флубон $f = 0{,}087$ (вторичный фторопласт $f = 0{,}12$, Ф4К20 $f = 0{,}1$, суперфлувис $f = 0{,}14$). У прессованной древесины линейный износ не был зафиксирован, при этом массовый износ составил 0,02 г. Сопоставляя полученные данные с наблюдениями во время эксперимента, при которых продукты износа не выделялись, можно утверждать, что изменение массы вкладыша связано с переносом высокомолекулярных присадок на контртело. Среди полимерных материалов наименьший линейный 0,05 мм и массовый износ 0,05 г отмечается у суперфлувиса (соответственно у вторичного фторопласта – 1,8 мм и 0,75 г, у Ф4К20 – 0,2 мм и 0,06 г, у флубона – 0,2 мм и 0,14 г).

Также были проведены испытания АСПД по определению зависимости коэффициента трения и температуры от нагрузки при $v = 0{,}5$ м/с, результаты которых представлены на рисунке 2.

Анализ результатов сравнительных испытаний показал, что лучшей износостойкостью и наименьшим коэффициентом трения обладает прессованная древесина, модифицированная загущенными смазками.

Работа выполнена в рамках гранта МО №5378 от 01.01.2008 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Врублевская, В.И. Износостойкие самосмазывающиеся антифрикцион-ные материалы и узлы трения из них / В.И. Врублевская, А.Б. Невзорова, В.Б. Врублевский. – Гомель, 2000. – 324 с.
2. Полимеры в узлах трения машин и приборов: Справочник / А.В. Чичинадзе [и др.]; под общ. ред. А.В. Чичинадзе – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1988. – 328 с.

УДК 621

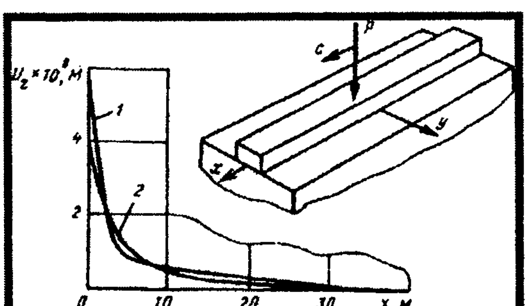
Чигарев А.В., Орловская А.А.

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ НАГРУЗКИ ПО БАЛКЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Рассматривается движении с постоянной скоростью нормальной нагрузки по упругой балке, лежащей на упругом изотропном однородном полупространстве. Для дозвуковых скоростей движения разработан способ приближенного вычисления нормальных перемещений поверхности полупространства. Дана оценка полученных выражений и проведено сравнение с известными результатами для задачи о движении сосредоточенной нагрузки по полупространству.

Была рассмотрена [1], задача о движении сосредоточенной нагрузки по бесконечно длинной балке, лежащей на упругом полупространстве. Дополнительно к постановке этой задачи было введено осевое сжатие балки [2]. Была решена нестационарная задача о воздействии равномерно движущейся силы на однородное изотропное полупространство с учетом внезапного приложения нагрузки [3]. Исследовано равнопеременное движение силы по балке типа Тимошенко, лежащей на упругом основании[4]. Рассмотрено напряженное состояние упругого полупространства, вызванное равномерно движущейся нормальной нагрузкой, распределенной в полосе поверхности полупространства [5]. Представлен способ определений перемещений в упругом полупространстве, содержащем заглубленную цилиндрическую полость, при равномерном движении по поверхности полупространства сосредоточенной осциллирующей нагрузки вдоль образующей цилиндра[6]. Рассмотрена деформация упругой балки, лежащей на упругом основании Винклера, при неосевом изгибе подвижной сосредоточенной нагрузкой [8]. Было приведено [8] решение задачи о движении постоянной скоростью сосредоточенной нагрузки по поверхности упругого полупространства.



Сопоставление полученных результатов с перечисленными выше работами показало, что в предельном случае, когда материалы полупространства и балки одинаковы, представляемое приближенное решение асимптотически сходится к решению [8] при удалении от точки приложения нагрузки.

