

На рис. 2 представлены результаты расчета долговечности вала (для опорной поверхности сопряженной с втулкой подшипника) от максимальной удельной нагрузки, которая зависит от угла контакта, материалов сопряженных деталей (покрытий). Полученные данные наглядно демонстрируют эффективность применения газотермического напыления композиционных покрытий, обладающих требуемыми физико-механическими и эксплуатационными свойствами при повышении долговечности крупногабаритных тяжело нагруженных валов, работающих в условиях фреттинг-коррозии. Повышение долговечности таких валов за счет нанесения покрытий из разработанных композиций в диапазоне удельных нагрузок 8 – 64 МПа составляет порядка 50 % по сравнению с не упрочненными валами.

Таким образом, из проведенных исследований и расчетов следует, что предложенный подход позволяет определять долговечность или износ деталей трущихся при различных видах трения скольжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Uhlig, H.H. – “J. Appl. Mech.”, 1954. – Vol.21. – p.401.
2. Иванова, В.С. Усталость и хрупкость металлических материалов / В.С. Иванова. – М.: Наука, 1968. – 452 с.
3. Спиридонов, Н.В. Исследование износостойкости газотермических покрытий для восстановления прессовых валов бумагоделательных машин / Н.В. Спиридонов, И.О. Соколов, А.С. Володько // Машиностроение: Республиканский межведомственный сборник научных трудов: в 2 т. / под ред. Б.М. Хрусталева. – Минск, 2005. – Вып. 21. Т. 2. – С. 134 – 139.
4. Титченер, Э.Л. Скрытая энергия при наклепе: в сб.: «Успехи физики металлов» / Э.Л. Титченер, М.Б. Бевер. – М.: Metallurgizdat, 1961. – Т.4. – С.34 – 39.
5. Хаазе, Р. Термодинамика необратимых процессов / Р. Хаазе. – Москва, 1967. – 544 с.
6. Сверлин, Р.А. Термодинамика твердого состояния / Р.А. Сверлин. – М.: Metallurgizdat, 1963. – 520 с.
7. Крагельский, И.В. Трение и износ. – М.: Машиностроение, 1968. – 480 с.
8. Александров В.М., Галин Л.А., Пириев Н.П. // Изв. АН СССР. 1978. №4. – с.58 – 66.
9. Александров В.М., Коваленко Е.В. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1980. – №3. – С.163 – 172.
10. Александров В.М., Коваленко Е.В. // Трение и износ. 1982. Т.3. №6. – с.1016-1025.
11. Когаев, В.П. Прочность и износостойкость деталей машин: учеб. пособие для машиностр. спец. Вузов / В.П. Когаев, Ю.Н. Дроздов. – М.: Высш. шк., 1991. – 319 с.
12. Блюмен А.В., Харач Г.М., Эфрос Д.Г. // Вестник машиностроения. 1976. №2. – с.29-32.
13. Голубец, В.М. Метод расчета долговечности опор скольжения турбобура ЗТСШ-195ТЛ / В.М. Голубец, М.В. Чернец // ФХММ, 1992. – №2. – С.95 – 98.
14. Коровчинский М.В. // Контактное взаимодействие трущихся тел и расчет сил трения и износа. М., 1971. с.130-140.
15. Андрейкив А.Е., Панасюк В.В., Чернец М.В. // ФХММ. 1981. Т.17, №2. – с.51-57.

УДК 539.3+612.311

Скляр О.Н.¹, Босяков С.М.², Доста А.Н.³, Казакевич В.А.¹

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В КОРНЯХ ОПОРНЫХ ЗУБОВ МОСТОВИДНОГО ПРОТЕЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

¹Белорусский национальный технический университет

²Белорусский государственный университет

³Белорусский государственный медицинский университет

Минск, Беларусь

Введение. В стоматологической практике при проектировании и конструировании зубочелюстных протезов необходимо учитывать распределение давлений на опорные зубы. Ряд результатов в этом направлении получен в работах [1, 2]. В частности, в монографии [1], найдены выражения для реакций опор мостовидного протеза, опирающегося на четыре опоры равной высоты, а также определены перемещения и углы поворота протеза, возникающие под действием сосредоточенной нагрузки. Настоящая работа развивает это актуальное направление и

содержит результаты определения реакций и реактивных моментов, возникающих в корнях зубов в случае, когда на мостовидный протез, опирающийся на корни однокоренного и двухкоренного зубов, действует сосредоточенная нагрузка.

