

О НЕОСЕССИММЕТРИЧНОМ НДС НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОГО ДЛИННОГО СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА, ПОДВЕРЖЕННОГО НЕЙТРОННОМУ ОБЛУЧЕНИЮ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Безопасная работа любого ядерного реактора зависит от надёжной работы его тепловыделяющих элементов (твэлов), имеющих, как правило, форму длинных цилиндров. Жёсткость условий работы твэлов (большие тепловые и радиационные нагрузки, высокое внешнее давление теплоносителя) предполагает повышенные требования к ним. В связи с этим, возникает необходимость решения ряда практических задач, учитывающих связность не только процессов упругого деформирования и теплопроводности, но и процесса радиационного распухания (эффект объемного изменения конструкционных материалов под действием облучения потоком быстрых нейтронов). Это требует от механики деформируемого твёрдого тела развития методов расчёта задач, учитывающих влияние упругого деформирования, теплопроводности, и облучения. Одной из таких задач является неосесимметричная задача определения напряженно-деформированного состояния (НДС) (Рис.1) для неравномерно нагретого сплошного бесконечно длинного цилиндра, подверженного радиационному распуханию.

Решению пространственных осесимметричных задач теории упругости посвящено много работ. Большинство задач для тел вращения сложного сечения решены в основном с применением численных методов. И только для тел канонической формы (цилиндра, сферы и др.) удаётся построить аналитические решения. Однако, изучение НДС этих тел, работающих уже в условиях неравномерного нагрева (термоупругая задача) связано со значительными трудностями. В этом случае точные аналитические решения весьма сложны, а их ценность заключается, прежде всего, как эталонных при создании приближённых методов расчёта. Если рассмотреть уже радиационно-термоупругую задачу для осесимметричного цилиндра, то аналитических решений вообще нет. А численный метод решения радиационно-термоупругой задачи, хотя громоздкий (приходится решать нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных, интегрировать сложные функции радиационного распухания и распределения температуры), но позволяет построить решение и получить хорошие результаты определения НДС [1]. Учитывая вышесказанное, говорить о точных решениях в отношении неосесимметричной задачи определения НДС с учётом радиационного излучения и температурного воздействия не приходится. Поэтому естественным является стремление к построению приближённых численных решений, точность которых удовлетворительна для практических целей.

Исследуем неосесимметричное НДС однородного бесконечно длинного, сплошного цилиндра, находящегося в температурном поле $T(r, \theta)$ и подвергающегося действию радиационного распухания $S[T(r, \theta), \phi \cdot t]$ и нагрузки P (внешнее давление). Уравнение равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Компоненты тензора деформаций связаны с компонентами тензора напряжений зависимостями (2) (физические уравнения):

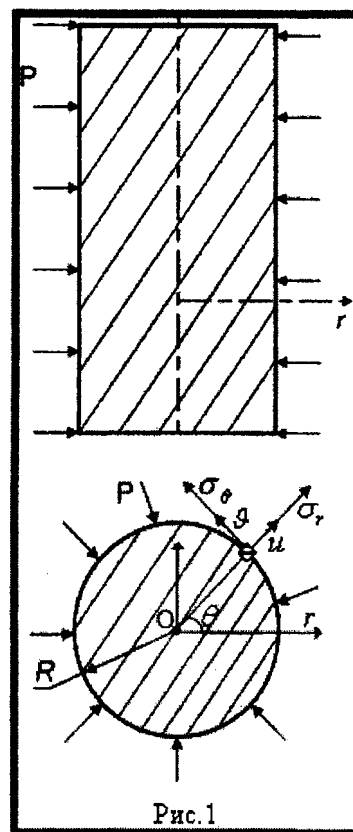


Рис.1

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)) + \alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r, \theta), \phi \cdot t], \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)) + \alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r, \theta), \phi \cdot t], \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)) + \alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r, \theta), \phi \cdot t] \\
\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_\alpha &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta} + \alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r, \theta), \phi \cdot t], \varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Предполагая условие плоского деформирования (т.к. продольный размер реального твэла в несколько сотен раз больше поперечного), принимаем $\varepsilon_z = 0$. Тогда из (2) имеем:

$$\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_\theta + \sigma_r) - E \cdot (\alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r, \theta), \phi \cdot t]). \tag{3}$$

