$; $y=\operatorname{tg} t$.

7.19. а) $y=\arccos(2e^{2x}-1)$; б) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$;

в) $\sin(xy)+\cos(xy)=0$;

г) $x=2\sin t+\sin 2t$; $y=2\cos t+\cos 2t$.

7.20. а) $y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+e^{-\cos x}\sin 2x$; б) $y=(\arccos 3x)^{\lg(5x-1)}$;

в) $y=\cos(x+y)$; г) $x=\arcsin t;\quad y=\arccos t$.

7.21. а) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$; б) $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$;

в) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}y$; г) $x=6\cos^3 t;\quad y=6\sin^3 t$.

7.22. а) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{e^{2\sin x}}{4}$; б) $y=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

в) $x-y=\arcsin x-\arcsin y$; г) $x=1+e^{4t};\quad y=4t+e^{-4t}$.

7.23. а) $y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x}}+\lg^2(1+\sin x)$; б) $y=\sqrt[9]{\dfrac{(x+3)\ln(2x-3)}{(x-3)^2}}$;

в) $e^y-e^{-y}-2xy=0$; г) $x=te^t;\quad y=t^2+2t$.

7.24. а) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$; б) $y=(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $2^x+2^y=2^{x+y}$; г) $x=t^2+2t;\quad y=\ln(t+1)$.

7.25. а) $y=\sqrt{2x+1}(\ln(2x+1)-2)$; б) $y=2(x^3-4)^{\sqrt{x}}$;

в) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; г) $x=2\cos t;\quad y=\sin 2t$.

7.26. а) $y=\sin^3 e^x\cos e^x-\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^4}}$; б) $y=\dfrac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{\sqrt[3]{(x+3)^5}}$;

в) $x+y=e^{\frac{x}{y}}$; г) $x=2t-t^2;\quad y=3t-t^3$.

7.27. а) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{2}-\ln\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y=\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^x$;

в) $x^2+y^2=25$;

г) $x=\cos t+t\sin t;\quad y=\sin t-t\cos t$.

7.28. а) $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} - \arcsin e^x$; б) $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x^2+3)(x^2-3)^2}}{(x+5)^4}$;

в) $\cos(xy) = x$; г) $x = e^{2t}$; $y = e^{3t}$.

7.29. а) $y = \sqrt[3]{\operatorname{arcctg} 2x} + 4^{-x}\ln^5(x+2)$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$;

в) $x - y = e^{xy}$; г) $x = 2\sin t$; $y = 4\cos^2 t$.

7.30. а) $y = -\dfrac{1+\ln\cos x}{\cos x}$; б) $y = (x^2+1)^{\sin x}$;

в) $y^3 - 3yx + 6x^2 = 0$; г) $x = t^2 + 2t - 3$; $y = t + t^3$.

Задание 8. Исследовать функцию и построить ее график

8.1. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. **8.2.** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$. **8.3.** $y = \dfrac{1-x^2}{x^2}$.

8.4. $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$. **8.5.** $y = (x-1)e^x$. **8.6.** $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

8.7. $y = \dfrac{4x^3}{1-x^3}$. **8.8.** $y = \dfrac{x}{1+x^2}$. **8.9.** $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

8.10. $y = \dfrac{4x^3+5}{x}$. **8.11.** $y = x^2 e^{-x}$. **8.12.** $y = \dfrac{4x^2+1}{x}$.

8.13. $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. **8.14.** $y = x^3 - 6x^2 + 16$. **8.15.** $y = \dfrac{x^2}{1-x}$.

8.16. $y = \dfrac{x^4}{1-x^2}$. **8.17.** $y = \ln(4-x^2)$. **8.18.** $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$.

8.19. $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$. **8.20.** $y = x\sqrt{1-x^2}$. **8.21.** $y = \dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$.

8.22. $y = \dfrac{x^3+2}{2x}$. **8.23.** $y = \dfrac{x}{x^2-4}$. **8.24.** $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$.

8.25. $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. **8.26.** $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. **8.27.** $y = \dfrac{2+x^3}{x^2}$.

8.28. $y = \dfrac{x^4+1}{x^2}$. **8.29.** $y = \ln(1-x^2)$. **8.30.** $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Минюк, С. А. Математика для инженеров : учебник в 2 т. / С. А. Минюк, Н. С. Березкина, А. В. Метельский. – Т. 1. – Минск : Элайда, 2006.
2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов) : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Т. 1. – М. : Наука, 1985.
3. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1992.
4. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2 ч. / П. Е. Данко [и др.]. – М. : Оникс, 2005.
5. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1986.
6. Гусак, А. А. Высшая математика : в 2 т. / А. А. Гусак. – Т. 1. – Минск : ТетраСистемс, 2009.
7. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: аналитическая геометрия и линейная алгебра / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009.
8. Гусак, А. А. Справочное пособие к решению задач: математический анализ и дифференциальные уравнения / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009.
9. Сухая, Т. А. Сборник задач по высшей математике : учебное пособие : в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Вышэйшая школа, 1993.
10. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Ч. 1. – Минск : Вышэйшая школа, 2009.
11. Высшая математика : сборник заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов инженерно-технических специальностей втузов : в 2 ч. / А. Н. Андриянчик [и др.]. – Ч. 1. – Минск : БНТУ, 2010.
12. Письменный, Д. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. / Д. Письменный. – Ч. 1. – М. : Айрис-пресс, 2009.

Учебное издание

ЯЦКЕВИЧ Татьяна Сергеевна
РАЕВСКАЯ Лариса Алексеевна
ЮРИНОК Виктор Иванович и др.

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие
для студентов заочной формы обучения

В 4 частях

Часть 1

Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 22.06.2012. Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 12,21. Уч.-изд. л. 9,55. Тираж 1000. Заказ 680.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.