УДК 539.3

Ботогова М.Г.

УРАВНЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Рассмотрим пологую оболочку, составленную из N изотропных вязкоупругих слоев, характеризующихся переменной толщиной $h_k(\alpha_1,\alpha_2)$, модулем Юнга E_k, плотностью ρ_k, коэффициентом Пуассона ν_k, модулем поперечного сдвига G_k. В качестве исходной поверхности примем срединную поверхность какого-то слоя, которую отнесем к криволинейным ортогональным координатам $\alpha_1 = Rs, \alpha_2 = R\theta$. Здесь R – радиус цилиндра исходной поверхности, θ, s – окружная и продольная координаты соответственно. Введем следующие обозначения:
безразмерные жесткостные характеристики к-го слоя:

$$\gamma_k = \frac{E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1}, \quad \tilde{c}_k = 1 - c_k, \qquad c_k = \int_0^{+\infty} K_k(s)e^{-i\Omega s}ds, \tag{1}$$

где $K_k(s)$ – ядро релаксаций напряжений материала для к-го слоя; приведенный коэффициент Пуассона

$$\nu(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{k=1}^{N}\frac{\nu_k E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2}\right)^{-1}; \tag{2}$$

осредненный модуль упругости

$$E(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1-\nu^2}{h(\alpha_1,\alpha_2)}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2}\right), \qquad h(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{k=1}^{N} h_k(\alpha_1,\alpha_2). \tag{3}$$

Тогда из равенств (1)-(3) имеем

$$\frac{E_k h_k(\alpha_1,\alpha_2)\tilde{c}_k}{1-\nu_k^2} = \frac{E(\alpha_1,\alpha_2)h(\alpha_1,\alpha_2)}{1-\nu(\alpha_1,\alpha_2)^2}\gamma_k. \tag{4}$$

Будем считать, что выполняются гипотезы теории слоистых оболочек, сформулированные Э.И. Григолюком и Г.М. Куликовым [1]. С учетом данных гипотез перемещения можно записать в следующем виде [1]:

$$u_i^{(k)} = u_i - zw_{,i} + g(z)\psi_i, \; \varepsilon_{ij} = e_{ij} + z\kappa_{ij} + g(z)\psi_{ij}; \quad \varepsilon_{13} = f_0(z)\psi_i, \tag{5}$$

где

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) + k_{ij}w, \; \psi_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\psi_{i,j} + \psi_{j,i}\right), \quad \kappa_{ij} = -w_{,ij}, \; i,j = 1,2. \tag{6}$$

Здесь дифференцирование по координате α_i обозначено нижним индексом после запятой.

В теории упругих оболочек уравнения состояния имеют вид [1]:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k(\alpha_1,\alpha_2)}{1-\nu_k^2}\Xi\varepsilon_{ij}, \quad \Xi\varepsilon_{ij} = (1-\nu(\alpha_1,\alpha_2))\,\varepsilon_{ij} + \nu(\alpha_1,\alpha_2)\delta_{ij}\,(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}). \tag{7}$$

Принимая во внимание вязкоупругие свойства материала, уравнения (7) могут быть переписаны в виде [2]

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1-\nu_k^2}\,\Xi\, J_k(\varepsilon_{ij}), \tag{8}$$

$$J_k(z) = z - \int_0^t K_k(t-s)z(s)ds. \tag{9}$$

Удельные мембранные усилия и изгибающие моменты определяются стандартным способом [1]:

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} \sigma_{ij} \mathrm{d}z, \quad M_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} z\sigma_{ij} \mathrm{d}z \quad . \tag{10}$$

В дополнение к классическим силам и моментам изотропной теории оболочек, обобщенные удельные силы Q_i и моменты L_{ij} можно представить следующим образом [1]:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} f_0(z)\sigma_{i3} \mathrm{d}z, \quad L_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} g(z)\sigma_{ij} \mathrm{d}z \quad . \tag{11}$$

Для исследования свободных колебаний положим

$$\left(T_{ij}, M_{ij}, L_{ij}, Q_i, \kappa_{ij}, \psi_{ij}\right) = e^{i\Omega}\left(T'_{ij}, M'_{ij}, L'_{ij}, Q'_i, \kappa'_{ij}, \psi'_{ij}\right).$$

Далее штрих будет опущен.

