

НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

Нестерович А. В.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Введение. Многочисленные исследования проведены для слоистых элементов конструкций по деформированию и колебаниям. Постановки соответствующих краевых задач и методы расчета приведены в монографии [1]. Выкладки, связанные с осесимметричными колебаниями круговых элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [2, 3]. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня рассмотрен в статье [4]. Результаты, описывающие изотермическое и термопластическое осесимметричное деформирование трехслойных круговых и прямоугольных пластин с несжимаемым и сжимаемым заполнителем, в том числе на упругом основании приведены в публикациях [5–12]. Аналитические результаты по неосесимметричному деформированию круговой однослойной и трехслойной пластин приведены в статьях [13, 14]. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении рассмотрены в [15].

Здесь получены общее и частные решения системы дифференциальных уравнений равновесия упругой трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении. Приведены амплитудные составляющие перемещений для n -ой гармоники. Нагрузки рассматривались зависящие от радиуса.

1. Общее решение краевой задачи при неосесимметричном деформировании. С учетом ранее полученной системы уравнений равновесия трехслойной круговой пластины [15] при неосесимметричном деформировании в своей плоскости внешними нагрузками $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$ (рис. 1) искомые перемещения $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных при отсутствии прогиба и сдвига в заполнителе:

$$\begin{aligned} a_1 u_{r,rrr} + \frac{a_1}{r} u_{r,rr} - \frac{a_1}{r^2} u_r + \frac{a_{13}}{r^2} u_{r,\varphi\varphi} + \frac{a_2 + a_{13}}{r} u_{\varphi,\varphi r} - \frac{a_1 + a_{13}}{r^2} u_{\varphi,\varphi} &= -p_r, \\ a_{13} u_{\varphi,rrr} + \frac{a_{13}}{r} u_{\varphi,rr} - \frac{a_{13}}{r^2} u_\varphi + \frac{a_2 + a_{13}}{r} u_{r,r\varphi} + \frac{a_1}{r^2} u_{\varphi,\varphi\varphi} + \frac{a_1 + a_{13}}{r^2} u_{r,\varphi} &= -p_\varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где a_1 , a_2 , a_{13} – коэффициенты, определяющиеся через геометрические и упругие характеристики материалов слоев; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

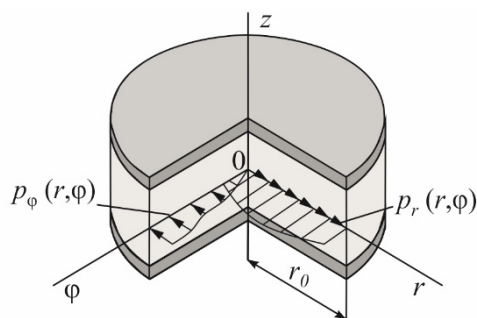


Рис. 1. Расчетная схема неосесимметричного нагружения в своей плоскости

Для решения системы уравнений (1) искомые перемещения и нагрузки раскладываем в тригонометрические ряды Фурье по координате φ :

$$\begin{aligned}
 u_r(r, \varphi) &= u_{r0}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{rn}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + u_{rn}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \\
 u_{\varphi}(r, \varphi) &= u_{\varphi0}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_{\varphi n}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + u_{\varphi n}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \\
 p_r(r, \varphi) &= p_{r0}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{rn}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + p_{rn}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right], \\
 p_{\varphi}(r, \varphi) &= p_{\varphi0}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{\varphi n}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + p_{\varphi n}^{(2)}(r) \sin(n\varphi) \right],
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $u_{r0}(r)$, $u_{\varphi0}(r)$ – перемещения, соответствующие осесимметричному нагружению

$$u_{r0} = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{a_1 r} \int_0^r \int_0^r p_{r0} dr dr, \quad u_{\varphi0} = C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{1}{a_{13} r} \int_0^r \int_0^r p_{\varphi0} dr dr;$$

C_1, \dots, C_4 – константы интегрирования, следующие из граничных условий;

$u_{rn}^{(1)}(r)$, $u_{rn}^{(2)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(1)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(2)}(r)$ – искомые амплитудные составляющие перемещений;

$p_{r0}(r)$, $p_{\varphi0}(r)$ – осесимметричные составляющие нагрузки;

$p_{rn}^{(1)}(r)$, $p_{rn}^{(2)}(r)$, $p_{\varphi n}^{(1)}(r)$, $p_{\varphi n}^{(2)}(r)$ – составляющие радиальной и тангенциальной внешней неосесимметричных нагрузок

$$p_{rn}^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad p_{rn}^{(2)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_r(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi,$$

$$p_{\varphi n}^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_{\varphi}(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad p_{\varphi n}^{(2)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_{\varphi}(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi.$$