1. Постановка задачи.

По балке, лежащей на упругом полупространстве, движется сосредоточенная нагрузка интенсивности P с постоянной скоростью c (фигура). Колебания оси упругой балки описываются уравнением [1]

$$B\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x,t) \tag{1.1}$$

где $w(x,t)$-нормальное перемещение оси балки, $B = E_b J$ -ее изгибная жесткость, ρ_b-плотность материала балки, $p(x,t)$-интенсивность нагрузки, приложенной к балке.

В неподвижной системе координат вектор перемещения в упругом полупространстве удовлетворяет уравнению [9]

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla div\, u = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.2}$$

где $u(u_x, u_y, u_z)$ -вектор перемещения, λ, μ, ρ-константы материала основания.

Принято, что между балкой и поверхностью полупространства силы трения не возникают, т.е.

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad оп\pi\theta \quad z = 0 \tag{1.3}$$

При решении используется условие совпадения нормальных перемещений оси балки и упругого полупространства под ней

$$w(x,t) = u_z(x, y = 0, z = 0, t) \tag{1.4}$$

Нагрузка передается на основание равномерно по ширине опорной полосы.

В подвижной системе, в которой нагрузка приложена в начале координат, задача считается стационарной.

Цель исследования- получение приближенного выражения для нормального перемещения поверхности полупространства, которое может быть эффективно использовано в расчетах.

Введем подвижную систему координат, связанную с нагрузкой [1]. В этой системе нормальное перемещение оси упругой балки удовлетворяет уравнению

$$B\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \rho_b c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = P(x,t) \tag{1.5}$$

Уравнение (1.2) в подвижной системе примет вид

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla div\, u = \rho c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tag{1.6}$$

Здесь $U(U_x, U_y, U_z)$-вектор перемещения в полупространстве в подвижной системе.

Поле перемещения U раскладывается на потенциальную и соленоидальную составляющие: $U = \nabla T + U'$. Потенциальная функция T и вектор U' удовлетворяют уравнениям

$$\left(\Delta - h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)T = 0, \quad \left(\Delta - k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)U' = 0, \quad div\, U' = 0$$
$$h = \frac{c}{c_p}, \quad k = \frac{c}{c_s}, \quad c_p = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{1.7}$$

где h и k - отношения скорости движения нагрузки к продольной и поперечной скоростям звука в основании.

Применим к первым двум уравнениям (1.7) косинус- и синус преобразования Фурье. Число неизвестных функций (обратных трансформант) сократится до двух при использовании (1.3) и третьего уравнения (1.7). Оставшиеся две неизвестные функции находятся из условия совпадения перемещения оси балки и поверхности полупространства под ней (1.4).

Выпишем выражение для нормального перемещения поверхности упругого полупространства под движущейся нагрузкой [1]

$$U_z(0,0,0)=\frac{4(1-\nu^2)}{\pi^2 E}\frac{P}{b}\int_0^\infty\frac{S(u)du}{u+\varepsilon u^2(u^2+\delta^2)S(u)}, \qquad (1.8)$$

где

$$S(u)=\frac{k^2}{1-\nu}\int_0^\infty\frac{D_1\sin(u\tau)d\tau}{\tau\left[4D_2(D_1-D_2)D_0^2-k^4\right]}$$
$$D_0^2=1+\tau^2,\quad D_1^2=1+\tau^2-h^2,\quad D_2^2=1+\tau^2-k^2 \qquad (1.9)$$
$$\varepsilon=\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\left(\frac{2}{b}\right)^4 B,\quad \delta=\sqrt{\frac{\rho_b}{B}}c\left(\frac{b}{2}\right)$$

E, ν — упругие константы основания, b - ширина опорной полосы.