Математическое моделирование мостовидного протеза. Следуя [1], будем считать корни опорных зубов абсолютно твердыми телами, геометрическая форма которых определяется двумя составными эллиптическими гиперboloидами. Положение корней зубов в системе координат, начало которой совпадет с вершиной небного корня двухкоренного зуба, геометрические размеры корней зубов, мостовидный протез ABC действующая нагрузка и реакции опор показаны на рис. 1.

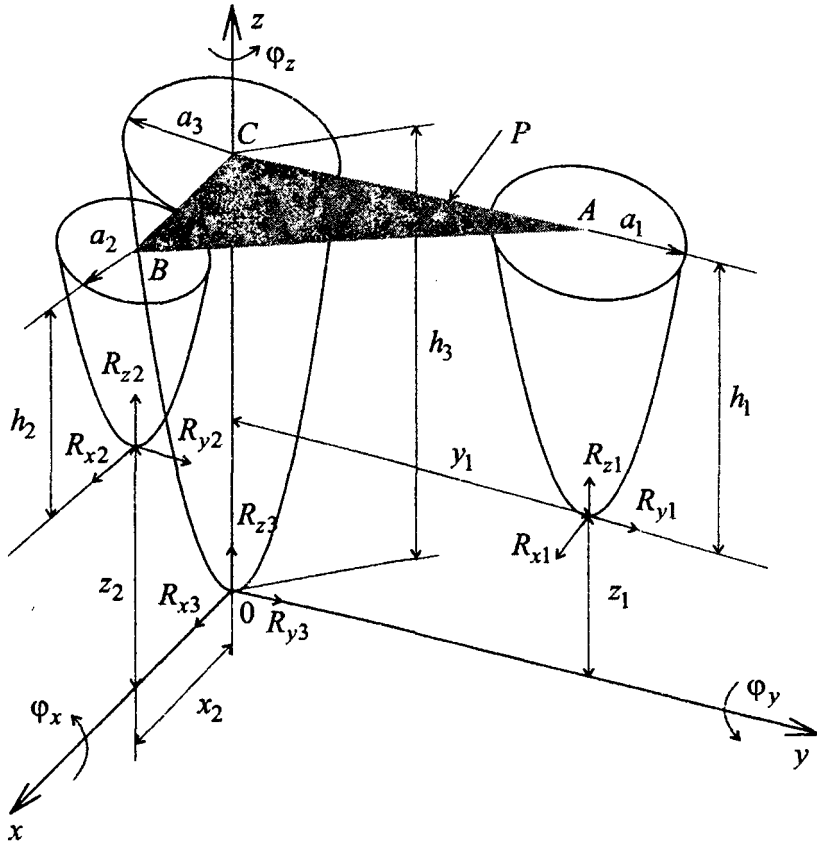


Рис. 1. Схема мостовидного протеза ABC , опирающегося на корни однокоренного и двухкоренного зубов

Распределение нагрузки на корни опорных зубов определяется реактивными силами и моментами сил, которые для каждого зуба имеют составляющие R_{xi} , R_{yi} , R_{zi} и m_{xi} , m_{yi} , m_{zi} , $i = \overline{1, 3}$. Для их определения имеем следующие уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^3 (R_{xi}) - P_x = 0, \quad \sum_{i=1}^3 (R_{yi}) - P_y = 0, \quad \sum_{i=1}^3 (R_{zi}) - P_z = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} m_{x1} + m_{x2} + m_{x3} - R_{y1}z_1 + R_{z1}y_1 - R_{y2}z_2 &= M_x, \\ m_{y1} + m_{y2} + m_{y3} + R_{x1}z_1 + R_{x2}z_2 - R_{z2}x_2 &= M_y, \\ m_{1z} + m_{2z} + m_{3z} - R_{x1}y_1 + R_{y2}x_2 &= M_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $P_x = P \cos(\alpha_x)$, $P_y = P \cos(\alpha_y)$ и $P_z = P \cos(\alpha_z)$ – проекции главного вектора внешних сил; α_x , α_y и α_z – углы между линией действия силы и положительным направлением

соответствующих осей координат, $\cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z) = 1$; $M_x = y_f P_z - x_f P_y$, $M_y = z_f P_x - x_f P_z$ и $M_z = x_f P_y - y_f P_x$ – проекции главного вектора внешних сил; x_f , y_f и z_f – координаты точки приложения силы; y_1 и z_1 , x_2 и z_2 – расстояния от вершин корней зубов до осей координат.