После преобразований и приравнивания коэффициентов при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему обыкновенных линейных дифферен-

циальных уравнений для определения искоемых амплитудных функций $u_{rn}^{(1)}(r)$, $u_{rn}^{(2)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(1)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(2)}(r)$:

$$\begin{aligned}
 L_2\left(a_1 u_{rn}^{(1)}(r)\right) - \frac{a_{13} n^2}{r^2} u_{rn}^{(1)}(r) + \frac{(a_2 + a_{13})n}{r} u_{\varphi n, r}^{(2)}(r) - \frac{(a_1 + a_{13})n}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)}(r) &= -p_{rn}^{(1)}(r), \\
 L_2\left(a_1 u_{rn}^{(2)}(r)\right) - \frac{a_{13} n^2}{r^2} u_{rn}^{(2)}(r) - \frac{(a_2 + a_{13})n}{r} u_{\varphi n, r}^{(1)}(r) + \frac{(a_1 + a_{13})n}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)}(r) &= -p_{rn}^{(2)}(r), \\
 L_2\left(a_{13} u_{\varphi n}^{(1)}(r)\right) + \frac{(a_2 + a_{13})n}{r} u_{rn, r}^{(2)}(r) - \frac{a_1 n^2}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)}(r) + \frac{(a_1 + a_{13})n}{r^2} u_{rn}^{(2)}(r) &= -p_{\varphi n}^{(1)}(r), \\
 L_2\left(a_{13} u_{\varphi n}^{(2)}(r)\right) - \frac{(a_2 + a_{13})n}{r} u_{rn, r}^{(1)}(r) - \frac{a_1 n^2}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)}(r) - \frac{(a_1 + a_{13})n}{r^2} u_{rn}^{(1)}(r) &= -p_{\varphi n}^{(2)}(r).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Общее решение системы (3) получим в виде суммы решений соответствующей однородной системы и частного решения $u_{rn}^{(1)*}$, $u_{\varphi n}^{(1)*}$, $u_{rn}^{(2)*}$, $u_{\varphi n}^{(2)*}$ данной системы. Для однородной системы общее решение получено с помощью стандартных процедур пакета Maple. Суммируя, имеем

$$\begin{aligned}
 u_{rn}^{(1)} &= C_{n5} r^{-S_{n1}} + C_{n6} r^{S_{n1}} + C_{n7} r^{-S_{n2}} + C_{n8} r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(1)*}, \\
 u_{\varphi n}^{(1)} &= C_{n1} h_{n1} r^{-S_{n1}} + C_{n2} h_{n2} r^{S_{n1}} + C_{n3} h_{n3} r^{-S_{n2}} + C_{n4} h_{n4} r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(1)*}, \\
 u_{rn}^{(2)} &= C_{n1} r^{-S_{n1}} + C_{n2} r^{S_{n1}} + C_{n3} r^{-S_{n2}} + C_{n4} r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(2)*}, \\
 u_{\varphi n}^{(2)} &= -C_{n5} h_{n1} r^{-S_{n1}} - C_{n6} h_{n2} r^{S_{n1}} - C_{n7} h_{n3} r^{-S_{n2}} - C_{n8} h_{n4} r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(2)*},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где C_{ni} ($i=1, \dots, 8$) – константы интегрирования, следующие из граничных условий;

S_{n1} , S_{n2} – степени в фундаментальных решениях, зависящие от параметра n , геометрических и упругих характеристик материалов слоев

$$S_{n1} = \frac{\sqrt{a_1^2 n^2 - a_2^2 n^2 - 2a_2 a_{13} n^2 + 2a_1 a_{13} - Q_n}}{\sqrt{2a_1 a_{13}}}, \quad S_{n2} = \frac{\sqrt{a_1^2 n^2 - a_2^2 n^2 - 2a_2 a_{13} n^2 + 2a_1 a_{13} + Q_n}}{\sqrt{2a_1 a_{13}}},$$

$$Q_n = \sqrt{n^2 (a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_{13})(n^2 a_1^2 + (4 - 2n^2)a_1 a_{13} - n^2 a_2^2 - 2n^2 a_2 a_{13})};$$

h_{n1} , h_{n2} , h_{n3} , h_{n4} – коэффициенты

$$\begin{aligned}
 h_{n1} &= \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_{13} n^2 - Q)(a_1 + a_{13} - (a_2 + a_{13})S_{n1})}{2\left((a_1 n^2 - 2a_1 + 2a_2)a_{13}^2 + (2a_1 a_2 n^2 - a_1^2 + a_2^2)a_{13} + a_1 a_2^2 n^2\right)n}, \\
 h_{n2} &= \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_{13} n^2 - Q)(a_1 + a_{13} + (a_2 + a_{13})S_{n1})}{2\left((a_1 n^2 - 2a_1 + 2a_2)a_{13}^2 + (2a_1 a_2 n^2 - a_1^2 + a_2^2)a_{13} + a_1 a_2^2 n^2\right)n},
 \end{aligned}$$

