



Министерство образования  
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

---

Кафедра высшей математики № 1

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

*Сборник заданий  
для аудиторной и самостоятельной работы  
студентов инженерно-технических специальностей*

Часть 1

Минск 2010

Министерство образования Республики Беларусь  
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

---

Кафедра высшей математики № 1

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник заданий  
для аудиторной и самостоятельной работы  
студентов инженерно-технических специальностей

В 2 частях

Часть 1

Минск 2010

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я7

В 93

**Составители:**

*А.Н. Андриянчик, Н.А. Микулик,  
Л.А. Раевская., Н.И. Чепелев, Т.И. Чепелева,  
Е.А. Федосик, В.И. Юринок, Т.С. Яцкевич*

**Рецензент**

*В.И. Каскевич*

Высшая математика: сб. заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов инженерно-технических специальностей: в 2 ч. / сост.: А.Н. Андриянчик [и др.]. – Минск: БНТУ, 2010. – Ч. 1. – 156 с.

В сборнике заданий для аудиторной и самостоятельной работы студентов приведены задачи и упражнения по основным разделам высшей математики в соответствии с действующей программой. В качестве основных рассматриваются 18 практических занятий для каждого из четырех семестров. К задачам, предназначенным для самостоятельной работы, предлагаются ответы, что поможет студенту контролировать правильность решаемых примеров.

Приведены варианты типовых расчетов, являющихся обязательным элементом учебных планов соответствующих специальностей БНТУ.

Издание является дополнением к существующим задачникам, будет полезным как для студентов дневной, так и заочной формы обучения и послужит лучшей организации их самостоятельной работы.

## СОДЕРЖАНИЕ

I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ .....	6
Занятие 1. Декартова и полярная системы координат. Построение графиков .....	6
Занятие 2. Действия над матрицами. Вычисление определителей .....	7
Занятие 3. Обратная матрица. Решение невырожденных систем матричным методом. ....	12
Занятие 4. Формулы Крамера. Ранг матрицы .....	15
Занятие 5. Решение произвольных и однородных систем .....	18
Занятие 6. Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов .....	22
Занятие 7. Векторное и смешанное произведения векторов ...	24
Занятие 8. Прямая на плоскости. ....	26
Занятие 9. Прямая и плоскость в пространстве .....	28
Занятие 10. Кривые 2-го порядка на плоскости. Поверхности 2-го порядка .....	30
Занятие 11. Функция. Предел последовательности и предел функции .....	33
Занятие 12. Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций. Точки разрыва .....	37
Занятие 13. Дифференцирование функций. Логарифмическая производная .....	39
Занятие 14. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Дифференциал функции .....	41
Занятие 15. Производные и дифференциалы высших порядков .....	44
Занятие 16. Правило Лопиталю–Бернулли. Формула Тейлора .....	46
Занятие 17. Монотонность функции. Экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции. ....	48
Занятие 18. Выпуклость и вогнутость графиков функций. Асимптоты. Построение графиков функций .....	50

Типовой расчет № 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии .....	52
Типовой расчет № 2. Предел функции. Производная и ее применение к исследованию функций и построению графиков .....	66

## II. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ....	85
Занятие 1. Комплексные числа и действия над ними. Простейшие приемы интегрирования .....	85
Занятие 2. Интегрирование с помощью замены переменной в неопределенном интеграле .....	89
Занятие 3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле .....	92
Занятие 4. Интегрирование рациональных функций .....	94
Занятие 5. Интегрирование тригонометрических выражений и простейших иррациональных функций .....	96
Занятие 6. Вычисление определенных интегралов .....	100
Занятие 7. Приложения определенных интегралов. ....	102
Занятие 8. Несобственные интегралы .....	105
Занятие 9. Частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных. Производные и дифференциалы высших порядков .	107
Занятие 10. Производные сложных функций нескольких переменных. Производные функций, заданных неявно. ....	110
Занятие 11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент .....	114
Занятие 12. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой области. Условный экстремум .....	117
Занятие 13. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными и однородных дифференциальных уравнений первого порядка .....	118

Занятие 14. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений и уравнений Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах . . . . .	120
Занятие 15. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка . . . . .	123
Занятие 16. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа . . . . .	124
Занятие 17. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида . . . . .	127
Занятие 18. Решение систем дифференциальных уравнений. Метод исключения . . . . .	129
Типовой расчет № 3. Неопределенный и определенный интегралы . . . . .	131
Типовой расчет № 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений . . . . .	142

**I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ  
ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ  
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

**З а н я т и е 1**

*Декартова и полярная системы координат.  
Построение графиков*

**Аудиторная работа**

**1.1.** Построить графики функций:

а)  $y = 2^{\log_2 \cos x}$ .

б)  $y = \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$ .

в)  $y = \begin{cases} 2^{x-1}, & 0 < x \leq 2, \\ -x^2 - 2x, & -3 < x \leq 0. \end{cases}$

г)  $y = 2x - |x-2| + 1$ .

д)  $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$ .

е)  $y = \sin |x| - 1$ .

ж)  $y = \log_{1/2} x^2 + 1$ .

з)  $y = \frac{1}{|x|+1}$ .

**1.2.** Построить графики функций, заданных параметрически:

а)  $x = -1 + 2t, y = 2 - t$ .

б)  $x = t, y = t^2 - 4$ .

в)  $x = 2 \cos t, y = \sin t$ .

г)  $x = 1 - t^2, y = t - t^3$ .

д)  $x = at^2, y = bt^3$ .

е)  $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ .

ж)  $x = -1 + 2 \cos t, y = 3 + 2 \sin t$ .    з)  $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$ .

**1.3.** Записать уравнения кривых в полярных координатах:

а)  $y = x$ .

б)  $y = 1$ .

в)  $x^2 + y^2 = 4$ .

г)  $x^2 + y^2 = 2y$ .

д)  $x + y - 1 = 0$ .

е)  $x^2 - y^2 = a^2$ .

1.4. Построить графики функций:

а)  $r = 1$ .

б)  $r = 2\varphi$ .

в)  $r \cos \varphi = 2$ .

г)  $r = e^\varphi$ .

д)  $r = 4 \cos \varphi$ .

е)  $r = 3 \sin 2\varphi$ .

ж)  $r = 2(1 + \cos \varphi)$ .

з)  $r = \frac{6}{3 + 2 \cos \varphi}$ .

и)  $r = \frac{2}{1 + \sin \varphi}$ .

к)  $r = 2 \cos 3\varphi$ .

л)  $r^2 = 36 \sin 2\varphi$ .

### Домашнее задание

1.5. Построить следующие кривые:

а)  $y = |x^2 - x - 2|$ .

б)  $y = x + |x + 3|$ .

в)  $x = t^2 + 1, y = t$ .

г)  $x = t^3, y = t^2$ .

д)  $r = 2 \sin \varphi$ .

е)  $r = 3(1 - \sin \varphi)$ .

ж)  $r = 4 \cos 2\varphi$ .

з)  $r = \frac{3}{1 - \cos \varphi}$ .

### ОТВЕТЫ

1.3. а)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

1.3. б)  $r = \frac{1}{\sin \varphi}$ .

1.3. в)  $r = 2$ .

1.3. г)  $r = 2 \sin \varphi$ .

1.3. д)  $r = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}$ .

1.3. е)  $\rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$ .

### Занятие 2

*Действия над матрицами. Вычисление определителей*

#### Аудиторная работа

2.1. Найти  $2A + 3B - C$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$



2.2. Найти матрицу  $X$ , если

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 8 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.3. Даны матрицы  $A$  и  $B$ . Найти  $AB$  и  $BA$ , если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.4. Вычислить

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2.5. Показать, что матрица  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  является корнем много-

члена  $f(x) = x^2 - 3x + 5$ .

2.6. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$$

**2.7.** Вычислить определители по правилу Саррюса и разлагая по элементам 1-й строки:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

**2.8.** Вычислить определители, разлагая по элементам ряда:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

**2.9.** Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}.$$

**2.10.** Вычислить определители, предварительно упростив их:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 & 13 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & 5 \\ -3 & -15 & -6 & 13 \end{vmatrix}.$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$д) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$е) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

### Домашнее задание

**2.11.** Найти  $(A+3B)^2$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.12.** Найти те из произведений  $AB, BA, AC, CA, BC, CB$ , которые имеют смысл, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2.13.** Найти значение многочлена  $f(A)$  от матрицы  $A$ , если  $f(x) = 2x^2 - 2x + 7$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**2.14.** Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 4 \\ x & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**2.15.** Найти  $\det(AB)$  и проверить, что  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2.16.** Вычислить определители, разлагая их по элементам ряда:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

**2.17.** Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

### Ответы

$$\text{2.1. } \begin{pmatrix} -4 & -1 & -9 \\ 9 & -4 & 4 \\ -13 & -3 & 21 \end{pmatrix}.$$

$$\text{2.2. } \begin{pmatrix} 9 & -39 \\ -6 & 0 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{2.3. а) } AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\text{2.3. б) } AB = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.3. \text{ в) } AB = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 2.4. \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2.6. x = -1; \quad x = -4. \quad 2.7. \text{ а) } 0. \quad \text{б) } 0.$$

$$2.8. \text{ а) } 0. \quad \text{б) } 16 \quad 2.9. \text{ а) } 20.$$

$$\text{б) } 27. \quad 2.10. \text{ а) } 38. \quad \text{б) } 168.$$

$$\text{в) } -192. \quad \text{г) } 75. \quad \text{д) } -12. \quad \text{е) } 300.$$

$$2.11. \begin{pmatrix} 96 & 12 & 8 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 85 & 111 \end{pmatrix}.$$

$$2.12. BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.13. \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}. \quad 2.14. x_1 = -1, x_2 = 2. \quad 2.15. 40. \quad 2.16. \text{ а) } 0.$$

$$2.16. \text{ б) } 48 \quad 2.17. \text{ а) } 54. \quad \text{б) } 160.$$

### Занятие 3

#### Обратная матрица.

#### Решение невырожденных систем матричным методом

#### Аудиторная работа

3.1. Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

$$3.1. \text{ а) } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}. \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.1. \text{ г)} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}. \quad 3.1. \text{ д)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2. Решить матричные уравнения:

$$3.2. \text{ а)} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3.2. \text{ б)} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3.2. \text{ в)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

3.3. Решить системы матричным методом:

$$3.3. \text{ а)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases} \quad 3.3. \text{ б)} \begin{cases} -2x + 2y - z + 7 = 0, \\ x - 3y + z - 6 = 0, \\ 3x + y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$$

$$3.3. \text{ в)} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases} \quad 3.3. \text{ г)} \begin{cases} 2x - y + 5z = 4, \\ 3x - y + 5z = 0, \\ 5x + 2y + 13z = 2. \end{cases}$$

### Домашнее задание

3.4. Найти матрицы, обратные данным, если они существуют:

$$3.4. \text{ а)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}. \quad 3.4. \text{ б)} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

**3.5.** Решить матричные уравнения:

$$3.5. \text{ а) } X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3.5. \text{ б) } \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**3.6.** Проверить, являются ли системы невырожденными, и если являются, то решить их матричным методом.

$$3.6. \text{ а) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

$$3.6. \text{ б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + 4x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

**Ответы**

$$3.1. \text{ а) } \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

**3.1. б)** Не существует.

$$3.1. \text{ в) } -\frac{1}{38} \begin{pmatrix} -10 & 4 & -2 \\ 7 & 1 & -10 \\ -8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3.1. \text{ г) } -\frac{1}{49} \begin{pmatrix} -7 & -14 & 35 \\ -7 & 21 & -21 \\ -7 & -7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$3.1. \text{ д) } -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3.2. \text{ а) } \begin{pmatrix} -\frac{11}{15} & 1 \\ \frac{1}{15} & 0 \end{pmatrix}$$

$$3.2. \text{ б) } \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

$$3.2. \text{ г) } \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & 3 \\ -\frac{2}{13} & -1 \\ \frac{30}{13} & 4 \end{pmatrix}$$

**3.3. а)**  $x_1 = x_2 = x_3 = 1.$

**3.3. а)**  $x = 2, y = -1, z = 1.$

**3.3. а)**  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1.$

**3.3. а)**  $x = -4, y = -2, z = 2.$

**3.4. а)**  $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$

**3.4.а)**  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$

**3.5. а)**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

**3.5. б)**  $-\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ -14 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$

**3.6. а)**  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2.$

**3.6. б)**  $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}.$

## Занятие 4

### *Формулы Крамера. Ранг матрицы*

#### Аудиторная работа

**4.1.** Решить системы, используя формулы Крамера:

**4.1. а)**  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18. \end{cases}$

**4.1. б)**  $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

**4.1. в)**  $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1, \\ 3x + 2y - z = 9, \\ x - 4y + 3z = -5. \end{cases}$

**4.1. г)**  $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 14 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 10 = 0. \end{cases}$

**4.2.** При каких значениях  $\lambda$  ранг матрицы равен двум:

**4.2. а)**  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$

**4.2. б)**  $\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$



**4.3.** Проверить справедливость неравенств  $r_{AB} \leq r_A$ ,  $r_{AB} \leq r_B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**4.4.** Найти ранги матриц с помощью элементарных преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор.

$$\mathbf{4.4. а)} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{4.4. б)} \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.4. в)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{4.4. г)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.4. д)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

### Домашнее задание

**4.5.** Решить системы по правилу Крамера:

$$\mathbf{4.5. а)} \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}, \quad \mathbf{4.5. б)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

4.6. Проверить справедливость неравенства  $r_{A+B} \leq r_A + r_B$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.7. Найти ранги матриц и указать какой-нибудь базисный минор.

а)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

б)  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 11 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & 10 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$

в)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

### Ответы

4.1. а)  $x_1 = 2, x_2 = 3.$

б)  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0.$

в)  $x = 2, y = 1, z = -1.$

г)  $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -1.$

4.2. а)  $\lambda = 3.$

б)  $\lambda = 0, \lambda = 2.$

4.4. а)  $r = 3, \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}$

б)  $r = 2, \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}.$

в)  $r = 3, \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

г)  $r = 3, \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \\ 7 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

4.4. д)  $r=2$ ,  $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ .      4.5. а)  $x=1, y=3, z=5$ .

4.5. б)  $x_1=3, x_2=1, x_3=-1$ .      4.7. а) 2.

4.7.б) 3.      4.7. в) 3.

## Занятие 5

### Решение произвольных и однородных систем

#### Аудиторная работа

5.1. Исследовать системы на совместность и в случае совместности решить их.

5.1. а)  $\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$

5.1. б)  $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

5.1. в)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$

5.1. г)  $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -3, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 5. \end{cases}$

5.1. д)  $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

$$5.1. \text{ е) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$$

$$5.1. \text{ ж) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + \quad + 5x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

$$5.1. \text{ з) } \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + \quad 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

5.2. Решить однородную систему и найти фундаментальную систему решений.

$$5.2. \text{ а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 5.2. \text{ б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.2. \text{ в) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad 5.2. \text{ г) } \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0. \end{cases}$$

$$5.2. \text{ д) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.2. \text{ е) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

## Домашнее задание

5.3. Исследовать системы уравнений и в случае совместности решить их.

$$5.3. \text{ а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases} \quad 5.3. \text{ б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

$$5.3. \text{ в) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 = 1. \end{cases} \quad 5.3. \text{ г) } \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

5.4. Решить системы:

$$5.4. \text{ а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 5.4. \text{ б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

## Ответы

5.1. а) Система несовместна.

$$5.1. \text{ б) } \left\{ \left( \frac{C_1 - 9C_2 - 2}{11}, \frac{10 - 5C_1 + C_2}{11}, C_1, C_2 \right) \mid \forall C_1, C_2 \in R \right\}.$$

$$5.1. \text{ в) } \left\{ \left( \frac{9 - C_1 - 14C_2 - C_3}{7}, \frac{4C_1 - 7C_2 - 3C_3 - 1}{7}, C_1, C_2, C_3 \right) \mid \forall C_1, C_2, C_3 \in R \right\}$$

$$5.1. \text{ г) } \left\{ \left( \frac{-3 - 5C_1 + 13C_2 - 5C_3}{5}, \frac{4 + C_2}{5}, C_1, C_2, C_3 \right) \mid \forall C_1, C_2, C_3 \in R \right\}.$$

$$5.1. \text{ д) } x_1 = 5, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 2.$$

5.1. е)  $\left\langle C, C+1, C+2, C+3 \right\rangle \forall C \in R$ .

5.1. ж) Система несовместна.

5.1. з)  $\left\{ \left( C_1, C_2, \frac{3-5C_1+25C_2}{9}, \frac{10C_2-2C_1}{3} \right) \forall C_1, C_2 \in R \right\}$ .

5.2. а)  $\left\{ \left( \frac{3}{5}C_1, \frac{C_1}{5}, C_1 \right) \forall C_1 \in R \right\}; \left\langle 1, 5 \right\rangle$

5.2. б)  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

5.2. в)  $\left\{ \left( \frac{-7C_1-8C_2}{7}, C_1, \frac{5C_2}{7}, C_2 \right) \forall C_1, C_2 \in R \right\}; \left\langle 1, 1, 0, 0 \right\rangle \left( -\frac{8}{7}, 0, \frac{5}{7}, 1 \right)$ .

5.2. г)  $\left\{ \left( \frac{-19C_1+38C_2}{3}, \frac{7C_1-14C_2}{2}, C_1, C_2 \right) \forall C_1, C_2 \in R \right\}$ ,

$\left( -\frac{19}{3}, \frac{7}{2}, 1, 0 \right), \left( \frac{38}{3}, -7, 0, 1 \right)$ .

5.2. д)  $\left\{ \left( C_1, C_2, \frac{3C_1+6C_2}{4}, \frac{5C_1+10C_2}{4} \right) \forall C_1, C_2 \in R \right\}$ .

5.2. е)  $\left\{ \left( \frac{8C_1+9C_2}{26}, -\frac{6C_1+23C_2}{26}, \frac{22C_1-11C_2}{26}, C_1, C_2 \right) \forall C_1, C_2 \in R \right\}$ ,

$\left( \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{11}{13}, 1, 0 \right), \left( \frac{9}{26}, -\frac{23}{26}, -\frac{11}{26}, 0, 1 \right)$ .

5.3. а) Несовместна.

5.3. б)  $\left\{ \left( \frac{5-7c}{5}, \frac{8c}{5}, c \right) \forall c \in R \right\}$ .

5.3. в)  $x_1 = -1, x_2 = 1$ .

$$5.3. \text{ г) } \left\{ \left( c_1, c_2, \frac{3-5c_1+25c_2}{9}, \frac{10c_2-2c_1}{3} \right) \mid \forall c_1, c_2 \in R \right\}.$$

$$5.4. \text{ а) } x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.$$

$$5.4. \text{ б) } \{(0, 2c_1 + c_2, c_1, c_2) \mid \forall c_1, c_2 \in R\}.$$

## Занятие 6

### *Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов*

#### Аудиторная работа

6.1. Определить, для каких векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  выполняются следующие условия:

$$1) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|,$$

$$2) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|,$$

$$3) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|,$$

$$4) |\vec{a} + \vec{b}| = 0,$$

$$5) \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

6.2. Даны векторы  $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$  и  $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$ . Определить проекции на координатные оси следующих векторов:

$$1) -\frac{1}{2}\vec{b};$$

$$2) 2\vec{a};$$

$$3) 2\vec{a} + 3\vec{b}.$$

6.3. Проверить коллинеарность векторов  $\vec{a}(2; -1; 3)$  и  $\vec{b}(-6; 3; -9)$ . Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

**6.4.** Найти направляющие косинусы вектора  $\vec{a}(6; -2; -3)$ .

**6.5.** Определить модули суммы и разности векторов  $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$  и  $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ .

**6.6.** Даны точки  $A(-1; 2; 1), B(2; 1; -3), C(3; 0; 5)$ . Подобрать точку  $D$  так, чтобы четырехугольник  $ABCD$  был параллелограммом.

**6.7.** Найти  $(\vec{m} + 2\vec{n}, \vec{m} - \vec{n})$ , если  $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}, \vec{n} = \vec{a} - 3\vec{b}, |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2;$   
 $(\vec{a}, \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ .

**6.8.** Даны вершины четырехугольника  $A(1; -2; 2), B(1; 4; 0), C(-4; 1; 1)$  и  $D(-5; -5; 3)$ . Доказать, что его диагонали  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны.

**6.9.** Вычислить внутренние углы треугольника  $ABC$ , если  $A(1; 2; 1), B(3; -1; 7), C(7; 4; -2)$ . Убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

**6.10.** Вычислить проекцию вектора  $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$  на ось вектора  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ .

### Домашнее задание

**6.11.** Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}(3; -5; 8)$  и  $\vec{b}(-1; 1; -4)$ , и косинус угла между его диагоналями.

**6.12.** Даны три вектора  $\vec{a}(-2; 1; 1), \vec{b}(1; 5; 0)$  и  $\vec{c}(4; 4; -2)$ . Вычислить  $\text{pr}_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$ .

**6.13.** При каком значении  $\alpha$  векторы  $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$  взаимно перпендикулярны?

**6.14.** Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$ , вычислить угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ .

**6.15.** Найти координаты вектора  $\vec{b}$ , коллинеарного вектору  $\vec{a} = (2; 1; -1)$ , при условии что  $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$ .



## ОТВЕТЫ

6.2. 1)  $\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right)$       2)  $\left(6; -4; 12\right)$       3)  $\left(0; -1; 12\right)$

6.3. Векторы противоположно направленные, вектор  $\vec{b}$  длиннее вектора  $\vec{a}$  в 3 раза.

6.4.  $\cos\alpha = \frac{6}{7}; \quad \cos\beta = -\frac{2}{7}; \quad \cos\gamma = -\frac{3}{7}.$

6.5.  $|\vec{a} + \vec{b}| = 6; \quad |\vec{a} - \vec{b}| = 14.$       6.6.  $D(1; 9)$       6.7. -42.

6.9.  $\cos\angle A = -\frac{12}{49}; \quad \cos\angle B = \frac{\sqrt{122}}{14}; \quad \cos\angle C = \frac{\sqrt{122}}{14}.$       6.10.  $-\frac{2}{3}.$

6.11.  $|\vec{a} + \vec{b}| = 6, \quad |\vec{a} - \vec{b}| = 14, \quad \cos\varphi = \frac{20}{21}.$

6.12.  $np_c(3\vec{a} - 2\vec{b}) = -11.$       6.13.  $\alpha = -6.$

6.14.  $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}.$       6.15.  $\vec{b} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$

## Занятие 7

### Векторное и смешанное произведения векторов

#### Аудиторная работа

7.1. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны. Зная, что  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$ , вычислить: 1)  $||[\vec{a}, \vec{b}]||$ ; 2)  $||[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]||$ ; 3)  $||[(3\vec{a} + \vec{b}), (\vec{a} - \vec{b})]||$ .

7.2. Даны векторы  $\vec{a} = (3; -1; -2), \vec{b} = (1; 2; -1)$ . Найти координаты векторных произведений: 1)  $[\vec{a}, \vec{b}]$ ; 2)  $[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$ ; 3)  $[2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$ .

7.3. Даны вершины треугольника  $A(1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1)$ . Вычислить площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины  $B$  на сторону  $AC$ .

7.4. Найти вектор  $\vec{c}$ , ортогональный векторам  $\vec{a}=(2;-3;1)$  и  $\vec{b}=(1;-2;3)$  и удовлетворяющий условию  $(\vec{c}, \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$ .

7.5. Установить, компланарны ли векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , если  $\vec{a}=(2;3;-1)$ ,  $\vec{b}=(1;-1;3)$ ,  $\vec{c}=(1;9;-1)$ .

7.6. Доказать, что четыре точки  $A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2;1;3)$  лежат в одной плоскости.

7.7. Даны вершины тетраэдра:  $A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(-5; -4; 8)$ . Найти объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины  $D$ .

### Домашнее задание

7.8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}=(0;-1;1)$  и  $\vec{b}=(1;1;1)$ .

7.9. Лежат ли точки  $A(5;5;4), B(3;8;4), C(3;5;10), D(5;8;2)$  в одной плоскости?

7.10. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов  $\vec{a}=(3;4;0)$ ,  $\vec{b}=(0;-4;1)$ ,  $\vec{c}(0;2;5)$ .

7.11. Найти длину высоты параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}=\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=4\vec{i}+2\vec{k}, \vec{c}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ , если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

7.12. Вычислить синус угла, образованного векторами  $\vec{a}=(2;-2;1)$  и  $\vec{b}=(2;3;6)$ .

### Ответы

7.1. 1) 12.                    2) 24.                    3) 48.                    7.2. 1) (5,17).

2) (10, 2, 14).            3) (20, 4, 28).            7.3.  $\left[ \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{matrix} \right]$             7.4.  $i = \left( \left[ \begin{matrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right] \right)$

7.5. Компланарны.    7.7.  $\left[ \begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ 11 \end{matrix} \right]$     7.8.  $\sqrt{6}$ .    7.9. Нет не лежат.

7.10. Левая.                    7.11.  $\frac{16}{3\sqrt{14}}$ .                    7.12.  $\sin \varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$ .

## Занятие 8

### Прямая на плоскости

#### Аудиторная работа

**8.1.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-1; 2)$ , перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{M_1M_2}$ , если  $M_1(2; -7)$ ,  $M_2(3; 2)$ .