Реакции и реактивные моменты можно выразить через поступательные перемещения u_i , v_i и w_i вдоль соответствующих осей координат x , y , z и углы поворота φ_{xi} , φ_{yi} , φ_{zi} корней зубов относительно этих координатных осей следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{xi} &= c_{xi} u_i, R_{yi} = c_{yi} v_i, R_{zi} = c_{zi} w_i, \\ m_{xi} &= \mu_{xi} \varphi_{xi}, m_{yi} = \mu_{yi} \varphi_{yi}, m_{zi} = \mu_{zi} \varphi_{zi}, \end{aligned} \quad (3)$$

где c_{xi} , c_{yi} и c_{zi} – жесткости периодонта при поступательных перемещениях корней зубов вдоль координатных осей; μ_{xi} , μ_{yi} и μ_{zi} – жесткости периодонта при поворотах корней зубов относительно координатных осей; u_1 , v_1 и w_1 – перемещения вершины однокоренного зуба; u_2 , v_2 и w_2 – перемещения вершины щечного корня двухкоренного зуба; u_3 , v_3 и w_3 – перемещения вершины небного корня двухкоренного зуба.

Выразим перемещения u_k , v_k и w_k , $k = 1, 2$ через углы поворота протеза и перемещения стержневого корня u_3 , v_3 и w_3 :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_3 + z_1 \varphi_y - y_1 \varphi_z, v_1 = v_3 - z_1 \varphi_x, w_1 = w_3 + y_1 \varphi_x, \\ u_2 &= u_3 + z_2 \varphi_y, v_2 = v_3 - z_2 \varphi_x + x_2 \varphi_z, w_2 = w_3 - x_2 \varphi_y. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставим выражения (3) и (4) в систему (1)–(2) и учтем, что в случае круговых сечений корней зубов жесткости периодонта при поступательном перемещении по осям Ox и Oy , а также жесткости периодонта при поворотах около этих осей совпадают ($c_{yi} = c_{xi}$, $\mu_{yi} = \mu_{xi}$). В результате получим следующую систему уравнений относительно перемещений стержневого корня зуба и углов поворота протеза:

$$\begin{aligned} (c_{x1} + c_{x2} + c_{x3})u_3 + (c_{x1}z_1 + c_{x2}z_2)\varphi_y - c_{x1}y_1\varphi_z &= P_x, \\ (c_{x1} + c_{x2} + c_{x3})v_3 - (c_{x1}z_1 + c_{x2}z_2)\varphi_x - c_{x2}x_2\varphi_z &= P_y, \\ (c_{z1} + c_{z2} + c_{z3})w_3 + c_{z1}y_1\varphi_x - c_{z2}x_2\varphi_y &= P_z, \\ (c_{z1}y_1^2 + c_{x1}z_1^2 + c_{x2}z_2^2 + \mu_{x1} + \mu_{x2} + \mu_{x3})\varphi_x - c_{x2}x_2z_2\varphi_z + \\ + c_{z1}y_1w_3 - (c_{x1}z_1 + c_{x2}z_2)v_3 &= y_f P_z - x_f P_y, \\ (c_{z2}x_2^2 + c_{x1}z_1^2 + c_{x2}z_2^2 + \mu_{x1} + \mu_{x2} + \mu_{x3})\varphi_y - c_{x1}y_1z_1\varphi_z + \\ + (c_{x1}z_1 + c_{x2}z_2)u_3 - c_{z2}x_2w_3 &= z_f P_x - x_f P_z, \\ c_{x2}x_2v_3 - c_{x1}y_1u_3 - c_{x2}x_2z_2\varphi_x - c_{x1}y_1z_1\varphi_y + \\ + (c_{x2}x_2^2 + c_{x1}y_1^2)\varphi_z &= x_f P_y - y_f P_x. \end{aligned} \quad (5)$$

После решения системы (5) реакции опорных зубов найдем в соответствии с формулами (3) (результаты решения не приводятся в силу их громоздкости).