$T(r, \theta)$, $S[T(r, \theta), \phi \cdot t]$ заданные функции [2],[3] соответственно:

$$T(r, \theta) = Ts(\theta) + \frac{q_v}{4 \cdot \lambda} (R^2 - r^2),$$

$$S[T(r, \theta), \phi] = 4,9 \cdot 10^{-51} (\phi \cdot t)^{1,71} \cdot 10^{\frac{15490}{T(r, \theta) + 273} - \frac{5,98 \cdot 10^6}{(T(r, \theta) + 273)^2}},$$

где R - радиус цилиндра, λ - коэффициент теплопроводности цилиндра, ϕ - нейтронный поток, q_v - тепловыделение в единице объема цилиндра, α - коэффициент линейного расширения материала цилиндра, $Ts(\theta)$ - температура поверхности цилиндра. $Ts(\theta)$ определяется из задачи теплообмена между теплоносителем и поверхностью цилиндра.

Подставляя полученное выражение (3) в физические уравнения (2), получим систему уравнений относительно σ_r и σ_θ , разрешая которую, выражаем σ_r и σ_θ . Компонент $\sigma_{r\theta} = \sigma_\alpha$ находим из (2), а σ_z - по формуле (3). В результате компоненты тензора напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_r + \nu \cdot \varepsilon_\theta - (\alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r, \theta), \phi \cdot t]) \cdot (1+\nu)), \\
\sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu \cdot \varepsilon_r - (\alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r, \theta), \phi \cdot t]) \cdot (1+\nu)), \\
\sigma_z &= \frac{E}{(1-2\nu)} \left(\frac{\nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)}{(1+\nu)} - (\alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r, \theta), \phi \cdot t]) \right), \\
\sigma_{r\theta} = \sigma_\alpha &= \frac{E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{r\theta} - (\alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} \cdot S[T(r, \theta), \phi \cdot t]) \right).
\end{aligned} \tag{4}$$

В (4) компоненты тензора деформации связаны с компонентами вектора перемещений геометрическими уравнениями (соотношения Коши):

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{g}{r} \right), \tag{5}$$

u и g - компоненты вектора перемещения в радиальном и окружном направлениях.

Учитывая соотношения Коши (5), перейдем от деформаций к перемещениям в полученных уравнениях (4) для σ_r , σ_θ и $\sigma_{r\theta}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot (1-\nu) + \nu \cdot \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) - (\alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} S[T(r, \theta), \phi \cdot t]) \cdot (1+\nu) \right), \\
\sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial r} + (1-\nu) \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) - (\alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} S[T(r, \theta), \phi \cdot t]) \cdot (1+\nu) \right), \\
\sigma_{r\theta} = \sigma_\alpha &= \frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{g}{r} \right) - (\alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} S[T(r, \theta), \phi \cdot t]) \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Подставляем выражения (6) в уравнения равновесия (1), получаем систему уравнений равновесия, выраженную через перемещения:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot u + \frac{1}{2r(1-\nu)} \cdot \left(\frac{1-2\nu}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} (4\nu-3) \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) = \frac{1-2\nu}{r(1-\nu)} \cdot \\ & \cdot \left(\alpha \cdot \frac{\partial(T(r, \theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial(S[T(r, \theta), \phi \cdot t])}{\partial \theta} \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{\partial(T(r, \theta))}{\partial r} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial(S[T(r, \theta), \phi \cdot t])}{\partial r} \right), \\ & \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{1}{r^2} g + \frac{1}{r(1-2\nu)} \left(\frac{2(1-\nu)}{r} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{3-4\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 2 \left(\alpha \frac{\partial(T(r, \theta))}{\partial r} + \frac{\partial(S)}{3\partial r} \right) + \\ & + \frac{2}{r} \cdot \frac{1+\nu}{1-2\nu} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{\partial(T(r, \theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial(S[T(r, \theta), \phi \cdot t])}{\partial \theta} \right) + \frac{4}{r} (\alpha \cdot T(r, \theta) + \frac{1}{3} S[T(r, \theta), \phi \cdot t]). \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Определение НДС поставленной задачи сводится к решению системы уравнений равновесия (7) со следующими граничными условиями:

$$u = 0, \quad \text{при } r = 0, \quad (8)$$

Ввиду симметрии напряженно-деформированного состояния относительно радиальной плоскости, т.к. принимаем, что температурное поле цилиндра симметрично ($0 \leq \theta \leq \theta^0$), справедливы также условия:

$$g = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \text{ и } \theta = \theta^0 \quad (9)$$

θ^0 может принимать различные значения в зависимости от закона распределения температуры по периметру (период функции распределения температуры).