**8.2.** Написать каноническое и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $A(3; -2)$  параллельно: а) вектору  $\vec{S}(1; 5)$ ; б) оси  $Oy$ .

**8.3.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-1; 8)$  и образующей с осью абсцисс угол, равный  $\frac{3\pi}{4}$ .

**8.4.** Даны вершины треугольника  $ABC$ :  $A(1; 2)$ ,  $B(2; -2)$ ,  $C(6; 1)$ .  
Найти:

- 1) уравнение стороны  $AB$ ;
- 2) уравнение высоты  $CH$ ;
- 3) уравнение медианы  $AM$ ;
- 4) уравнение прямой, проходящей через вершину  $C$  параллельно стороне  $AB$ ;
- 5) расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$ .

**8.5.** Найти расстояние между прямыми  $12x - 5y - 26 = 0$  и  $12x - 5y + 13 = 0$ .

**8.6.** Найти проекцию точки  $A(2; 6)$  на прямую  $3x + 4y - 5 = 0$ .

#### Домашнее задание

**8.7.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $3x - 2y - 7 = 0$  и  $x + 3y - 6 = 0$  и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3.

**8.8.** Найти точку  $O$  пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ , если  $A(-1; -3)$ ,  $B(3; 5)$ ,  $C(5; 2)$ ,  $D(3; -5)$ .

**8.9.** Найти уравнения перпендикуляров к прямой  $3x+5y-15=0$ , проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат.

**8.10.** Записать уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-2; 3)$  и составляющей с осью  $Ox$  угол: а)  $45^\circ$ ; б)  $90^\circ$ ; в)  $0^\circ$ .

**8.11.** Найти точку  $B$ , симметричную точке  $A(8; 12)$  относительно прямой  $x-2y+6=0$ .

**8.12.** Найти один из углов между прямыми:

а)  $2x+3y-5=0$  и  $x-3y-7=0$ ;

б)  $\begin{cases} x=4 \\ y=t+7 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=\sqrt{3}t+2 \end{cases}$ .

### О т в е т ы

**8.1.**  $x+9y-17=0$ .      **8.2. а)**  $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{5}$ ,  $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+5t \end{cases}$

б)  $\frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{1}$ ,  $x=3$ .      **8.3.**  $x+9-7=0$ .

**8.4.** 1)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4}$  2)  $\frac{x-6}{-4} = \frac{y-1}{-1}$ , 3)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1}$ ,

4)  $x+y-25=0$ . 5)  $\frac{19}{\sqrt{17}}$ .      **8.5.** 3.      **8.6.**  $\langle 1, 2 \rangle$

**8.7.**  $x=3$ .      **8.8.**  $O(3; 1/3)$ .

**8.9.**  $5x-3y-25=0$ ,  $5x-3y+9=0$ .

**8.10.** а)  $x-y+5=0$ ; б)  $x+2=0$ ; в)  $y-3=0$ .

**8.11.**  $B(12; 4)$ .      **8.12.** а)  $\arccos \frac{7}{\sqrt{130}}$ ; б)  $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ .

## Занятие 9

### Прямая и плоскость в пространстве

#### Аудиторная работа

**9.1.** Даны две точки  $M_1(3; -1; 2)$  и  $M_1(4; -2; -1)$ . Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_1$  перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{M_1M_2}$ .

**9.2.** Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки  $M_1(1; 3; 4)$ ,  $M_2(3; 0; 2)$  и  $M_3(2; 5; 7)$ .

**9.3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(1; 0; -2)$  перпендикулярно к плоскостям  $x - 2y + z + 5 = 0$  и  $2x - y + 3z - 1 = 0$ .

**9.4.** Найти расстояние между плоскостями  $2x - 3y + 6z - 21 = 0$  и  $4x - 6y + 12z + 35 = 0$ .

**9.5.** Составить уравнения прямой, проходящей через точку  $M(4; -3; 2)$  перпендикулярно к плоскости  $x - 3y + 2z - 5 = 0$ .

**9.6.** Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y - z - 1 = 0, \\ x - y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

**9.7.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2; 0; -3)$  параллельно прямым

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

**9.8.** Найти проекцию точки  $A(3; -1; 4)$  на плоскость  $2x + y - z + 5 = 0$ .

**9.9.** Найти проекцию точки  $A(2; 3; 1)$  на прямую  $\frac{x+7}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$  и расстояние от этой точки до данной прямой.

### Домашнее задание

**9.10.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(-1; 2; 3)$ , параллельно плоскости, проходящей через точки  $M_1(1; 0; -2)$ ,  $M_2(3; 4; 5)$ ,  $M_3(-1; 2; 0)$ .

**9.11.** Найти расстояние от точки  $M(2; 1; 1)$  до плоскости  $x + y - z + 1 = 0$ .

**9.12.** Определить, при каком значении параметра  $\alpha$  плоскость  $\alpha x + (2\alpha - 1)y + z - 5 = 0$ :

а) параллельна плоскости  $2x + 3y + z - 4 = 0$ ;

б) перпендикулярна плоскости  $3x + y - z = 0$ .

**9.13.** Найти координаты точки  $C$ , симметричной точке  $P(-3; 1; -9)$  относительно плоскости  $4x - 3y - z - 7 = 0$ .

**9.14.** Вычислить угол между прямой  $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$  и плоскостью  $2x + 3y - z + 1 = 0$ .

**9.15.** Пересекаются ли прямые  $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$  и  $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{5}$ ?

**9.16.** Найти координаты точки  $C$ , симметричной точке  $P(2; -5; 7)$  относительно прямой, проходящей через точки  $M_1(5; 4; 6)$  и  $M_2(-2; -17; -8)$ .

**9.17.** Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами  $A(3; 6; -7)$ ,  $B(-5; 1; -4)$ ,  $C(0; 2; 3)$ , проведенной из вершины  $C$ .

### Ответы

**9.1.**  $x - y - 3z + 2 = 0$ .

**9.2.**  $5x + 8y - 7z - 1 = 0$ .

**9.3.**  $5x + y - 3z - 11 = 0$ .

**9.4.**  $5, 5$ .

**9.5.**  $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}$ .

**9.6.**  $\frac{\pi}{3}$ .

**9.7.**  $x + 2y - 5z - 17 = 0$ .

**9.8.**  $\langle -2; 5 \rangle$

9.9.  $\langle 5; 2; 4 \rangle$

9.10.  $x+3y-2z+1=0$ .

9.11.  $\sqrt{3}$ .

9.12. а)  $\alpha=2$ ; б)  $\alpha=0,4$ .

9.13.  $O(1;-2;-10)$ .

9.14.  $\sin \varphi = -\frac{5}{7}; \varphi \approx -45^\circ 36'$ .

9.15. Нет.

9.16.  $O(4;-1;-3)$ .

9.17.  $x=2t, y=-3t+2, z=17t+3$ .

## Занятие 10

### *Кривые 2-го порядка на плоскости. Поверхности 2-го порядка*

#### Аудиторная работа

10.1. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 8, малая полуось равна 3;

б) малая полуось равна 6, эксцентриситет равен  $4/5$ .

10.2. Найти координаты фокусов и эксцентриситет эллипса

$$4x^2 + y^2 = 4.$$

10.3. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 30, а расстояние между вершинами равно 24;

б) действительная полуось равна 4 и гипербола проходит через точку  $M(2;4\sqrt{2})$ .

10.4. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы - в вершинах эллипса  $6x^2 + 5y^2 = 30$ .

10.5. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:

а) парабола имеет фокус  $F(0;2)$  и вершину в точке  $O(0;0)$ ;

б) парабола симметрична относительно оси  $Ox$  и проходит через точку  $M(4;-2)$ .

**10.6.** Составить канонические уравнения парабол, фокусы которых совпадают с фокусами гиперболы  $x^2 - y^2 = 8$ .

**10.7.** Выяснить, какая фигура соответствует каждому из данных уравнений, и (в случае непустого множества) изобразить ее в системе координат  $Oxy$ :

а)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ ;

б)  $3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y + 20 = 0$ ;

в)  $y^2 - 3x - 4y + 10 = 0$ ;

г)  $2x^2 + 3y^2 + 6x + 6y + 25 = 0$ .

**10.8.** Определить вид поверхности и построить ее:

а)  $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$ ;

б)  $x = y^2 + 2z^2$ ;

в)  $2x^2 - y^2 + z^2 = 4$ ;

г)  $2x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$ ;

д)  $z^2 = 4x$ ;

е)  $x^2 + z^2 = 5$ .

### Домашнее задание

**10.9.** Найти уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями  $x \pm 2y = 0$ , а расстояние между вершинами, лежащими на оси  $Ox$ , равно 4.

**10.10.** Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки  $M_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; -1\right)$  и  $M_2\left(-1; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ , и найти его эксцентриситет.



**10.11.** Найти длину общей хорды параболы  $y = 2x^2$  и окружности  $x^2 + y^2 = 5$ .

**10.12.** Написать уравнение параболы, проходящей через точки  $(0; 0)$  и  $(-2; 4)$ , если параболы симметрична: а) относительно оси  $Ox$ ; б) относительно оси  $Oy$ .

**10.13.** Какая фигура соответствует каждому из данных уравнений? Сделать чертеж, если это возможно.

а)  $4x^2 + 25y^2 + 4x - 10y - 8 = 0$ ;

б)  $x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$ ;

в)  $x^2 - 6x + 2y + 11 = 0$ .

**10.14.** Определить вид поверхности и построить ее:

а)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ;

б)  $x^2 + 3z^2 - 8x + 18z + 34 = 0$ ;

в)  $5x^2 + y^2 + 10x - 6y - 10z + 14 = 0$ ;

г)  $xy = 1$ .

**Ответы**

**10.1. а)**  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ;      **б)**  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$ .

**10.2.**  $F_1 \left( -\sqrt{3}, \right)$   $F_2 \left( \sqrt{3}, \right)$   $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**10.3. а)**  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$ ;      **б)**  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$ .

**10.4.**  $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{5} = 1$ .      **10.5. а)**  $x^2 = 8y$ ;      **б)**  $y^2 = x$ .

10.6.  $y^2 = \pm 16x$ . 10.7. а) окружность  $\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3} = 12$ .

б) гипербола  $\frac{\sqrt{x+1}}{3} - \frac{\sqrt{y-2}}{4} = 1$ ;

в) парабола  $\sqrt{y-2} = 3\sqrt{x-2}$ ;

г) пустое множество.

10.8. а) сфера;

б) эллиптический параболоид;

в) однополостный гиперболоид; г) коническая поверхность;

д) параболический цилиндр; е) круговой цилиндр; 10.9.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ .

10.10.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ;  $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . 10.11. 2.

10.12. а)  $y^2 = -8x$ ;

б)  $y = x^2$ .

10.13. а)  $\frac{(x+0,5)^2}{2,5} + \frac{(y-0,2)^2}{0,4} = 1$ ; б)  $x+y+2=0$ ;  $x-y=0$ ;

в)  $(x-3)^2 = -2(y+1)$ .

10.14. а)  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ ;

б)  $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(z+3)^2}{3} = 1$ ;

в)  $z = \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{10}$ .

## Занятие 11

*Функция. Предел последовательности и предел функции*

### Аудиторная работа

11.1. Найти области определения функций:

а)  $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ .

б)  $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$ .

$$\text{в)} y = \sqrt{25 - x^2} + \lg \sin x.$$

$$\text{г)} y = 2^{x^2 - 2}.$$

**11.2.** Проверить функции на четность или нечетность:

$$\text{а)} f(x) = x^4 + 5x^2.$$

$$\text{б)} f(x) = x^2 + x.$$

$$\text{в)} f(x) = \frac{x}{2^x - 1}.$$

$$\text{г)} f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}.$$

**11.3.** Построить графики функций:

$$\text{а)} y = \frac{2x + 3}{x - 1}.$$

$$\text{б)} y = |3x + 4 - x^2|.$$

$$\text{в)} y = -2 \sin(2x + 2).$$

$$\text{г)} y = x \sin x.$$

**11.4.** Вычислить пределы:

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}.$$

$$\text{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n - 1}{5n + 7} - \frac{1 + 2n^3}{2 + 5n^3} \right).$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}.$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 9x - 5}{x^2 - 4x - 5}.$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{1 - \sqrt{3 - x}}.$$

$$\text{е)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right).$$

$$\text{ж)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 - 2n - 1} - \sqrt{n^2 - 7n + 3} \right).$$

$$\text{з)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 4}{3 - 2x - 5x^3}.$$

$$\text{и)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{16 + x^2} - 4}.$$

$$\text{к)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}.$$

$$\text{л)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$\text{м)} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}.$$

$$\text{н)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 9x + 10}.$$

**11.5.** Используя замечательные пределы, найти:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$ .

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$ .

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}$ .

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ .

д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ .

е)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi - 4x}$ .

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} \right)^x$ .

з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

и)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{7x+3}{9x+3} \right)^{1/x}$ .

к)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6-x}{7-x} \right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}$ .

л)  $\lim_{x \rightarrow \infty} ((2x+1)(\ln(3x+1)) - \ln(3x-2))$ .

м)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x-1}$ .

н)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x - 1}$ .

о)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - 1}{x}$ .

### Домашнее задание

**11.6.** Найти пределы указанных функций:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4x^2 + 3x^3}{x^3 - 7x - 10}$ .

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 10x + 20}{x^3 - 10x^2 - 1}$ .

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 4x + 3}$ .

г)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x-1} - 2}$ .

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \left( \sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 1} \right) \right)$ .

е)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$ .

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{2+x} \right)^{3x}.$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x \sin 2x}.$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}.$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow \infty} ((x-4)(\ln(2-3x)) - \ln(5-3x)).$$

### ОТВЕТЫ

$$\text{11.1. а) } \left( -\infty; 1 \right) \cup \left[ +\infty; \right)$$

$$\text{б) } \left[ -\frac{1}{3}; 1 \right];$$

$$\text{в) } x \in \left[ 5; -\pi \right) \cup \left( 0; \pi \right];$$

$$\text{г) } \left( -\infty; +\infty \right);$$

11.2. а) Четная;

б) Ни четная, ни нечетная;

в) Ни четная, ни нечетная;

г) Нечетная.

$$\text{11.4. а) } \frac{5}{3};$$

$$\text{б) } 1;$$

$$\text{в) } -\frac{2}{5};$$

$$\text{г) } 0;$$

$$\text{д) } -1;$$

$$\text{е) } -\frac{1}{6};$$

$$\text{ж) } \pm \frac{5}{2};$$

$$\text{з) } 0;$$

$$\text{и) } 4;$$

$$\text{к) } -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{л) } \frac{2}{3};$$

$$\text{м) } 0;$$

$$\text{н) } 3;$$

$$\text{о) } \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{11.5. а) } \frac{1}{3};$$

$$\text{б) } \frac{3}{2};$$

$$\text{в) } 6;$$

$$\text{г) } 4;$$

$$\text{д) } \frac{1}{2};$$

$$\text{е) } -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\text{ж) } e^2;$$

- з)  $e^3$ ;                      и)  $e^{-2/3}$ ;                      к)  $e^{-1}$ ;  
 л)  $e^2$ ;                      м)  $e$ ;                      н)  $\frac{1}{\ln 3}$ ;  
 л)  $2 \ln a$ .                      11.6. а) 3;                      б) 0;  
 в)  $-1$ ;                      г) 40;                      д) 2;  
 е)  $-\frac{1}{2}$ ;                      ж)  $e^{-6}$ ;                      з)  $4/3$ ;  
 и)  $-8$ ;                      к)  $e^{-4}$ ;                      л)  $e^{-1/2}$ ;                      м) 1.

## Занятие 12

*Сравнение бесконечно малых функций.  
Непрерывность функций. Точки разрыва*

### Аудиторная работа

**12.1.** Вычислить пределы, используя теорему об отношении двух бесконечно малых функций:

- а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$ .                      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{2 \operatorname{tg} 3x}$ .  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$ .                      г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 10x}$ .  
 д)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 3(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$ .                      е)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2 - 25}$ .

**12.2.** Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва:

- а)  $f(x) = \frac{x}{x-1}$ .                      б)  $f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x-2}$ .

$$\text{в)} f(x) = 3^{4 - \frac{x}{x^2}}.$$

$$\text{г)} f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$\text{д)} f(x) = \arctg \frac{1}{x-3}.$$

$$\text{е)} f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}.$$

$$\text{ж)} f(x) = \begin{cases} 2^x, & -\infty < x \leq 1, \\ x^2 + 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$\text{з)} f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\infty < x \leq 1, \\ x^2 - 3, & 1 < x < 2, \\ x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$\text{и)} f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-2}} - 1}{5^{\frac{1}{x-2}} + 1}.$$

$$\text{к)} f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}.$$

### Домашнее задание

12.3. Вычислить пределы:

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 7x)}{\sin 2x}.$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 7x} - 1}{x^2 + 3x}.$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{\arcsin(1 - 2x)}.$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\text{tg}(x^2 - 3x + 2)}.$$

12.4. Исследовать на непрерывность функции; установить характер точек разрыва:

$$\text{а)} f(x) = \frac{\text{tg } x}{x^2 + 2x}.$$

$$\text{б)} f(x) = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}.$$

$$\text{в)} f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2}, & -2 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & 2 < x \leq 4, \\ -2\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

Построить график функции.

$$\text{г)} f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}.$$

## Ответы

**12.1.** а) 3; б)  $-\frac{1}{6}$ ; в) -1; г)  $\frac{1}{2}$ ; д) 3; е)  $-\frac{1}{10}$ . **12.2.** а)  $x=1$  – точка разрыва 2-го рода; б)  $x=2$  – точка устранимого разрыва,  $f(x) \neq 1$ ; в)  $x=\pm 2$  – точки разрыва 2-го рода; г)  $x=1$  – точка устранимого разрыва; д)  $x=3$  – точка разрыва 1-го рода; е)  $x=-1$  – точка разрыва 1-го рода; ж) Функция непрерывна при  $x \in \mathbb{R}$ ; з)  $x=0$  – точка разрыва 1-го рода. **12.3.** а)  $7/2$ ; б)  $7/3$ ; в) -2; г) 4. **12.4.** а)  $x=0$  – точка устранимого разрыва,  $f(0) = \frac{1}{2}$ ;  $x=-2$  – точка разрыва 2-го рода; б)  $x=0$  – точка разрыва 1-го рода; в)  $x=4$  – точка разрыва 1-го рода; г)  $x=0$  – точка устранимого разрыва,  $f(0) = 2$ .

## Занятие 13

### *Дифференцирование функций. Логарифмическая производная*

#### Аудиторная работа

**13.1.** Исходя из определения, найти производные функций:

а)  $y(x) = 7x^2$ .      б)  $y(x) = \sqrt{x}$ .      в)  $y(x) = 5(\operatorname{tg} x - x)$ .

**13.2.** Найти производные функций:

а)  $y = 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + 7/x^5 + 4$ .

б)  $y = x^3 \sin x$ .

в)  $y = (x^4 + 1)/(x^4 - 1)$ .

г)  $y = (x^5 + 3x - 1)^4$ .

д)  $y = \sqrt[3]{((x^3 + 1)/(x^3 - 1))^2}$ .

е)  $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$ .

ж)  $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ .

з)  $y = (x^2 - 2x + 2)e^{-x^2}$ .

и)  $y = x \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$ .

к)  $y = -\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 2 \ln \sin \frac{x}{2}$ .



$$\text{л)} y = \arctg \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

$$\text{м)} y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}.$$

$$\text{н)} y = \cos^2 \left( \sin \frac{x}{3} \right) + \sin \left( \cos \frac{x}{3} \right).$$

$$\text{о)} y = 2^{\frac{x}{\ln x}}.$$

$$\text{п)} y = \ln \arctg \sqrt{1 + x^2}.$$

$$\text{р)} y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x.$$

$$\text{с)} y = \cos^3 2x + \ln \lg \frac{x}{2}.$$

$$\text{т)} y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

**13.3.** Используя предварительное логарифмирование, найти производные функций:

$$\text{а)} y = (x+1)^2 (x-1)^{35} \sqrt[3]{(x+2)^4} \sqrt[3]{(5x+3)^2}.$$

$$\text{б)} y = \frac{(x-3)^2 (2x-1)}{(x+1)^3}.$$

$$\text{в)} y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}.$$

$$\text{г)} y = x^3 \sqrt{\frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}.$$

$$\text{д)} y = x^{\sin x}.$$

$$\text{е)} y = x^{x^2}.$$

$$\text{ж)} y = (\sin x)^{\arcsin x}.$$

$$\text{з)} y = (\ln x)^{1/x}.$$

$$\text{и)} y = (\operatorname{tg} 3x)^{x^4}.$$

$$\text{к)} y = (1 + x^3)^{\arctg 7x}.$$

**13.4.** Составить уравнения касательной и нормали к параболе  $f(x) = x^2 + 4$  в точке  $M(1;5)$ .

### Домашнее задание

**13.5.** Найти производные функций:

$$\text{а)} y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x. \quad \text{б)} y = x^3 \ln^2(\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x).$$

$$\text{в)} y = \sqrt{\frac{\cos^2 x + 1}{\sin 2x + 1}}.$$

$$\text{г)} y = (\sin^3 x + e^{x^2})^3 + \lg^2(x^4 - \sin^2 x).$$

$$\text{д)} y = \sqrt{x} \cdot 3^{x^2} - \arctg \sqrt{1 + e^{-x^3}}. \quad \text{е)} y = (x^3 + 1)^{\lg 2x}.$$

$$\text{ж)} y = \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2} \cdot x^{4/3}}.$$

$$\text{з)} y = (\arccos x)^2 \cdot \ln(\arccos x).$$

**13.6.** Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = e^{1-x^2}$  в точке  $x_0 = -1$ .

### О т в е т ы

**13.4.**  $y = 2x + 3$ ;  $x + 2y - 11 = 0$ .    **13.6.**  $2x - y + 3 = 0$ ,  $x + 2y - 1 = 0$ .

## З а н я т и е 14

*Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Дифференциал функции*

### Аудиторная работа

**14.1.** Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\text{а)} x = t^2 + 2, y = \frac{1}{3}t^3 - 1.$$

$$\text{б)} x = \frac{1}{t+1}, y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2.$$

$$\text{в)} x = a(\varphi - \sin \varphi), y = a(1 - \cos \varphi). \quad \text{г)} x = \ln t, y = t^2 - 1.$$

$$\text{д)} x = \arccos \sqrt{t}, y = \sqrt{t - t^2}.$$

$$\text{е)} x = \arctg t, y = \ln(1 + t^2).$$

$$\text{ж)} x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$$

$$\text{з)} x = \tg t, y = \sin 2t + 2 \cos 2t.$$

**14.2.** Найти  $y'_x$  в указанных точках:

$$\text{а)} x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, t = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{б)} x = \frac{3at}{1+t^2}, y = \frac{3at^2}{1+t^2}; t = 2.$$

**14.3.** Найти производные функций, заданных неявно:

а)  $e^x + 2x^2 y^2 - e^y = 0$ .

б)  $2y \ln y = x$ .

в)  $x - y = \arcsin x - \arcsin y$ .

г)  $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ .

д)  $\operatorname{arctg} y = y - x^2$ .

е)  $\sin(xy) + \cos(xy) = 0$ .

ж)  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

з)  $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$ .

**14.4.** Найти  $y'_x$  в точке  $x=1$ , если  $x^3 - 2x^2 y^2 + 5x + y - 5 = 0$ ,  $y(1) = 1$ .

**14.5.** Найти  $y'_x$  в точке  $(0,1)$ , если  $e^y + xy = \epsilon$ .

**14.6.** Найти дифференциалы функций:

а)  $y = x \operatorname{tg}^3 x$ .

б)  $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} + (\arcsin x)^2$ .

в)  $y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$ .

г)  $y^5 + y - x^2 = 1$ .

**14.7.** Найти приближенное значение функции  $y(x) = e^{x^2 - x}$  при  $x = 1, 2$ .

**14.8.** Вычислить приближенно:

а)  $\arcsin 0,05$ .

б)  $\ln 1,2$ .

в)  $\sqrt[4]{17}$ .

г)  $\operatorname{tg} 44^\circ 56'$ .

### Домашнее задание

**14.9.** Найти  $y'_x$ :

а)  $x = \frac{t+1}{t}, y = \frac{t-1}{t}$ .

б)  $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$ .

**14.10.** Убедиться в том, что функция, заданная параметрически уравнениями  $x = \frac{1 + \ln t}{t^2}, y = \frac{3 + 2 \ln t}{t}$ , удовлетворяет соотношению

$$yy' = 2x(y')^2 + 1.$$

**14.11.** Найти производные от функций, заданных неявно:

а)  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ .                      б)  $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y)$ .

**14.12.** Убедиться в том, что функция  $y$ , определенная уравнением  $xy - \ln y = 1$ , удовлетворяет соотношению  $y^2 + (xy-1) \cdot y' = 0$ .

**14.13.** Найти дифференциалы функций:

а)  $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} - 3$ .      а)  $e^y = x + y$ .

**14.14.** Вычислить приближенно:

а)  $\sin 29^\circ$ .                                      б)  $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$ .

**Ответы**

**14.1. а)**  $\frac{t}{2}$ .                                      б)  $-\frac{2t}{t+1}$ .

в)  $\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ .                      г)  $2t^2$ .

д)  $2t-1$ .                                      е)  $2t$ .