Жесткости периодонта при поступательных перемещениях и поворотах корня зуба определим после интегрирования соответствующих выражений, полученных в работе [3], по по-

верхности $F(x, y, z) = z - \frac{h_i}{a_i \sqrt{1+p_i^2} - p_i} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + (a_i p_i)^2} - p_i \right)$. После преобразований будем иметь:

$$c_{xi} = c_{yi} = \frac{G\pi(2r_{1i}a_i^2 + (\gamma+1)h_i^2(1-p_i^2r_{2i}))}{2h_{0i}r_{1i}}, \quad c_{zi} = \frac{G\pi(\gamma r_{1i}a_i^2 + h_i^2(1-p_i^2r_{2i}))}{h_{0i}r_{1i}},$$

$$\mu_{xi} = \mu_{yi} = \frac{\pi G}{12h_{0i}} \left(2h_i p_i \sqrt{1+p_i^2} \left(a_i^2 \left(h_i (2\gamma - 6p_i^2 - 1) + 4z_{0i} (2-\gamma) \right) + \right. \right.$$

$$+ 2h_i (1+\gamma) \left(h_i^2 (1+12p_i^4) - 3h_i z_{0i} (1-4p_i^2) + 3z_{0i}^2 \right) -$$

$$- 8h_i \left(h_i^2 (1+\gamma) (4h_i p_i^2 + 6h_i p_i^4 + z_{0i} + 3z_{0i} p_i^2) + \right.$$

$$\left. \left. + a_i^2 \left(2h_i p_i^2 (1+\gamma+3p_i^2) + z_{0i} (1+\gamma+p_i^2(5-\gamma)) \right) \right) \right) +$$

$$+ 3 \left(a_i^4 \gamma + (1+\gamma) h_i^2 \left(h_i^2 (1+10p_i^2 + 24p_i^4 + 16p_i^6) + 4h p_i^2 z_{0i} + 2z_{0i}^2 (1+2p_i^2) \right) + \right.$$

$$\left. \left. + a_i^2 \left(8h_i z_{0i} p_i^2 + 4z_{0i}^2 + h_i^2 (1+2p_i^2) (1+2\gamma+6p_i^2) \right) \right) -$$

$$- 6h_i^2 p_i^2 r_{3i}^2 r_{2i} \left((1+\gamma) (h_i p_i r_{3i} + z_{0i})^2 - a_i^2 p_i^2 \right),$$

$$\mu_{zi} = \frac{\pi G a_i^2}{2h_{0i} r_{1i}} \left(h_i^2 (1-2p_i^2) + a_i^2 r_{1i} + 2h_i^2 p_i^4 r_{2i} \right)$$

где $r_{1i} = \left(\sqrt{1+p_i^2} - p_i \right)^2$, $r_{2i} = \ln(1/p_i^2 + 1)$, $r_{3i} = \sqrt{1+p_i^2} + p_i$, h_i – высота i -го корня зуба, a_i – радиус основания кругового гиперболоида, описывающего i -ый корень зуба, p_i – параметр, характеризующий закругление вершины корня i -го корня зуба, G – модуль сдвига периодонта, $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, ν – коэффициент поперечной деформации периодонта, $h_{0i} = \delta_i / \sin(\alpha_i)$ – параметр, характеризующий толщину периодонта, δ_i – толщина периодонта i -го корня, $2\alpha_i$ – угол раствора конуса, описываемого уравнением $z = \frac{h_i}{a_i} \sqrt{x^2 + y^2}$, z_{0i} – аппликата центра сопротивления i -го корня зуба. В нашем случае после соответствующих преобразований будем иметь

$$z_{0i} = h_i \left(h_i^2 (2-3p_i^2 - 12p_i^4) (1+\gamma) + 2a_i^2 (1+\gamma + p_i^2 (2-\gamma)) + \right.$$

$$+ p_i \sqrt{1+p_i^2} \left(3h_i^2 (1-4p_i^2) (1+\gamma) - 2a_i^2 (2-\gamma) \right) +$$

$$+ 3h_i^2 p_i^3 r_{2i} \left(p_i (3+4p_i^2) + (1+4p_i^2) \sqrt{1+p_i^2} \right) (1+\gamma) \Big/$$

$$3 \left(2a_i^2 + h_i^2 r_{3i}^2 (1+\gamma + p_i^2 r_{2i} (1+\gamma)) \right). \quad (6)$$

Отметим, что центром сопротивления является точка, через которую проходят линии действия двух горизонтальных и одной вертикальной сил, под действием которых корень зуба получает только поступательные перемещения [1].

