

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Анализ известных критериев прочности, учитывающих неодинаковую сопротивляемость материалов при растяжении и сжатии, выявил ряд существенных недостатков этих критериев, основным из которых является ограничение области их применения /1/.

Предлагаемый новый энергетический критерий прочности является более общим и охватывает почти все известные энергетические критерии. Он основан на предположении, что энергия предельного напряжённого состояния является функцией величин нормального и касательного октаэдрических напряжений. При выводе гипотез прочности исследователи предполагают, что прочность материала зависит от напряжённого состояния, а условия прочности в общем виде могут быть представлены /1/:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i) = A. \quad (1)$$

Константы материала m_i определяются по результатам испытаний при простейших нагрузениях путём совместного решения системы уравнений (1). Для большинства гипотез число определяемых констант не превышает трёх. Поэтому они определяются из испытаний при кручении и одноосном растяжении и сжатии.

Предлагаемый критерий представляет собой частный случай зависимости (1) и имеет вид:

$$BV + (1 + B_1 \text{sign}V) \cdot U = C, \quad (2)$$

где $V = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ – величина, пропорциональная первому инварианту тензора напряжений $U = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$ – величина, пропорциональная второму инварианту тензора напряжений

B , B_1 и C – постоянные, величины, которых определяются на основании результатов экспериментов при кручении, одноосном растяжении и сжатии.

В выражении (2) $\text{sign}V$ означает, что знак перед постоянной B_1 , соответствует знаку величины V . Знак перед постоянной B_1 определяет неравноценность предела прочности на сдвиг материала в области сжатия и в области растяжения.

При линейном растяжении

$$V = \sigma_{\text{ар}}; U = 2\sigma_{\text{ар}}^2. \quad (3)$$

$\sigma_{\text{ар}}$ – предел прочности материала при одноосном растяжении.

Следовательно, критерий (2) с учётом условий (3) может быть представлен в виде:

$$B\sigma_{\text{ар}} + 2(1 + B_1)\sigma_{\text{ар}}^2 = C \quad (4)$$

$$V = -\sigma_{\text{ас}}; U = 2\sigma_{\text{ас}}^2 \quad (5)$$

$\sigma_{\text{ас}}$ – предел прочности материала при одноосном сжатии.

Критерий (2) с учётом условий (5) будет иметь следующий вид:

$$-B\sigma_{sc} + 2(1 - B_1)\sigma_{sc}^2 = C. \quad (6)$$

При чистом сдвиге, определяемом при испытании материалов на кручение:

$$V = 0; U = 6\tau_s^2, \quad (7)$$

τ_s – предел прочности при сдвиге.

С учётом условий (7) критерий (2) может быть представлен в следующем виде:

$$6(1 \pm B_1)\tau_s^2 = C. \quad (8)$$

В выражении (8) постоянная B_1 может иметь знак как плюс так и минус, что связано с нулевым значением величины V , относительно которой выбирается знак перед постоянной B_1 .

В первом случае выражение (8) будем рассматривать с положительным значением постоянной B_1 .

Поэтому, рассматривая совместно выражение (4), (6) и (8) находим значения постоянных B , B_1 , C .

$$B = \frac{4\sigma_{sc}^2(3\nu_\tau\tau_s - \sigma_{sp})}{3\tau_s^2(1 + \frac{1}{\nu}) + \sigma_{sc}^2 - \sigma_{sp}\sigma_{sc}};$$

$$B_1 = \frac{\sigma_{sc}^2 + \sigma_{sp}\sigma_{sc} - 3\tau_s^2(1 + \frac{1}{\nu})}{3\tau_s^2(1 + \frac{1}{\nu}) + \sigma_{sc}^2 - \sigma_{sp}\tau_{sc}};$$

$$C = \frac{12\sigma_{sc}^2\tau_s^2}{3\tau_s^2(1 + \frac{1}{\nu}) + \sigma_{sc}^2 - \sigma_{sp}\tau_{sc}},$$

где $\nu = \frac{\sigma_{sp}}{\sigma_{sc}}; \nu_\tau = \frac{\tau_s}{\sigma_{sp}};$

Подставив значения постоянных B , B_1 и C в критерий (2) получим:

$$2\sigma_{sc}^2(3\nu_\tau\tau_s - \sigma_{sp})V + \sigma_{sc}^2U = 6\sigma_{sp}^2\tau_s^2. \quad (9)$$

Сравнение напряжённых состояний проводят с напряжённым состоянием данного материала легко осуществимого в экспериментальных условиях. Это напряжённое состояние называется эквивалентным. В качестве эквивалентного напряжения выбирают напряжение при одноосном растяжении. Рассматривая совместно выражения (4), (6) и (8) и принимая, что $\sigma_{sp} = \sigma_{экс}$ получим следующую формулу эквивалентности:

$$\sigma_{экс} = \frac{3\nu_\tau^2 - 1}{6\nu_\tau^2}V + \sqrt{\left(\frac{3\nu_\tau^2 - 1}{6\nu_\tau^2}\right)^2 V^2 + \frac{1}{6\nu_\tau^2}U} \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда в выражение (8) величина B_1 входит с отрицательным знаком

Рассматривая аналогично выражение (4), (6) и (8) и принимая, что $\sigma_{ар} = \sigma_{экр}$ получим следующую формулу эквивалентности:

$$\sigma_{экр} = \frac{1 - 3\nu^2\nu_r^2}{6\nu\nu_r^2}V + \sqrt{\left(\frac{1 - 3\nu^2\nu_r^2}{6\nu\nu_r^2}\right)^2 V^2 + \frac{1}{6\nu_r^2}U}. \quad (11)$$

Формула эквивалентности (10) справедлива в случае, если величина V положительна, а выражение (11) справедливо, если величина V отрицательна.

Анализируя формулы эквивалентности (10) и (11) нетрудно заметить, что для пластич-ных материалов $\nu=1$, $\nu_r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ они приводятся к формуле эквивалентности Губера-Мизиса-

Генки /2/, которая широко используется в инженерных расчётах на прочность. Дальнейший анализ показывает, что если между величинами ν и ν_r существует соотношение равное

$\nu_r = \frac{1}{\sqrt{3\nu}}$, то обе формулы эквивалентности будут соответствовать формуле эквивалентности

П.П. Баландина /3/. Поэтому как критерий П.П. Баландина, так и критерий Губера-Мизиса-Генки являются частными случаями предложенного критерия прочности.

Предложенный энергетический критерий прочности представляет собой функцию напряжений и не зависит от деформаций. Для хрупких материалов он является условием прочности, а для пластичных материалов – условием пластичности. Расчёты с использованием данного критерия хорошо согласуются с результатами эксперимента.

В пространстве предложенный критерий представляет собой предельную поверхность в виде двух пересекающихся между собой параболоидов вращения, сопряжённых между собой в окрестности зоны, в которой октаэдрические касательные напряжения равны нулю. Параболоид вращения закрыт со стороны области растяжения и открыт со стороны области сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев, А.А. Расчёты на прочность при сложном напряжённом состоянии. Киев – 1968г. – 65с. 2. С.Д. Пономарёв, В.Л. Бидерман, К.И. Лихарев и др. Расчёты на прочность в машиностроении. – М.: Машгиз. – 1956г. – т.1 – 476с. 3. Г.С. Писаренко, В.А. Агарёв, А.Л. Квитка и др. Соппротивление материалов. – Киев – Техника – 1967г. – 790с.