Принимая, что в точке

$$r = 0 \cdot \varepsilon, \approx \varepsilon_\theta \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \Leftrightarrow r \frac{\partial u}{\partial r} = u + \frac{\partial g}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0$$

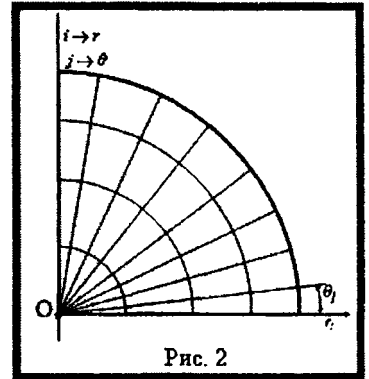
в точке $r = 0$ и, учитывая условие (9), получаем:

$$g = 0, \quad \text{при } r = 0. \quad (10)$$

На границе $r=R$:

$$\sigma_r = -P \quad \text{при } r = R \quad (11)$$

Решение подобных задач механики деформируемого твёрдого тела численными методами, до недавнего времени, было затруднено отсутствием ЭВМ с большим объёмом памяти. Это ограничивало применение данного метода на практике. Как следствие, в настоящее время, конечно-разностный метод решения неосесимметричных задач механики деформируемого твёрдого тела не получил распространения. В литературе упор делается на вариационные методы и, только с появлением мощных ЭВМ, стал использоваться метод конечных элементов. С помощью таких методов, учитывая сложный вид функций $T(r, \theta), S[T(r, \theta), \phi \cdot t]$ и вид уравнений (7), построить приближенное численное решение данной задачи сложно. Поэтому для интегрирования уравнений (7) используем метод конечных разностей. Он является классическим и наиболее простым в применении при решении различных задач механики деформированного твердого тела, термоупругости и теплофизики. В области изменения переменных $0 \leq \theta \leq \theta^0, 0 \leq r \leq R$ строим сетку из линий $\theta = \text{const}$ и $r = \text{const}$ (Рис. 2).



Для замены дифференциального оператора конечно-разностным разобьем отрезок $[0, R]$ равноотстоящими точками: $r_0 = 0, r_n = R, r_i = ih_r, h_r = \frac{R}{n}, i = -1, 0, 1, \dots, n$. Аналогично разо-

бьем отрезок $[0, \theta]$ равноотстоящими точками: $\theta_0 = 0, \theta_m = \theta^0; \theta_j = jh_\theta, h_\theta = \frac{\theta^0}{m}, j = 0, 1, \dots, m$

Где h_r и h_θ - шаги сетки в радиальном и окружном направлениях r и θ .

Выпишем неявную разностную схему с весовыми коэффициентами [4]. Это значит, что для вычисления производных по θ в точке r_i разностной схемы используются значения сеточных функций на $(n+1)$ -м и $(n-1)$ -м слоях по радиусу, так, например:

$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}(r, \theta) = h_\theta^{-2} \Lambda_2(\alpha \cdot u_j^{i+1} + \beta \cdot \alpha \cdot u_j^{i-1})$, причём $\alpha + \beta = 1$. Параметры α, β - весовые коэффициенты схемы; $\Lambda_2 u_j^i = u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i$.

Вторые производные по радиусу аппроксимируются разностными выражениями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r_i, \theta_j) = \frac{u_j^{i+1} - 2u_j^i + u_j^{i-1}}{h_r^2} + O(\tau^2), \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2}(r_i, \theta_j) = \frac{\vartheta_j^{i+1} - 2\vartheta_j^i + \vartheta_j^{i-1}}{h_r^2} + O(\tau^2). \quad (12)$$

Система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая граничную задачу для дифференциальных уравнений второго порядка, имеет вид:

$$\begin{cases} a_i \cdot u_{i+1} + b_i \cdot u_i + c_i \cdot y_{i-1} = t_i, i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \alpha_{01} \cdot u_0 + \beta_{01} \cdot u_1 = \gamma_{01}, \\ \alpha_{02} \cdot u_{n-1} + \beta_{02} \cdot u_n = \gamma_{02}. \end{cases} \quad (13)$$

где $a_i, b_i, c_i, t_i, \alpha_{0k}, \beta_{0k}, \gamma_{0k}, (k = 1, 2)$ - некоторые числа. Приведём систему разностных уравнений (7) к виду (13) и решим её методом прогонки. Выпишем разностные уравнения, соответствующие данной схеме для первого уравнения системы (7).