Реакции и реактивные моменты. Проведем расчет реакций, возникающих в вершинах корней зубов под действием сосредоточенной нагрузки. В соответствии с работой [4] геометрические размеры корня клыка примем равными $a_1 = 3.5$, $h_1 = 15.7$ мм, $p_1 = 0.5$, щечного корня двухкоренного зуба $a_2 = 1.6$, $h_2 = 13.4$ мм, $p_2 = 0.3$ и небного корня $a_3 = 2.5$, $h_3 = 16.1$ мм, $p_3 = 0.4$. Упругие свойства периодонта описываются постоянными $E = 10$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0.15$. Поскольку толщина периодонта для различных групп зубов практически одинакова, принимаем для всех корней зубов $\delta_i = 0.25$ мм [1]. В этом случае $h_{01} = 1.12$, $h_{02} = 2.1$ и $h_{03} = 1.61$ мм. Геометрические параметры, характеризующие удаление вершин корня от осей координат составляют $y_1 = 15$, $z_1 = 0.4$, $x_2 = 4.1$ и $z_2 = 2.7$ мм. На рис. 2 и 3 представлены зависимости отношений R_i/P и $m_i/(Pl_0)$ от угла α_x в плоскости x_0z ($\alpha_y = \pi/2$, $R_i = \sqrt{R_{xi} + R_{yi} + R_{zi}}$, $m_i = \sqrt{m_{xi} + m_{yi} + m_{zi}}$, $i = 1, 3$, $l_0 = 1$ мм). При построении считаем, что сила приложена к коронке протеза и координаты точки приложения силы составляют $x_f = 0$, $y_f = 0$ и $z_f = 16.8$ мм.

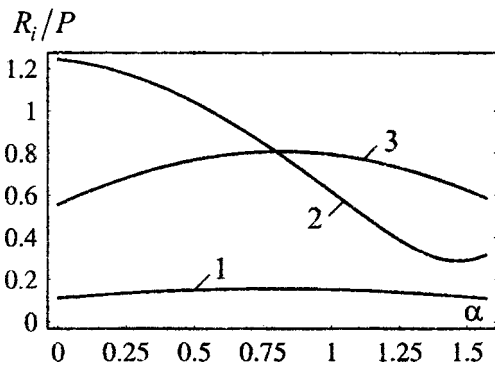


Рис. 2. Зависимости отношений реакций к модулю силы R_i/P , действующей на протез, от угла α_x в плоскости x_0z : 1 - R_1/P ; 2 - R_2/P ; 3 - R_3/P

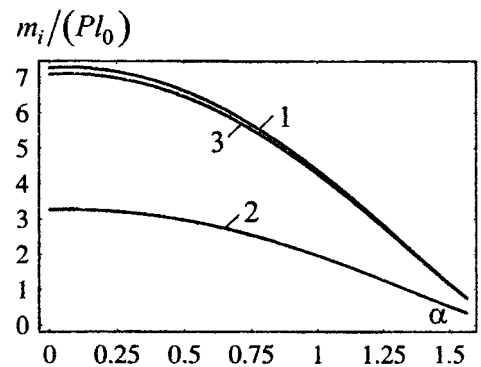


Рис. 3. Зависимости отношений $m_i/(Pl_0)$ от угла α_x в плоскости x_0z : 1 - m_1/Pl_0 ; 2 - m_2/Pl_0 ; 3 - m_3/Pl_0

Из рис. 2 видно, что при изменении угла α_x от 0 до $\pi/4$ наибольшей является сила давления щечного корня двухкоренного зуба на периодонт, причем для углов близких к 0 сила давления может превышать по абсолютной величине действующую нагрузку. При изменении угла α_x от $\pi/4$ до $\pi/2$ сила давления небного корня на периодонт превышает все остальные силы давления. Учитывая зависимости для реактивных моментов, представленные на рис. 3, можно сделать вывод о том, что в вестибуло-оральной плоскости наиболее неблагоприятными являются углы приложения нагрузки α_x , изменяющиеся от 0 до $\pi/4$, поскольку в этом случае максимальных значений достигают как силы давления корней зубов на периодонт, так моменты сил, которые приводят к закручиванию периодонта. Максимальные моменты сил действуют на периодонт небного корня и клыка.

