УДК 621.941

Ларченков Л.В., Протасеня М.Л., Протасеня И.О., Ларченкова Ю.В.

ТРАЕКТОРИЯ МЕТАНИЯ СТРУКТУРНОГО ТЕЛА

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

По результатам теоретических исследований кольцевого метателя можно рассчитать не только конструктивные, но и некоторые эксплуатационные параметры машины, в частности, дальность L полёта частиц сыпучего материала в зависимости от частоты ω вращения и угла θ_o выброса частиц [1,2].

Задача о движении тела сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений: трёх уравнений движения центра массы тела и трёх уравнений вращения тела около его центра массы. Однако при таком количестве неизвестных невозможно получить положительное решение.

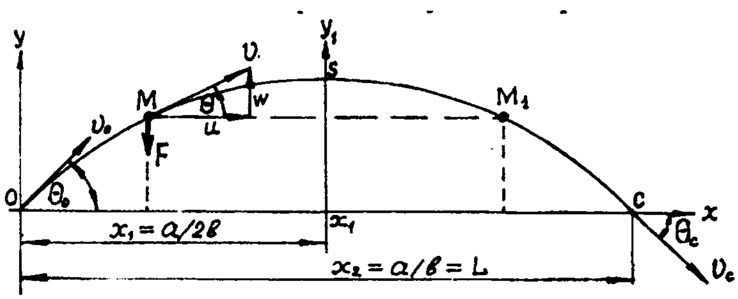

Рис. 1. Движение центра массы тела в пустоте

Движущееся тело подвержено действию сил: силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Рассмотрим некоторую точку M (рис. 1) траектории движения тела в безвоздушном пространстве. В этом случае на тело действует единственная сила $F = mg$, тогда получим следующую систему дифференциальных уравнений поступательного движения $m\ddot{x} = 0$; $m\ddot{y} = -F = -mg$ или после сокращения на m, получим

$$\ddot{x} = 0;\ \ddot{y} = -g. \tag{1}$$

Начальные условия: при $t = 0$, координаты центра массы $x = 0$ и $y = 0$

$$\dot{x} = \upsilon_o \cos\theta_o;\ \dot{y} = \upsilon_o \sin\theta_o.$$

Так как вес тела не входит ни в дифференциальные уравнения, ни в начальные условия, то движение центра массы тела в пустое не зависит от его веса.

Интегрируя систему уравнений (1), получим

$$x = C_1;\ y = -gt + C_2.$$

Из начальных условий находим $C_1 = \upsilon_o \cos\theta_o$; $C_2 = \upsilon_o \sin\theta_o$ и первые интегралы системы (1) получим в следующем виде

$$\dot{x} = \upsilon_o cos\theta_o;\ \dot{y}_o = \upsilon_o \sin\theta_o - gt. \tag{2}$$

Из первого уравнения системы (2) следует, что при движении в пустоте горизонтальная проекция скорости остаётся постоянной вдоль траектории.

Интегрируя систему (2), получим

$$x = v_o \cos\theta_o t + C_3;\ y = v_o \sin\theta_o t - \frac{gt^2}{2} + C_4 .$$

Из начальных условий находим

$$C_3 = C_4 = 0 \text{ и тогда } x = v_o \cos\theta_o t,\ y = v_o \sin\theta_o t - \frac{gt^2}{2} . \qquad (3)$$

Исключив переменную t из системы (3), получим уравнение траектории

$$y = x\, tg\,\theta_o - \frac{gx^2}{2v_o^2 \cos^2\theta_o} . \qquad (4)$$

Полученное выражение является уравнением второго порядка, представляющее частный случай диофантовых уравнений, в котором отсутствуют члены с произведением xy или y^2, поэтому его дискриминант равен нулю, а траектория движения центра массы в пустоте представляет параболу.

Перепишем уравнение (4) в виде

$$y = ax - bx^2 . \qquad (5)$$

Приравняв у нулю $ax - bx^2 = x(a - bx) = 0$, найдём корни $x_1 = 0$, $x_2 = a / b$.

Первое решение отвечает точке схода тела с кольцевого метателя, второе – точке его падения.

Полная горизонтальная дальность полёта $L = x_2 = a / b$.

Перенесём условно начало координат по оси x на расстояние равное половине полной дальности полёта тела, при этом ось ординат проходит через точку S траектории движения (рис. 1). Переходя от старых координат будем иметь $y = y_1$; $x = a / 2b + x_1$ и , подставив их значение в уравнение (5), получим

$$y_1 = a\left(\frac{a}{2b} = x_1\right) - b\left(\frac{a}{2b} + x_1\right)^2 \text{ или } y_1 = \frac{a^2}{4b} - bx_1^2 .$$

Полученное уравнение траектории движения – парабола, в котором отсутствуют нечётные степени x, следовательно, новая условная ось ординат y_l является осью симметрии параболы, так как двум произвольным значениям $x = +k$ и $x = -k$ отвечает одно и то же значение y.

