

$$\operatorname{tg} \Theta = \operatorname{tg} \Theta_{\min} + \Psi^{n+c\Delta t}, \quad (10)$$

где  $c = \frac{1,96-1,25}{\Delta t^0} = \frac{1,96-1,25}{80} = 0,0088$ ;  $\Delta t^0 \text{ } ^\circ\text{C}$  – градиент снижения температуры ниже уровня  $+20^\circ\text{C}$ .

По результатам измерения твердости контролируемых зон конструкций, используя формулы (6)–(7) и (8)–(9), определяют соответственно значения  $\Psi$  и  $\operatorname{tg} \Theta$ . Значение  $\beta$  как оценочного критерия состояния контролируемого участка стали определяют по формуле:

$$\beta = k_{\Theta} \operatorname{tg} \Theta, \quad (11)$$

где  $k_{\Theta}$  – угловой коэффициент линейной взаимосвязи  $\beta$  и  $\operatorname{tg} \Theta$ .

По полученным значениям  $\beta$  оценивают состояние стали как вязкое или хрупкое. При этом за критическое значение принимается  $\beta \leq 0,1$  мм независимо от марки стали. Значение  $\beta = 0,1$  мм соответствует уровню предварительной пластической деформации, определяемой в момент окончания равномерного растяжения образца и начала образования шейки [2]. Данный критерий подтверждается опытными данными и результатами обследования трещиноподобных зон реальных конструкций, показывающих, что здесь при  $\beta < 0,1$  мм действительно возникают трещины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хмелев А.А., Реут Л.Е. Расширение возможностей оценки качества сталей по результатам исследования на ударную вязкость // Весці НАН Беларусі, сер. физ.-техн. наук. – № 2, 2009. – с. 71-75.
2. Жданович Г.М., Хмелев А.А. О диаграмме хрупковязкого разрушения малоуглеродистых сталей // Проблемы прочности. – №1, 1981. – с. 85-89.

УДК 539

**Якубовский Ч.А., Якубовский А.Ч.**

**МЕТОД «ПЛОЩАДЕЙ»**

**ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ИЗГИБЕ БАЛОК**

**Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь**

*Исследован упрощенный метод определения деформаций при изгибе балок (прогиба и угла поворота произвольного сечения), учитывающий площади и координаты центров тяжести фигур лишь грузовой эпюры изгибающих моментов. Этот метод позволяет также точно устанавливать место наибольшего прогиба балки.*

При прямом поперечном изгибе балки ее продольная ось искривляется, оставаясь в силовой плоскости. Изогнутая ось, называемая упругой линией, представляет собой геометрическое место центров тяжести поперечных сечений деформированной балки. Деформации, возникающие в балках при изгибе, характеризуются двумя параметрами: *прогибом*, вызванным перемещением центра тяжести сечения в направлении, перпендикулярном оси балки, и *углом поворота* сечения по отношению к своему первоначальному положению. Определение линейных и угловых перемещений необходимо для расчетов балок на жесткость при изгибе.

Существуют разные методы определения деформаций при изгибе: метод непосредственного интегрирования приближенного дифференциального уравнения упругой линии, метод начальных параметров, энергетические методы (метод Мора, правило Верещагина, теорема Кастилиано) и др.

Исследуем метод, который может быть получен с применением приближенного дифференциального уравнения упругой линии

$$\frac{M_x}{EI_x} \approx y'' = \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (1)$$

и дифференциальной зависимости между углом поворота сечения и прогибом [1]:

$$\theta = \frac{dy}{dz} \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует:

$$d\theta = \frac{M_x}{EI_x} \cdot dz. \quad (3)$$

Интегрируя выражение (3), можем определить изменение угла поворота сечения балки на произвольном участке  $AB$  (рис. 1):

$$\theta_{AB} = \int_A^B d\theta = \int_{z_A}^{z_B} \frac{M_x}{EI_x} \cdot dz. \quad (4)$$

Интеграл справа представляет собой площадь, ограниченную функцией  $M_x(z)$  и сечениями с координатами  $z_A$  и  $z_B$ , деленную на жесткость при изгибе:

$$\theta_{AB} = \frac{1}{EI_x} \cdot \omega_{M_x(AB)} \quad (5)$$

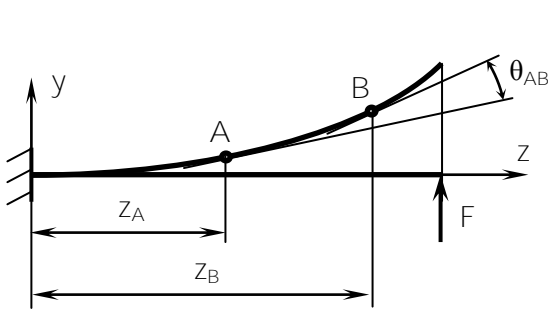


Рис. 1.