$$h_{n3} = \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_{13} n^2 + Q)(a_1 + a_{13} - (a_2 + a_{13}) S_{n2})}{2((a_1 n^2 - 2a_1 + 2a_2) a_{13}^2 + (2a_1 a_2 n^2 - a_1^2 + a_2^2) a_{13} + a_1 a_2^2 n^2) n},$$

$$h_{n4} = \frac{(a_1^2 n^2 + a_2^2 n^2 + 2a_2 a_{13} n^2 + Q)(a_1 + a_{13} + (a_2 + a_{13}) S_{n2})}{2((a_1 n^2 - 2a_1 + 2a_2) a_{13}^2 + (2a_1 a_2 n^2 - a_1^2 + a_2^2) a_{13} + a_1 a_2^2 n^2) n}.$$

Из условия ограниченности перемещений в центре пластины следует в решении (4) положить $C_{n1} = C_{n3} = C_{n5} = C_{n7} = 0$. В результате амплитудные составляющие перемещений для n -ой гармоники принимают вид

$$\begin{aligned} u_{rn}^{(1)} &= C_{n6} r^{S_{n1}} + C_{n8} r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(1)*}, \\ u_{\varphi n}^{(1)} &= C_{n2} h_{n2} r^{S_{n1}} + C_{n4} h_{n4} r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(1)*}, \\ u_{rn}^{(2)} &= C_{n2} r^{S_{n1}} + C_{n4} r^{S_{n2}} + u_{rn}^{(2)*}, \\ u_{\varphi n}^{(2)} &= -C_{n6} h_{n2} r^{S_{n1}} - C_{n8} h_{n4} r^{S_{n2}} + u_{\varphi n}^{(2)*}. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Решение системы уравнений в конечном виде. Если при разложении нагрузки в ряд (2) можно ограничиться одним членом, то $S_{11} = 0$ и искомые перемещения будут

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)} &= C_{16} + C_{18} r^{S_{12}} + u_{r1}^{(1)*}, \\ u_{\varphi 1}^{(1)} &= C_{12} h_{12} + C_{14} h_{14} r^{S_{12}} + u_{\varphi 1}^{(1)*}, \\ u_{r1}^{(2)} &= C_{12} + C_{14} r^{S_{12}} + u_{r1}^{(2)*}, \\ u_{\varphi 1}^{(2)} &= -C_{16} h_{12} - C_{18} h_{14} r^{S_{12}} + u_{\varphi 1}^{(2)*}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $h_{12} = 1$, $h_{14} = -\frac{\sqrt{a_1} \sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_{13})} (a_2 + a_{13})}{\sqrt{a_{13}} (a_1 a_{13} - a_2^2 - 2a_2 a_{13})} - \frac{a_1^2 + a_1 a_{13}}{a_1 a_{13} - a_2^2 - 2a_2 a_{13}}$,

$$S_{12} = \frac{\sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_{13})}}{\sqrt{a_1 a_{13}}}.$$

Для ненулевого второго члена ряда (2) в разложении нагрузки искомые перемещения будут

$$\begin{aligned} u_{r2}^{(1)} &= C_{26} r^{S_{21}} + C_{28} r^{S_{22}} + u_{r2}^{(1)*}, \\ u_{\varphi 2}^{(1)} &= C_{22} h_{22} r^{S_{21}} + C_{24} h_{24} r^{S_{22}} + u_{\varphi 2}^{(1)*}, \\ u_{r2}^{(2)} &= C_{22} r^{S_{21}} + C_{24} r^{S_{22}} + u_{r2}^{(2)*}, \\ u_{\varphi 2}^{(2)} &= -C_{26} h_{22} r^{S_{21}} - C_{28} h_{24} r^{S_{22}} + u_{\varphi 2}^{(2)*}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $S_{21} = \frac{\sqrt{2a_1^2 + a_1 a_{13} - 2a_2^2 - 4a_2 a_{13} - Q_2 / 2}}{\sqrt{a_1 a_{13}}}$, $S_{22} = \frac{\sqrt{2a_1^2 + a_1 a_{13} - 2a_2^2 - 4a_2 a_{13} + Q_2 / 2}}{\sqrt{a_1 a_{13}}}$,