Принимая во внимание уравнения (4), (5), (8), (10), (11), получим следующие выражения для усилий и моментов

$$T_{ij} = \frac{E(\alpha_1,\alpha_2)h(\alpha_1,\alpha_2)}{1-\nu^2(\alpha_1,\alpha_2)} \Xi e_{ij} + \frac{E(\alpha_1,\alpha_2)h^2(\alpha_1,\alpha_2)}{2\left(1-\nu^2(\alpha_1,\alpha_2)\right)}\left(c_{13}\Xi\kappa_{ij} + c_{12}\Xi\psi_{ij}\right), \tag{12}$$

$$M_{ij} = \tfrac{1}{2} hc_{13}T_{ij} + \frac{E(\alpha_1,\alpha_2)h^3(\alpha_1,\alpha_2)}{12\left(1-\nu^2(\alpha_1,\alpha_2)\right)}\left(\eta_3\Xi\kappa_{ij} + \eta_2\Xi\psi_{ij}\right), \tag{13}$$

$$L_{ij} = \tfrac{1}{2} hc_{12}T_{ij} + \frac{E(\alpha_1,\alpha_2)h^3(\alpha_1,\alpha_2)}{12\left(1-\nu^2(\alpha_1,\alpha_2)\right)}\left(\eta_2\Xi\kappa_{ij} + \eta_1\Xi\psi_{ij}\right). \tag{14}$$

Функции c_{13}, c_{12}, η_1, η_2, η_3 зависящие от α_1, α_2 , определены в [1].

Следуя [1], введем обобщенные перемещения u_i и деформации e_{ij}

$$e_{ij} = e_{ij} - \tfrac{1}{2}hc_{13}\kappa_{ij} - \tfrac{1}{2}hc_{12}\psi_{ij}, \; u_i = u_i - \tfrac{1}{2}hc_{13}w_{,i} - \tfrac{1}{2}hc_{12}\psi_i. \tag{15}$$

Тогда уравнение (12) можно переписать в виде

$$T_{ij} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\Xi e_{ij}. \tag{16}$$

Рассмотрим следующее преобразование [1]:

$$M_{ij} = M_{ij} - \tfrac{1}{2}hc_{13}T_{ij}, \quad L_{ij} = L_{ij} - \tfrac{1}{2}hc_{12}T_{ij}. \tag{17}$$

Из соотношений (12)-(14), (17) следуют формулы для приведенных удельных моментов

$$M_{ij} = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\eta_3\Xi\kappa_{ij} + \eta_2\Xi\psi_{ij}\right), \; L_{ij} = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\eta_2\Xi\kappa_{ij} + \eta_1\Xi\psi_{ij}\right) \tag{18}$$

Уравнение для поперечных удельных сил может быть переписано как

$$Q_i = G\psi_i, \tag{19}$$

$$G = \frac{\left[\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}\right)\right]^2}{\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k - \frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}\right)\widetilde{G}_k^{-1}} + \sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda_{k0}^2}{\lambda_{kk}}\widetilde{G}_k,$$

$$\lambda_k = \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} f_0^2(z)\mathrm{d}z, \quad \lambda_{kn} = \int_{\delta_{k-1}(\alpha_1,\alpha_2)}^{\delta_k(\alpha_1,\alpha_2)} f_k(z)f_n(z)\mathrm{d}z \quad (n=0,k),$$

$$\widetilde{G}_k = G_k\widetilde{c}_k. \tag{20}$$

Для вывода уравнений свободных колебаний воспользуемся вариационным принципом Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta U - \delta T)dt = 0. \tag{21}$$

δU, δT являются вариациями потенциальной и кинетической энергией соответственно. Выполняя обычную процедуру вычисления вариаций в (21) можно получить уравнения в терминах удельных напряжений и приведенных моментов:

$$T_{1i,1} + T_{2i,2} = 0\,, \tag{22}$$

$$L_{1i,1} + L_{2i,2} = Q_i\,,\; i = 1, 2, \tag{23}$$

$$M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} - \frac{1}{R_2(\alpha_2)} T_{22} + \Omega^2 \left(\sum_{k=1}^{N} \rho_k h_k \right) w = 0\,. \tag{24}$$

Используя выражения (5), (15) получим уравнения совместности деформаций

$$e_{11,22} - 2e_{12,12} + e_{22,11} = R_2^{-1} w_{,11}\,. \tag{25}$$

Представим силовую функцию F таким образом, чтобы

$$T_{ij} = \delta_{ij} \Delta F - F_{,ij}\,. \tag{26}$$

Выражая обобщенные деформации e_{ij} посредством силовой функции и подставив их в уравнение (25), получим уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Eh} \Delta\Delta F + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \left(\frac{1}{Eh} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \left(\frac{\nu}{Eh} \right) \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_1^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \left(\frac{1}{Eh} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} \left(\frac{\nu}{Eh} \right) \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2 \partial \alpha} \left(\frac{1-\nu}{Eh} \right) = R_2^{-1} w_{,11}\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Преобразуем уравнения (23).