ж)  $-\operatorname{tg} t$ .                                      з)  $2(\cos 2t - 2 \sin 2t) \cos^2 t$ .

**14.2. а)**  $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^{\frac{2}{3}}$ .                                      б)  $-\frac{4}{3}$ .

**14.3. а)**  $\frac{e^x + 4xy^2}{e^y - 4x^2y}$ .                                      б)  $\frac{1}{2 \ln |y+1|}$ .

в)  $\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)\sqrt{1-y^2}}{(\sqrt{1-y^2}-1)\sqrt{1-x^2}}$ .                                      г)  $\frac{2^x - 2^{x+y}}{2^{x+y} - 2^y}$ .

$$\text{д) } \frac{2x(+y^2)}{y^2}$$

$$\text{е) } -\frac{y}{x}$$

$$\text{ж) } -3\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$\text{з) } \frac{e^y \sin x + e^x \sin y}{e^y \cos x - e^x \cos y}$$

$$14.4. \frac{4}{3}$$

$$14.5. -e^{-1}$$

$$14.6. \text{ а) } \operatorname{tg}^2 x \left( \operatorname{tg} x + \frac{3x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$\text{ б) } \left( \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{2 \operatorname{arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$\text{ в) } \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$\text{ г) } \frac{2x dx}{5y^4 + 1}$$

$$14.7. 1, 2.$$

$$14.8. \text{ а) } 0, 05.$$

$$\text{ б) } 0, 2.$$

$$\text{ в) } 2, 02.$$

$$14.9. \text{ а) } -1.$$

$$\text{ б) } \frac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$$

$$14.11. \text{ а) } \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$$\text{ б) } -\frac{y \cos^2(x+y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}{x \cos^2(x+y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}$$

$$14.13. \text{ а) } \operatorname{arcsin} x dx.$$

$$\text{ б) } \frac{dx}{e^y - 1}$$

$$14.14. \text{ а) } 0, 485.$$

$$\text{ б) } 0, 355.$$

## Занятие 15

### Производные и дифференциалы высших порядков

#### Аудиторная работа

15.1. Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

$$\text{ а) } y = \cos^2 x.$$

$$\text{ б) } y = \operatorname{arctg} x^2.$$

в)  $y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}$ .    г)  $y = \frac{1}{3} x^2 \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$ .

15.2. Показать, что функция  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$  при любых постоянных  $c_1$  и  $c_2$  удовлетворяет уравнению  $y'' - 5y' + 6y = 0$ .

15.3. Найти производные 2-го порядка от функций, заданных неявно:

а)  $y = 1 + x e^y$ .

б)  $x^3 + y^3 = 3xy$ .

в)  $\arctg y = y - x$ .

г)  $y = x + \ln y$ .

15.4. Найти производные 2-го порядка от функций, заданных параметрически:

а)  $x = t^2 + 2, y = \frac{1}{3} t^3 - 1$ .

б)  $x = \arcsin t, y = \sqrt{1-t^2}$ .

в)  $x = a \cos^2 t, y = a \sin^2 t$ .

г)  $x = \ln t, y = t^2 - 1$ .

15.5. Найти дифференциалы 1, 2 и 3-го порядков функции  $y = (2x-3)^3$ .

15.6. Найти дифференциалы 2-го порядка функций:

а)  $y = e^{-x^2}$ .

б)  $xy + y^2 = 1$ .

15.7. Найти дифференциал 3-го порядка функции  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

15.8. Найти приближенное значение  $\sqrt[5]{31}$  с точностью до двух знаков после запятой.

### Домашнее задание

15.9. Найти производные второго порядка следующих функций:

а)  $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$ .

б)  $y = \ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right)$ .

15.10. Найти  $y^{(n)}(x)$ , если  $y = e^{-x}$ .

15.11. Найти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ , если:

а)  $e^{x+y} = xy$ .      б)  $x = \frac{1}{\cos t}, y = \operatorname{tg} t$ .

15.12. Вычислить значение производной второго порядка функции  $y$ , заданной уравнением  $x^2 + 2y^2 - xy + x + y = 4$ , в точке  $M(1; 1)$ .

15.13. Доказать, что функция  $y = e^{4x} + 2e^{-x}$  удовлетворяет уравнению  $y'' - 13y' - 12y = 0$ . Записать для этой функции  $d^3 y$ .

15.14. Вычислить приближенное значение функции  $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 12}$  при  $x = 1,3$  с точностью до двух знаков после запятой.

**Ответы**

15.9. а)  $-\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ .      б)  $-\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ .

15.10.  $(-1)^n e^{-x}$ .      15.11. а)  $-\frac{y((x-1)^2 + (y-1)^2)}{x^2(y-1)^3}$ .

15.11. б)  $-\operatorname{ctg}^3 t$ .      15.12.  $-1$ .

15.13.  $(4e^{4x} - 2e^{-x}) dx^3$ .      15.14. 1,93.

## З а н я т и е 16

### *Правило Лопиталья–Бернулли. Формула Тейлора*

#### **Аудиторная работа**

16.1. Применяя правило Лопиталья–Бернулли, найти пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ .      б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2\cos x - 2}$ .

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}.$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right).$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 10^x)^{1/x}.$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tg x)^{2x - \pi}.$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^x.$$

**16.2.** Разложить многочлен  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 13x + 9$  по степеням двучлена  $x+2$ .

**16.3.** Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции  $f(x) = 10^x$  в точке  $x_0 = 0$ .

**16.4.** Вывести приближенную формулу  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$  и оценить ее точность при  $|x| < 0,05$ .

**16.5.** Вычислить с точностью до  $10^{-4}$   $\cos 10^\circ$ .

**16.6.** Найти пределы, используя разложение по формуле Тейлора:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x^3}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{2x} + x e^x - 2 e^{2x} + 2 e^x}{(e^x - 1)^3}.$$

### Домашнее задание

**16.7.** Найти пределы функций, применяя правило Лопиталья-Бернулли:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \ln x}{x}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$



$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\arctg x} - \frac{1}{x} \right).$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln \left( \leftarrow -1 \right)$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}.$$

**16.8.** Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  при  $x_0 = 1$ .

**16.9.** Вычислить приближенно  $\sin 1^\circ$  с точностью до  $\Delta = 10^{-4}$ .

**16.10.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}$ , используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

### О т в е т ы

**16.7.** а) 1.      б) 1/6.      в) 0.      г) 0.      д)  $e^{-6}$ .

$$\text{16.8. } 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}(x-1)^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}(x-1)^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4 \cdot 4!} \frac{(x-1)^4}{(1+\theta(x-1))^{9/2}},$$

$$0 < \theta < 1.$$

**16.9.** 0,0175.      **16.10.**  $-\frac{1}{6}$ .

## З а н я т и е 17

### *Монотонность функций. Экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции*

#### Аудиторная работа

**17.1.** Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{4}.$$

$$\text{б) } y = \frac{\ln x}{x}.$$

$$\text{в)} y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}.$$

$$\text{г)} y = x - 2 \sin x.$$

$$\text{д)} y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}.$$

$$\text{е)} y = x^2 e^{-x}$$

**17.2.** Найти экстремумы функций, пользуясь производной 2-го порядка:

$$\text{а)} y = \sqrt{1-x} + x.$$

$$\text{б)} y = x^2(a-x)^2.$$

$$\text{в)} y = x^{1/x}.$$

$$\text{г)} y = \frac{x}{\ln x}.$$

**17.3.** Определить наибольшее и наименьшее значения данных функций в указанных интервалах:

$$\text{а)} y = x^4 - 2x^2 + 5; [-2, 2].$$

$$\text{б)} y = x + 2\sqrt{x}; [0, 4].$$

$$\text{в)} y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}; [0, 1]$$

$$\text{г)} \arctg \frac{1-x}{1+x}; [0, 1].$$

$$\text{д)} y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; [2, 1]$$

**17.4.** Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен  $72 \text{ см}^3$ , причем стороны основания относились бы как  $1 : 2$ . Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

**17.5.** Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом  $R$ .

### Домашнее задание

**17.6.** Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума следующих функций:

$$\text{а)} y = x\sqrt{1-x^2}.$$

$$\text{б)} y = \ln x - \arctg x.$$

**17.7.** Найти экстремум функции  $y = x + \frac{a^2}{x}$  ( $a > 0$ ), используя вторую производную.

**17.8.** Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах (или во всей области определения):

**а)**  $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$ ;  $[-1; 1]$

**б)**  $y = xe^{-x^2/2}$ .

**17.9.** Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле  $\alpha$  наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения будет наибольшей?

**О т в е т ы**

**17.6. а)** На  $(-1; -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}; 1)$  – убывает; на  $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$  – возрастает;  $y_{\min} = y(-1/\sqrt{2}) = -1/2$ ;  $y_{\max} = y(1/\sqrt{2}) = 1/2$ .

**17.6. б)** Возрастает на всей области определения.

**17.7.**  $y_{\max} = y(-a) = -2a$ ;  $y_{\min} = y(a) = 2a$ .

**17.8. а)** 1 и 3/5.    **17.8. б)**  $1/\sqrt{e}$  и  $-1/\sqrt{e}$ .    **17.9.**  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ .

**З а н я т и е 18**

*Выпуклость и вогнутость графиков функций. Асимптоты. Построение графиков функций*

**Аудиторная работа**

**18.1.** Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графиков функций:

**а)**  $y = \ln(x^2 + 1)$ .

**б)**  $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$ .

**в)**  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

**г)**  $y = xe^{-x}$ .

**18.2.** Найти асимптоты графиков функций:

а)  $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}$ .

б)  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

в)  $y = x + \sin x$ .

г)  $y = (x-2)e^{-1/x}$ .

**18.3.** Провести полное исследование и построить графики функций:

а)  $y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}$ .

б)  $y = x^2 e^{-x}$ .

в)  $y = x\sqrt{1-x^2}$ .

г)  $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ .

д)  $y = x^2 \ln x$ .

### Домашнее задание

**18.4.** Найти точки перегиба графиков функций:

а)  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ .

б)  $y = x \arctg x$ .

**18.5.** Найти асимптоты графика функции  $y = x \ln \left( e + \frac{1}{x} \right)$ .

**18.6.** Исследовать функции и построить их графики:

а)  $y = \frac{x^3}{1-x^2}$ .

б)  $y = xe^{1/x}$ .

### О т в е т ы

**18.4. а)**  $\left( -\frac{1}{2}, -\frac{8}{9} \right)$ .

**б)** Точек перегиба нет.

**18.5.**  $x = -\frac{1}{e}; y = x + \frac{1}{e}$ .

## Типовой расчет № 1

### Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

#### Задача 1

Исследовать систему уравнений и в случае совместности решить ее.

$$1.1. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_4 = 4. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.2. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.3. \text{ а) } \begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.4. \text{ а) } \begin{cases} 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.5. \text{ а) } \begin{cases} 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

$$1.6. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.7. \text{ a) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -5, \\ 4x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.8. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.9. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$$

$$1.10. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

$$1.11. \text{ a) } \begin{cases} 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -2. \end{cases}$$

$$1.12. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$1.13. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.14. \text{ a) } \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.15. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.16. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_4 = 5. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.17. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.18. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

$$1.19. \text{ a) } \begin{cases} 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.20. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1, \\ x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.21. \text{ a) } \begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.22. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

$$1.23. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 - x_3 - 5x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$1.24. \text{ a) } \begin{cases} x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 7x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$



$$1.25. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

## Задача 2

2.1. Вычислить  $(\vec{a}, \vec{b})$ , где  $\vec{a} = 3\vec{m}_1 - 2\vec{m}_2$ ;  $\vec{b} = \vec{m}_1 + 4\vec{m}_2$ ;  $\vec{m}_1, \vec{m}_2$  – единичные векторы, угол между которыми равен  $\frac{\pi}{4}$ .

2.2. Найти проекцию вектора  $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$  на направление вектора  $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ .

2.3. Найти  $(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ , если  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ .

2.4. Вектор  $\vec{c}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a} = 5\vec{i} - 2\vec{k}$ , образует острый угол с осью  $Oz$ . Найти координаты вектора  $\vec{c}$ , если  $|\vec{c}| = 3\sqrt{29}$ .

2.5. Найти  $(\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$  если  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ .

2.6. Найти  $(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ , если  $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n} - \vec{p}$ ;  $\vec{b} = \vec{m} - 4\vec{p}$ ;  $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$  – ортогональный базис и  $|\vec{m}| = 2$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $|\vec{p}| = 4$ .

2.7. Найти длину вектора  $\vec{a} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$ , если  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ .

2.8. Найти вектор  $|\vec{b}|$ , коллинеарный вектору  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  и удовлетворяющий условию  $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$ .

2.9. Найти  $(\vec{a} - 5\vec{b}, \vec{a} + 3\vec{b})$  если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$ .

2.10. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, сторонами которого служат векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ .

2.11. Найти вектор  $\vec{d}$ , удовлетворяющий условиям  $(\vec{d}, \vec{a}) = 5$ ,  $(\vec{d}, \vec{b}) = 2$ ,  $(\vec{d}, \vec{c}) = 3$ , если  $\vec{a} \in \langle 1, 2, 0 \rangle$ ;  $\vec{b} \in \langle 1, 0, 5 \rangle$ ;  $\vec{c} \in \langle 0, 0, 0 \rangle$

**2.12.** Даны векторы  $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$ ,  $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ ,  $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$ .  
Найти проекцию вектора  $\vec{a} + \vec{b}$  на направление вектора  $\vec{c}$ .

**2.13.** Вектор  $\vec{b}$ , коллинеарный вектору  $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{j}-7,5\vec{k}$ , образует острый угол с осью  $Oz$ . Найти координаты вектора  $\vec{b}$ , если  $|\vec{b}|=50$ .

**2.14.** Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{AB}=3\vec{a}-2\vec{b}$  и  $\vec{AC}=6\vec{a}+3\vec{b}$ , если  $|\vec{a}|=4$ ,  $|\vec{b}|=3$   $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ .

**2.15.** Найти  $|\llbracket \vec{a}, \vec{b} \rrbracket|$ , если  $|\vec{a}|=8$ ,  $|\vec{b}|=15$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 96^\circ$ .

**2.16.** Какой угол образуют векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$  и  $\vec{n}=5\vec{a}-4\vec{b}$  ортогональны,  $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ ?

**2.17.** Вычислить  $\angle(\vec{b}, \vec{c})$ ,  $\angle(\vec{c}, \vec{a})$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b})$  если  $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ,  $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ .

**2.18.** Даны точки  $A(-5, 7, -6)$  и  $B(7, -9, 9)$ . Найти проекцию вектора  $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$  на направление вектора  $\vec{AB}$ .

**2.19.** Найти координаты вектора  $\vec{a}$ , если  $\angle(\vec{i}, \vec{a}) = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle(\vec{j}, \vec{a}) = \frac{\pi}{4}$ ,  $|\vec{a}|=6$ .

**2.20.** Найти вектор  $\vec{x}$ , ортогональный вектору  $\vec{a}(2, -3, 4)$  имеющий с ним одинаковую длину и лежащий в плоскости  $Oyz$ .

**2.21.** Найти угол между векторами  $\vec{a}=2\vec{m}+4\vec{n}$  и  $\vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$ , если  $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$ ,  $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}$ .

**2.22.** Найти проекцию вектора  $\vec{a}( -3, 4 )$  на направление вектора  $\vec{b}( 2, 1 )$

**2.23.** Какой угол образуют единичные векторы  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ , если векторы  $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$  и  $\vec{b}=5\vec{m}-4\vec{n}$  ортогональны?

**2.24.** Доказать, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если к одному из них прибавить вектор, ортогональный другому вектору сомножителю.

2.25. При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = 5\vec{i} + \beta\vec{j} - \vec{k}$  коллинеарны?

### Задача 3

3.1. Найти  $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$  где  $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ ;  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ .

3.2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$ , если  $|\vec{m}| = 5$ ;  $|\vec{n}| = 3$ ,  $\angle \vec{m}, \vec{n} \approx \frac{\pi}{6}$ .

3.3. Вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $\frac{\pi}{6}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 3$ , вычислить  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ .

3.4. Найти  $[\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}]$  где  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ;  $\vec{b} = 3\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j}$ .

3.5. Найти вектор  $\vec{x}$ , если известно, что он ортогонален векторам  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  и  $|\vec{x}| = 5$ .

3.6. Найти координаты вектора  $\vec{x}$ , если он ортогонален векторам  $\vec{a} \llcorner (3, -1)$ ,  $\vec{b} \llcorner (-1, 3)$  и  $|\vec{x}| = 1$ .

3.7. Найти единичный вектор  $\vec{d}$ , компланарный векторам  $\vec{a} \llcorner (-1, 3)$  и  $\vec{b} \llcorner (2, 0)$  и ортогональный вектору  $\vec{c} \llcorner (1, 1)$ .

3.8. Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$  и  $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$ , если  $|\vec{m}| = 5$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $\angle \vec{m}, \vec{n} \approx \frac{\pi}{6}$ .

3.9. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, сторонами которого служат векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ .

3.10. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ , если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

3.11. Вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярный векторам  $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$ , образует с осью  $Oy$  тупой угол. Найти координаты вектора  $\vec{x}$ , если  $|\vec{x}| = 26$ .

**3.12.** Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , если  $A(-1, -3, 4)$ ,  $B(-1, -3, 4)$ ,  $C(4, 4)$

**3.13.** Вершины треугольной пирамиды находятся в точках  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(4, -1, 3)$ ,  $C(3, 5, 2)$ ,  $D(0, -3, 2)$ . Найти длину высоты, проведенной из вершины  $A$ .

**3.14.** Проверить, лежат ли точки  $A(-1, 2, 5)$ ,  $B(0, 5, 3)$ ,  $C(1, 2, 3)$ ,  $D(2, -1, 2)$  в одной плоскости.

**3.15.** Проверить, компланарны ли векторы  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 7\vec{i} + 14\vec{j} - 13\vec{k}$ .

**3.16.** Дана треугольная пирамида с вершинами  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(3, 4, 2)$ ,  $C(2, 3, 2)$ ,  $D(7, 2, 2)$ . Найти длину высоты пирамиды, проведенной на грань  $BCD$ .

**3.17.** Найти площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы  $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .

**3.18.** Найти  $[\vec{a} - \vec{b}, \vec{a}]$  если  $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ .

**3.19.** Найти  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , если векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  образуют правую тройку и взаимно перпендикулярны,  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 4$ .

**3.20.** Показать, что точки  $A(3, 1, -1)$ ,  $B(5, 7, -2)$ ,  $C(1, 5, 0)$  и  $D(9, 4, -4)$  лежат в одной плоскости.

**3.21.** Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j}$ .

**3.22.** Найти единичный вектор, ортогональный векторам  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  и  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

**3.23.** Вершинами треугольной пирамиды являются точки  $A(-5, 4, 8)$ ,  $B(2, 3, 1)$ ,  $C(4, 1, -2)$  и  $D(6, 3, 7)$ . Найти длину высоты, проведенной на грань  $BCD$ .

**3.24.** Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ .

**3.25.** Проверить, лежат ли точки  $A(-1, 2, 3)$ ,  $B(0, 4, -1)$ ,  $C(2, 3, 1)$  и  $D(-2, 1, 0)$  в одной плоскости.

## Задача 4

4.1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой  $2x - 6y + 13 = 0$ .

4.2. Найти угол между прямой  $2x + 3y - 1 = 0$  и прямой, проходящей через точки  $M_1(1; 2)$  и  $M_2(3; 3)$

4.3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $M(1; 4)$  параллельно прямой  $2x + 3y - 4 = 0$ .

4.4. Дан треугольник с вершинами в точках  $A(1; 2)$ ,  $B(1; 1)$  и  $C(4; 4)$ . Написать уравнение прямой, проходящей через вершину  $A$  параллельно противоположной стороне.

4.5. При каком значении параметра  $\alpha$  прямые  $(\alpha + 2)x + (-4\alpha)y + 8 = 0$  и  $(\alpha - 2)x + (\alpha + 4)y - 7 = 0$  взаимно перпендикулярны?

4.6. Даны вершины треугольника  $A(5; 5)$ ,  $B(3; 3)$  и  $C(5; -8)$ . Определить длину медианы, проведенной из вершины  $C$ .

4.7. При каких значениях  $\alpha$  прямые  $ax - 2y - 1 = 0$  и  $6x - 4y - 3 = 0$ :  
а) параллельны; б) имеют одну общую точку?

4.8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(3; 3)$  перпендикулярно вектору  $\overline{M_1M_2}$ , если  $M_1(0; -2)$  и  $M_2(5; 5)$

4.9. Дан треугольник с вершинами в точках  $M_1(5; 5)$ ,  $M_2(1; 3)$  и  $M_3(0; 0)$ . Составить уравнение медианы, проведенной из вершины  $M_3$ .

4.10. Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(1; 2)$  перпендикулярно прямой, соединяющей точки  $M_2(3; 3)$  и  $M_3(0; -1)$

4.11. На прямой  $2x + y + 11 = 0$  найти точку, равноудаленную от двух данных точек  $A(1; 1)$  и  $B(0; 0)$

4.12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M(1; 1)$  параллельно прямой  $4x + y - 5 = 0$ .

4.13. Найти расстояние между прямыми  $3x - 4y + 25 = 0$  и  $6x - 8y - 50 = 0$ .

**4.14.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $M(2, 3)$  параллельно вектору  $\overrightarrow{AB}$ , если  $A(1, 2, 4)$ ,  $B(5, 8)$

**4.15.** Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y - 3z - 9 &= 0, \\ x - 2y + z + 3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

**4.16.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $M(1, 3)$  и точку пересечения прямых  $2x - y - 1 = 0$ ,  $3x + y - 4 = 0$ .

**4.17.** Найти значения параметров  $a$  и  $d$ , при которых прямая

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 + 4t \\ y &= 1 + 4t \\ z &= -3 + t \end{aligned} \right\}$$

принадлежит плоскости  $ax + 2y - 4z + d = 0$ .

**4.18.** Дан треугольник с вершинами в точках  $A(1, 5)$ ,  $B(-4, 3)$ ,  $C(2, 9)$ . Найти уравнение высоты, проведенной из вершины  $A$ .

**4.19.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $3x - 5y + 2 = 0$ ,  $5x - 2y + 4 = 0$  и точку  $A(1, 3)$ .

**4.20.** Дан треугольник с вершинами в точках  $A(1, 1)$ ,  $B(-2, 3)$ ,  $C(4, 7)$ . Написать уравнение медианы, проведенной из вершины  $A$ .

**4.21.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $A(1, -1)$  параллельно прямой, соединяющей точки  $M_1(2, -3)$  и  $M_2(5, 1)$ .

**4.22.** Даны уравнения сторон треугольника  $x + 2y - 1 = 0$ ,  $5x + 4y - 17 = 0$ ,  $x - 4y + 11 = 0$ . Составить уравнение прямой, проходящей через одну из вершин треугольника параллельно противоположной стороне.

**4.23.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(2, 3)$  ортогонально вектору  $\overrightarrow{M_1M_2}$ , если  $M_2(4, 5)$ .

**4.24.** Выяснить, принадлежат ли точки  $A(-1, 2)$ ,  $B(3, 4)$  и  $C(1, 2)$  одной прямой.

**4.25.** Даны точки  $A(-1, 2, 3)$ ,  $B(3, 1, 2)$  и  $C(1, 3, 1)$ . Найти точку пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

## Задача 5

Даны координаты вершин пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ . Требуется найти:  
 1) длину ребра  $A_1A_2$ ; 2) угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ ; 3) площадь грани  $A_1A_2A_3$ ; 4) объем пирамиды; 5) уравнение прямой  $A_1A_4$ ; 6) уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ ; 7) угол между ребром  $A_1A_4$  и гранью  $A_1A_2A_3$ ; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ . Сделать чертеж.