Следуя предложенному в [1] методу решения, нормальное перемещение поверхности полупространства представим в виде

$$U_z(x,y,0)=\frac{4(1-\nu^2)}{\pi^2 E}\frac{P}{b}\int_0^\infty\frac{\alpha^2 I(\alpha,y)}{1+\varepsilon\alpha(\alpha^2-\delta^2)S(\alpha)}\cos\left(\frac{2x}{b}\alpha\right)d\alpha \qquad (1.10)$$

где

$$I(\alpha,y)=\frac{k^2}{1-\nu}\int_0^\infty\frac{d_1\sin\beta}{\beta\left[4d_2(d_1-d_2)d_0^2-\alpha^4k^4\right]}\cos\left(\frac{2y}{b}\beta\right)d\beta$$
$$d_0^2=\beta^2+\alpha^2,\quad d_1^2=\beta^2+(1-h^2)\alpha^2,\quad d_2^2=\beta^2+(1-k^2)\alpha^2 \qquad (1.11)$$

Расчет перемещений по формуле (1.10) требует большого объема вычислений, так как под знаками интегралов содержатся быстро осциллирующие функции. Ниже показано, как найти приближенное выражение для (1.10) при достаточно общих предположениях.

2. Приближение интегралов $I(\alpha,y)$ и $S(\alpha)$ степенными рядами.

Большинство современных наземных транспортных средств движутся со скоростями на порядок меньше скоростей распространения акустических волн, следовательно, при дозвуковых скоростях движения нагрузки параметры h^2 и k^2 малы.

Разложим функции d_1 и d_2 в ряды по степеням параметров h^2, k^2 и возьмем по два первых члена разложений

$$d_1\approx d_0-\frac{\alpha^2}{2d_0}h^2,\quad d_2\approx d_0-\frac{\alpha^2}{2d_0}k^2 \qquad (2.1)$$

В выражении под знаком интеграла $I(\alpha,y)$ произведение двух последних сомножителей запишем в виде

$$\sin\beta\cos\left(\frac{2y}{b}\beta\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\alpha_1\beta-\sin\alpha_2\beta\right),\quad \alpha_1=\frac{2y}{b}+1,\quad \alpha_2=\frac{2y}{b}-1 \qquad (2.2)$$

Подставим выражения (2.1), (2.2) в (1.11) и выполним замену $\beta=\alpha\tau$. При до- звуковых скоростях возможно представление

$$\frac{1}{D_0^2-\sigma}=\sum_{k=0}^\infty\frac{\sigma^k}{D_0^{2k+2}},\quad \sigma=\frac{2k^4-k^2h^2}{2(k^2-h^2)}$$

В итоге имеем следующее приближенное выражение:

$$I(\alpha,y)=\frac{1}{4(k^2-h^2)}\frac{k^2}{1-\nu}\frac{1}{\alpha^3}\left[f_0(\alpha\alpha_1)-f_0(\alpha\alpha_2)+\xi\sum_{k=0}^\infty\left(f_{k+1}(\alpha\alpha_1)-f_{k+1}(\alpha\alpha_2)\sigma^k\right)\right] \qquad (2.3)$$

где

$$f_k(\alpha)=\int_0^\infty\frac{\sin\alpha\tau d\tau}{\tau(\tau^2+1)^{\frac{1}{2}+k}},\quad \xi=\frac{2k^4-2k^2h^2+h^4}{2(k^2-h^2)} \qquad (2.4)$$

Аналогичным образом, используя приближения

$$D_1 \approx D_0 - \frac{1}{2D_0}h^2, \quad D_2 \approx D_0 - \frac{1}{2D_0}k^2 \tag{2.5}$$

интеграл (1.9) можно представить в виде

$$S(\alpha) \approx \frac{1}{2(k^2-h^2)}\frac{k^2}{1-\nu}\left\{f_0(\alpha)+\xi\sum_{k=0}^{\infty}\left(f_{k+1}(\alpha)\sigma^k\right)\right\} \tag{2.6}$$

Из (2.3), (2.6) следует, что проблема получения приближенного выражения для нормального перемещения $U_z(x,y,0)$ поверхности полупространства свелась к расчету интегралов (2.4).