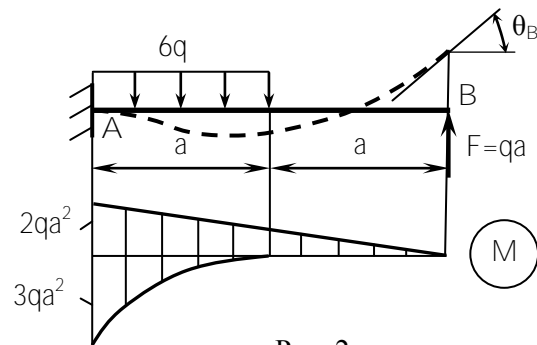


Рис. 2.

**Пример 1.** Определить угол поворота сечения  $B$  консольной балки  $AB$  (рис. 2.).

Решение. Строим эпюру внутренних изгибающих моментов от действия каждого внешнего силового фактора в отдельности. Так как в сечении  $A$  упругая линия балки горизонтальна, то угол поворота сечения  $B$  равен:

$$\theta_B = \theta_{AB} = \frac{1}{EI_x} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2qa^2 - \frac{1}{3} \cdot a \cdot 3qa^2 \right) = \frac{qa^3}{EI_x}$$

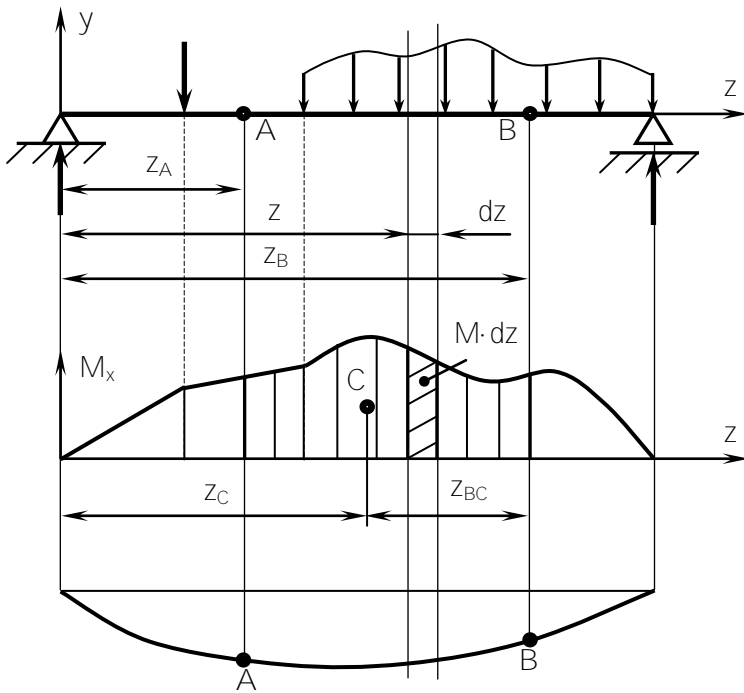


Рис. 3.

Рассмотрим балку (рис. 3.), подвергающуюся прямому поперечному изгибу, для которой строим эпюру изгибающих моментов и изображаем изогнутую ось. Выделим на расстоянии  $z$  от начала координат элемент длины балки  $dz$  (рис. 4.). Касательные к изогнутой оси балки в начале и в конце элемента  $dz$  образуют угол  $d\theta$ . Возьмем

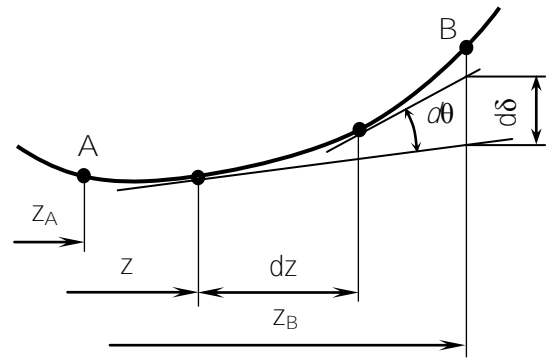


Рис. 4.