Элементы траектории x и y можно получить при интегрировании дифференциальных уравнений движения. Для определения скорости тела в произвольной точке траектории составим уравнение действующих сил.

$$\frac{Fv^2}{2g} - \frac{Fv_c^2}{2g} = -mgy$$

откуда находим скорость тела

$$v = \sqrt{v_t^2 - 2gy} . \qquad (6)$$

Из анализа уравнения (6) и рисунка 1 следует, что скорости в двух точках M и M'

траектории, находящихся на одной высоте, равны. Следовательно, скорость падения равна скорости выброса и убывает с высотой. Минимальная скорость тела будет в вершине траектории.

Дифференцируя уравнение (4) и имея в виду, что $dy/dt = tg\theta$, получим

$$tg\theta = tg\theta_o - \frac{gx}{2\upsilon_o^2 \cos^2\theta_o}. \tag{7}$$

Согласно принятому положительному направлению отсчёта углов θ против часовой стрелки от горизонта к касательной, этот угол положителен на восходящей ветви траектории и отрицателен на нисходящей. Так как траектория в пустоте симметрична, то угол падения по абсолютной величине равен углу выброса тела из кольцевого метателя.

Из уравнения (4), полагая $y = 0$, получим для точки падения $x = L$.

$$0 = L\,tg\theta_o - \frac{gL^2}{2\upsilon_o^2 \cos^2\theta_o};\ \text{откуда}\ tg\theta_o = \frac{gL}{2\upsilon_o^2 \cos^2\theta_o};\ \text{или}\ L = \frac{\upsilon_o^2 \sin 2\theta_o}{g} \tag{8}$$

Из выражения (3) для координаты x имеем координату $t = \dfrac{x}{\upsilon_o \cos\theta_o}$.

Подставив значение $L = x$ из выражения (8), преобразовав в полное время полёта, получим

$$t_c = T = \frac{2\upsilon_o \sin\theta_o}{g}. \tag{9}$$

Для вершины траектории имеем $x_s = L/2 = \upsilon_o^2 \sin 2\theta_o /2g$. Подставив значение x_s в уравнение (4), получим после преобразований высоту траектории

$$H = y_s = \frac{\upsilon_o^2 \sin^2\theta_o}{2g} = \frac{Ltg\theta_o}{4}. \tag{10}$$

Для времени полёта до вершины траектории имеем

$$t_s = \frac{x_S}{\upsilon_o \cos\theta_o} = \frac{\upsilon_o^2 \sin 2\theta_o}{2g\upsilon_o \cos\theta_o} = \frac{\upsilon_o \sin\theta_o}{g} = \frac{T}{2}. \tag{11}$$

Из выражения (8) для полной горизонтальной дальности $L=\upsilon_o^2 \sin 2\theta_o/g$ следует, что наибольшая дальность полёта соответствует углу бросания, при котором $\sin 2\theta_o = 1$, то есть $\theta_o = 45^o$, тогда $L = \upsilon_o^2/g$.

Характерные элементы траектории движения брошенного тела в воздухе значительно отличаются от элементов траектории в пустоте. Эта разница тем больше, чем больше скорость тела и чем меньше его вес. Только при скорости тела менее 50 м/с можно пренебречь силу сопротивления воздуха для средних и крупных тел [3].

Изучение влияния сопротивления воздуха движению различных тел имеет определяющее значение для решения задач по точности распределения их по различным поверхностям пространства.

Согласно теории И.Ньютона твёрдое тело сталкивается с частицами воздуха и придаёт им некоторую скорость, при этом их кинетическая энергия получается за счёт движущегося тела, что является сопротивлением воздуха.

Составив уравнение количества движения, получим $2\rho S\upsilon^2 dt = R\,dt$ или $R = 2\rho S\upsilon^2$, где υ - скорость, ρ – массовая плотность воздуха, S – площадь поперечного сечения тела. В общем виде $R = k\rho S\upsilon^2$, где $1 < k < 2$.

Эта формула имеет удовлетворительную сходимость с экспериментальными данными только при условии $\upsilon < 250$ *м/с*. В теории Ньютона рассматривается взаимодействие физических абсолютно твердых тел [4].

В нашем случае рассматривается взаимодействие структурного (сыпучего) тела с воздушным потоком. Выделим вдоль линии потока элемент струи длиной dS поперечным сечением dA и запишем уравнение движения этого элемента согласно теории Д.Бернулли. Масса элемента равна $\rho\, dS\, dA$, давление слева P, справа $-(P - dP)$ (рис. 2).