$$\frac{2\nu - 1}{2r^2(1 - \nu)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + F_1(u, \vartheta) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (14)$$

$$F_1(u, \vartheta) = - \left(\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot u + \frac{1}{2r(1 - \nu)} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} (4\nu - 3) \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right) \right) - C_1(T, S) \right). \quad (15)$$

$C_1(T, S)$ - функция температурной и радиационной составляющей:

$$C_1(T, S) = \frac{1 - 2\nu}{r(1 - \nu)} \left(\alpha \frac{\partial(T(r, \theta))}{\partial \theta} + \frac{1}{3} \frac{\partial(S[T, \phi])}{\partial \theta} \right) + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left(\alpha \frac{\partial(T(r, \theta))}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{\partial(S[T, \phi])}{\partial r} \right). \quad (16)$$

$$\frac{2\nu - 1}{2r^2(1 - \nu)} \cdot h_\theta^{-2} \cdot \Lambda_2(\alpha \cdot u_j^{i+1} + \beta \cdot \alpha \cdot u_j^{i-1}) + F_1(u, \vartheta) = \frac{u_j^{i+1} - 2u_j^i + u_j^{i-1}}{h_r^2}, \quad (17)$$

$$u_j^{i+1} - 2u_j^i + u_j^{i-1} = \frac{2\nu - 1}{2r^2(1 - \nu)} \cdot \frac{h_r^2}{h_\theta^2} \cdot \Lambda_2(\alpha \cdot u_j^{i+1} + \beta \cdot \alpha \cdot u_j^{i-1}) + F_1(u, \vartheta) \cdot h_r^2, \quad (18)$$

обозначим:

$$\chi_1 = \frac{2\nu - 1}{2r^2(1 - \nu)} \cdot \frac{h_r^2}{h_\theta^2} \cdot \alpha; \quad \chi_2 = \frac{2\nu - 1}{2r^2(1 - \nu)} \cdot \frac{h_r^2}{h_\theta^2} \cdot \beta; \quad (19)$$

Соответствующая система, отвечающая первому уравнению равновесия (7) может быть записана в следующем виде:

$$\chi_1 \cdot u_{j+1}^{i+1} - (1 + 2 \cdot \chi_1) \cdot u_j^{i+1} + \chi_1 \cdot u_{j-1}^{i+1} = -2 \cdot u_j^i + u_j^{i-1} (1 - \chi_2 \cdot \Lambda_2) - F_{1j}^i(u, \vartheta) \cdot h_r^2. \quad (20)$$

Слагаемые $F_{1j}^i(u, \vartheta)$ нелинейны относительно u_j^i, ϑ_j^i , поэтому для решения уравнений непосредственно неприменимы методы, развитые для линейных систем. Однако решение может быть построено по методу итераций [5]. На каждом шаге последовательных приближений величины $F_{1j}^i(u, \vartheta)$ вычисляются по значениям сеточных функций, найденных в результате предыдущей итерации. В результате этого на каждом шаге итерационного процесса уравнения линейны. Начальное приближение для начала итерационного процесса, находится путём экстраполяции уже вычисленных значений искомых сеточных функций, относящегося к предыдущему радиусу.

Аналогично можно расписать второе уравнение равновесия системы (7):

$$\frac{2(\nu - 1)}{r^2(1 - 2\nu)} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} + F_2(u, \vartheta) = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2}, \quad (21)$$

$$F_2(u, \vartheta) = - \left(\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \cdot \vartheta + \frac{1}{r(1 - 2\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} (4\nu - 3) \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right) - C_2(T, S) \right), \quad (22)$$

$$\mathcal{G}_j^{i+1} - 2\mathcal{G}_j^i + \mathcal{G}_j^{i-1} = \frac{2(\nu - 1)}{r^2(1 - 2\nu)} \cdot \frac{h_r^2}{h_\theta^2} \cdot \Lambda_2(\alpha \cdot \mathcal{G}_j^{i+1} + \beta \cdot \mathcal{G}_j^{i-1}) + F_2(u, \mathcal{G}) \cdot h_r^2, \quad (23)$$

$$\xi_1 = \frac{2(\nu - 1)}{r^2(1 - 2\nu)} \cdot \frac{h_r^2}{h_\theta^2} \cdot \alpha; \quad \xi_2 = \frac{2(\nu - 1)}{r^2(1 - 2\nu)} \cdot \frac{h_r^2}{h_\theta^2} \cdot \beta; \quad (24)$$

$$\xi_1 \cdot \mathcal{G}_{j+1}^{i+1} - (1 + 2 \cdot \xi_1) \cdot \mathcal{G}_j^{i+1} + \xi_1 \cdot \mathcal{G}_{j-1}^{i+1} = -2 \cdot \mathcal{G}_j^i + \mathcal{G}_j^{i-1}(1 - \xi_2 \cdot \Lambda_2) - F'_{2j}(u, \mathcal{G}) \cdot h_r^2. \quad (25)$$