на изогнутой оси балки точку  $B$  и проведем через нее вертикальную прямую, имеющую координату  $z_B$ . Учитывая то, что элемент  $dz$  является бесконечно малым, из рис. 4. следует:

$$d\delta = (z_B - z) \cdot d\theta. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6) в пределах от  $z=z_A$  до  $z=z_B$  с учетом выражения (3), получим:

$$\delta_{BA} = \int_A^B d\delta = \int_A^B (z_B - z) \cdot d\theta = \int_{z_A}^{z_B} \frac{M_x}{EI_x} \cdot (z_B - z) \cdot dz. \quad (7)$$

Интеграл справа представляет собой статический момент площади  $M_x(z)$  на участке  $AB$  относительно вертикальной оси, проходящей через точку  $B$ , деленный на жесткость при изгибе:

$$\delta_{BA} = \frac{1}{EI_x} \cdot \omega_{M_x(AB)} \cdot (z_B - z_C) = \frac{1}{EI_x} \cdot \omega_{M_x(AB)} \cdot z_{BC}. \quad (8)$$

где  $z_C$  — координата центра тяжести площади эпюры изгибающих моментов на участке балки  $AB$ .

Выражения (5) и (8) позволяют определить деформации при изгибе в любом сечении балки.

**Пример 2.** Определить прогиб и угол поворота сечения  $C$  балки (рис. 5.).

Решение. Строим эпюру изгибающих моментов, используя которую изображаем изогнутую ось балки. Для упрощения дальнейших вычислений строим также эпюру моментов относительно сечения  $B$ , применяя принцип суперпозиции.

Находим угол поворота сечения  $C$  относительно сечения  $B$  по формуле (5):

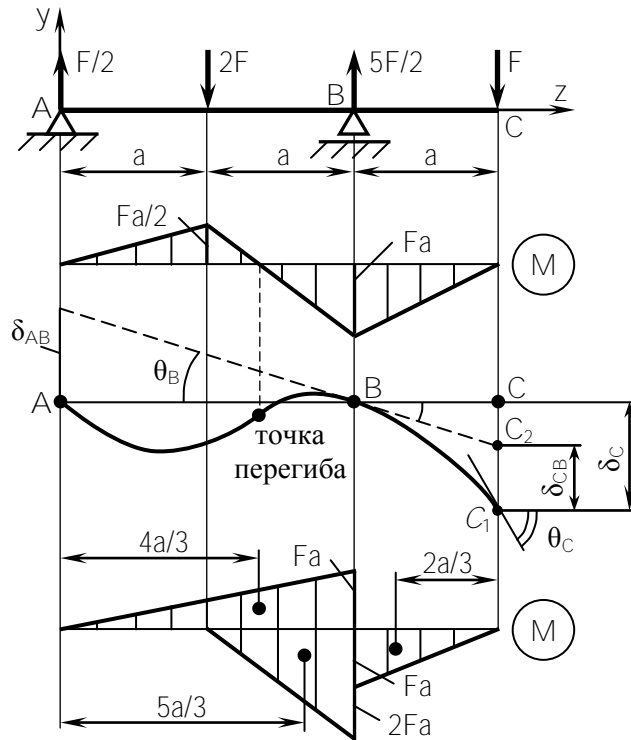


Рис. 5.

$$\theta_{BC} = \frac{1}{EI_x} \cdot \omega_{M_x(BC)} = \frac{1}{EI_x} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot Fa \cdot a \right) = -\frac{Fa^2}{2EI_x}.$$

Находим угол поворота сечения  $B$  относительно оси  $z$  по формуле (8):

$$\theta_B = \frac{\delta_{AB}}{2a} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{EI_x} \times \left[ \frac{1}{2} \cdot Fa \cdot 2a \cdot \frac{4a}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2Fa \cdot a \cdot \frac{5a}{3} \right] = -\frac{Fa^2}{6EI_x}.$$

Тогда искомый угол поворота сечения  $C$  равен:

$$\theta_C = |\theta_B| + |\theta_{BC}| = \frac{Fa^2}{2EI_x} + \frac{Fa^2}{6EI_x} = \frac{2Fa^2}{3EI_x}$$