3. Разложения функций $f_k(\alpha)$ в степенные ряды.

Интеграл $f_0(\alpha)$ выражается через функцию Макдональда [1]

$$f_0(\alpha) = \int_0^\alpha K_0(u)du \tag{3.1}$$

Используя известное разложение $K_0(u)$ в степенной ряд [10], имеем

$$f_0(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)(k!)^2}\left\{\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} - C + \frac{1}{2k+1} - ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+1} \tag{3.2}$$

Покажем, как получить (3.2). Известно представление $f_0(\alpha)$ через функцию Мейера, которая выражается при имеющих место параметрах через интеграл, содержащий Г-функцию [11],

$$f_0(\alpha) = \frac{1}{2}G_{13}^{21}\left(\frac{\alpha^2}{4}\left|\begin{matrix} & 1 & \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0\end{matrix}\right.\right) = \frac{1}{4\pi i}\int_L \Gamma^2\left(\frac{1}{2}-s\right)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2s}\frac{ds}{s} \tag{3.3}$$

L - контур, охватывающий особые точки $s = \frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}+k\ldots$ Чтобы найти вычеты $\gamma_{-1,k}$ подынтегральной функции (3.3), необходимы коэффициенты $a_{n,k}, b_{n,k}, c_{n,k}$ двух младших членов разложений $\Gamma(s)$, $\Gamma^2(s)$, $s^{-1}(\alpha/2)^{2s}$ в окрестностях указанных особых точек.

Коэффициенты $a_{n,k}$ известны [12]:

$$a_{-1,k} = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad a_{0,k} = \frac{(-1)^k}{k!}\left\{\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} - C\right\} \tag{3.4}$$

(C - постоянная Эйлера). Коэффициенты $b_{n,k}$ получим перемножив соответствующие $a_{n,k}$. Коэффициенты $c_{n,k}$ возьмем из ряда Тейлора функции $s^{-1}(\alpha/2)^{2s}$.

Перемножив соответствующие $b_{n,k}$ и $c_{n,k}$, получим $\gamma_{-1,k}$, а интеграл $f_0(\alpha)$ примет вид [13]

$$f_0(\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{-1,k}, \quad \gamma_{-1,k} = \frac{2}{(2k+1)(k!)^2}\left\{\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} - C + \frac{1}{2k+1} - ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+1}$$

Аналогично можно найти разложения и остальных интегралов (2.4). Например,

$$f_1(\alpha) = \alpha - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k!(k-1)!(2k+1)}\left\{\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n} - C + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+1} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} f_2(\alpha) = {} & \frac{2}{3}\alpha - \frac{4}{9}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 + \frac{2}{3}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k!(k-2)!(2k+1)}\times \\ & \times\left\{\sum_{n=1}^{k-2}\frac{1}{n} - C + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k(2k+1)} - ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k+1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

При получении выражения для нормального перемещения под балкой $y = 0$ можно использовать нечетность функций $f_k(\alpha)$.

Таким образом, выражение для нормального перемещения представимо в виде, удобном для выполнения расчетов:

$$U_z(x,y,0) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{P}{b}\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}\int_0^\infty\left\{f_0(\alpha a_1) - f_0(\alpha a_2) + \xi\sum_{k=0}^{N}\left(f_{k+1}(\alpha a_1) - f_{k+1}(\alpha a_2)\sigma^k\right)\right\}\times$$

$$\times\left\{\alpha + \omega\alpha^2(\alpha^2 - \delta^2)\left[f_0(\alpha) + \xi\sum_{k=0}^{N}f_{k+1}(\alpha)\right]\sigma^k\right\}^{-1}\cos\left(\frac{2x}{b}\alpha\right)d\alpha \qquad (3.7)$$

$$\omega = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{b}\right)^4\frac{B}{2}\frac{\lambda+2\mu}{\mu(\lambda+\mu)}, \quad N = const$$