Рассмотрим зависимости отношений R_i/P и $m_i/(Pl_0)$ при $\alpha_x = \pi/4$ и $\alpha_y = \pi/2$ от координаты точки приложения нагрузки y_f , изменяющейся от 0 до $y_1 = 0.015$ м вдоль направляющей CA . Остальные численные данные, необходимые для расчета принимаем прежние. Результаты построения представлены на рис. 4 и 5.

Из рис. 4 видно, что сила давления на периодонт корня клыка практически линейно возрастает при приближении вдоль направляющей CA мостовидного протеза точки приложения нагрузки к точке A корня клыка. При этом силы давления на периодонт корней двухкоренного зуба уменьшаются. Согласно рис. 5, моменты сил, действующие на периодонт корней всех

опорных зубов, незначительно уменьшаются при изменении координаты y_f от 0 до y_1 . Наибольшее действие момента сил испытывает периодонт клыка, наименьшее – периодонт щечно-го корня двухкоренного зуба.

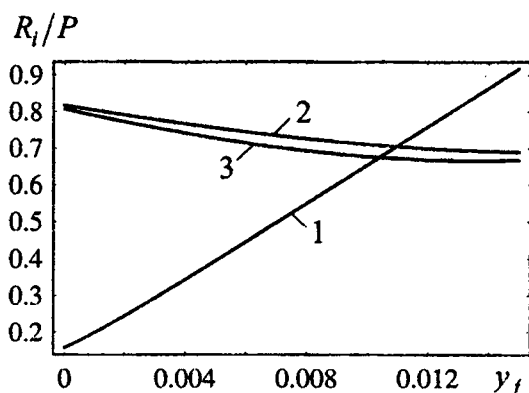


Рис. 4. Зависимости отношений реакций к модулю силы R_i/P , действующей на протез, от координаты точки приложения нагрузки при $\alpha_x = \pi/4$ и $\alpha_y = \pi/2$: 1 –

R_1/P ;
2 – R_2/P ; 3 – R_3/P

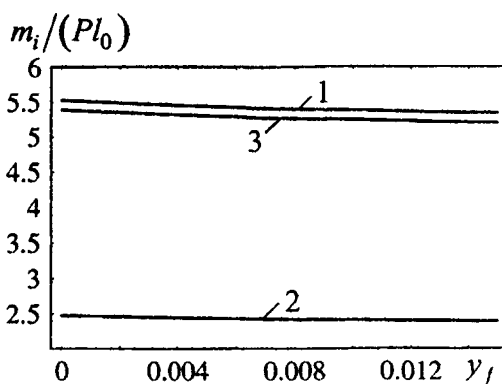


Рис. 5. Зависимости отношений $m_i/(Pl_0)$, от координаты точки приложения нагрузки при $\alpha_x = \pi/4$ и

$\alpha_y = \pi/2$: 1 – m_1/Pl_0 ;
2 – m_2/Pl_0 ; 3 – m_3/Pl_0

Заключение. Полученные результаты могут быть использованы для расчета перемещений корней зубов, являющихся опорами мостовидного протеза и определения напряжений, возникающих в периодонте вследствие действия на протез сосредоточенных нагрузок. Работа выполнена при поддержке Государственного комитета по науке и технологиям Республики Беларусь (проект «Разработать методику автоматизированного проектирования и оптимизации конструкций зубочелюстных протезов и ортодонтических аппаратов при аномалиях и деформациях челюстно-лицевой области, обусловленных расщелинами губы и неба, с применением универсальных CAD/CAE/CAM-систем»).

ЛИТЕРАТУРА

1. Наумович С.А., Крушевский А.Е. Биомеханика системы зуб – периодонт. – Мн., 2000 – 132с.
2. Чуйко, А.Н. Особенности биомеханики в стоматологии / А.Н. Чуйко, В.Е. Вовк. – Харьков: Прапор, 2006. – 304 с.
3. Крушевский, А.Е. Основы биомеханики мостовидных протезов / С.С. Наумович, А.Е. Крушевский // Теоретическая и прикладная механика. – 2006. – Вып. 20. – С. 134 – 139.
4. Наумович, С.А. Антропометрические данные коронок и корней зубов и их значение в стоматологии / С.А. Наумович, Р.А. Батура, С.Н. Пархамович // Стоматологический журнал. – 2002. – №2. – С.21 – 22.