- |       |  |  |  |   |
|-------|--|--|--|---|
| 5.1.  | $A_1 \begin{pmatrix} 3, 9 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 6, 9, 1 \end{pmatrix}$  | $A_3 \begin{pmatrix} 7, 3 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 5, 8 \end{pmatrix}$      |
| 5.2.  | $A_1 \begin{pmatrix} 5, 4 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 8, 3 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 9, 9 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 4, 8 \end{pmatrix}$      |
| 5.3.  | $A_1 \begin{pmatrix} 4, 3 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 6, 3 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 9, 3 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 6, 7 \end{pmatrix}$      |
| 5.4.  | $A_1 \begin{pmatrix} 5, 5 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 3, 7, 1 \end{pmatrix}$  | $A_3 \begin{pmatrix} 7, 8 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 9, 2 \end{pmatrix}$      |
| 5.5.  | $A_1 \begin{pmatrix} 7, 1 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 1, 5 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 6, 3 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 9, 8 \end{pmatrix}$      |
| 5.6.  | $A_1 \begin{pmatrix} 5, 4 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 8, 4 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 5, 10 \end{pmatrix}$    | $A_4 \begin{pmatrix} 8, 2 \end{pmatrix}$      |
| 5.7.  | $A_1 \begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 6, 6 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 2, 0 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 2, 6 \end{pmatrix}$      |
| 5.8.  | $A_1 \begin{pmatrix} 5, 3 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 4, 4 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 5, 7 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 9, 6 \end{pmatrix}$      |
| 5.9.  | $A_1 \begin{pmatrix} 6, 2 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 4, 7 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 4, 7 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 3, 0 \end{pmatrix}$      |
| 5.10. | $A_1 \begin{pmatrix} -3, 1 \end{pmatrix}$    | $A_2 \begin{pmatrix} 3, 2, -3 \end{pmatrix}$ | $A_3 \begin{pmatrix} 3, -3, 3 \end{pmatrix}$ | $A_4 \begin{pmatrix} 2, 0, -4 \end{pmatrix}$  |
| 5.11. | $A_1 \begin{pmatrix} -1, 6 \end{pmatrix}$    | $A_2 \begin{pmatrix} 5, -2 \end{pmatrix}$    | $A_3 \begin{pmatrix} 1, 3, 0 \end{pmatrix}$  | $A_4 \begin{pmatrix} 6, 1, 5 \end{pmatrix}$   |
| 5.12. | $A_1 \begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 4, 0 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 1, 5, 6 \end{pmatrix}$  | $A_4 \begin{pmatrix} 0, 0, 5 \end{pmatrix}$   |
| 5.13. | $A_1 \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 2, 0 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 5, 0 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 2, 4 \end{pmatrix}$      |
| 5.14. | $A_1 \begin{pmatrix} 1, 2 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 5, 3, -2 \end{pmatrix}$ | $A_3 \begin{pmatrix} 3, 5 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 5, -1 \end{pmatrix}$     |
| 5.15. | $A_1 \begin{pmatrix} 2, 3, -2 \end{pmatrix}$ | $A_2 \begin{pmatrix} -3, 2 \end{pmatrix}$    | $A_3 \begin{pmatrix} 2, 0 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 5, 5 \end{pmatrix}$      |
| 5.16. | $A_1 \begin{pmatrix} 1, 1 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 4, 1 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 1, 7 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 4, -1 \end{pmatrix}$     |
| 5.17. | $A_1 \begin{pmatrix} -3, -2 \end{pmatrix}$   | $A_2 \begin{pmatrix} 2, 3 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} -2, -3 \end{pmatrix}$   | $A_4 \begin{pmatrix} -1, -2, 3 \end{pmatrix}$ |
| 5.18. | $A_1 \begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 0, 1 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 1, 4 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 5, 3 \end{pmatrix}$      |
| 5.19. | $A_1 \begin{pmatrix} 2, -1 \end{pmatrix}$    | $A_2 \begin{pmatrix} 0, 4 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 0, 4 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} -1, -3 \end{pmatrix}$    |
| 5.20. | $A_1 \begin{pmatrix} 0, 2 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 0, 5 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 1, 2 \end{pmatrix}$      |
| 5.21. | $A_1 \begin{pmatrix} 0, 5 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 0, 2 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 1, 2 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix}$      |
| 5.22. | $A_1 \begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 1, 2 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 0, 2 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 0, 5 \end{pmatrix}$      |
| 5.23. | $A_1 \begin{pmatrix} 1, 2 \end{pmatrix}$     | $A_2 \begin{pmatrix} 1, 0 \end{pmatrix}$     | $A_3 \begin{pmatrix} 0, 5 \end{pmatrix}$     | $A_4 \begin{pmatrix} 0, 0, 2 \end{pmatrix}$   |

$$5.24. A_1 \langle 0, 0 \rangle \quad A_2 \langle -2, 1 \rangle \quad A_3 \langle 4, 0 \rangle \quad A_4 \langle 2, 3 \rangle$$

$$5.25. A_1 \langle 3, 1, 0 \rangle, \quad A_2 \langle 7, 2 \rangle \quad A_3 \langle 1, 0, -5 \rangle \quad A_4 \langle 1, 5 \rangle$$

### Задача 6

Построить на плоскости кривую, приведя ее уравнение к каноническому виду.

$$6.1. x^2 + 8x + 2y + 20 = 0.$$

$$6.2. 3x^2 - 4y^2 + 18x + 15 = 0.$$

$$6.3. x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 7 = 0.$$

$$6.4. x^2 + 8x + y + 15 = 0.$$

$$6.5. x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0.$$

$$6.6. 5x^2 + 9y - 30x + 18y + 9 = 0.$$

$$6.7. 4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0.$$

$$6.8. 9x^2 - 16y^2 - 5x - 64y - 127 = 0.$$

$$6.9. 2x^2 + 8x - y + 12 = 0.$$

$$6.10. x^2 + 4y^2 - 6y + 3 = 0.$$

$$6.11. 9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0.$$

$$6.12. x^2 - 5x - y + 7 = 0.$$

$$6.13. x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0.$$

$$6.14. 4x^2 + 8x - y + 7 = 0.$$

$$6.15. 9x^2 + 4y^2 - 18x = 0.$$



6.16.  $x + 2y^2 - 8y + 3 = 0$ .

6.17.  $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y = 3$ .

6.18.  $x - 5y^2 + 10y - 6 = 0$ .

6.19.  $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24$ .

6.20.  $x^2 + 6x + 5 = 2y$ .

6.21.  $9x^2 + 10y^2 + 40y - 50 = 0$ .

6.22.  $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$ .

6.23.  $x - 2y^2 + 12y - 14 = 0$ .

6.24.  $y^2 + 2y + 4x - 11 = 0$ .

6.25.  $x^2 + 2y^2 + 2x = 0$ .

### Задача 7

Построить поверхность, приведя ее уравнение к каноническому виду.

7.1. а)  $z = 1 - x^2 - y^2$ ;

б)  $z = 4 - x^2$ .

7.2. а)  $x^2 + 2x + 2y^2 + 4z^2 = 0$ ;

б)  $y^2 + 5y + z = 4$ .

7.3. а)  $x^2 + y^2 + 4z^2 + 6x = 0$ ;

б)  $x^2 + z^2 = 2z$ .

7.4. а)  $2y^2 + z^2 = 1 - x$ ;

б)  $xy = 4$ .

7.5. а)  $9x^2 + 4y^2 - 8y - z^2 = 32$ ;

б)  $x^2 - y^2 - 6x = 0$ .

7.6. а)  $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2z = 0$ ;

б)  $z^2 + 4z - 6y - 20 = 0$ .

- 7.7. a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$ ;      б)  $y^2 = 4x + 1$ .
- 7.8. a)  $z = 2 + x^2 + y^2$ ;      б)  $z = 1 - x^2$ .
- 7.9. a)  $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z = 9$ ;      б)  $z^2 - 2z - 8x - 7 = 0$ .
- 7.10. a)  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ;      б)  $y^2 = 4x - 2$ .
- 7.11. a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ;      б)  $y = x^2$ .
- 7.12. a)  $x^2 + 3y^2 - z^2 + 2z = 2$ ;      б)  $x = 1 - z^2$ .
- 7.13. a)  $2x^2 - 4y^2 + z^2 = 2z$ ;      б)  $x^2 + 5z = 2x$ .
- 7.14. a)  $z = 4 - x^2 - y^2$ ;      б)  $x^2 + y^2 = 2y$ .
- 7.15. a)  $2y^2 + x^2 - 4x - 4z^2 + 4 = 0$ ;      б)  $z = -1$ .
- 7.16. a)  $y^2 - 2y - z^2 - x^2 = 0$ ;      б)  $x = y^2$ .
- 7.17. a)  $x^2 + y^2 - 2y = 2z - 1$ ;      б)  $z^2 + y^2 = 2z$ .
- 7.18. a)  $x^2 + y^2 = 2z + 6$ ;      б)  $x^2 + z^2 - 6z = 0$ .
- 7.19. a)  $9x^2 + 4y^2 + 8y - 36z^2 = 32$ ;      б)  $2x^2 + 5y = 10$ .
- 7.20. a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ;      б)  $z^2 = 7x$ .
- 7.21. a)  $5x^2 + 15y^2 - 4z^2 + 8z - 24 = 0$ ;      б)  $4x^2 - y^2 = 8$ .
- 7.22. a)  $4z^2 = x^2 + 2y^2 + 2x + 3$ ;      б)  $xy = 4$ .
- 7.23. a)  $x^2 - 4y^2 + z^2 - 8y = 4$ ;      б)  $x^2 + y^2 - 3 = 0$ .
- 7.24. a)  $x^2 + y^2 + 2z = 0$ ;      б)  $x^2 - y^2 + 4 = 0$ .
- 7.25. a)  $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ ;      б)  $x = 2 - y^2$ .

## Типовой расчет № 2

### Предел функции. Производная и ее применение к исследованию функций и построению графиков

#### Задача 1

Найти пределы функции, не пользуясь правилом Лопиталю.

1.1. а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 7x + 12}$ .      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{3x^3 + 3x^2 - 2}$ .

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$ .      г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x-3} \right)^{x+2}$ .

1.2. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 3x + 2}$ .      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 2x^3 + 1}{5x^3 + 4x + 3}$ .

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .      г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( -4x \right)^{\frac{1-x}{x}}$ .

1.3. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + x - 4}{3x^2 + 5x + 2}$ .      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 + 4x - 12}{3x^6 - 4x^2 + 1}$ .

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}$ .      г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x+2} \right)^{x+2}$ .

1.4. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$ .      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 - 6}{2x^4 - x - 12}$ .

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{tg} x}$ .      г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^x$ .

1.5. а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 + 4x + 1}$ .      б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 8x + 1}{7x^5 + 4x^2 + 5}$ .

$$\begin{array}{ll}
 \text{B)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2} & \text{r)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x \\
 \\
 \text{1.6. a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 - x - 2} & \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6x - 5}{5x^2 - x - 1} \\
 \\
 \text{B)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x} & \text{r)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} \\
 \\
 \text{1.7. a)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\frac{x}{2} - 1} & \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\underbrace{(+1)^3}_{\text{с}} - \underbrace{(-1)^3}_{\text{с}}}{\underbrace{(+1)^2}_{\text{с}} + \underbrace{(+1)^2}_{\text{с}}} \\
 \\
 \text{B)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x} & \text{r)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x - 2}{3x + 2} \right)^{2x} \\
 \\
 \text{1.8. a)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20} & \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{4x^6 + 6x^3 - 3} \\
 \\
 \text{B)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 2x} & \text{r)} \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{(+2x)^{\frac{1}{x}}}_{\text{с}} \\
 \\
 \text{1.9. a)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 9x + 10} & \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^2 - 3}{4x^6 + 6x^3 - 3} \\
 \\
 \text{B)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x} & \text{r)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 1}{2x + 1} \right)^x \\
 \\
 \text{1.10. a)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1} & \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 - 4x^5}{8 - 6x - x^5} \\
 \\
 \text{B)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 \frac{x}{3}} & \text{r)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 1}{x - 2} \right)^{2x - 1}
 \end{array}$$

$$1.11. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^3 - x - 6}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 2x^4 + 3}{2x^6 + 3x^2 - 1}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - 1}{x}.$$

$$1.12. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{20 + x - x^2}{3x^2 - 11x - 20}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^3 + x - 5}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x \operatorname{tg} 4x}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}.$$

$$1.13. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 5x - 21}{2x^2 - 3x - 9}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^5 - 5x^2 - 1}{24x^4 - 4x + 7}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin x \operatorname{ctg} 3x.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$1.14. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 7x + 2}{2x^2 + 5x + 2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6 + 5x^5 - x^3 + 5}{3x^4 - 4x^3 + 1}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x \sin 2x}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}.$$

$$1.15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 + 7x - 15}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x - 5x^2}{1 + 4x + 2x^2}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+2) - \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

$$1.16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x - 3x^2}{1 - 3x + 6x^3}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x-3) - \ln(x-2) - \ln(x-1)$$

$$1.17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - 2x - 1}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x - 2}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln(x + a) - \ln x.$$

$$1.18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x - 5}{2x^2 - x - 1}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos x - 1}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 4) \ln(x - 3x) - \ln(x - 3x).$$

$$1.19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 9x - 5}{x^2 - 4x - 5}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin 2x}{x \sin^2 2x}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 5) \ln(x + 4) - \ln(x + 1).$$

$$1.20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x^2 + 9x - 44}{2x^2 + 5x - 12}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x^2 - x + 2}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2) \ln(x + 3) - \ln(x - 4).$$

$$1.21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 + 3x^2}{2x^3 - 100x + 1}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - 1}{1 - \cos 4x}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

$$1.22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4x^2 + 5}{3x^2 + x + 3}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (x - 3x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$1.23. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{9x^4 + 3x + 5}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( + \sin x \right)^{\cos e^x}.$$

$$1.24. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 4}{5x^2 - 2x - 3}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \arcsin x - \operatorname{arctg} 2x}{x}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( + x \right)^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$1.25. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 2x - 12}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^3 + 8}{100 - x^3}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \ln \left( + 5 \right)^{\ln x} \right).$$

## Задача 2

Исследовать данные функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии «б» дополнительно построить график функции.

$$2.1. \text{ а) } f \left( \left[ \right] \right) = \frac{\ln \left( + x \right)}{x^2}; \quad \text{б) } f \left( \left[ \right] \right) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{при } -\infty < x \leq 1; \\ \frac{2}{x} & \text{при } 1 < x < 4; \\ x - 3 & \text{при } x \geq 4. \end{cases}$$

$$2.2. \text{ а) } f \left( \left[ \right] \right) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; \quad \text{б) } f \left( \left[ \right] \right) = \begin{cases} x^2 & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ \sin x & \text{при } 1 < x < \frac{\pi}{6}; \\ \frac{1}{2} & \text{при } x \geq \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
2.3. \text{ a) } f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x-1 & \text{при } 1 < x \leq 3; \\ x^2-3 & \text{при } x > 3. \end{cases} \\
2.4. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{1-e^{1-x}}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ \frac{2\pi}{x} & \text{при } \frac{\pi}{4} < x < \pi; \\ \sin x + 2 & \text{при } x \geq \pi. \end{cases} \\
2.5. \text{ a) } f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } -\infty < x \leq 1; \\ 3^x & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 6-x & \text{при } x > 2. \end{cases} \\
2.6. \text{ a) } f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x^2 + 2 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ \frac{2}{x} + 4 & \text{при } x > 2. \end{cases} \\
2.7. \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - x^3}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } -\infty < x \leq 1; \\ \frac{2}{x} & \text{при } 1 < x \leq 4; \\ x-2 & \text{при } x > 4. \end{cases} \\
2.8. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } -\infty < x \leq 3; \\ 3x-7 & \text{при } 3 < x \leq 4; \\ 3+\sqrt{x} & \text{при } x > 4. \end{cases}
\end{array}$$



$$2.9. \text{ a) } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq 0; \\ 1 - x & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ x^2 - 5 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$2.10. \text{ a) } f(x) = \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \\ \frac{4}{\pi} x & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$2.11. \text{ a) } f(x) = \frac{2}{4 - x^2}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 3 & \text{при } x \leq 0; \\ x & \text{при } 0 < x \leq \pi; \\ \sin x & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

$$2.12. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{e^{4x-2}}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \leq 1; \\ x & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ x - 2 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

$$2.13. \text{ a) } f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leq 0; \\ 1 + x & \text{при } 0 < x < 1; \\ x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

$$2.14. \text{ a) } f(x) = \frac{x+2}{x+4}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x < 1; \\ 2 - x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

$$2.15. \text{ a) } f(x) = 2^{-\frac{1}{x+3}}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x^2 + 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
2.16. \text{ a) } f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x} & \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x & \text{при } x > 1. \end{cases} \\
2.17. \text{ a) } f(x) = \frac{3}{x^2-9} & \text{б) } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 & \text{при } 0 < x < 1; \\ x-1 & \text{при } x \geq 1. \end{cases} \\
2.18. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{4^{4-x}} & \text{б) } f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1-x & \text{при } x > 1. \end{cases} \\
2.19. \text{ a) } f(x) = \frac{x+2}{x^2-4x+3} & \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ -2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x-2 & \text{при } x > 1. \end{cases} \\
2.20. \text{ a) } f(x) = \frac{\sin(x-x)}{2-x} & \text{б) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 1; \\ x & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 1-x^2 & \text{при } x > 2. \end{cases} \\
2.21. \text{ a) } f(x) = \frac{\operatorname{tg} x \cdot (x^2-9)}{x^2-3x} & \text{б) } f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{при } -\infty < x \leq 2; \\ x-1 & \text{при } 2 < x \leq 4; \\ \sqrt{x}+1 & \text{при } x > 4. \end{cases} \\
2.22. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{5^{x-2}} & \text{б) } f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ -x^2+9 & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ x-3 & \text{при } x > 3. \end{cases} \\
2.23. \text{ a) } f(x) = \frac{1-\cos x}{2x^2-x^3} & \text{б) } f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ -\sqrt{x} & \text{при } 0 < x \leq 4; \\ x-4 & \text{при } x > 4. \end{cases}
\end{array}$$

$$2.24. \text{ а) } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$2.25. \text{ а) } f(x) = 3^{\frac{1}{1-x}}. \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ 1-x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ \ln x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

### Задача 3

Найти производные функций.

$$3.1. \text{ а) } y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}; \quad \text{б) } y = x^{\arcsin x};$$

$$\text{в) } x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0.$$

$$3.2. \text{ а) } y = \operatorname{Intg} \frac{2x+1}{4}; \quad \text{б) } y = x^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$\text{в) } x^y - y^x = 0.$$

$$3.3. \text{ а) } y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}; \quad \text{б) } y = x^{x^x};$$

$$\text{в) } e^x + e^y - 2^{xy} - 3 = 0.$$

$$3.4. \text{ а) } y = \ln \left( 3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1} \right); \quad \text{б) } y = x^{\ln x};$$

$$\text{в) } \sin \sqrt{y-x^2} \cdot \ln \sqrt{y-x^2} + 2\sqrt{y-x^2} - 3 = 0.$$

3.5. a)  $y = \arcsin \frac{2x^3}{1+x^6};$

б)  $y = x^{\sin x};$

в)  $\frac{y}{x} + e^x - 3\sqrt{\frac{y}{x}} = 0.$

3.6. a)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$

б)  $y = (\sin x)^{\cos x};$

в)  $x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0.$

3.7. a)  $y = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}};$

б)  $y = (x+1)^{\frac{2}{x}};$

в)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$

3.8. a)  $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1};$

б)  $y = x^2 e^{x^2} \sin 2x;$

в)  $x^4 + y^4 = x^2 y^2.$

3.9. a)  $y = e^x - \sin e^x \cos^3 e^x - \sin^3 e^x \cos e^x;$  б)  $y = x^2 e^{x^2} \ln x;$

в)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$

3.10. a)  $y = \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{x^2+2x+2};$

б)  $y = (x+1)^{\frac{2}{x}};$

в)  $2y \ln y = x.$

3.11. a)  $y = \operatorname{Intg} \frac{x}{2} + \cos x + \frac{1}{3} \cos^2 x;$

б)  $y = (\ln x)^x;$

в)  $e^x \sin y - e^y \cos x = 0.$

$$3.12. \text{ a) } y = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x};$$

$$\text{б) } y = \frac{(x-2)^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3};$$

$$\text{в) } xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$3.13. \text{ a) } y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1};$$

$$\text{б) } y = \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{4-2x}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}};$$

$$\text{в) } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

$$3.14. \text{ a) } y = \arccos(e^{2x} - 1);$$

$$\text{б) } y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}};$$

$$\text{в) } \sin(xy) + \cos(xy) = 0.$$

$$3.15. \text{ a) } y = \operatorname{arctg} \frac{3x - x^2}{1 - 3x^2};$$

$$\text{б) } y = \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}};$$

$$\text{в) } 2x + 2^y = 2^{x+y}.$$

$$3.16. \text{ a) } y = \operatorname{Intg} \frac{e^{2 \sin x}}{4};$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{x^x};$$

$$\text{в) } x - y = \arcsin x - \arcsin y.$$

$$3.17. \text{ a) } y = \frac{\operatorname{arctg} x}{2} - \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\text{б) } y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x;$$

$$\text{в) } x^2 + y^2 = r^2.$$

$$3.18. \text{ a) } y = \sqrt{2x+1} (\ln(2x+1) - 2); \quad \text{б) } y = 2x^{\sqrt{x}};$$

$$\text{в) } \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$3.19. \text{ a) } y = \frac{1 + \ln \cos x}{\cos x};$$

$$\text{б) } y = \left( e^2 + 1 \right)^{\sin x};$$

$$\text{в) } y^3 - 3y + 3ax = 0.$$

$$3.20. \text{ a) } y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x;$$

$$\text{б) } y = \sqrt[3]{\frac{x(e^2 + 1)}{(e^2 - 1)^2}};$$

$$\text{в) } \cos(xy) = x.$$

$$3.21. \text{ a) } y = \arccos \sqrt{1 - e^x};$$

$$\text{б) } y = \left( \sqrt{x} \right)^{\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{в) } y^2 \cos x = a^2 \sin 3x;$$

$$3.22. \text{ a) } y = \log_2 \left( \ln^2 x \right);$$

$$\text{б) } y = (\ln x)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{в) } y^2 - 3y + 2x^3 = 0.$$

$$3.23. \text{ a) } y = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^4;$$

$$\text{б) } y = (\sin x)^{\arcsin x};$$

$$\text{в) } e^y + xy = 1.$$

$$3.24. \text{ a) } y = \ln \left( x^3 + 3x^2 \right);$$

$$\text{б) } y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{в) } x \sin y + y \sin x = 0.$$

$$3.25. \text{ a) } y = \left( e^2 + 2x + 2 \right)^{e^{-x}};$$

$$\text{б) } y = \left( \sqrt{x} \right)^{\cos \sqrt{x}};$$

$$\text{в) } \frac{y}{x} + e^x - 3 \sqrt{\frac{y}{x}} = 0.$$

### Задача 4

Найти производные второго порядка от функций:

4.1.  $y = \cos^2 x$ .

4.2.  $y = \arctg x^3$ .

4.3.  $y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^4}$ .

4.4.  $y = e^{-x^2}$ .

4.5.  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

4.6.  $y = -\frac{22x}{x+5}$ .

4.7.  $y = \frac{1}{4} x^2 (\ln x - 3)$

4.8.  $y = \frac{1}{3} x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$ .

4.9.  $y = -\frac{1}{9} x \cdot \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$ .

4.10.  $y = \sin^2 x$ .

4.11.  $y = \operatorname{tg} x$ .

4.12.  $y = \sqrt{1+x^2}$ .

4.13.  $y = (x^2 - 3x + 2)^3$ .

4.14.  $y = x \cdot e^{x^2}$ .

4.15.  $y = \frac{1}{1+x^3}$ .

4.16.  $y = (x^2)^3 \arctg x$ .

4.17.  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ .

4.18.  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ .

4.19.  $y = e^{\sqrt{x}}$ .

4.20.  $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x$ .

4.21.  $y = \arcsin(x \cdot \sin x)$

4.22.  $y = x \cdot \sqrt{1+x^2}$ .

4.23.  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

4.24.  $y = \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4})$ .

4.25.  $y = x \ln x$ .

4.26.  $y = \frac{11}{x-3}$ .

## Задача 5

Найти производные первого и второго порядков от функций, заданных параметрически:

$$5.1. x = t^2 + 2; y = \frac{1}{3}t^3 - 1.$$

$$5.2. x = \arcsin t; y = \sqrt{1-t^2}.$$

$$5.3. x = at^2; y = bt^3.$$

$$5.4. x = \cos t; y = \sin t.$$

$$5.5. x = a(-\sin t); y = a(-\cos t)$$

$$5.6. x = a\cos^2 t; y = a\sin^2 t.$$

$$5.7. x = \ln t; y = t^2 - 1.$$

$$5.8. x = \arcsin t; y = \ln(-t^2)$$

$$5.9. x = at \cdot \cos t; y = at \cdot \sin t.$$

$$5.10. x = \arccos \sqrt{t}; y = \sqrt{t-t^2}.$$

$$5.11. x = \frac{1}{\cos t}; y = \operatorname{tg} t.$$

$$5.12. x = \operatorname{arctg} t; y = \ln(+t^2)$$

$$5.13. x = a\cos^3 t; y = a\sin^3 t.$$

$$5.14. x = R\sin t + \sin Rt; y = R\cos t + \cos Rt.$$

$$5.15. x = t^2 + 2t; y = \ln(+1)$$

$$5.16. x = 1 + e^{\alpha t}; y = \alpha t + e^{-\alpha t}.$$



$$5.17. x = \cos t + t \sin t; y = \sin t - t \cos t.$$

$$5.18. x = 2 \cos t; y = \sin t.$$

$$5.19. x = t^2; y = t + t^3.$$

$$5.20. x = e^{2t}; y = e^{3t}.$$

$$5.21. x = 2 \cos^2 t; y = 2 \sin^2 t.$$

$$5.22. x = 1 + e^t; y = t + e^{-t}.$$

$$5.23. x = 2 \sin t + \sin 2t; y = 2 \cos t + \cos 2t.$$

$$5.24. x = e^t \cos t; y = e^t \sin t.$$

$$5.25. x = e^{2t} + 4; y = e^{3t} - 5.$$

### Задача 6

Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$6.1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+1} + 1}{\sqrt{x+2} + x};$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$6.2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha x}{1 - \cos \beta x};$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right).$$

$$6.3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -2 \operatorname{arctg} x \right) \ln x.$$

$$6.4. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x^3};$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln (+x)}$$

$$6.5. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln (+x)};$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln (-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$6.6. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$6.7. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$

$$6.8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{\sin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{e^x}.$$

$$6.9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\sin \frac{1}{x}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(-x\right) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$6.10. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -1} \left(+x\right) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$6.11. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^3}}.$$

$$6.12. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right) x.$$

$$6.13. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2 - 3)}{x^2 + 3x - 10};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}.$$

$$6.14. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - 1}{\ln x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{2x^{100} + 1}.$$

$$6.15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{5x}}{\sin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1+x}.$$

$$6.16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{1-x}.$$

$$6.17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3^x}.$$

$$6.18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{3}{\sin \frac{1}{x}}.$$

$$6.19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^{10}}}.$$

$$6.20. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$6.21. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^9}{3^x}.$$

$$6.22. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\cos x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{a}{x}.$$

$$6.23. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} + x - 1}{\sin 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\operatorname{arctg} x}.$$

$$6.24. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( -2x \right)^{\cos x}.$$

$$6.25. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}.$$

### Задача 7

Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ .

$$7.1. \quad x e^{2x}, \quad x_0 = -1.$$

$$7.2. \quad \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad x_0 = 0.$$

7.3.  $e^x, x_0 = -1.$

7.4.  $4^x, x_0 = 0.$

7.5.  $\sqrt{x}, x_0 = 4.$

7.6.  $x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2, x_0 = 1.$

7.7.  $\frac{1}{x+8}, x_0 = 0.$

7.8.  $x \cos x, x_0 = 0.$

7.9.  $\frac{x}{x-1}, x_0 = 2.$

7.10.  $e^{\sin x}, x_0 = 0.$

7.11.  $\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), x_0 = 0.$

7.12.  $\ln (1 + \sin x), x_0 = 0.$

7.13.  $\ln (1 - 4x), x_0 = 0.$

7.14.  $3^x, x_0 = 0.$

7.15.  $\frac{1}{x}, x_0 = 1.$

7.16.  $e^{5x-1}, x_0 = 0.$

7.17.  $\frac{1}{x+2}, x_0 = -3.$

7.18.  $\arcsin x, x_0 = 0.$

7.19.  $x^3 \ln x, x_0 = 1.$

7.20.  $\ln x, x_0 = 1.$

7.21.  $x^5 - 5x^3 + x, x_0 = 2.$

7.22.  $\ln (1 + 5^x), x_0 = 0.$

7.23.  $\sin \frac{x}{3}, x_0 = 0.$

7.24.  $xe^x, x_0 = 0.$

7.25.  $\frac{1}{3-2x}, x_0 = 0.$

### Задача 8

Исследовать функцию и построить ее график.