Граничные условия (8), (9), (10) и (11) в разностной форме примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j^0 = 0 \\ \mathcal{G}_j^0 = 0 \\ \mathcal{G}_0^i = 0 \\ \mathcal{G}_m^i = 0 \\ u_1^i - u_0^i = 0 \\ u_m^i - u_{m-1}^i = 0 \\ \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{h_r} \cdot (1 - \nu) + \nu \left(\frac{u_j^n}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathcal{G}_j^n - \mathcal{G}_{j-1}^n}{h_\theta} \right) = \left(\alpha \cdot T_j^n + \frac{S_j^n}{3} \right) (1 + \nu) - \frac{P(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E}. \end{array} \right. \quad (26)$$

Начальная система уравнений (7) стала эквивалентной системам (20) и (25) с граничными условиями (26). Системы уравнений (20) и (25) имеют матрицы трёхдиагональной структуры и могут быть решены по методу прогонки [6]. Заменяем в (7) уравнения равновесия на аппроксимирующие их разностные выражения (20) и (25) и, учитывая граничные условия в виде (26), получим разностную систему уравнений описывающую неосесимметричное НДС неравномерно нагретого сплошного длинного цилиндра подверженного нейтронному облучению.

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{1i} \cdot u_{j+1}^{i+1} - (1 + 2 \cdot \chi_{1i}) \cdot u_j^{i+1} + \chi_{1i} \cdot u_{j-1}^{i+1} = d_j, \\ d_j = -2 \cdot u_j^i + u_j^{i-1}(1 - \chi_{2i} \cdot \Lambda_2) - F'_{1j}(u, \mathcal{G}) \cdot h_r^2, \\ u_j^0 = 0 \\ u_1^{i+1} - u_0^{i+1} = 0 \\ u_m^{i+1} - u_{m-1}^{i+1} = 0 \\ \xi_{1i} \cdot \mathcal{G}_{j+1}^{i+1} - (1 + 2 \cdot \xi_{1i}) \cdot \mathcal{G}_j^{i+1} + \xi_{1i} \cdot \mathcal{G}_{j-1}^{i+1} = k_j \\ k_j = -2 \cdot \mathcal{G}_j^i + \mathcal{G}_j^{i-1}(1 - \xi_{2i} \cdot \Lambda_2) - F'_{2j}(u, \mathcal{G}) \cdot h_r^2, \\ \mathcal{G}_j^0 = 0 \\ \mathcal{G}_0^{i+1} = 0 \\ \mathcal{G}_m^{i+1} = 0 \\ \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{h_r} \cdot (1 - \nu) + \nu \left(\frac{u_j^n}{R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathcal{G}_j^n - \mathcal{G}_{j-1}^n}{h_\theta} \right) = \left(\alpha \cdot T_j^n + \frac{S_j^n}{3} \right) (1 + \nu) - \frac{P(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E}. \end{array} \right.$$

где χ_{1i} , χ_{2i} , ξ_{1i} , ξ_{2i} зависят только от текущего радиуса r_i (19), (24), а d_j , k_j - функции от перемещений на предыдущих, уже известных, слоях радиуса $(i, i - 1)$, т.е. d_j , k_j , не содержат независимые переменные $(u_j^{i+1}, \mathcal{G}_j^{i+1})$ для рассматриваемого $(i + 1)$ слоя по радиусу и являются экстраполированными числовыми значениями,

$$F_{1j}' = - \left(\left(\frac{u_j^i - u_{j-1}^{i-1}}{r \cdot h_r} - \frac{u_j^i}{r^2} + \frac{1}{2r(1-\nu)} \left(\frac{g_j^i - g_{j-1}^i - g_j^{i-1} + g_{j-1}^{i-1}}{h_r h_\theta} + \frac{(4\nu-3) g_j^i - g_{j-1}^i}{r h_\theta} \right) \right) - C_{1j}^{i+1}(T, S) \right),$$