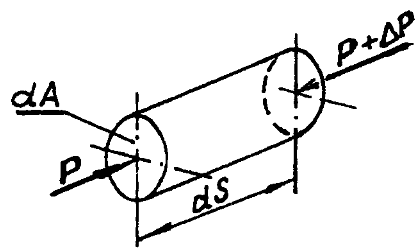

Рис. 2. Взаимодействие элемента потока с препятствием

Если равномерный поток воздуха встречает на своём пути препятствие, то непосредственно перед препятствием происходит подпор – замедление потока. Уравнение движения запишется в виде $\rho\, dA\, dS\dfrac{d\upsilon}{dt} = [P - (P+dP)]dA$. Так как $dS / dt = \upsilon$, то $\upsilon\, d\upsilon = -dP / \rho$. Интегрируя в пределах от начальной точки до произвольной точки струи, получим

$$\frac{\upsilon^2 - \upsilon_i^2}{2} = -\int_{P_o}^{P}\frac{dP}{\rho}.$$

Для небольших скоростей воздуха можно, пренебрегая его сжимаемостью, принять $\rho = \rho_o = const$, тогда

$$\frac{\upsilon^2 - \upsilon_i^2}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\left(P - P_o\right) \text{ или } \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{Ð}{\rho} = \frac{\upsilon_i^2}{2} + \frac{Ð_i}{\rho} = const.$$

Из этого выражения следует, что с увеличением скорости вдоль струи давление уменьшается и при встрече с препятствием обращается в нуль. Тогда получим $1/2\,\rho\upsilon_i^2 = P - P_o = \Delta P$. Добавочное давление – скоростной напор.

Учитывая сжимаемость воздуха и рассматривая адиабатическую зависимость между плотностью и давлением $\dfrac{Ð}{\rho^k} = \dfrac{P_o}{\rho_o^k}$, $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\rho_o}\left(\dfrac{P_o}{P}\right)^{1/k}$, получим:

$$\int_{-Ð_i}^{Ð}\frac{dP}{\rho} = \frac{P_o^{1/k}}{\rho_o}\int_{P_o}^{P} P^{-1/k}dP = \frac{k}{k-1}\frac{P_o^{1/k}}{}\left(P_o^{(k-1)/k} - P^{(k-1)/k}\right) = \frac{k}{k-1}\frac{P_o}{\rho_o}\left[1 - \left(\frac{P}{P_o}\right)^{(k-1)/k}\right]$$

Уравнение Бернулли будет:

$$\frac{\upsilon^2-\upsilon_o^2}{2}=\frac{k}{k-1}\frac{P_o}{\rho_o}\left[1-\left(\frac{P}{P_o}\right)^{(k-1)/k}\right].$$

В случае столкновения струи с препятствием получим $\upsilon = 0$, отсюда

$$\frac{\upsilon_o^2}{2}=\frac{k}{k-1}\frac{P_o}{\rho_o}\left[\left(\frac{P}{P_o}\right)^{(k-1)/k}-1\right].$$

Введя выражение для скорости звука в воздухе в начальной точке струи $a_o=\sqrt{\frac{kP_o}{\rho_o}}$, получим

$$\left(\frac{\upsilon_o}{a_o}\right)^2=\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{P}{P_o}\right)^{(k-1)/k}-1\right] \text{ или } \frac{P}{P_o}=\left[1+\frac{k-1}{2}\left(\frac{\upsilon_o}{a_o}\right)^2\right]^{k/(k-1)}.$$

Если скорость струи υ_o мала по сравнению со скоростью звука a_o, то, разложив выражение в квадратных скобках по биному, получим после некоторых преобразований и имея ввиду, что $\frac{k}{2}\left(\frac{\upsilon_o}{a_o}\right)^2=\frac{k\upsilon_o^2}{2}\frac{\rho_o}{kP_o}=\frac{1}{P_o}\frac{\rho_o\upsilon_o^2}{2}$, получим

$$\Delta P=P-P_o=\frac{\rho_o\upsilon_o^2}{2}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{\upsilon_o}{a_o}\right)^2\right].$$

Выражение в квадратных скобках является поправочным коэффициентом сжимаемости воздуха. При нормальной плотности воздуха $\rho=1,206$ *кг/м*^{3} и весовой плотности $\rho=1,206/9,81=0,123$ скоростной напор при скорости $\upsilon=26$ *м/с* составит $\Delta P = 0,5\cdot0,123\cdot30^2=55,35$ *кг/м*^{2}. С учётом поправки на сжимаемость скоростной напор составит $\Delta P = 55,35\cdot1,002 = 55,46$ *кг/м*^{2}, что соответствует *0,2 %*.

Уравнение Бернулли позволяет вычислить избыточное давление потока на элементарное тело [5].

Уравнение не применимо при скорости большей, чем скорость звука.

Вязкое бесконечно малое уплотнение воздуха распространяется в пространстве со скоростью звука. Конечные уплотнения воздуха распространяются со скоростью большей скорости звука.