Пусть

$$\psi_1 = a_{,1} + \phi_{,2}\,;\; \psi_{,2} = a_{,2} - \phi_{,1}\,. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (23) с учетом (18), (19), получим (29), (30)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\eta_2 \{ -w_{,11} - \nu w_{,22} \} + \eta_1 \{ a_{,11} + \varphi_{,21} + \nu (a_{,22} - \varphi_{,12}) \} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\eta_2 (1-\nu) w_{,12} + \eta_1 \frac{1-\nu}{2} (\varphi_{,22} - \varphi_{,11} + 2a_{,12}) \right) \right] = G(a_{,1} + \varphi_{,2}) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\eta_2 (1-\nu) w_{,12} + \eta_1 \frac{(1-\nu)}{2} \{ \varphi_{,22} - \varphi_{,11} + 2a_{,12} \} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\eta_2 \{ w_{,22} + \nu w_{,11} \} + \eta_1 (a_{,22} - \varphi_{,12} + \nu (a_{,11} + \varphi_{,21})) \right) \right] = G(a_{,2} - \varphi_{,1}) \end{aligned} \tag{30}$$

Продифференцируем (29) по первой координате, (30) – по второй координате и сложим

$$\begin{aligned} &\left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu\,)} (-\eta_2 \Delta w + \eta_1 \Delta a) \right]_{,12} + \Delta D^* \left(-\eta_2 (1-\nu) w_{,12} + \frac{\eta_1 (1-\nu)}{2} (\varphi_{,22} - \varphi_{,11} + 2a_{,12}) \right) + \\ &+ D^* \left(\Delta \left[-\eta_2 (1-\nu) w_{,12} + \frac{\eta_1 (1-\nu)}{2} (\varphi_{,22} - \varphi_{,11} + 2a_{,12}) \right] \right) = \\ &= G_{,2} (a_{,1} + \varphi_{,2}) + G (a_{,12} + \varphi_{,22}) + G_{,1} (a_{,2} - \varphi_{,1}) + G (a_{,21} - \varphi_{,11})\,. \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\,.$$

Уравнению (31) можно тождественно удовлетворить, если принять

$$\left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu\ )}\left(-\eta_2\Delta w+\eta_1\Delta a\right)\right]_{,12}+\Delta D^*\left(-\eta_2\left(1-\nu\right)w_{,12}\right)+\Delta D^*\left(\frac{\eta_1\left(1-\nu\right)}{2}2a_{,12}\right)+$$

$$+D^*\left(\Delta\left[-\eta_2\left(1-\nu\right)w_{,12}+\eta_1\left(1-\nu\right)\left(a_{,12}\right)\right]\right)=$$

$$=G_{,2}a_{,1}+2Ga_{,12}+G_{,1}a_{,2},$$

$$\Delta D^*\left(\frac{\eta_1\left(1-\nu\right)\left(\varphi_{,22}-\varphi_{,11}\right)}{2}\right)+D^*\Delta\left(\frac{\eta_1\left(1-\nu\right)}{2}\left(\varphi_{,22}-\varphi_{,11}\right)\right)= \tag{32}$$

$$=G_{,2}\varphi_{,2}+G\varphi_{,22}-G_{,1}\varphi_{,1}-G\varphi_{,11}.$$

Введем обозначение

$$w=\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi,\ a=-\frac{\eta_2}{\eta_1}\frac{h^2}{\beta}\Delta\chi,\ \beta=\frac{12(1-\nu^2)G}{Eh\eta_1}. \tag{33}$$

С учетом формул (18), (28), (33) уравнение (24) можно записать в виде

$$\left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\begin{matrix}-\eta_3\left\{\left(\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi\right)_{,11}+\nu\left(\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi\right)_{,22}\right\}+\\+\eta_2\left\{\left(-\frac{\eta_2}{\eta_1}\frac{h^2}{\beta}\Delta\chi\right)_{,11}+\nu\left(-\frac{\eta_2}{\eta_1}\frac{h^2}{\beta}\Delta\chi\right)_{,22}\right\}\end{matrix}\right)\right]_{,11}+$$

$$+\left[\frac{Eh^3}{6(1+\nu)}\left(-\eta_3\left(\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi\right)_{,12}+\eta_2\left(\left(-\frac{\eta_2}{\eta_1}\frac{h^2}{\beta}\Delta\chi\right)_{,12}+\varphi_{,22}\right)\right)\right]_{,12}+ \tag{34}$$

$$+\left[\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\begin{matrix}-\eta_3\left\{\left(\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi\right)_{,22}+\nu\left(\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi\right)_{,11}\right\}+\\+\eta_2\left\{\left(-\frac{\eta_2}{\eta_1}\frac{h^2}{\beta}\Delta\chi\right)_{,22}+\nu\left(-\frac{\eta_2}{\eta_1}\frac{h^2}{\beta}\Delta\chi\right)_{,11}\right\}\end{matrix}\right)\right]_{,22}+$$

$$+\frac{1}{R_2}F_{,11}+\Omega^2\left(\sum\rho_k h_k\right)\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi+\Delta\left(\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\eta_2\varphi_{,12}\left(1+\nu\right)\right)=0.$$

Разрешающая система уравнений (27), (32), (34) относительно силовой функции F, функции сдвига φ и функции перемещений χ выведена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 287 с. 2. Матяш В.И. Колебания изотропных упруго-вязких оболочек//Механика полимеров. –1971. – №1 – С. 157 – 163.