4. Сравнение решения с полученными ранее результатами [8]. Известно выражение нормального перемещения поверхности упругого полупространства под действием сосредоточенной нагрузки, движущейся по поверхности, в подвижной системе [8]

$$U_3(x,y,0) = \frac{Pk^2}{2\pi\mu}\frac{1}{r\Omega}\sin^2\left(\frac{y}{r}\right)\left[1 - h^2\sin^2\left(\frac{y}{r}\right)\right]^{1/2}$$

$$\Omega = 4\left[1 - h^2\sin^2\left(\frac{y}{r}\right)\right]^{1/2}\left[1 - k^2\sin^2\left(\frac{y}{r}\right)\right]^{1/2} - \left[2 - k^2\sin^2\left(\frac{y}{r}\right)\right]^{1/2} \qquad (4.1)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Был выполнен расчет нормального перемещения отрезка поверхности $0 < x < 50\ \mu$, $y = 1{,}36\ \mu$ по формулам (3.7) и (4.1). На фигуре показаны перемещения, рассчитанные по этим формулам, в подвижной системе (кривые 1 и 2 соответственно) для случая, когда материал балки совпадает с материалом основания и близок по физико-механическим характеристикам к известняку [14]. Были взяты следующие значения констант: $P = 10^4 N$, $c = 44{,}44\mu / c$, $b = 2{,}7\mu$ $J = 0{,}0027\mu^4$. Решения практически совпадают при удалении от места приложения нагрузки, однако максимальное различие перемещений (при $x = 0$) составило -30%. Сравнение перемещений на том же отрезке при характеристиках материала полупространства, близких к граниту, сланцу и гнейсу и постоянном материале балки (песчанике) показало, что эти перемещения похожи на кривую 1 и отличаются лишь по величине.

Из изложенного следует, что в случае, когда скорости движения нагрузки на порядок меньше звуковых, определение перемещений в упругом основании существенно упрощается. Полученное приближенное решение асимптотически совпадает с известным решением [8] при удалении от области приложения нагрузки, когда материалы балки и полупространства одинаковы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с. Lahra J.J. An axially stressed railroad track on an elastic continuum subjected to a moving load //Actamech., 1975. V. 22. № 1-2. P. 113-129. 2. Payton R.G. An application of the dynamic Betti-Rayleigh reciprocal theorem to moving-point loadsin elastic media // Quart. Appl. Math. 1964. V. 21. № 4. P. 299-313. 3. Каплунов Ю.Д., Муравский Г.Б. Действие равнопеременно движущейся силы на балку Тимошенко, лежащую на упругом основании. Переходы через критические скорости //ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 475-482. 4. Резинов В.Г., Цыбочкин С.Г., Канон Ю.А., Степанов Г.В. Напряженно-деформированное состояние упругого полупространства под воздействием перемещающейся нагрузки // Проблемы прочности. 1987. № 10. С. 94-98. 5. Колоояжная Г.Е., Селезнев М.Г., Селезнева Т.Н. Задача о воздействии равномерно движущейся осциллирующей нагрузки на упругое полупространство, содержащее заглубленную цилиндрическую полость // АН СССР. МТТ. 1987. № 6. С. 83-88. 6. Докукова Н.А. Нестационарная задача о контактном взаимодействии балки с упругим телом //Порошковая металлургия. 1989. № 13. С. 45—49. 7. Mandel J., Avramesco A. Deplacements produits par une charge mobile & la surface d'un semi-espace elastique//C. r. Acad. Sci. Paris. 1961. V. 252. № 24. 8. Аменаозе Ю.А. Теория упругости. М.: Высш. шк., 1976. 272 с. 9. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 2. М., Изд-во иностр. лит.,1949. 220 с. 9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука,1971. 1108с. 10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800с. 11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.:Наука, 1987. 688 с. 12. Справочник физических констант горных пород // Под ред. С. Кларка. М.: Мир, 1969.543с.