Рассмотрим поток воздуха, движущийся со скоростью υ, и некоторую неподвижную точку *М*, около которой создаётся некоторое уплотнение воздуха. Это уплотнение в каждый рассматриваемый момент времени создаёт сферическую волну, распространяющуюся со скоростью звука a. Центр этой волны распространяется вместе с потоком со скоростью υ. За время t, $2t$, $3t$ с центры сферических волн переместятся на расстояние υt, $2\upsilon t$, $3\upsilon t$, а радиусы сферических волн будут соответственно равны at, $2at$, $3at$. При скорости потока, меньшей скорости звука, $\upsilon < a$, получается система волн – рис. 3.

Сопротивление воздуха для тела произвольной формы будет содержать следующие факторы: размер тела, характеризующийся его средним диаметром d; скорость поступательного движения тела υ; вязкость воздуха, характеризующаяся коэффициентом вязкости μ; массовая плотность воздуха ρ; скорость звука в воздухе a.

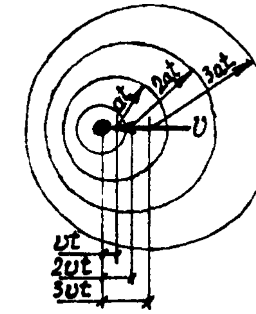

Рис. 3. Распространение волн при скорости меньшей скорости звука

Тогда формула силы сопротивления воздуха в общем виде будет $R = f(d, \upsilon, \rho, \mu, a)$, где форма тела учитывается видом функции f. Приведём эту зависимость с множеством переменных к более удобному виду $R = S\dfrac{\rho\upsilon^2}{2}C_x\left(\dfrac{\upsilon d}{\nu}, \dfrac{\upsilon}{a}\right)$. Функция лобового сопротивления C_x, зависит от двух факторов: числа Рейнольдса $Re = \upsilon d / \nu$ и числа Маха $Ma = \upsilon/a$.

При скорости менее *200 м /с* число Рейнольдса на сопротивление воздуха влияет незначительно и можно записать $R = S\dfrac{\rho\upsilon^2}{2}C_x\left(\dfrac{\upsilon}{a}\right)$. Вид функции C_x зависит от формы тела и определяется испытанием тел различных форм, из которых $C_{x\,sr}(\upsilon/a) = i\,C_x(\upsilon/a)$.

Вид функции C_x для тел округлой формы представлен на рисунке 4.

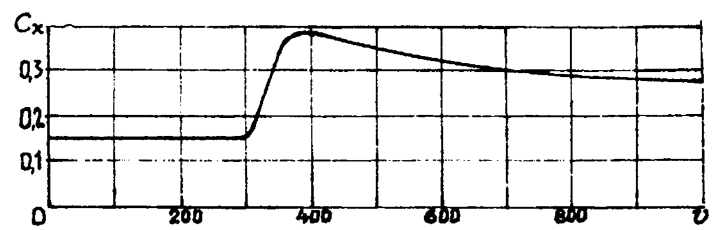

Рис. 4. Зависимость функции C_x от выражения υ/a

Совместные испытания способа распределения сыпучих материалов по поверхности поля с Запорожским научно-исследовательским конструкторским и технологическим институтом машиностроения (НИКТИМ сельхозхиммаш) привела к созданию машины СТТ-10 (сеялка тракторная туковая грузоподъёмностью 10 тонн), превосходящая по точности распределения сыпучих материалов известные машины в мире. Неравномерность распределения минеральных удобрений составила 11–15 %.

Исследованные нами способ и устройство позволяют снизить эту неравномерность до 1,0 – 4,5 %. Эти результаты получены в лабораторно-полевых условиях заменой рабочего органа машины СТТ-10 экспериментальным [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Протасеня, М.Л., Ларченков, Л.В. Способ и устройство для рассева сыпучего материала по поверхности поля / М.Л. Протасеня, Л.В. Ларченков. – Патент № 6659 РБ. – 2004. – 5 с. 2. Ларченков Л.В. и др. Теория движения структурного тела силами трения / Л.В. Ларченков, М.Л. Протасеня, И.О. Протасеня, Ю.В. Ларченкова. – Мн., ОИМ НАН РБ «Инновации в машиностроении». – 2008. – 234-241 с. 3. Вентцель Д.А., Окунев Б.Н., Шапиро Я.М. Внешняя баллистика / Д.А. Вентцель, Б.Н. Окунев, Я.М. Шапиро. – Л.-М. – 1933. – 379 с. 4. Фабрикант Н.Я. Аэродинамика, ч.1 / Н.Я. Фабрикант. – Л. – 1949.– 624 с. 5. Угинчус А.А. Гидравлика, гидравлические машины и основы сельскохозяйственного водоснабжения. Гл. 5 / А.А. Угинчус. – К. – М. – 1957. – 251 с.