8.1.  $y = \frac{1-x^2}{x^2}.$

8.2.  $y = \frac{x}{(1+x^3)^2}.$

8.3.  $y = \frac{4x^2+1}{x}.$

$$8.4. y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

$$8.5. y = \frac{x^3}{2(x+2)}.$$

$$8.6. y = \frac{x^3 + 2}{2x}.$$

$$8.7. y = \frac{4x}{4 + x^2}.$$

$$8.8. y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

$$8.9. y = \frac{x^2}{x - 1}.$$

$$8.10. y = \frac{4x^3 + 5}{x}.$$

$$8.11. y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

$$8.12. y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}.$$

$$8.13. y = \frac{2 + x^3}{x^2}.$$

$$8.14. y = \frac{x^4 + 1}{x^2}.$$

$$8.15. y = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

$$8.16. y = \frac{4x^3}{1 - x^3}.$$

$$8.17. y = \frac{x^2}{1 - x}.$$

$$8.18. y = \frac{x^4}{1 - x^2}.$$

$$8.19. y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

$$8.20. y = \frac{x^3}{(x-2)^2}.$$

$$8.21. y = \frac{x^3 - 1}{x^2}.$$

$$8.22. y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}.$$

$$8.23. y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}.$$

$$8.24. y = x^2 e^{-x}.$$

$$8.25. y = x\sqrt{1 - x^2}.$$

**II. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ  
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ  
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.  
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

**З а н я т и е 1**

*Комплексные числа и действия над ними.  
Простейшие приемы интегрирования*

**Аудиторная работа**

**1.1.** Выполнить действия:

**а)**  $(2+3i)(4-i)+5+4i$ ;                      **б)**  $(2+5i)^2+(3-i)^2+\frac{3+4i}{2-3i}$ .

**в)**  $\frac{1-3i}{1+2i}+4i-1$ .                      **г)**  $\frac{(8-i)^2}{3+5i}+3i-4$ .

**2.1.** Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме записи:

**а)**  $1+i$ .                      **б)**  $-i$ .                      **в)**  $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ .                      **г)**  $5-4i$ .

**3.1.** Выполнить действия:

**а)**  $(1-i)^5$ .                      **б)**  $(2+2i)^4$ .                      **в)**  $(-i)^{10}$ .  
**г)**  $\sqrt[3]{3+3i}$ .                      **д)**  $\sqrt{i}$ .                      **е)**  $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$ .

**4.1.** Пользуясь таблицей интегралов, свойствами неопределенного интеграла и основными правилами интегрирования, найти неопределенные интегралы:

<b>а)</b> $\int (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)dx$	<b>б)</b> $\int \frac{(1+4\sqrt[3]{x})^2}{x} dx.$
<b>в)</b> $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$	<b>г)</b> $\int \frac{1+3x^2}{x^2(1+2x^2)} dx.$
<b>д)</b> $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$	<b>е)</b> $\int \frac{4x^2+2x-3}{x^2} dx.$
<b>ж)</b> $\int \sin 3x \cos x dx.$	<b>з)</b> $\int (2x+3)^5 dx.$
<b>и)</b> $\int \cos 4x \cos 8x dx.$	<b>к)</b> $\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\cos 2x} dx.$

**5.1.** Найти неопределенные интегралы поднесением под знак дифференциала:

<b>а)</b> $\int \cos x 2^{\sin x} dx.$	<b>б)</b> $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)^4}.$
<b>в)</b> $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx.$	<b>г)</b> $\int \frac{4x+4}{x^2+2x} dx.$
<b>д)</b> $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x dx}}{\cos^2 x}.$	<b>е)</b> $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}.$
<b>ж)</b> $\int x e^{-x^2} dx.$	<b>з)</b> $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^4 2x} dx.$
<b>и)</b> $\int \frac{dx}{x \ln 4x}.$	<b>к)</b> $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx.$

**6.1.** Найти неопределенные интегралы и сделать проверку дифференцированием:

<b>а)</b> $\int \cos^2(3x+\pi/6) dx.$	<b>б)</b> $\int \frac{3^x dx}{1+9^x}.$
<b>в)</b> $\int x^2 \cos(3x^3+1) dx.$	<b>г)</b> $\int x(5+x)^4 dx.$

$$д) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$е) \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}.$$

### Домашнее задание

7.1. Найти неопределенные интегралы:

$$а) \int e^{4x-3} dx.$$

$$б) \int x\sqrt{x^2-4} dx.$$

$$в) \int (x^2-4)(x+2) dx.$$

$$г) \int \frac{\cos 2x dx}{1+\sin^2 2x}.$$

$$д) \int x^2 e^{-x^3} dx.$$

$$е) \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln 2x}}.$$

$$ж) \int \frac{dx}{x^2-4x+20}.$$

$$з) \int \frac{4x-5}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$$

$$и) \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-4x+8}}.$$

$$к) \int \cos^2 3x dx.$$

### Ответы

$$4. а) \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 2x + C.$$

$$б) \ln|x| + 24\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[3]{x^2} + C.$$

$$в) \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

$$г) \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} x\sqrt{2} - \frac{1}{x} + C.$$

$$д) x - \sin x + C.$$

$$е) 4x + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C.$$

$$ж) -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$з) \frac{\ln|x+3|}{12} + C.$$

$$и) \frac{1}{24} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x + C.$$

$$к) -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} x + C.$$



$$5. \text{ а) } 2^{\sin x} + C.$$

$$\text{б) } -\frac{1}{6(2 \ln x)^3} + C.$$

$$\text{в) } \ln|x^2 + 3x + 2| + C.$$

$$\text{г) } 2 \ln|x^2 + 2x| + C.$$

$$\text{д) } \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$$

$$\text{е) } \ln|\operatorname{arctg} x| + C.$$

$$\text{ж) } -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

$$\text{з) } -\frac{1}{6 \cos^3 2x} + \frac{1}{2 \cos 2x} + C.$$

$$\text{и) } \ln|\ln 4x| + C.$$

$$\text{к) } \frac{5}{2} \ln|x^2 - 4x + 5| + 12 \operatorname{arctg} \left( \frac{x-2}{3} \right) + C.$$

$$6. \text{ а) } \frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \sin 6x + C.$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{arctg} 3^x}{\ln 3} + C.$$

$$\text{в) } \frac{1}{9} \sin(x^3 + 1) + C.$$

$$\text{г) } \frac{x^5 + 5}{6} - \frac{x^5 + 5}{9} + C.$$

$$\text{д) } \frac{1}{2} \arcsin x^2 + C.$$

$$\text{е) } \operatorname{arctg} e^x + C.$$

$$7. \text{ а) } \frac{1}{4} e^{4x-3} + C.$$

$$\text{б) } \frac{1}{3} (x^2 - 4)^{3/2} + C.$$

$$\text{в) } \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 8x + C.$$

$$\text{г) } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sin 2x + C.$$

$$\text{д) } -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C.$$

$$\text{ж) } 2\sqrt{\ln 2x} + C.$$

$$\text{з) } \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{4} + C.$$

$$\text{и) } -4\sqrt{3+2x-x^2} - \arcsin \frac{x-1}{2} + C.$$

$$\text{к) } 3\sqrt{x^2 - 4x + 8} - 5 \ln|x - 2 + \sqrt{(x-2)^2 + 4}| + C.$$

$$\text{л)} \frac{1}{2} x + \frac{\cos 6x}{12} + C.$$

## Занятие 2

### *Интегрирование с помощью замены переменных в неопределенном интеграле*

#### Аудиторная работа

2.1. Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а)} \int x(3x+4)^5 dx.$$

$$\text{б)} \int x\sqrt{2x+3} dx.$$

$$\text{в)} \int \frac{\ln x \sqrt{2+\ln^2 x} dx}{x}.$$

$$\text{г)} \int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x} dx.$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

$$\text{е)} \int \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$\text{ж)} \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}.$$

$$\text{з)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

$$\text{и)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

$$\text{к)} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{л)} \int \frac{2^{1/x}}{x^2} dx.$$

$$\text{м)} \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

$$\text{н)} \int \frac{\cos \frac{x}{\sqrt{2}} dx}{2 - \sin \frac{x}{\sqrt{2}}}.$$

$$\text{о)} \int \frac{dx}{3^x + 1}.$$

$$\text{п)} \int \frac{(2x+1) dx}{\sqrt{x+1}}.$$

$$\text{р)} \int \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx.$$

$$\text{с)} \int \frac{\sin x + x \cos x}{x^2 \sin^2 x} dx.$$

$$\text{т)} \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{y)} \int 4^{x \ln x} (1 + \ln x) dx.$$

$$\text{ф)} \int \frac{2^{x - \arccos x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

2.2. Найти неопределенные интегралы и сделать проверку дифференцированием:

$$\text{a)} \int \frac{\cos x - x \sin x}{x \cos x} dx.$$

$$\text{б)} \int \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$\text{в)} \int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1 + x^2} dx.$$

$$\text{г)} \int \frac{2x(1 + x^2) \arctg x + x^2}{x^2(1 + x^2) \arctg x} dx.$$

### Домашнее задание

2.3. Найти неопределенные интегралы:

$$\text{a)} \int \frac{4 \sin 2x dx}{4 + \sin^2 x}.$$

$$\text{б)} \int \frac{\ln x + 1}{1 + x \ln x} dx.$$

$$\text{в)} \int \frac{dx}{1 + e^x}.$$

$$\text{г)} \int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

$$\text{д)} \int \frac{x(2 \ln x + 1)}{4 + x^2 \ln x} dx.$$

$$\text{е)} \int \frac{2^{1/x^2} dx}{x^3}.$$

$$\text{ж)} \int x(4x + 5)^3 dx.$$

$$\text{з)} \int \frac{dx}{x \sqrt{1 - 4 \ln^2 x}}.$$

### Ответы

$$\text{2.1. а)} \frac{x + 4}{63} - \frac{2(x + 4)}{27} + C. \quad \text{б)} \sqrt{\frac{x + 3}{20}} - \sqrt{x + 3} + C.$$

$$\text{в)} \frac{1}{3} \left( \ln^2 x \right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$\text{г)} \ln |4 + \sin^2 x| + C.$$

$$\text{д)} 2 \arctg \sqrt{x - 1} + C.$$

$$\text{е)} \frac{2}{3} \sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x - 1} + C.$$

$$\text{ж)} -\sqrt{1+2\cos x} + C.$$

$$\text{з)} \frac{1}{a^2} \ln \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2a^2} \ln x^2 + C.$$

$$\text{и)} \ln \left| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right| + C.$$

$$\text{к)} 2e\sqrt{x} + C.$$

$$\text{л)} -\frac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln 2} + C.$$

$$\text{м)} \sin \left( \ln x \right) + C.$$

$$\text{н)} -\sqrt{2} \ln \left| 2 - \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right| + C.$$

$$\text{о)} x - \frac{1}{\ln 3} \ln \left( + 3^x \right) + C.$$

$$\text{п)} 2 \left( \frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}}{3} \right) + C.$$

$$\text{р)} \ln |x \ln x| + C.$$

$$\text{с)} -\frac{1}{x \sin x} + C.$$

$$\text{т)} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{1 + \sqrt{1+x^2}} \right| + C.$$

$$\text{у)} 4^{x \ln x} \ln 4 + C.$$

$$\text{ф)} -2\sqrt{1-x^2} + \arccos^2 x + C.$$

$$\text{2.2. а)} \ln |x \cos x| + C.$$

$$\text{б)} 2 \arcsin \frac{x}{2} + \sin 2 \left( \arcsin \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$\text{в)} \frac{2\sqrt{\arctg 3^x}}{3} + C.$$

$$\text{г)} 2 \ln x + \ln |\arctg x| + C.$$

$$\text{2.3. а)} \ln |4 + \sin^2 x| + C.$$

$$\text{б)} \ln |1 + x \ln x| + C.$$

$$\text{в)} \ln \frac{e^x - 1}{e^x} + C.$$

$$\text{г)} 2 \left( \frac{1}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} x + 2\sqrt{x} \right) - 4 \ln(\sqrt{x} + 1) + C.$$

$$\text{д)} \frac{1}{2} \ln |4 + x^2 \ln x| + C.$$

$$\text{е)} -\frac{1}{2} 2^{1/x^2} \ln 2 + C.$$

$$\text{ж) } \frac{1}{16} \left( \frac{(4x+5)^5}{5} - \frac{5(4x+5)^4}{4} \right) + C. \quad \text{з) } \frac{1}{2} \arcsin(2 \ln x) + C.$$

### З а н я т и е 3

#### *Интегрирование по частям в неопределенном интеграле*

#### Аудиторная работа

3.1. Найти неопределенные интегралы:

а)  $\int (2x+3)e^{4x} dx.$

б)  $\int \sqrt{x} \ln 4x dx.$

в)  $\int x \arctg 2x dx.$

г)  $\int (x^2 + 1) \cos(3x+1) dx.$

д)  $\int e^{-x} \cos 2x dx.$

е)  $\int \ln^2 x dx.$

ж)  $\int \sin(\ln x) dx.$

з)  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx.$

и)  $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}.$

к)  $\int x^2 3^x dx.$

л)  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

м)  $\int (3x+1) \cos^2 4x dx.$

о)  $\int x^2 \ln(1+x) dx.$

п)  $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$

#### Домашнее задание

3.2. Найти неопределенные интегралы:

а)  $\int (x^2 + 2x) \cos 2x dx.$

б)  $\int e^{2x} \sin x dx.$

$$\text{в) } \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{г) } \int \arccos x dx.$$

$$\text{д) } \int e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{е) } \int x \sin x \cos x dx.$$

### ОТВЕТЫ

$$\text{3.1. а) } \frac{2x+3}{4} e^{4x} - \frac{1}{8} e^{4x} + C.$$

$$\text{б) } \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left( \ln 4x - \frac{2}{3} \right) + C.$$

$$\text{в) } \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} 2x + C.$$

$$\text{г) } \frac{x^2+1}{3} \sin(x+1) - \frac{1}{9} x \cos(x+1) - \frac{2}{27} \sin(x+1) + C.$$

$$\text{д) } \frac{e^{-x}}{2} (\sin 2x - \cos x) + C.$$

$$\text{е) } x (\ln^2 x - \ln x + 1) + C;$$

$$\text{ж) } \frac{x}{2} (\ln \ln x - \cos \ln x) + C;$$

$$\text{з) } -\frac{1}{4x^4} \left( \ln x + \frac{1}{4} \right) + C.$$

$$\text{и) } 2 \arcsin x \sqrt{1+x} + 4 \sqrt{1-x} + C.$$

$$\text{к) } \frac{x^2 3^x}{\ln 3} - \frac{2x 3^2}{\ln^2 3} + \frac{3^x}{\ln^3 3} + C.$$

$$\text{л) } -2 \arcsin \sqrt{x} \sqrt{1-x} + 4 \sqrt{x} + C.$$

$$\text{м) } \frac{3}{4} x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3x+1}{6} \sin 8x + \frac{3}{144} \cos 8x + C.$$

$$\text{н) } \frac{x^3}{3} \ln(x) - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} + \ln|x+1| + C.$$

$$\text{о) } x \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C.$$

$$3.2. \text{ а) } \frac{1}{2}(x^2 + 2x)\sin 2x + \frac{1}{2}(x+1)\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

$$\text{б) } \frac{2}{3}e^{2x}\sin x - \frac{1}{3}e^{2x}\cos x + C.$$

$$\text{в) } -\frac{x}{\sin x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\text{г) } x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\text{д) } 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.$$

$$\text{е) } \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x + C.$$

## Занятие 4

### *Интегрирование рациональных функций*

#### Аудиторная работа

4.1. Записать разложение рациональной дроби на простейшие:

$$\text{а) } \frac{3x-2}{x^3-2x^2}.$$

$$\text{б) } \frac{4x+5}{(x^2+1)^2(x-3)^2}.$$

$$\text{в) } \frac{x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x-2)^2}.$$

4.2. Найти неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{2x^2+3}{x^4-5x^2+6} dx.$$

$$\text{в) } \int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x} dx.$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x}.$$

$$\text{д) } \int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx.$$

$$\text{е) } \int \frac{x^3+3}{x^3-8} dx.$$

$$\text{ж) } \int \frac{dx}{x(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$\text{з) } \int \frac{x^4+3x+1}{x^4-1} dx.$$

$$\text{и) } \int \frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)} dx.$$

$$\text{к) } \int \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}.$$

### Домашнее задание

4.3. Найти неопределенные интегралы

$$\text{а) } \int \frac{6x^4-21x^2+3x+24}{(x^2+x-2)(x+1)} dx.$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{x^3+x^2}.$$

$$\text{в) } \int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx.$$

$$\text{г) } \int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx.$$

$$\text{д) } \int \frac{5x dx}{x^4+3x^2-4}.$$

$$\text{е) } \int \frac{2x^4-3x^3-21x^2-26}{(x+3)(x^2-5x+4)} dx.$$

### Ответы

$$\text{4.2. а) } \frac{1}{4}x + \ln|x| - \frac{7}{16}\ln|2x-1| - \frac{9}{16}\ln|2x+1| + C.$$

$$\text{б) } \frac{9}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x} \right| + \frac{7}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}+x} \right| + C.$$

$$\text{в) } \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x-2| + \ln|x+2| + C.$$

$$\text{г) } \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x^2+2x+2| - \frac{1}{2}\arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

$$\text{д) } \frac{1}{2}\ln|x+1| - 2\ln|x-2| + \frac{5}{2}\ln|x-3| + C.$$



$$\text{е)} x + \frac{11}{8} \ln|x-2| - \frac{11}{16} \ln|x^2 + 2x + 4| - \frac{11}{8\sqrt{3}} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\text{ж)} \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{6} \ln|x^2 + 1| + \frac{1}{24} \ln|x^2 + 4| + C.$$

$$\text{з)} x + \frac{5}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{3}{4} \ln|x^2 + 1| - \arctg x + C.$$

$$\text{и)} 3x^2 - 12x + \ln|x-1| - 3\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C.$$

$$\text{к)} 4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \frac{9}{x-1} + C.$$

$$\text{4.3. а)} 3x^2 - 12x + 2\ln|x-1| - 3\ln|x+1| + 10\ln|x+2| + C.$$

$$\text{б)} \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{в)} 2\ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 4| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$\text{г)} \frac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 13| - \ln|x+1| + 2 \arctg \frac{x-2}{3} + C.$$

$$\text{д)} \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| + C.$$

$$\text{е)} x^2 + x + 4\ln|x-1| + \ln|x+3| - 2\ln|x-4| + C.$$

### З а н я т и е 5

#### *Интегрирование тригонометрических выражений и простейших иррациональных функций*

#### Аудиторная работа

**5.1.** Найти неопределенные интегралы от тригонометрических функций:

а)  $\int \sin 5x \sin 3x dx$ .

б)  $\int \cos 8x \cos 3x dx$ .

в)  $\int \sin^4 2x dx$ .

г)  $\int \cos^5 3x dx$ .

д)  $\int \sin^3 2x \cos^5 2x dx$ .

е)  $\int \sin^3 3x \cos^3 3x dx$ .

ж)  $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$ .

з)  $\int \operatorname{tg}^3 2x dx$ .

и)  $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$ .

к)  $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x}$ .

л)  $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ .

м)  $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$ .

н)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 8 \sin x \cos x + 12 \cos^2 x}$ .

о)  $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$ .

**5.2.** Найти неопределенные интегралы от иррациональных функций:

а)  $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{3+x}}$ .

б)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ .

в)  $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+4})\sqrt{x}}$ .

г)  $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})}$ .

д)  $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$ .

е)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}$ .

ж)  $\int \sqrt{x(1-x^2)} dx$ .

з)  $\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}}$ .

и)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ .

к)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x} dx$ .