$$F_{2j}' = - \left(\left(\frac{g_j^i - g_{j-1}^{i-1}}{r \cdot h_r} - \frac{g_j^i}{r^2} + \frac{1}{r(1-2\nu)} \left(\frac{u_j^i - u_{j-1}^i - u_j^{i-1} + u_{j-1}^{i-1}}{h_r h_\theta} - \frac{4\nu-3}{r} \frac{u_j^i - u_{j-1}^i}{h_\theta} \right) \right) - C_{2j}^{i+1}(T, S) \right),$$

$$C_{1j}^{i+1}(T, S) = \frac{1-2\nu}{r_{i+1}(1-\nu)} \left(\alpha \frac{\partial(T_j^{i+1})}{\partial\theta} + \frac{1}{3} \frac{\partial(S_j^{i+1})}{\partial\theta} \right) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\alpha \frac{\partial(T_j^{i+1})}{\partial r} + \frac{1}{3} \frac{\partial(S_j^{i+1})}{\partial r} \right),$$

$$C_{2j}^{i+1}(T, S) = 2 \left(\alpha \frac{\partial(T_j^{i+1})}{\partial r} + \frac{\partial(S_j^{i+1})}{3\partial r} \right) + \frac{2}{r_{i+1}} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \left(\alpha \frac{\partial(T_j^{i+1})}{\partial\theta} + \frac{\partial(S_j^{i+1})}{3\partial\theta} \right) + \frac{4}{r_{i+1}} \left(\alpha T_j^{i+1} + \frac{1}{3} S_j^{i+1} \right).$$

Иллюстрация схемы численного решения представлена ниже (Рис. 3). Начинаем расчёт с $i=0$ и, учитывая граничные условия (26) и $u_j^{-1} \approx 0$; $g_j^{-1} \approx 0$, вычисляем сначала $F_{1j}^0(u, g)$, а потом d_j , после чего решаем первое уравнение системы (27) методом прогонки вдоль кривой θ_j по известным формулам.

Найдя значения u_j^1 , переходим к решению второго уравнения системы (27): вычисляем $F_{2j}^0(u, g)$, d_j , и решаем это уравнение вдоль кривой θ_j относительно g_j^1 .

После первого слоя переходим ко второму - устанавливаем $i=1$ и проделываем действия аналогичные описанным выше. Подобным образом, двигаясь по радиусу r_i от предыдущих слоёв к текущему, и «пробегая» вдоль кривой θ_j решением метода прогонки от $j=0$ до $j=m$ осуществляем вычисления u_j^{i+1} по первому уравнению равновесия и g_j^{i+1} - по второму, до $i=n-1$. Таким образом находим численное неосесимметричное решение данной задачи. Зная вектор перемещения точек цилиндра u_j^{i+1} и g_j^{i+1} , по (5) и (6) можем построить тензоры деформаций и напряжений в любой точке по периметру цилиндра с дальнейшей оценкой НДС.

Полученные выражения и предложенная численная схема решение может служить основой для разработки программы с целью проведения конкретных практических расчётов неосесимметричного НДС неравномерно нагретого длинного сплошного цилиндра, подверженного нейтральному облучению.

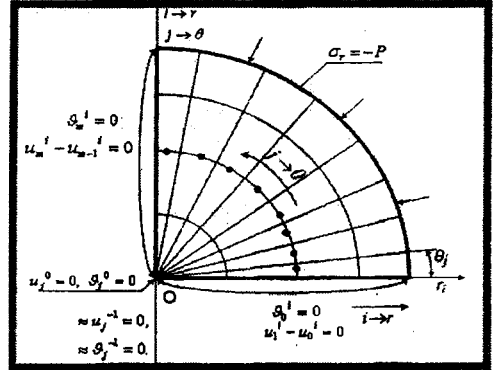


Рис.3

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширвель П.И. Решение радиационно-термоупругой задачи для сплошного цилиндра. Теоретическая и прикладная механика, Минск. 2008, вып.23, с.55-63.
2. Куликов И.С., Нестеренко, Тверковкин Б.Е. Прочность элементов конструкций при облучении. Минск. 1990, -144с.
3. Куликов И.С., Тверковкин Б.Е. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов. Минск.1984. -104с.
4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Москва.1976,-416с.
5. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967. -195с.
6. Годунов С.К., Рябенский В.С.Разностные схемы. М., «Наука», 1973,-440с.