Находим прогиб сечения  $C$ :

$$\begin{aligned} \delta_C &= C_1 C_2 + C_2 C = \delta_{CB} + \frac{\delta_{AB}}{2} = \\ &= \frac{1}{EI_x} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot Fa \cdot a \cdot \frac{2a}{3} \right) + \frac{1}{2EI_x} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot Fa \cdot 2a \cdot \frac{4a}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2Fa \cdot a \cdot \frac{5a}{3} \right] = \frac{Fa^3}{2EI_x} \cdot \left( -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{5}{3} \right) = -\frac{Fa^3}{2EI_x}. \end{aligned}$$

Знак « $\rightarrow$ » показывает, что перемещение сечения  $C$  происходит вниз.

Эту задачу можно решить также, применяя принцип суперпозиции и используя известные формулы (рис. 6.):

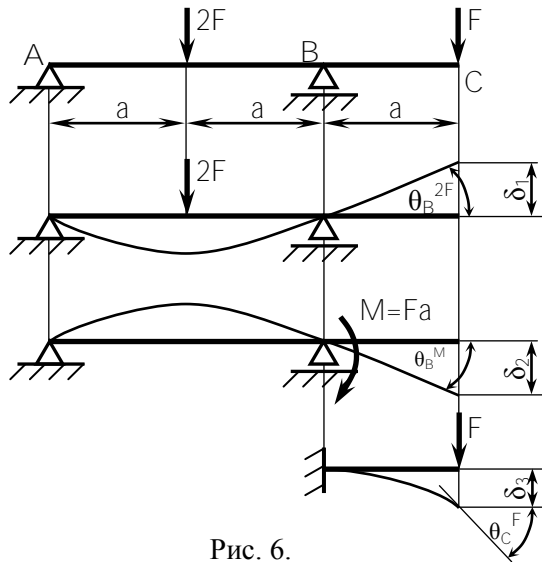


Рис. 6.

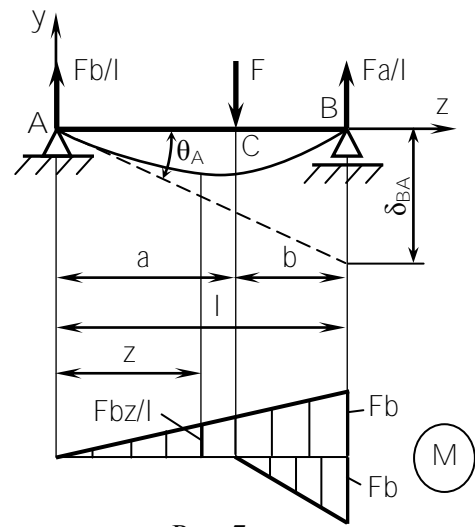


Рис. 7.

$$\theta_C = \theta_B^{2F} - \theta_B^M - \theta_C^F = \frac{2F \cdot (2a)^2}{16EI_x} - \frac{M \cdot 2a}{3EI_x} - \frac{F \cdot a^2}{2EI_x} = \frac{Fa^2}{2EI_x} - \frac{2Fa^2}{3EI_x} - \frac{Fa^2}{2EI_x} = -\frac{2Fa^2}{3EI_x}$$

$$\delta_C = \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 = (\theta_B^{2F} - \theta_B^M) \cdot a - \frac{Fa^3}{3EI_x} = \frac{Fa^3}{2EI_x} - \frac{2Fa^3}{3EI_x} - \frac{Fa^3}{3EI_x} = -\frac{Fa^3}{2EI_x}$$

**Пример 3.** Определить величину наибольшего прогиба балки (рис. 7.) и его координату.

Решение. Наибольший прогиб будет в том сечении балки, в котором касательная к изогнутой оси параллельна продольной оси Z, а следовательно угол поворота этого сечения будет равен нулю.