## Домашнее задание

**5.3.** Найти неопределенные интегралы:

**а)**  $\int \sin^3 x \cos^8 x dx.$

**б)**  $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx.$

**в)**  $\int \cos^5 x \sin x dx.$

**г)**  $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x \cos^3 2x} dx.$

**д)**  $\int \frac{dx}{3 \cos x - 4 \sin x}.$

**е)**  $\int \frac{dx}{16 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x}.$

**ж)**  $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx.$

**з)**  $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx.$

**и)**  $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx.$

**к)**  $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx.$

### О т в е т ы

**5.1. а)**  $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C.$

**б)**  $\frac{1}{22} \sin 11x + \frac{1}{10} \sin 5x + C.$

**в)**  $\frac{3x}{8} - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + C.$

**г)**  $\frac{1}{3} \left( \sin 3x - \frac{2}{3} \sin^3 3x + \frac{1}{5} 3x \right) + C.$

**д)**  $-\frac{1}{2} \left( \frac{\cos^6 2x}{6} - \frac{\cos^8 2x}{8} \right) + C.$

**е)**  $-\frac{1}{48} \left( \cos 6x - \frac{\cos^3 6x}{3} \right) + C.$

**ж)**  $-\frac{1}{16} \cos 2x + \frac{1}{64} \cos 4x + C.$

**з)**  $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 2x + \frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C.$

**и)**  $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x + x + C.$

**к)**  $-\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$

$$\text{л)} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

$$\text{м)} \frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} x + 1| - \frac{1}{4} \ln|\operatorname{tg}^2 x + 1| + \frac{1}{2} x + C.$$

$$\text{н)} -\frac{1}{4} \ln\left|\frac{\operatorname{tg} x + 6}{\operatorname{tg} x - 6}\right| + C. \quad \text{о)} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C.$$

$$5.2. \text{ а)} \sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3+x}{2}} + C.$$

$$\text{б)} -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \ln \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} + C.$$

$$\text{в)} 6\sqrt[6]{x} - 12 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

$$\text{г)} 10 \left( -\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{t} + \ln|t| - \ln|t+1| \right) + C, \text{ где } t = \sqrt[10]{x}.$$

$$\text{д)} \frac{3}{8} t^{16} + \frac{6}{7} t^7 + C, \text{ где } t = \sqrt[6]{x}.$$

$$\text{е)} \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| + C, \text{ где } t = \sqrt[6]{2x+1}.$$

ж) Не берущийся.

$$\text{з)} -\frac{1}{2} \left( \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t \right) + C, \text{ где } t = \sqrt{\frac{1-x^4}{x^4}}.$$

$$\text{и)} 12 \left( \frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C, \text{ где } t = \sqrt[3]{1 - \sqrt[4]{x}}.$$

$$\kappa) 6t + 2\ln|t-1| - \ln|t^2 + t + 1| - 4\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{3} + C, \text{ где } t = \sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}.$$

$$5.3. \text{ а) } \frac{1}{11} \cos^{11} x - \frac{1}{9} \cos^9 x + C.$$

$$\text{б) } \frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x - \frac{1}{144} \sin^3 6x + C.$$

$$\text{в) } -\frac{\cos^6 x}{6} + C.$$

$$\text{г) } \frac{5}{16} \sqrt[5]{\sin^8 2x} - \frac{5}{36} \sqrt[5]{\sin^{18} 2x} + C.$$

$$\text{д) } -\frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{3}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} \right| + C.$$

$$\text{е) } \frac{1}{8} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{2 \operatorname{tg} x} \right| + C.$$

$$\text{ж) } 2\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} \right| + C.$$

$$\text{з) } 3\sqrt[3]{x+1} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} + 6\sqrt[6]{x+1} - 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}| - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x+1} + C.$$

$$\text{и) } \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$$

$$\text{к) } \frac{3}{2} x^{2/3} + 6x^{1/6} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$$

## Занятие 6

### Вычисление определенных интегралов

#### Аудиторная работа

**6.1.** Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а)} \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx.$$

$$\text{б)} \int_0^3 \frac{x^2 dx}{4+x^3}.$$

$$\text{в)} \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{1/x^2} dx.$$

$$\text{г)} \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$$

$$\text{д)} \int_1^e \frac{\cos \ln x}{x} dx.$$

$$\text{е)} \int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1} dx.$$

$$\text{ж)} \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$$

$$\text{з)} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$\text{и)} \int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$$

$$\text{к)} \int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y+2}} dy.$$

$$\text{л)} \int_0^9 \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt{x}}.$$

$$\text{м)} \int_1^e \ln x dx.$$

$$\text{н)} \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

$$\text{о)} \int_0^{\pi} (2x+1) \cos x dx.$$

$$\text{п)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}.$$

$$\text{р)} \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx.$$

$$\text{с)} \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx.$$

$$\text{т)} \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$\text{у)} \int_2^3 \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x} dx.$$

$$\text{ф)} \int_0^1 \frac{t^5+1}{16-t^4} dt.$$

### Домашнее задание

**6.2.** Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx.$$

$$\text{б) } \int_1^e x \ln^2 x \, dx.$$

$$\text{в) } \int_3^8 \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$\text{г) } \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$$

$$\text{д) } \int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$$

$$\text{е) } \int_1^e \ln^3 x \, dx.$$

$$\text{ж) } \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x \, dx}{\sin^2 x}.$$

$$\text{з) } \int_{-2}^2 \frac{3x^7 - 2x^5 + x^3 - x}{x^4 + 3x^2 + 1} \, dx.$$

$$\text{и) } \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}.$$

$$\text{к) } \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}.$$

### ОТВЕТЫ

$$\text{6.1. а) } \frac{45}{4}.$$

$$\text{б) } \frac{1}{3} \ln \frac{31}{4}.$$

$$\text{в) } \frac{1}{2} (e - \sqrt[4]{e}).$$

$$\text{г) } \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{д) } \sin 1.$$

$$\text{е) } 2 - \ln 5.$$

$$\text{ж) } 0.$$

$$\text{з) } \pi \cdot 2.$$

$$\text{6.2. а) } \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$\text{б) } \frac{1}{4} (e^2 - 1).$$

$$\text{в) } \frac{32}{3}.$$

$$\text{г) } 2.$$

$$\text{д) } \frac{1}{5} \ln 112.$$

$$\text{е) } 6 - 2e.$$

$$\text{ж) } \frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}.$$

$$\text{з) } 0.$$

$$\text{и) } \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{к) } \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

### Занятие 7

## Приложения определенных интегралов

### Аудиторная работа

7.1. Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

а)  $y = \ln x$ ,  $x = e$ ,  $x = e^3$ ;  $y = 0$ .

б)  $y = x^2 + 2x$ ,  $y = x + 2$ .

в)  $y^2 = 2px$ ,  $y^2 = \frac{4}{\rho}(x - \rho)^3$ ,  $\rho > 0$ .

г)  $x^2 + y^2 = a^2$ ;  $x^2 + y^2 - 2ay = a^2$ ,  $y = a$ .

д)  $x^2 - y^2 = a^2$ ;  $y^2 = \frac{3}{2}ax$ .

е)  $x = a\cos^3 t$ ;  $y = a\sin^3 t$ .

ж)  $x = 2(t - \sin t)$ ;  $y = 2(1 - \cos t)$ , осью  $Ox$ .

з)  $r = a(1 + \sin \varphi)$ .

и)  $r = \sqrt{3} \sin \varphi$ ;  $r = 1 - \cos \varphi$  (внн кардиоиды).

к)  $r = a\cos 3\varphi$ .

7.2. Найти длину дуги кривой:

а)  $y^2 = 4x$ ;  $0 \leq x \leq 1$ .

б)  $y = \ln x$ ;  $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ .

в)  $y = \ln \cos x$ ;  $0 \leq x \leq \pi/4$ .

г)  $x = a(t - \sin t)$ ;  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

д)  $x = R\cos t$ ;  $y = R\sin t$ .



е)  $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$

ж)  $r = a(1 + \cos \varphi).$

з)  $r = a\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

7.3. Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривыми, около указанной оси:

а)  $y^2 = 4x, \quad x=1, \quad Ox.$

б)  $y = xe^x, \quad x=1, y=0; \quad Ox.$

в)  $y = x^2, \quad y^2 = x; \quad Oy.$

г)  $y = 2x - x^2; \quad y=0, \quad Oy.$

д)  $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad Ox.$

#### Домашнее задание

7.4. Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

а)  $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y=0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

б)  $y = (x^2 + 2x)e^{-x}, \quad y=0.$

в)  $x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3.$

г)  $x = t^2 - 1; \quad y = t^3 - t.$

д)  $r = a \cos 5\varphi.$

е)  $r = a \sin 2\varphi.$

Найти длину дуги кривой:

ж)  $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1/2.$

з)  $x = R(\cos t + t \sin t), \quad y = R(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$

и)  $\rho=1/\varphi$ ;  $3/4 \leq \varphi \leq 4/3$ .

Найти объем тела вращения:

к)  $x^2 - y^2 = a^2$ ;  $x = a + h$  ( $h > 0$ ),  $Ox$ .

л)  $y = \arcsin x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $Ox$ .

м)  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin 2t$ ,  $Ox$ .

**О т в е т ы**

7.4. а)  $2 - \sqrt{2}$ . б) 4. в)  $\frac{72\sqrt{3}}{5}$ . г) 8/15.

д)  $\frac{\pi a^2}{4}$ . е)  $\frac{\pi a^2}{4}$ . ж)  $\ln 3 - \frac{1}{2}$ . з)  $\frac{\pi^2 R}{2}$ .

и)  $\ln \frac{3}{2} + \frac{5}{12}$ . к)  $\frac{\pi h^2}{3}(3a + h)$ . л)  $\pi(\frac{\pi^2}{4} - 2)$ . м)  $\frac{8}{15}\pi a^3$ .

### З а н я т и е 8

#### *Несобственные интегралы*

#### **Аудиторная работа**

**8.1.** Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ .

б)  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ .

в)  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ .

г)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}$ .

д)  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x}}$ .

е)  $\int_0^{+\infty} x \cos x dx$ .

$$\text{ж)} \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$\text{з)} \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$\text{и)} \int_0^{\pi/2} \frac{2x+1}{\sin^2 x} dx.$$

$$\text{к)} \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

$$\text{л)} \int_0^{2/\pi} \frac{\cos 1/x}{x^2} dx.$$

$$\text{м)} \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

**8.2.** Исследовать на сходимость интегралы:

$$\text{а)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{5x^2 + 4x + 3}.$$

$$\text{б)} \int_1^{+\infty} \frac{4 + \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$\text{в)} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + \sin^2 x}}.$$

$$\text{г)} \int_0^3 \frac{\cos 1/x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$\text{д)} \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$\text{е)} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

### Домашнее задание

**8.3.** Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$\text{а)} \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}.$$

$$\text{б)} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$$

$$\text{в)} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x)^2}.$$

$$\text{г)} \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$\text{д)} \int_0^1 x \ln x dx.$$

$$\text{е)} \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$\text{ж)} \int_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$$

## О т в е т ы

- 8.1. а) 0.                      б) Расходится.                      в)  $\frac{1}{2}$ .
- г)  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .                      д) Расходится.                      е) Расходится.
- ж) Расходится.                      з)  $\frac{\pi}{2}$ .                      и) Расходится.
- к)  $2\sqrt{\ln 2}$ .                      л) Расходится.                      м)  $\frac{16}{3}$ .
- 8.2. а) Сходится.                      б) Расходится.                      в) Расходится.
- г) Сходится.                      д) Расходится.                      е) Сходится.
- 8.3. а) Расходится.                      б)  $\frac{3\pi^2}{32}$ .                      в)  $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ .
- г)  $\frac{8}{3}$ .                      д)  $-\frac{1}{4}$ .                      е) Расходится.                      ж)  $-\frac{1}{e}$ .

## З а н я т и е 9

*Частные производные  
и полный дифференциал функций нескольких переменных.  
Производные и дифференциалы высших порядков*

### Аудиторная работа

9.1. Найти частные производные от заданных функций:

- а)  $z = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{x+y}$ .                      б)  $z = \sqrt{x/y + 2xy + x}$ .
- в)  $z = (x-1)^{\cos y}$ .                      г)  $z = (x+2y) \cos^2 \frac{x}{y^2}$ .

$$\text{д) } u = \frac{xy}{z} \ln(x^2 + y^2 + z^2). \quad \text{е) } u = (x - 2y + 3z)^2 e^{\frac{xy^2}{z^2}}.$$

**9.2.** Найти полный дифференциал:

$$\text{а) } z = \frac{x+y}{x-y}. \quad \text{б) } z = \arcsin(x^2 y).$$

$$\text{в) } z = \sqrt{\frac{y-x^2}{x-y^2}}. \quad \text{г) } z = x^{y^2}.$$

$$\text{д) } u = \ln\left(\frac{x+y}{z} + 1\right). \quad \text{е) } u = (xy)^z.$$

**9.3.** Найти частные производные второго порядка:

$$\text{а) } z = \ln(x^2 + y^2). \quad \text{б) } z = \frac{1}{xy}.$$

$$\text{в) } z = e^{xy}. \quad \text{г) } z = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{д) } z = \frac{\cos xy}{y}. \quad \text{е) } z = \frac{1}{2x-3y}.$$

**9.4.** Найти полные дифференциалы второго порядка:

$$\text{а) } z = 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 3. \quad \text{б) } z = \frac{x}{y}.$$

$$\text{в) } z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}. \quad \text{г) } z = e^{x \sin y}.$$

$$\text{д) } z = \ln(x^2 - y^2). \quad \text{е) } z = \frac{1}{(x-y)^2}.$$

**Домашнее задание**

9.5. а)  $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ . Найти  $dz$ .

б)  $z = \arctg \frac{x}{y}$ . Найти  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

в)  $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ . Найти  $dz$ .

г)  $u = \sqrt{x^2 + 2y^2 + z^2}$ . Найти  $du$ .

д)  $z = y^{\ln x}$ . Найти  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

е)  $z = \sin(xy)$ . Найти  $d^2 z$ .

**О т в е т ы**

9.2. д)  $du = \frac{z}{x+y+z} \left( \frac{1}{z} dx + \frac{1}{z} dy - \frac{x+y}{z^2} dz \right)$

е)  $du = (xy)^{z-1} (y dx + x dy + xy \ln(xy) dz)$

9.3. а)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^3}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^3}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^3}$ .

б)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3 y}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2 y^2}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3 x}$ .

в)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy}(1 + xy)$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$ .

г)  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{3x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^3}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{8xy}{(x^2 + y^2)^3}$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{3y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^3}$ .

$$\text{д) } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y \cos xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -x \cos xy.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \frac{xy \cos xy - \sin xy}{y^2} + \frac{xy \sin xy + 2 \cos xy}{y^3}.$$

$$\text{е) } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{8}{(2x-3y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-12}{(2x-3y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{18}{(2x-3y)^2}.$$

$$\text{9.4. а) } d^2 z = 4dx^2 - 4dxdy + 6dy^2.$$

$$\text{б) } d^2 z = -\frac{1}{y^2} dxdy + \frac{2x}{y^3} dy^2.$$

$$\text{в) } d^2 z = \frac{4xy(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} dx^2 + 2 \cdot \frac{6x^2 y^2 - x^4 - 4y^4}{(x^2 + y^2)^3} dxdy + \frac{4xy(x^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3} dy^2.$$

$$\text{г) } d^2 z = \sin^2 y e^{x \sin y} dx^2 + e^{x \sin y} \cos y (x \sin y) dxdy + x e^{x \sin y} (\cos^2 y - \sin y) dy^2.$$

$$\text{д) } d^2 z = -2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^3} dx^2 + \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^3} dxdy - 2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^3} dy^2;$$

$$\text{е) } d^2 z = \frac{6}{(x-y)^4} (dx^2 + dxdy + dy^2).$$

$$\text{9.5. а) } dz = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} ((x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3) dx + (y^4 + 3x^2 y^2 - 2x^3 y) dy).$$

$$\text{б) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{в) } dz = \frac{2(dx - \frac{x}{y} dy)}{y \sin \frac{2x}{y}}.$$

$$\text{г) } du = \frac{xdx + 2ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + z^2}}.$$

$$\text{д) } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\ln y (\ln y + 1)}{x^2} e^{\ln x \ln y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \ln y + 1}{xy} e^{\ln x \ln y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\ln x (\ln x - 1)}{y^2} e^{\ln x \ln y};$$

$$\text{е) } d^2 z = -y^2 \sin xy dx^2 + 2(\cos xy - xy \sin xy) dx dy - x^2 \sin xy dy^2.$$

## З а н я т и е 10

### *Производные сложных функций нескольких переменных. Производная функции, заданной неявно*

#### Аудиторная работа

**10.1.** Найти указанные производные:

$$\text{а) } z = \arcsin \frac{x}{y}, \quad x = u^2 + v^2, \quad y = uv, \quad \frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$$

$$\text{б) } z = e^{x-2y}, \quad x = \sin 2t, \quad y = \cos t; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

$$\text{в) } z = \sqrt{2x^2 - xy + y^2}, \quad x = 2t^2, \quad y = 3t^3; \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

$$\text{г) } z = tx^2 - y^2 x + 1, \quad x = \arctg t, \quad y = \ln(1 + t^2); \quad \frac{dz}{dt} - ?$$



д)  $z = x^2 \ln y, x = \sqrt{t^2 + 1}, y = \arcsin t; \frac{dz}{dt} - ?$

е)  $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2); x = t^3, y = t^2, z = e^t; \frac{du}{dt} - ?$

ж)  $z = x^{\cos y}; x = \frac{u}{v}; y = uv; \frac{\partial z}{\partial u} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial v} - ?$

**10.2.** Найти частные производные от неявно заданных функций:

а)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$

б)  $\frac{xy}{z} + zxy + \frac{z}{y^2} = 1; \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$

в)  $z + e^{xyz} = x \cos z; \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$

г)  $\ln(x + xyz + y) = e^{z^2}; \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$

д)  $z \arctg xy + \frac{z^2}{1 + x^2 y^2} = 1; \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$

е)  $y \sin(x + 2z) + z \cos(x + 2y) = e^z; \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$

ж)  $z^{xy} + \cos z = 0; \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$

### Домашнее задание

**10.3.** Найти указанные производные:

$$\text{а) } z = u^2 v^2, u = x - y, v = x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$$

$$\text{б) } z = \sqrt{x^2 + y^2}, x = \sin 2t, y = \ln t, \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

$$\text{в) } z = x \sin y + y \cos x, x = t^2, y = t^3, \quad \frac{dz}{dt} - ?$$

$$\text{г) } x^2 y + y^2 z + z^2 x = 1; \quad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$$

$$\text{д) } ze^{xy} + zxy^2 = a^2; \quad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$$

$$\text{е) } xy \ln z + xz \ln y + yz \ln x = 1; \quad \frac{\partial z}{\partial x} - ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} - ?$$

### ОТВЕТЫ

$$10.1. \text{ а) } \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \cdot \left( 2u - \frac{x}{y} v \right) \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \left( 2v - \frac{x}{y} u \right)$$

$$\text{б) } \frac{dz}{dt} = e^{x-2y} (\cos 2t + 2 \sin t)$$

$$\text{в) } \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 - xy + y^2}} \cdot (e^{x-y} t + 9e^{y-x} t^2)$$

$$\text{г) } \frac{dz}{dt} = x^2 + \frac{(tx - y^2)}{1+t^2} - \frac{4xyt}{1+t^2}$$

$$\text{д) } \frac{dz}{dt} = \frac{2xt \ln y}{\sqrt{t^2 + 1}} + \frac{x^2}{y\sqrt{1-t^2}}$$

$$\text{е) } \frac{du}{dt} = \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} (xt^2 + 2ty + ze^t)$$

$$\text{ж)} \frac{\partial Z}{\partial u} = \cos y \cdot x^{\cos y - 1} \cdot \frac{1}{v} - x^{\cos y} \ln x \cdot \sin(yv);$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{-u \cos y \cdot x^{\cos y - 1}}{v^2} - \sin \ln x^{\cos y} u.$$

$$10.2. \text{ а)} \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

$$\text{б)} \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{z(y^3 + xy^3 z^2 - 2z^2)}{y(xy^3 + xy^3 z^2 + z^3)}.$$

$$\text{в)} \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{yze^{xyz} - \cos z}{1 + xye^{xyz} + x \sin z}; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{xze^{xyz}}{1 + xye^{xyz} + x \sin z}.$$

$$\text{г)} \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{1 + yz}{xy - 2z(x + xyz + y)e^{z^2}}; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{1 + xz}{xy - 2z(x + xyz + y)e^{z^2}}.$$

$$\text{д)} \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{zy(1 + x^2 y^2) - 2xy^2 z^2}{(2z + (1 + x^2 y^2) \cdot \arctg xy)(1 + x^2 y^2)};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{zx(1 + x^2 y^2) - 2x^2 yz^2}{(2z + (1 + x^2 y^2) \cdot \arctg xy)(1 + x^2 y^2)}.$$

$$\text{е)} \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{y \cos(x + 2z) - z \sin(x + 2y)}{2 \cos(x + 2z) + \cos(x + 2y) - e^z};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{\sin(x + 2z) - 2z \sin(x + 2y)}{2 \cos(x + 2z) + \cos(x + 2y) - e^z}.$$

$$\text{ж)} \frac{\partial Z}{\partial x} = -\frac{z^{xy} y \ln z}{xyz^{xy-1} - \sin z}; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -\frac{x^{xy} x \ln z}{xyz^{xy-1} - \sin z}.$$

$$10.3. \text{ а)} \frac{\partial Z}{\partial x} = 2uv^2 + 2vu^2; \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -2uv^2 + 2vu^2.$$

$$\text{б) } \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (2x \cos 2t + y/t).$$

$$\text{в) } \frac{dz}{dt} = (\sin y - y \sin x) 2t + 3(x \cos y + \cos x) t^2.$$

$$\text{г) } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2 + 2yz}{y^2 + 2zx}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy + z^2}{y^2 + 2zx}.$$

$$\text{д) } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yze^{xy} + zy^2}{e^{xy} + xy^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xze^{xy} + 2xyz}{e^{xy} + xy^2}.$$

$$\text{е) } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y \ln z + z \ln y + yz/x}{x \ln y + y \ln x + xy/z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x \ln z + z \ln x + xz/y}{x \ln y + y \ln x + xy/z}.$$

## З а н я т и е 11

### *Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Производная по направлению. Градиент*

#### Аудиторная работа

**11.1.** Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$ :

$$\text{а) } z = \arctg \frac{x+1}{y}, \quad M(0; 1; \frac{\pi}{4}).$$

$$\text{б) } 2x^2 + 3y^2 + 2xz^2 - zx = 15, \quad M(1; 2; 1).$$

$$\text{в) } z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, \quad M(3; 4; -7).$$

$$\text{г) } x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0, \quad M(1; 2; -1).$$

**11.2.** Найти производную функции  $z = x^3 + 3x^2y + xy^2 + 3$  в точке  $M(1; 2)$  в направлении, идущем от этой точки к точке  $N(4; 5)$ .

**11.3.** Найти производную функции  $z = xy\sqrt{x^2 + y^2}$  в точке  $M(3; 4)$  в направлении, составляющем с осью  $Ox$  угол  $60^\circ$ .

**11.4.** Найти производную  $z = \arctg \frac{y}{x}$  в точке  $M(1/2; \sqrt{3}/2)$ , принадлежащей окружности  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ , по направлению этой окружности.

**11.5.** Доказать, что производная функции  $z = \frac{y^2}{x}$  в любой точке эллипса  $2x^2 + y^2 = 1$  по направлению нормали к эллипсу равна нулю.

**11.6.** Найти градиент функции в указанной точке:

а)  $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ ,  $M(2; 1)$ .

б)  $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 5$ ,  $M(1; 0; 2)$ .

**11.7.** Каково направление наибольшего изменения функции  $U = x \sin z - y \cos z$  в начале координат?

**11.8.** Даны две функции  $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$  и  $z = x^2 + y^2 - 3xy$ . Найти угол между градиентами этих функций в точке  $M(1; 1)$ .

### Домашнее задание

**11.9.** Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$ :

а)  $z = 4 + x^2 + 2y^2$ ,  $M(1; 0; 5)$ .

б)  $z = x \ln y + y \ln x$ ,  $M(e; e; 2e)$ .

в)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ ,  $M(1; 1; 1)$ .

**11.10.** Дана функция  $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ . Найти угол между градиентами этой функции в точках  $M_1(1; 1)$  и  $M_2(3; 4)$ .

**11.11.** Найти точки, в которых модуль градиента функции  $z=(x^2+y^2)^{3/2}$  равен 2.

**11.12.** Найти производную функции  $z=\ln(x+y)$  в точке  $(1; 2)$ , принадлежащей параболе  $y^2=4x$ , по направлению этой параболы.

### О т в е т ы

**11.1. а)**  $x-y-2z=-1-\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{-2}$ .

**б)**  $5x+12y+3z-32=0$ ;  $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-1}{3}$ .

**в)**  $17x+11y+5z=60$ ;  $\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}$ .

**г)**  $x+11y+5z-18=0$ ;  $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{11}=\frac{z+1}{5}$ .

**11.2.**  $13\sqrt{3}$ .

**11.3.**  $13,6+12,3\sqrt{3}$ .

**11.4.**  $\frac{1}{2}$ .

**11.6. а)**  $\frac{1}{3}(\vec{i} + \vec{j})$       **б)**  $-\frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j})$

**11.7.** Отрицательная полуось  $y$ .      **11.8.**  $\pi$ .

**11.9. а)**  $z-2x-3=0$ ;  $\begin{cases} 2z+x-9=0 \\ y=0 \end{cases}$ .

**б)**  $z-2x-2y+2e=0$ ;  $\frac{x-e}{2}=\frac{y-e}{2}=\frac{z-2e}{-1}$ .

**в)**  $x+2y+3z-6=0$ ;  $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ .

**11.10.**  $\cos\alpha \approx 0,99; \alpha \approx 8^\circ$ .

**11.11.** точки на окружности  $x^2+y^2=2/3$ .      **11.12.**  $\sqrt{2}/3$ .

## Занятие 12

*Экстремум функции нескольких переменных.  
Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких  
переменных в замкнутой области. Условный экстремум*

### Аудиторная работа

**12.1.** Исследовать на экстремум следующие функции:

а)  $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ .

б)  $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ .

в)  $z = x^3 + y^2 - 3x + 2y$ .

г)  $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$ .

**12.2.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $z = f(x, y)$  в замкнутой области, ограниченной линиями:

а)  $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x + y = 3$ .

б)  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ ;  $y = 2$ .

в)  $z = e^{-x^2 - y^2} (2x^2 + 3y^2)$ ;  $x^2 + y^2 = 4$ .

г)  $z = x^2 - y^2$ ;  $x^2 + y^2 = 4$ .

**12.3.** Исследовать функции на экстремум при заданном условии:

а)  $z = x + 2y$  при условии  $x^2 + y^2 = 5$ .

б)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при условии  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$ .

в)  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при условии  $x + y = 2$ .

г)  $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$  при условии  $x^2 + y^2 = 1$ .

## Домашнее задание

12.4. Исследовать на экстремум

а)  $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ ;

б)  $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ .

12.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в области:

а)  $z = x^2 y(4 - x - y)$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 6$ ;

б)  $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ .

12.6. Исследовать функцию на условный экстремум

а)  $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$  при  $x + y + 3 = 0$ .

б)  $z = xy^2$  при  $x + 2y = 1$ .

### О т в е т ы

12.1. а)  $z_{\min} = z(0; 0) = 0$ ; б)  $z_{\min} = z(0; 3) = -9$ .

12.5. а)  $z_{\text{наим}} = z(4; 2) = -64$ ,  $z_{\text{наиб}} = z(2; 1) = 4$ ;

б)  $z_{\text{наим}} = z(1; 0) = -3$ ,  $z_{\text{наиб}} = z(1; 2) = 17$ .

12.6. а)  $z_{\min} = z(-3/2; -3/2) = -19/4$ ;

б)  $z_{\min} = z(1; 0) = 0$ ,  $z_{\max} = z(1/3; 1/3) = 1/27$ .

## З а н я т и е 13

*Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными и однородных дифференциальных уравнений первого порядка*

### Аудиторная работа

13.1. Решить уравнения:

а)  $(1 - x)dy - ydx = 0$ .

б)  $xyy' = 1 - x^2$ .



$$\text{в)} \sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0.$$

$$\text{г)} y' = e^{x+y}.$$

$$\text{д)} xdy - ydx = 0, y(1) = 1.$$

$$\text{е)} y' = y \cos x, y(0) = 1.$$

$$\text{ж)} y' \sin x = y \ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

$$\text{з)} y' = (x^2 - x)(1 + y^2).$$

$$\text{и)} y' = \frac{y^2}{x^2} - 2.$$

$$\text{к)} y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

$$\text{л)} (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - xdy = 0, y(1) = 0.$$

$$\text{м)} xy' = x + \frac{1}{2}y, y(1) = 0.$$

$$\text{н)} (y - x) dx - (y + x) dy = 0.$$

$$\text{о)} xy' = y(\ln y - \ln x).$$

$$\text{п)} y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y(1) = -1.$$

### Домашнее задание

13.2. Решить уравнения:

$$\text{а)} y' \sqrt{1-x^2} = 1 + y^2.$$

$$\text{б)} ye^{2x} dx - (1 + e^{2x}) dy = 0.$$

$$\text{в)} y' = \cos(x + y).$$

$$\text{г)} (xy^2 + x) dy + (x^2 y - y) dx = 0, y(1) = 1.$$

$$\text{д)} y' \operatorname{tg} x = y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$\text{е)} y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

$$\text{ж)} (\sqrt{xy} - x) dy + ydx = 0, y(1) = 1. \quad \text{з)} y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}, y(1) = 0.$$

## ОТВЕТЫ

13.1. а)  $y = \frac{C}{1-x}$ .

в)  $1 + y^2 = C(-x^2)$

д)  $y = x$ .

ж)  $y = e^{\frac{\operatorname{tg} x}{2}}$

и)  $y = \frac{x(\sqrt{1+Cx^3})}{1-Cx^3}$ .

л)  $y = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

н)  $\ln C\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ .

б)  $y = C\sqrt{1 + e^{2x}}$ .

г)  $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \ln \left| \frac{y}{x} \right| = 1$ .

е)  $y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C}$ .

з)  $y = x \ln(1 + \ln x)$ .

б)  $x^2 + y^2 = 2 \ln cx$ .

г)  $e^x + e^{-y} + C = 0$ .

е)  $y = e^{\sin x}$ .

з)  $y = \operatorname{tg} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C \right)$

к)  $x^2 + y^2 = cy$ .

м)  $4x = \sqrt{x - y^2}$ .

13.2. а)  $\operatorname{arctg} y - \arcsin x = C$ .

в)  $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} - x = C$ .

д)  $y = \sin x$ .

ж)  $\ln|y| + 2\sqrt{\frac{x}{y}} = 2$ .

## Занятие 14

*Интегрирование линейных дифференциальных уравнений и уравнений Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах*

### Аудиторная работа

14.1. Решить дифференциальные уравнения:

а)  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ .

б)  $y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1$ .

- в)**  $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0.$      **г)**  $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1.$   
**д)**  $y' = 2y + e^x - x, \quad y(0) = \frac{1}{4}.$      **е)**  $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$   
**ж)**  $y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}.$      **з)**  $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y}.$   
**и)**  $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}.$      **к)**  $y' + 2xy = 2x^3 y^3.$   
**л)**  $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$      **м)**  $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0.$   
**н)**  $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$      **о)**  $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$   
**п)**  $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0.$   
**р)**  $\frac{xdy}{x^2 + y^2} = \left( \frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx.$   
**с)**  $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0; \quad y(0) = 0.$

### Домашнее задание

**14.2.** Решить дифференциальные уравнения:

- а)**  $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$      **б)**  $y' - \frac{2y}{x} = x^3.$   
**в)**  $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y(e) = \frac{1}{2} e^2.$      **г)**  $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$   
**д)**  $y' + y = \frac{1}{2} e^x \sqrt{y}; \quad y(0) = \frac{9}{4}.$      **е)**  $y' - \frac{y}{\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}} y^2.$   
**ж)**  $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0.$      **з)**  $e^{-y} dx - (xe^{-y} + 2y)dy = 0, \quad y(5) = 0.$

## ОТВЕТЫ

14.1. а)  $y = e^{-x^2} \left( c + \frac{x^2}{2} \right)$

в)  $y = \sin x$ .

д)  $y = -e^x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + e^{2x}$ .

ж)  $y = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + c}}$ .

и)  $y = x^4 \left( \frac{1}{2} \ln|x| + c \right)^2$ .

л)  $y = \frac{1}{1-x}$ .

н)  $xe^y - y^2 = c$ .

п)  $x^2 \cos y + y^2 = c$ .

с)  $\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1$ .

б)  $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$ .

г)  $y^{-4} = (e^x + C)x^3$ .

е)  $y = e^{2\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2} e^{\sqrt{2x}} \sqrt{x} - \frac{1}{8} e^{2\sqrt{x}} + C \right)$ .

з)  $xe^{-y} + y^2 = 5$ .

б)  $y = x \ln x + \frac{c}{x}$ .

г)  $y = cx^2 e^{1/x} + \frac{1}{x^2}$ .

е)  $y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$ .

з)  $y^2 = e^{-2x^2} \left( c + \frac{1}{2}x^2 \right)^2$ .

к)  $\frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{2} + ce^{2x^2}$ .

м)  $x^2 + xy + y^2 = c$ .

о)  $y \ln x + \frac{1}{4y^4} = c$ .

р)  $\arctg \frac{x}{y} - x = c$ .

14.2. а)  $(1+x^2)(x+C) = y$ .

в)  $y = \frac{1}{2}x^2 \ln x$ .

д)  $y = e^{-x} \left( \frac{1}{2}e^x + 1 \right)^2$ .

ж)  $ye^x + \frac{1}{2}y^2 = C$ .

## Занятие 15

### *Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка*

#### Аудиторная работа

**15.1.** Решить дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка:

а)  $y'' = \ln x + x$ .

б)  $y'' = x\sqrt{x}$ .

в)  $y'' = \operatorname{arctg} x$ .

г)  $xy'' + y' = 0$ .

д)  $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ .

е)  $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ .

ж)  $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$ .

з)  $yy'' = (y')^2$ .

и)  $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

#### Домашнее задание

**15.2.** Проинтегрировать уравнения:

а)  $y''' = xe^{-x}$ .

б)  $y''' = \sqrt{x-2}$ .

в)  $xy'' + \operatorname{ctg} y' = 0$ .

г)  $xy'' + y' = -x + 2$ .

д)  $y^3 y'' = 1$ .

е)  $yy'' = y'(y' + 1)$ .

#### Ответы

**15.1. а)**  $y = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2 + \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$ .

**б)**  $y = \frac{8}{315} x^4 \sqrt{x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ .

$$\text{в)} y = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \arctg x - \frac{1}{2} x \ln (x^2 + 1) + \frac{1}{2} x + C_1 x + C_2.$$

$$\text{г)} y = C_1 \ln|x| + C_2.$$

$$\text{д)} 9C_1^2 (x + C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^2$$

$$\text{е)} y = (C_1 x - C_1^2) e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C_2.$$

$$\text{ж)} C_1 x + C_2 + C \operatorname{tg} y = 0.$$

$$\text{з)} y = C_2 e^{C_1 x}, \quad y = C.$$

$$\text{е)} y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\text{к)} y = -(x+3)e^{-x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

$$\text{л)} y = \frac{8}{125} (x-2)^{7/2} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

$$\text{м)} y = x \arccos C_1 x + \frac{1}{C_1} \sqrt{1 - C_1^2 x^2} + C_2.$$

$$\text{н)} y = 2x - \frac{x^2}{4} + C_1 \ln x + C_2.$$

$$\text{о)} C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2.$$

$$\text{п)} C_1 y - 1 = C_2 e^{C_1 x}, \quad y = C_1 - x.$$

## Занятие 16

**Решение линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа**

### Аудиторная работа

**16.1.** Решить дифференциальные уравнения:

$$\text{а)} y'' + 4y' - 5y = 0.$$

$$\text{б)} y'' + 4y' = 0.$$

$$\text{в)} 4y'' - 4y' + y = 0.$$

$$\text{г)} y'' - 6y' + 9y = 0.$$

$$\text{д)} y^{(IV)} + 3y^{(IV)} + 3y'' + y' = 0.$$

$$\text{е)} y^{(IV)} - y'' = 0.$$

$$\text{ж)} y^{(IV)} + 5y'' + 4y = 0.$$

$$\text{з)} y^{(IV)} + 2y'' + y = 0.$$

$$\text{и)} y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y'(0) = y(0) = 1.$$

$$\text{к)} y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

**16.2.** Решить дифференциальные уравнения методом Лагранжа:

$$\text{а)} y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

$$\text{б)} y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

$$\text{в)} y'' - y = \frac{1}{\sin x}.$$

$$\text{г)} y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}.$$

$$\text{д)} y'' + 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

### Домашнее задание

**16.3.** Решить уравнения:

$$\text{а)} y'' + 3y' - 4y = 0.$$

$$\text{б)} y'' - 2y' + y = 0.$$

$$\text{в)} y'' + 4y' + 5y = 0.$$

$$\text{г)} y^{(IV)} - 3y'' - 4y = 0.$$

$$\text{д)} y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\text{е)} y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

### Ответы

$$\text{16.1. а)} y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}.$$

$$\text{б)} y = C_1 + C_2 e^{-4x}.$$

$$\text{в)} y = e^{\frac{1}{2}x} (C_1 + C_2 x)$$

$$\text{г) } y = e^{3x} (C_1 + C_2 x)$$

$$\text{д) } y = C_1 + C_2 x + e^{-x} (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)$$

$$\text{е) } y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 e^{-x}$$

$$\text{ж) } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$$

$$\text{з) } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x (C_3 \cos x + C_4 \sin x)$$

$$\text{и) } y = e^{-3x} (C_1 + 4x)$$

$$\text{к) } y = e^x \sin x$$

$$\text{16.2. а) } y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \left( x - \ln |e^x + 1| \right) e^x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x} \ln |e^x + 1|$$

$$\text{б) } y = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} \ln |\cos 2x| + C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

$$\text{в) } y = (C_1 + \ln |\sin x|) \sin x + (C_2 - x) \cos x$$

$$\text{г) } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln |e^x + 1|$$

$$\text{д) } y = e^{-x} \left( C_1 + C_2 x + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{16.3. а) } y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x};$$

$$\text{б) } y = e^x (C_1 + C_2 x)$$

$$\text{в) } y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$\text{г) } y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x$$

$$\text{д) } y = (C_1 - \ln |\sin x|) \cos 2x + (C_2 - x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x) \sin 2x$$

$$\text{е) } y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + x e^{-x} \ln |x|$$



## Занятие 17

### *Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида*

#### Аудиторная работа

17.1. Решить дифференциальные уравнения:

а)  $y'' + 4y = 2x^2 + 3x + 1$ .

б)  $y'' + 2y' + y = 8e^{-x}$ .

в)  $y'' - 4y' + 3y = (2x + 3)e^{2x}$ .

г)  $y'' + 3y' - 4y = 5 \sin x$ .

д)  $y'' + 6y' + 10y = x^2 + 4e^x$ .

е)  $y'' + y = 2 + \cos 2x$ .

ж)  $y'' + 3y' = 1 + \sin 3x + 4e^{2x}$ .

з)  $y'' - 4y = 2 \sin x + \cos 2x$ .

и)  $y'' - 4y' = 3x + 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .

к)  $y'' + 9y' = 3 \cos 3x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

#### Домашнее задание

17.2. Решить дифференциальные уравнения:

а)  $y'' + y' = 2x - 1$ .

б)  $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$ .

в)  $y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 0$ .

г)  $y'' + 16y = 32e^{4x}$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ .

д)  $y'' - 4y = e^{2x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -8$ .

## ОТВЕТЫ

$$17.1. \text{ а) } y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x.$$

$$\text{б) } y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 4x^2 e^{-x}.$$

$$\text{в) } y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + (x+3)e^{2x}.$$

$$\text{г) } y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^x - \frac{15}{34} \sin x.$$

$$\text{д) } y = C_1 e^{-3x} \cos x + C_2 e^{-3x} \sin x + \frac{(21 - 510x + 425x^2 + 1000e^x)}{4250}.$$

$$\text{е) } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{6} (\cos^2 x + \cos x \cos 3x + 15 \sin^2 x + \sin x \sin 3x).$$

$$\text{ж) } y = C_1 e^{-3x} + C_2 + \frac{x}{3} + \frac{2}{5} e^{2x} - \frac{1}{18} (\cos 3x + \sin 3x).$$

$$\text{з) } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{40} (\cos 2x + 16 \sin 2x).$$

$$\text{и) } y = \frac{1}{64} (5 + 39e^{4x} - 28x - 24x^2).$$

$$\text{к) } y = -\frac{1}{90} e^{-9x} (-10e^{9x} + 3e^{9x} \cos 3x - 9e^{9x} \sin 3x).$$

$$17.2. \text{ а) } y = C_1 + C_2 e^{-x} + x^2 - 3x.$$

$$\text{б) } y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (4 - 2x)e^{-x}.$$

$$\text{в) } y = -2e^{-x} - 4xe^{-x} + 3 \sin 2x.$$

$$\text{г) } y = \cos 4x - \sin 4x + e^{4x}.$$

$$\text{д) } y = 3e^{-2x} - 2e^{2x} + 2xe^{2x}.$$

## Занятие 18

### Решение систем дифференциальных уравнений. Метод исключения

#### Аудиторная работа

18.1. Решить системы дифференциальных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{t}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y(x+2y-1)}{t(x-1)}. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 5x + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x - 6y + e^{-2t}. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} xy' = y, \\ xzz' + x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x' = y & x(0) = 0, \\ y' = -x + 1 & y(0) = 1,5. \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} x' = 2x + y + \cos t, \\ y' = -x + 2 \sin t. \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} x' = \frac{1}{y}, \\ y' = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

#### Домашнее задание

18.2. Решить системы дифференциальных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = \frac{z-1}{z}, \\ z' = \frac{1}{y-x}. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x' = \frac{y^2}{x}, \\ y' = \frac{x^2}{y}. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 4x + 7y & y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \dot{x} = x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

## ОТВЕТЫ

$$18.1. \text{ а) } x = \frac{C_1 t + C_2 - 1}{C_1 t + C_2}, \quad y = \frac{C_1 t}{C_1 t + C_2}.$$

$$\text{б) } x = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-7t} + \frac{1}{5} e^{-2t} + \frac{7}{40} e^t,$$

$$y = \frac{1}{2} C_1 e^{-4t} - C_2 e^{-7t} + \frac{3}{10} e^{-2t} + \frac{1}{40} e^t.$$

$$\text{в) } y = C_1 x, \quad z = \pm \sqrt{C_2 - x^2 + C_1^2}$$

$$\text{г) } x = 1 - \cos t + 1,5 \sin t, \quad y = \sin t + 1,5 \cos t.$$

$$\text{д) } x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}, \quad y = C_1 (\sqrt{2} - 1) e^{\sqrt{2}t} - C_2 (\sqrt{2} + 1) e^{-\sqrt{2}t}.$$

$$\text{е) } x = C_1 + C_2 t + \frac{1}{2} \cos t, \quad y = C_2 (-t) - C_1 t - 2 \cos t - \frac{1}{2} \sin t.$$

$$\text{ж) } x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, \quad y = -C_1 e^t + 15 C_2 e^{5t}.$$

$$\text{з) } C_1 x^2 = 2t + C_2, \quad y^2 = C_1 (t + C_2)$$

$$18.2. \text{ а) } y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}, \quad z = C_2 e^{C_1 x}.$$

$$\text{б) } x^2 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \quad y^2 = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}.$$

$$\text{в) } x = e^{5t} (\cos 2t - \sin 2t), \quad y = 2e^{5t} \sin 2t.$$

$$\text{г) } x = (2C_1 t + 2C_2 + 1)e^{-t}, \quad y = (C_1 t + C_2)e^{-t}.$$

## Типовой расчет № 3

### Неопределенный и определенный интегралы

В заданиях:

№ 1–6 – найти неопределенные интегралы;

№ 7 – вычислить определенный интеграл;

№ 8 – вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

#### Вариант 1

1.  $\int \frac{x dx}{2x+1}$ .

2.  $\int (2x-1) \sin^2 x dx$ . 3.  $\int \frac{x dx}{2+\sqrt{x+4}}$ .

4.  $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx$ . 5.  $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{x^3 - 8} dx$ . 6.  $\int \frac{\arctg 2x}{1+4x^2} dx$ .

7.  $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}$ .

8.  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{4+x^2}$ .

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\rho = a \cos \varphi$ ,  $\rho = 2a \cos \varphi$ .

10. Найти длину полукубической параболы  $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^2$ , заключенной внутри параболы  $y^2 = \frac{x}{3}$ .

#### Вариант 2

1.  $\int x^2 e^{x^3} dx$ .

2.  $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$ .

3.  $\int \frac{\sin^2 x + x \sin 2x}{x \sin^2 x} dx$ .

4.  $\int \sin^4 \frac{3}{2} x dx$ .

5.  $\int \frac{2x+3}{x(x^2+2x-3)} dx$ .

6.  $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$ .

7.  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln x}}$ .

8.  $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3}$ .

9. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$ .

10. Найти длину кардиоиды  $\rho = 2(1 - \sin \varphi)$ .

### Вариант 3

1.  $\int \frac{\sin x dx}{4 + \cos^2 x}$ .

2.  $\int e^x \cos 2x dx$ .

3.  $\int \sin^2 x \cos x dx$ .

4.  $\int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x}$ .

5.  $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^3 + 4x^2}$ .

6.  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x+1}}$ .

7.  $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy$ .

8.  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ .

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$ , вокруг оси  $Ox$ .

### Вариант 4

1.  $\int \frac{x^2 dx}{9 - x^3}$ .

2.  $\int \arctg 2x dx$ .

3.  $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ .

4.  $\int \frac{2\sqrt{\ln x} dx}{x}$ .

5.  $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$ .

6.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+4}}$ .

7.  $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ .

8.  $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x}$ .

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy=6$ ,  $x+y=7$ .

10. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями  $y=x^2$ ,  $y=\sqrt{x}$ .

### Вариант 5

1.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1-\operatorname{ctg} x}}$ .

2.  $\int \ln 4x dx$ .

3.  $\int \frac{dx}{\arccos x \sqrt{1-x^2}}$ .

4.  $\int \frac{6\sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx$ .

5.  $\int \frac{x^4 dx}{x^3 + 1}$ .

6.  $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2}} dx$ .

7.  $\int_1^e \frac{\ln x + 4x^2}{x} dx$ .

8.  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$ .

9. Найти длину дуги кривой  $y=e^x-1$  от точки  $(0; 0)$  до точки  $(1; e-1)$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y=x^2$ ,  $y=0$ ,  $x=2$ , вокруг оси  $Oy$ .

### Вариант 6

1.  $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}$ .

2.  $\int x \arccos 2x dx$ .

3.  $\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$ .

4.  $\int x \sin(1-3x^2) dx$ .

5.  $\int \frac{x^5 + 2x - 1}{x^4 - 1} dx$ .

6.  $\int \frac{\sqrt{2x+1} dx}{4 + \sqrt{2x+1}}$ .

7.  $\int_0^{\pi/3} \sin^2 x dx$ .

8.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$ .

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $x=t-\sin t$ ,  $y=1+\cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

10. Найти объем тела полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $xy=1$ ,  $x=3$ ,  $y=3$ .

### Вариант 7

$$1. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx. \quad 2. \int \frac{2x-1}{\cos^2 x} dx. \quad 3. \int x^2 \sqrt{1-3x^3} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{\cos x - 3 \sin x}. \quad 5. \int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx. \quad 6. \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 3\sqrt{x}}}} dx.$$

$$7. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx. \quad 8. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 2 \cos 3\varphi$ .

10. Вычислить длину кривой  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ .

### Вариант 8

$$1. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}. \quad 2. \int \ln(1+x^2) dx.$$

$$3. \int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad 4. \int \frac{dx}{5 + 2 \sin x + 3 \cos x}.$$

$$5. \int \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)(x^2+1)} dx. \quad 6. \int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1}(\sqrt[3]{x+1} + 1)} dx.$$

$$7. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx. \quad 8. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

9. Вычислить длину кривой  $y = \ln x$  от точки  $(1; 0)$  до точки  $(e; 1)$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $x = \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .



### Вариант 9

$$1. \int \frac{(1+\sqrt{x})^5 dx}{\sqrt{x}}. \quad 2. \int (2x-1)e^{4x} dx. \quad 3. \int \frac{x^6 dx}{10+x^7}.$$

$$4. \int \sin^4 2x \cos^2 2x dx. \quad 5. \int \frac{4-3x}{x^3+8x^2} dx. \quad 6. \int \frac{dx}{x\sqrt{x+2}}.$$

$$7. \int_4^9 \frac{y+1}{\sqrt{y-1}} dy. \quad 8. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 2a \sin \varphi$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = x$ ,  $x = 4$ .

### Вариант 10

$$1. \int x^2 \sin x^3 dx. \quad 2. \int x^2 \sin 3x dx. \quad 3. \int (x^2+1)e^{x^3+3x} dx.$$

$$4. \int \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\cos^5 x}}. \quad 5. \int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+3x} dx. \quad 6. \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}} dx.$$

$$7. \int_0^{\ln 4} \frac{dx}{e^x+1}. \quad 8. \int_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

9. Найти длину кривой  $\rho = 4 \sin \varphi$ .

10. Найти площадь фигуры, ограниченную линиями  $x = 4 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ .

### Вариант 11

$$1. \int (1+\operatorname{ctg}^3 x) \frac{dx}{\sin^2 x}; \quad 2. \int (x^2+1) \ln x dx; \quad 3. \int \sqrt{9-x^2} dx;$$

$$4. \int \frac{dx}{2 \cos x + 3}; \quad 5. \int \frac{x^2 + 4}{x^3 + x} dx; \quad 6. \int \frac{\sqrt{2x-1} dx}{\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt{2x-1}};$$

$$7. \int_0^{\pi/2} \cos x 2^{\sin x} dx; \quad 8. \int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16-x^4}}.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $x^2 = 16x - 4y$ ,  $x = 4 + y$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $x^2 - y^2 = a^2$ ,  $x = 2a$ .

### В а р и а н т 12

$$1. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx. \quad 2. \int \frac{\ln x}{x^4} dx. \quad 3. \int x^3 e^{4x^4} dx.$$

$$4. \int \operatorname{tg}^4 3x dx. \quad 5. \int \frac{2x+9}{x^4 - x^2 - 12} dx. \quad 6. \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$7. \int_1^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx. \quad 8. \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^3 + 1)^4}.$$

9. Найти длину кривой  $y = \ln \cos x$  от точки  $(0; 0)$  до точки  $(\frac{\pi}{4}; \ln \frac{\sqrt{2}}{2})$ .

10. Найти площадь фигуры, ограниченной одним витком  $\rho = 2\varphi$ .

### В а р и а н т 13

$$1. \int \operatorname{tg} 3x dx. \quad 2. \int (4x-1) \cos^2 2x dx. \quad 3. \int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x}. \quad 5. \int \frac{3x+4}{x^3 + 5x^2 - 6x} dx. \quad 6. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \sqrt[4]{x}}.$$

$$7. \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx. \quad 8. \int_1^2 \frac{x dx}{(x-1)^2}.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y^2 = x+5$ ,  
 $y^2 = 4-x$ .

10. Найти длину кривой  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).

### Вариант 14

$$1. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}. \quad 2. \int \ln^2 2x dx. \quad 3. \int e^x \operatorname{cose}^x dx.$$

$$4. \int \operatorname{ctg}^3 3x dx. \quad 5. \int \frac{3x+8}{x^3-x} dx. \quad 6. \int \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}} dx.$$

$$7. \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}. \quad 8. \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 4 \sin 2\varphi$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 9-x$ ,  $x=0$ .

### Вариант 15

$$1. \int \cos x \sqrt{1-\sin x} dx. \quad 2. \int \frac{x dx}{\sin^2 2x}. \quad 3. \int x 4^{x^2} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{2+\cos x}. \quad 5. \int \frac{2x-1}{x^4+5x^2+6} dx. \quad 6. \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$7. \int_0^{\pi/3} \sin x \cos^2 x dx. \quad 8. \int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^3} dx.$$

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ,  
 $y = \frac{x^2}{2}$ .

10. Найти длину кривой  $x = 2(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = 2(\sin t - t \cos t)$ ,  
 $0 \leq t \leq \pi$ .

### Вариант 16

1.  $\int \frac{\sqrt{1-2\ln x}}{x} dx$ .      2.  $\int e^{2x} \sin^2 x dx$ .      3.  $\int \frac{2x+3}{x^2+x+2} dx$ .

4.  $\int \sin^4 2x \cos^4 2x dx$ .      5.  $\int \frac{3x^2+4x-1}{x^4+x^2} dx$ .      6.  $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}} dx$ .

7.  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx$ .      8.  $\int_{+1}^4 \frac{x dx}{x^2-1}$ .

9. Найти длину кривой  $y^2 = (x-1)^3$  от точки (1; 0) до точки (6;  $\sqrt{125}$ ).

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - x$ ,  $y = 0$ .