Для произвольного сечения балки с координатой Z находим изменение угла поворота на этом участке по формуле (5):

$$\theta_{Az} = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{Fbz}{l} = \frac{Fbz^2}{2EI_x}$$

Если в сечении с координатой  $z \neq 0$ , то

$$\theta_{Az} = \theta_A = \frac{\delta_{BA}}{l},$$

и по формуле (8) находим:

$$\frac{\delta_{BA}}{l} = \frac{1}{lEI_x} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot l \cdot Fb \cdot \frac{l}{3} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot Fb \cdot \frac{b}{3} \right) = \frac{Fb}{6lEI_x} \cdot (l^2 - b^2)$$

Тогда:

$$\frac{Fbz_0^2}{2lEI_x} = \frac{Fb}{6lEI_x} \cdot (l^2 - b^2); \Rightarrow z_0 = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}$$

Находим прогиб в сечении Z:

$$y_z = |\delta_{BA}| \cdot \frac{z}{l} - \delta_{zA} = \frac{Fbz}{6lEI_x} \cdot (l^2 - b^2) - \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{Fbz}{l} \cdot \frac{z}{3} = \frac{Fbz}{6lEI_x} \cdot (l^2 - b^2 - z^2)$$

Подставляя сюда значение  $Z=Z_0$ , получим:

$$y_{\max} = \frac{Fb}{6IEI_x} \cdot \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \cdot \left( l^2 - b^2 - \frac{l^2 - b^2}{3} \right) = \frac{Fb}{9\sqrt{3}EI_x} \cdot (l^2 - b^2)^{3/2}.$$

Изложенный выше метод позволяет определять не только деформации при изгибе балок, но и раскрывать статическую неопределимость балочных конструкций, работающих на изгиб.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В.И. Сопrotивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.

УДК 539

**Якубовский Ч.А., Якубовский А.Ч.**

**К ВОПРОСУ О ПРАВИЛЕ ЗНАКОВ**

**ДЛЯ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ**

*Белорусский национальный технический университет*

*Минск, Беларусь*

*Выявлено неправомерное противоречие, на которое до сих пор не обращается никакого внимания в правилах знаков для напряжений и внутренних сил. Сформулировано общее правило знаков, неразрывно связанное с координатными осями, относительно которых производятся все расчеты и преобразования.*

Межчастичное взаимодействие внутри любого твердого тела определяет его способность сопротивляться внешнему воздействию. Приложение к телу внешних сил вызывает изменение установившегося внутреннего равновесия, изменение расстояния между частицами, что приводит к изменению размеров и формы тела. Силы взаимодействия между отдельными частицами тела, возникающие под действием внешних сил, и являются внутренними силами (или внутренними силовыми факторами). Для их выявления используют метод сечений. Мерой интенсивности распределения внутренних сил по сечению являются напряжения, действующие в сечении. При этом связь между внутренними силами и напряжениями устанавливается путем суммирования элементарных усилий и моментов по всем площадкам поперечного сечения. [1]

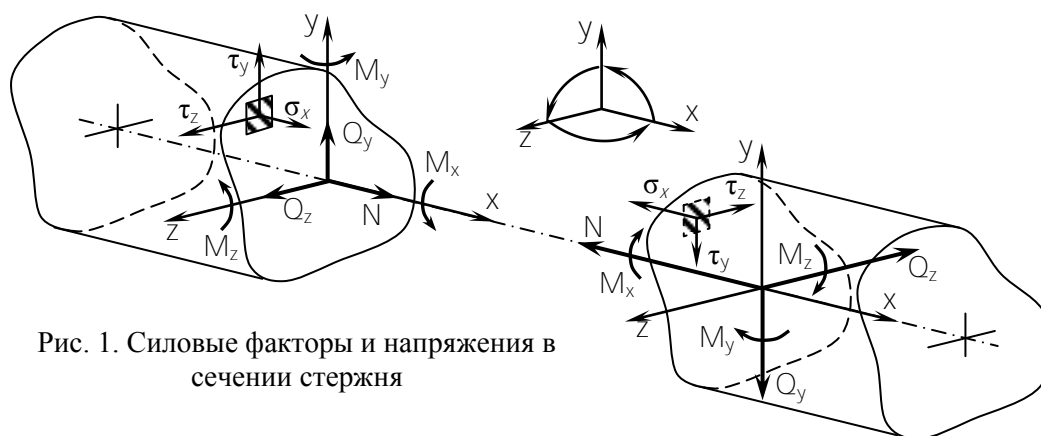


Рис. 1. Силовые факторы и напряжения в сечении стержня

Рассмотрим вопрос о правиле знаков для внутренних силовых факторов и напряжений (рис. 1.).