### Вариант 17

1.  $\int 2^x \sqrt{1+2^x} dx$ ;      2.  $\int \frac{3x+5}{\cos^2 3x} dx$ ;      3.  $\int \frac{4x-3}{\sqrt{2-2x-x^2}} dx$ ;

4.  $\int \frac{\sin 2x dx}{4\sin^2 x + \cos^2 x}$ ;      5.  $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^4-8x^2-9} dx$ ;      6.  $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1} dx$ ;

7.  $\int_0^{\pi/6} \sin^3 2x dx$ ;      8.  $\int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3-1}$ .

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 9x$ ,  $y = 3x$ .  
 10. Вычислить длину кривой  $x = 5 \cos^2 t$ ,  $y = 5 \sin^2 t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ).

### Вариант 18

1.  $\int \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x+3}} dx$ .    2.  $\int x \arctg 2x dx$ .    3.  $\int \sin 2x \cos^2 x dx$ .  
 4.  $\int \tg^5 2x dx$ .    5.  $\int \frac{x^2+4x-3}{x^4+4x^2} dx$ .    6.  $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x+1})} dx$ .  
 7.  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+5 \cos x}$ .    8.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$ .

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy=4$ ,  $y=1$ ,  $y=4$ ,  $x=0$ .  
 10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y=2x$ ,  $y=x$ ,  $x=3$ .

### Вариант 19

1.  $\int \frac{\ctg^3 x}{\sin^2 x} dx$ .    2.  $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ .    3.  $\int \frac{x^2 dx}{2x^2+1}$ .  
 4.  $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x}$ .    5.  $\int \frac{x^4+2x-1}{8-x^3} dx$ .    6.  $\int \frac{x+2}{1+\sqrt{x+1}} dx$ .  
 7.  $\int_0^{\pi/4} \sin^5 x dx$ .    8.  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} x dx$ .

9. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \sin x$ ,  $y = 0$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ).  
 10. Найти длину кривой  $x = 8 \sin t + 6 \cos t$ ,  $y = 6 \sin t - 8 \cos t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ).

### Вариант 20

$$1. \int 3^{\operatorname{tg} 3x} \frac{dx}{\cos^2 3x}. \quad 2. \int x^2 e^{3x} dx. \quad 3. \int \frac{4x+1}{x+2} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x}. \quad 5. \int \frac{x^3 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

$$6. \int \frac{x-1}{x\sqrt{x-2}} dx. \quad 7. \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin 2x}{4 + \cos^2 x} dx. \quad 8. \int_0^{\pi/4} 4^{\operatorname{ctg} x} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 3 \cos \varphi$ .

10. Найти длину кривой  $y = e^{-x}$  от точки  $(0; 1)$  до точки  $(5; e^{-5})$ .

### Вариант 21

$$1. \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}} dx. \quad 2. \int \arccos 2x dx. \quad 3. \int 2^x \operatorname{tg} 2^x dx.$$

$$4. \int \frac{2 - \sin x + 3 \cos x}{1 + \cos x} dx. \quad 5. \int \frac{4x^2 + 38}{(x+1)(x^2 - 4x + 13)} dx.$$

$$6. \int \frac{\sqrt{x} dx}{3x + \sqrt[3]{x^2}}. \quad 7. \int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos^2 3x}. \quad 8. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x \ln x}.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 4 \cos 3\varphi$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$ ,  $x = 0$  ( $x > 0$ ).

### Вариант 22

$$1. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx. \quad 2. \int (2x+3)2^x dx. \quad 3. \int \frac{4x-1}{x^2+2x+2} dx.$$

$$4. \int \operatorname{ctg}^6 3x dx. \quad 5. \int \frac{6x dx}{x^3 - 1}. \quad 6. \int \frac{\sqrt{x+3} dx}{1 + \sqrt[3]{x+3}}.$$

$$7. \int_{\pi/12}^{\pi/9} \operatorname{ctg} 3x dx. \quad 8. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $x = 4 \cos t$ ,  $y = 9 \sin t$ .

10. Найти длину кривой  $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$ .

### Вариант 23

$$1. \int \sin 2x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx. \quad 2. \int \log_2(3x-1) dx.$$

$$3. \int \frac{x-1}{\sqrt{13-6x+x^2}} dx. \quad 4. \int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 3}.$$

$$5. \int \frac{3x-1}{x^4 + 13x^2 + 36} dx. \quad 6. \int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$$

$$7. \int_{\pi/16}^{\pi/12} \cos^2 4x dx. \quad 8. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}.$$

9. Найти длину кривой  $y = \ln \sin x$  ( $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ).

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $xy = 4$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$ .

### Вариант 24

$$1. \int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx. \quad 2. \int \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^2}} dx. \quad 3. \int \frac{3x-4}{x^2 + 6x + 13} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 8 \sin x \cos x}. \quad 5. \int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}. \quad 6. \int \frac{\sqrt{x} dx}{2 + \sqrt[4]{x}}.$$

$$7. \int_1^{e/2} \ln 2x dx.$$

$$8. \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy=9$ ,  $y=x$ ,  $x=5$ .

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = x$ ,  $x=4$ .

### Вариант 25

$$1. \int \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx.$$

$$2. \int (x^2 - 2x + 1) e^{3x} dx.$$

$$3. \int \frac{8x-5}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx.$$

$$4. \int \operatorname{ctg}^5 4x dx.$$

$$5. \int \frac{x^3 + 2x + 3}{x^4 - 16} dx.$$

$$6. \int \frac{\sqrt{x} dx}{4x + \sqrt[3]{x^2}}.$$

$$7. \int_1^{\sqrt{3}} x \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$8. \int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx.$$

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=x^2$ ,  $y=4-3x^2$ .

10. Найти длину кривой  $\rho = 5(1 + \cos \varphi)$ .

### Типовой расчет № 4

#### *Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений*

В заданиях:

№ 1–8, 10, 11 найти общее решение дифференциальных уравнений. Если даны начальные условия, то решить задачу Коши;

№ 9 решить методом Лагранжа;

№ 12 – решить систему дифференциальных уравнений.



### Вариант 1

1.  $y' \sin x = y \ln y$ .

2.  $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$ .

3.  $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$ .

4.  $y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$ .

5.  $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$ .

6.  $2yy'' = 3(y')^2 + 4y^2$ .

7.  $y'' = \frac{y'}{x} (1 + \ln \frac{y'}{x})$ ,  $\begin{cases} y(1) = 1/2 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$ .

8.  $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$ .

9.  $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$ .

10.  $y'' - 2y' = (2x + 3)e^{2x}$ .

11.  $y'' + 2y' + 2y = 1 + 4 \sin x$ .

12.  $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ .

### Вариант 2

1.  $y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x$ .

2.  $xy' = y(\ln y - \ln x)$ .

3.  $x^2 y' + xy + 1 = 0$ .

4.  $2xy' + 2y = xy^2$ .

5.  $(2x + e^{x/y}) dx + (1 - \frac{x}{y}) e^{x/y} dy = 0$ .

6.  $e^y (y'' + (y')^2) = 2$ .

7.  $e^x (y'' e^x) = 1$ ,  $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ .

8.  $y^{IV} - 3y''' - 4y = 0$ .

9.  $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$ .

10.  $y'' + y' = x^2 + 1$ .

11.  $y'' + 2y' - 3y = e^{2x} + 9 \cos x$ .

12.  $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1 \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$ .

### Вариант 3

$$1. y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}.$$

$$2. y dy = (2y - x) dx.$$

$$3. xy' + y + xe^{-x^2} = 0.$$

$$4. 2y' + 2xy = x e^{-x^2} y^2.$$

$$5. y'y'' + yy'' = (y')^2. \quad 6. (10xy - 8y + 1) dx + (5x^2 - 8x + 3) dy = 0.$$

$$7. y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}, \begin{cases} y(1) = e, \\ y'(1) = e. \end{cases}$$

$$8. y'' + 2y' - 3y = 0.$$

$$9. y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$$

$$10. 4y'' + 4y' + y = 3 \cos 2x.$$

$$11. y'' + 4y' + 5y = 2x + 3 + xe^x.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t \end{cases}.$$

### Вариант 4

$$1. 3e^x (\sin y) dx + (1 + e^x) \cos y dy = 0.$$

$$2. \frac{dx}{xy - x^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy}.$$

$$3. y' = 2x(x^2 + y).$$

$$4. y' + 2xy = 2x^3 y^3.$$

$$5. (2x^3 - xy^2) dx + (2y^3 - x^2 y) dy = 0.$$

$$6. y y'' = (y') e^3.$$

$$7. y'' = \frac{y'}{x} + x \cos x, \begin{cases} y(\pi) = \pi + 1 \\ y'(\pi) = 2\pi \end{cases}.$$

$$8. y^{IV} - y'' = 0.$$

$$9. y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1}.$$

$$10. y'' + 9y = 4 \cos 3x.$$

$$11. y'' - 4y' = 2x + 1 + 4e^{2x}.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = 4x + y - 36t \\ \dot{y} = y - 2x - 2e^t \end{cases}.$$

### Вариант 5

$$1. 3y^{2-x^2} = \frac{yy'}{x}.$$

$$2. y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

$$3. y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctg} x.$$

$$4. xy' + y = y^2 \ln x.$$

$$5. e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0.$$

$$6. y''y + (y')^2 = y'.$$

$$7. x(y'' - x) = y', \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

$$8. y^{IV} - y''' = 0.$$

$$9. y'' + y = \operatorname{tg} x.$$

$$10. y'' + 6y' + 13y = 3e^{2x} \sin x.$$

$$11. y'' - 2y' + y = 2e^x + x - 1.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 5t, \\ \dot{y} = 3x + 2y + 8e^t. \end{cases}$$

### Вариант 6

$$1. y' \sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0.$$

$$2. 4xy dy = (x^2 - y^2) dx.$$

$$3. y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0.$$

$$4. y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2) y^{2/3}.$$

$$5. \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \left( \frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx.$$

$$6. y'' = y' + x.$$

$$7. y'' y^3 = 1, \quad y(0,5) = y'(0,5) = 1.$$

$$8. y^{IV} + 8y'' - 9y = 0.$$

$$9. y'' - y = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}.$$

$$10. y'' - 4y = 5e^{2x}.$$

$$11. y'' - 4y' = 2x - 3 + \cos 3x.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y + 2 \cos t \end{cases}$$

### Вариант 7

- |  |   |
|--|---|
| 1. $(1 + e^{3y})x dx = e^{3y} dy$ .          | 2. $xy' = y + y \ln \frac{y}{x}$ .  |
| 3. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$ .            | 4. $xy' + y = xy^2$ .   |
| 5. $x dx + y dy = 0$ .                       | 6. $y'' + y'(y-1) = (y')^2$ .   |
| 7. $xy'' = y'$ , $y(1) = y'(1) = 2$ .        | 8. $y^{IV} + 2y'' + 2y' = 0$ .  |
| 9. $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$ .      | 10. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ .  |
| 11. $y'' - 6y' + 13y = 4 \sin 2x - \cos x$ . | 12. $\begin{cases} y' = \frac{y^2}{z} \\ z' = \frac{1}{2}y \end{cases}$ . |

### Вариант 8

- |   |   |
|---|---|
| 1. $(x + 2xy) dx + (1 + x^2) dy = 0$ .                                    | 2. $y dx = (2\sqrt{xy} - x) dy$ .   |
| 3. $y' + 2y = e^{3x}$ .   | 4. $xy' - y = y^2$ .  |
| 5. $\frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2} dy = 0$ .                                | 6. $2yy'' + y^2 = (y')^2$ .   |
| 7. $x(y'' + 1) + y' = 2$ , $y(1) = \frac{1}{2}$ , $y'(1) = \frac{5}{2}$ . | 8. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$ .  |
| 9. $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$ .                                       | 10. $y'' + 10y' + 26y = (3x - 1)e^x$ .  |
| 11. $y'' + 4y' = 1 + 4 \cos^4 x$ .  | 12. $\begin{cases} \dot{x} = y - \cos t, \\ \dot{y} = -x + \sin t. \end{cases}$ |

### Вариант 9

$$1. (1 + y^2) dx - (2y + \sqrt{1 + y^2})(1 + x)^{3/2} dy = 0.$$

$$2. y^2 - 3xy + 3x^2 y' = 0.$$

$$3. y' + \frac{y}{x} = 2 \ln x + 1.$$

$$4. y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

$$5. yy'' = y'(y' + 1).$$

$$6. (e^x + y + \sin y) dx + (e^y + x + \cos y \cdot x) dy = 0.$$

$$7. y'' = -\frac{x}{y}, y(2) = 0, y'(2) = 1.$$

$$8. y^{IV} + y'' = 0.$$

$$9. y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x.$$

$$10. y'' + y' = 3 \cos x.$$

$$11. 4y'' - 4y' + y = x^2 + 4e^{2x}.$$

$$12. \begin{cases} y' = -5y + 2t + 40e^t, \\ x' = y - 6t + 9e^{-t}. \end{cases}$$

### Вариант 10

$$1. (2xy^2 + x) dx + (3y - x^2 y) dy = 0.$$

$$2. (x - y) dx + (x + y) dy = 0.$$

$$3. y' + \frac{2y}{x+1} = e^x (x+1)^2.$$

$$4. y' - \frac{xy}{x^2 - 1} = x\sqrt{y}.$$

$$5. xy'' - y'' + \frac{1}{x} = 0.$$

$$6. 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0.$$

$$7. y'' = 2yy', y(0) = y'(0) = 1.$$

$$8. y''' - 8y = 0.$$

$$9. y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$$

$$10. y'' + 4y' + 29y + 26e^{-x}.$$

$$11. y'' + 4y' = 2x + 5 + xe^{3x}.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}.$$

### Вариант 11

$$1. (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dy + y dx = 0.$$

$$2. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$3. xy' + y = e^x.$$

$$4. y' - y + y^2 \cos x = 0.$$

$$5. 2xy dy + (x^2 + y^2 + 2x) dx = 0.$$

$$6. y'' + \frac{(y')^2}{1-y} = 0.$$

$$7. y'' - 2 \operatorname{ctg} x y' = \sin^3 x, \quad y(\pi/4) = 0, \quad y'(\pi/4) = 1.$$

$$8. 4y^{IV} + 4y''' + y'' = 0.$$

$$9. y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

$$10. y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x.$$

$$11. y'' - 2y' + 2y = 3x + (4x-1)e^{2x}.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x, \\ \dot{y} = y - 2x + t. \end{cases}$$

### Вариант 12

$$1. (x^2 + 2x) y' = y + 4.$$

$$2. xy' - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{x}.$$

$$3. xy' - \frac{y}{x+1} = x.$$

$$4. y' = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}.$$

$$5. 2yy' = y''.$$

$$6. (x^3 - 3xy^2 + 2) dx - (3x^2y - y^2) dy = 0.$$

$$7. y^{IV} - 5y'' + 4y = 0.$$

$$8. y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

$$9. y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$$

$$10. y'' + y' = xe^{-x}.$$

$$11. y'' + 3y' + 10y = \sin 3x - \cos x.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 18t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}.$$

### Вариант 13

$$1. y^2 + y'x^2 = 0.$$

$$2. xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$$

$$3. y' + y = \cos x.$$

$$4. y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y}.$$

$$5. 2(y')^2 = y'(y-1).$$

$$6. (x^2 + y^2 + y) dx + (2xy + x + e^y) dy = 0.$$

$$7. y''x + y' = \ln x, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2.$$

$$8. y'' + 3y' + 3y + y = 0.$$

$$9. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$10. y'' + 6y' + 9y = 2x^2 - 1.$$

$$11. y'' + 4y' + 5y = 4xe^{2x} + \cos x.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + e^{3t}. \end{cases}$$

### Вариант 14

$$1. 2e^y(1+x^2) dy - x(e^y+1) dx = 0.$$

$$2. x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

$$3. y' - \frac{y}{x} = x.$$

$$4. y' + 2y = y^2 e^x.$$

$$5. (y + x \ln y) dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right) dy = 0.$$

$$6. 2xy'y'' = (y')^2 + 1.$$

$$7. y'' = y'e^y, y(0) = 0, y'(0) = 1. \quad 8. y^{IV} + 4y''' - 5y'' = 0.$$

$$9. y'' + y = \operatorname{tg}^2 x.$$

$$10. 4y'' + 9y = 5 \cos 3x.$$

$$11. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

$$12. y'' + 8y' + 17y = 2x^2 + 3x + 1 + 3e^{2x}.$$

### Вариант 15

$$1. x \ln xy' = y.$$

$$2. y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

$$3. y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x.$$

$$4. xy' - 4y - 2x^2 \sqrt{y} = 0.$$

$$5. y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1).$$

$$6. (3x^2 y + \sin x) dx + (x^3 - \cos y) dy = 0.$$

$$7. y'' + 2y(y')^3 = 0, y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}.$$

$$8. y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$$

$$9. y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}.$$

$$10. y'' + 4y' + 5y = 4e^x \cos 3x.$$

$$11. y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x} + 3 \cos 4x.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2e^t. \end{cases}$$

### Вариант 16

$$1. (4 + x^2) dy - \sqrt{1 - 16y^2} dx = 0.$$

$$2. x^2 + xy + y^2 = x^2 y'.$$

$$3. y' - \frac{2y}{x} = x^3.$$

$$4. xy^2 y' = x^2 + y^3.$$



5.  $x^2 \sin y dx + (1 + \frac{x^3}{3} \cos y) dy = 0$ .      6.  $y'' + 4y' = 2x^2$ .
7.  $y'' = 2 - y$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 2$ .      8.  $y^{IV} + y'' = 0$ .
9.  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}$ .      10.  $y'' + 9y = 3 \cos 3x$ .
11.  $y'' - y' = 4x + 3 + 4e^{2x}$ .      12.  $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5 \sin t \end{cases}$

### Вариант 17

1.  $yy' = e^{2x-y}$ .      2.  $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$ .
3.  $y' \operatorname{tg} x - y = 1$ .      4.  $xy' + y = \sqrt{x}$ .
5.  $e^x dy + (ye^x - 2x) dx = 0$ .      6.  $x^2 y'' = (y')^2$ .
7.  $y'' = \frac{1}{y^3}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .      8.  $y^{IV} + 2y'' + y' = 0$ .
9.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ .      10.  $y'' + 2y' + 5y = 3xe^{2x}$ .
11.  $y'' + 4y' + 4y = 3x + 1 + 5 \cos 3x$ .      12.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = y - 2x + 18t \end{cases}$

### Вариант 18

1.  $xy' + y = y^2$ .      2.  $4y' = \frac{y^2 + 4x^2}{x^2}$ .
3.  $y' - \frac{y}{x} = x \cos 2x$ .      4.  $y' - \frac{y}{\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x}} y^2$ .

$$5. (\ln y - x) dx + \left(\frac{x}{y} - y\right) dy = 0.$$

$$6. y''(2y+3) = 2(y')^2.$$

$$7. x^3 y'' + x^2 y' = 1, y(1) = 1, y'(1) = 2.$$

$$8. y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 0.$$

$$9. y'' + y = \operatorname{ctg} x.$$

$$10. y'' - 16y = 3xe^{4x}.$$

$$11. y'' + 5y' = 4x + 3 + \cos 2x.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - x + \cos 3t \end{cases}$$

### Вариант 19

$$1. y' = \frac{y-1}{x+1}.$$

$$2. (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x.$$

$$3. xy' + y = e^x.$$

$$4. y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{y}.$$

$$5. xy'' + y' = \ln x.$$

$$6. \left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right) dy = 0.$$

$$7. y'' + y(y')^3 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

$$8. y^{IV} + 18y'' + 81y = 0.$$

$$9. y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$10. y'' + 5y' - 6y = (2x+3)e^x.$$

$$11. y'' - 4y' = (3x+1)^2 + 5xe^x.$$

$$12. \begin{cases} \dot{x} = -y + t - 1 \\ \dot{y} = x + 2t \end{cases}$$

### Вариант 20

$$1. \sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0.$$

$$2. y^2 + x^2 y' = xy'y.$$

3.  $x^2 y' + 2xy - 1 = 0$ .

4.  $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$ .

5.  $\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \frac{2y}{x} dy = 0$ .

6.  $y'' = 2(y' - 1) \operatorname{ctg} x$ .

7.  $y^{IV} + 2y'' = 0$ .

8.  $y' y^2 + y y'' = (y')^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .

9.  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ .

10.  $y'' - y' - 2y = x \cos x - \sin x$ .

11.  $y'' + 9y = x^2 + 5 - 9e^{4x}$ .

12. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y - e^{-2t}, \\ \dot{y} = x - 2y - 3e^{-2t}. \end{cases}$$

### Вариант 21

1.  $(y - 2) dx + x^2 dy = 0$ .

2.  $y' = \frac{3x}{y} + \frac{y}{x}$ .

3.  $xy' - y = x^2 e^x$ .

4.  $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ .

5.  $(5x + xy^2) dx + (4y + x^2 y) dy = 0$ ;

6.  $3y' y'' = 2y$ .

7.  $x(y'' + y') = y'$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$ .

8.  $y^{IV} - 2y^{IV} + y'' = 0$ .

9.  $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$ .

10.  $y'' + 2y' - 3y = (x + 3)e^x$ .

11.  $y'' + 4y = 1 + 6 \cos 3x$ .

12. 
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5 \cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$$

### Вариант 22

1.  $\sqrt{3 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy$ .

2.  $y dy = (2y - x) dx$ .

$$2. xy' - \frac{y}{x+1} = x. \quad 4. 2y' - \frac{xy}{x^2-1} = \frac{x}{y}.$$

$$5. x(y'' - x) = y'. \quad 6. (3x \sin y + 1) dx + \left(\frac{3}{2} x^2 \cos y + 1\right) dy = 0.$$

$$7. y^{IV} - 5y''' = 0. \quad 8. 3y'y'' = y + (y')^3 + 1, y(0) = -2, y'(0) = 0.$$

$$9. y'' + 9y = 3 \operatorname{tg} 3x. \quad 10. y'' + 4y' = (x+1)^2.$$

$$11. y'' - 3y' + 4y = \cos 3x + 12e^{2x}. \quad 12. \begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$

### Вариант 23

$$1. (1+x)y' = xy. \quad 2. x^2 y' = y(x+y).$$

$$3. (1-x)(y' + y) = e^{-x}. \quad 4. \frac{x}{y^2} = y' + y.$$

$$5. \frac{y}{x^2} dx - \frac{xy+1}{x} dy = 0. \quad 6. (x+1)y'' + x(y')^2 = y'.$$

$$7. y^{IV} + 13y'' + 36y = 0. \quad 8. y'(1+(y')^2) = 3y''; y(2) = 1, y'(2) = 2.$$

$$9. y'' + 6y' + 9y = 4e^x(\cos x - \sin x). \quad 10. y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}.$$

$$11. y'' + 4y' = x^2 + 2x - 3 + 5e^{3x}. \quad 12. \begin{cases} \dot{y} = \frac{y}{x}, \\ \dot{z} = y + z. \end{cases}$$

### Вариант 24

1.  $y' - 2\sqrt{y} \ln x = 0$ .
2.  $(4x^2 + 3xy + y^2) dx + (4y^2 + 3xy + x^2) dy = 0$ .
3.  $y' + y \cos x = \sin x \cos x$ .
4.  $y' - 3y = x\sqrt[3]{y}$ .
5.  $\left(1 + \frac{2x}{y^3}\right) dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right) dy = 0$ .
6.  $y''(1 + \ln x) + \frac{y'}{x} = 2 + \ln x$ .
7.  $2y'' = 3y^2$ ,  $y(-2) = 1$ ,  $y'(-2) = 1$ .
8.  $y^{IV} + 4y'' + 5y' = 0$ .
9.  $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$ .
10.  $2y'' + 9y' = 4\sin 3x + \cos 3x$ .
11.  $y'' + 6y' + 9y = 4x + 3 - 5e^{-3x}$ .
12.  $\begin{cases} \dot{x} = x + y + t, \\ \dot{y} = -4x - 3y + 2t. \end{cases}$

### В а р и а н т 25

1.  $(4x + xy^2) dx + (3y - x^2y) dy = 0$ .
2.  $y = \left(y - e^{\frac{y}{x}}\right) x$ .
3.  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ .
4.  $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$ .
5.  $(3x^2y - \frac{4}{x^2}) dx + (\cos y + x^3) dy = 0$ .
6.  $y(y' + 1) = (y')^2$ .
7.  $y'' x \ln x = 2y'$ ,  $y(e) = 1$ ,  $y'(e) = 2$ .
8.  $y^{IV} - 15y'' - 16y = 0$ .
9.  $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{4 + x^2}$ .
10.  $4y'' - 4y' + y = 4x^2 + 5x$ .
11.  $y'' - 8y' + 20y = 4\sin 2x + xe^{2x}$ .
12.  $\begin{cases} \dot{x} = -y + e^{3t}, \\ \dot{y} = -x + 2e^{3t}. \end{cases}$

Учебное издание

## ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник заданий  
для аудиторной и самостоятельной работы  
студентов инженерно-технических специальностей

В 2 частях

Часть 1

Составители:

АНДРИЯНЧИК Анатолий Николаевич  
МИКУЛИК Николай Александрович  
РАЕВСКАЯ Лариса Алексеевна и др.

Редактор Т.Н. Микулик  
Технический редактор О.В. Дубовик  
Компьютерная верстка О.В. Дубовик

---

Подписано в печать 22.06.2009.

Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 9,07. Уч.-изд. л. 7,09. Тираж 500. Заказ 1103.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский национальный технический университет.

ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009.

Проспект Независимости, 65. 220013, Минск.