$$\begin{aligned}
Q_2 &= 4\sqrt{(a_1 - a_2)(a_1 + a_2 + 2a_{13})(a_1^2 - a_1a_{13} - a_2^2 - 2a_2a_{13})}, \\
h_{21} &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_2a_{13} - Q_2/4)(a_1 + a_{13} - (a_2 + a_{13})S_{21})}{-a_1^2a_{13} + 4a_1a_2^2 + 8a_1a_2a_{13} + 2a_1a_{13}^2 + a_2^2a_{13} + 2a_2a_{13}^2}, \\
h_{22} &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_2a_{13} - Q_2/4)(a_1 + a_{13} + (a_2 + a_{13})S_{21})}{-a_1^2a_{13} + 4a_1a_2^2 + 8a_1a_2a_{13} + 2a_1a_{13}^2 + a_2^2a_{13} + 2a_2a_{13}^2}, \\
h_{23} &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_2a_{13} + Q_2/4)(a_1 + a_{13} - (a_2 + a_{13})S_{22})}{-a_1^2a_{13} + 4a_1a_2^2 + 8a_1a_2a_{13} + 2a_1a_{13}^2 + a_2^2a_{13} + 2a_2a_{13}^2}, \\
h_{24} &= \frac{(a_1^2 + a_2^2 + 2a_2a_{13} + Q_2/4)(a_1 + a_{13} + (a_2 + a_{13})S_{22})}{-a_1^2a_{13} + 4a_1a_2^2 + 8a_1a_2a_{13} + 2a_1a_{13}^2 + a_2^2a_{13} + 2a_2a_{13}^2}.
\end{aligned}$$

Если в нагрузке два ненулевых члена ряда, то выражение для перемещений получим, просуммировав (6) и (7).

3. Частные решения системы уравнений равновесия. Получим решения $u_{rn}^{(1)*}(r)$, $u_{rn}^{(2)*}(r)$, $u_{\varphi n}^{(1)*}(r)$, $u_{\varphi n}^{(2)*}(r)$ в случае зависимости нагрузок от радиальной координаты в виде степенной функции. В результате, правые части системы дифференциальных уравнений (3) будут подобными функциями от радиуса. Частные решения были получены с помощью программного пакета Maple:

1. При постоянных нагрузках $p_{rn}^{(1)}(r) = p_{rn0}^{(1)}$, $p_{rn}^{(2)}(r) = p_{rn0}^{(2)}$, $p_{\varphi n}^{(1)}(r) = p_{\varphi n0}^{(1)}$, $p_{\varphi n}^{(2)}(r) = p_{\varphi n0}^{(2)}$ частные решения системы (3) будут

$$\begin{aligned}
u_{rn}^{(1)*} &= (n^2 a_1 p_{rn0}^{(1)} - n a_1 p_{\varphi n0}^{(2)} + 2n a_2 p_{\varphi n0}^{(2)} + n a_{13} p_{\varphi n0}^{(2)} - 3a_{13} p_{rn0}^{(1)}) D_1 r^2, \\
u_{\varphi n}^{(1)*} &= (n^2 a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)} + 3n a_{13} p_{rn0}^{(2)} + n a_1 p_{rn0}^{(2)} + 2n a_2 p_{rn0}^{(2)} - 3a_1 p_{\varphi n0}^{(1)}) D_1 r^2, \\
u_{rn}^{(2)*} &= (n^2 a_1 p_{rn0}^{(2)} + n a_1 p_{\varphi n0}^{(1)} - 2n a_2 p_{\varphi n0}^{(1)} - n a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)} - 3a_{13} p_{rn0}^{(2)}) D_1 r^2, \\
u_{\varphi n}^{(2)*} &= (n^2 a_{13} p_{\varphi n0}^{(2)} - 3n a_{13} p_{rn0}^{(1)} - n a_1 p_{rn0}^{(1)} - 2n a_2 p_{rn0}^{(1)} - 3a_1 p_{\varphi n0}^{(2)}) D_1 r^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $D_1 = \frac{1}{n^4 a_1 a_{13} - 4n^2 a_1^2 - 2n^2 a_1 a_{13} + 4n^2 a_2^2 + 8n^2 a_2 a_{13} + 9a_1 a_{13}}$.

2. При нагрузках линейно зависящих от радиальной координаты $p_{rn}^{(1)}(r) = p_{rn0}^{(1)}(r_0 - r)$, $p_{rn}^{(2)}(r) = p_{rn0}^{(2)}(r_0 - r)$, $p_{\varphi n}^{(1)}(r) = p_{\varphi n0}^{(1)}(r_0 - r)$, $p_{\varphi n}^{(2)}(r) = p_{\varphi n0}^{(2)}(r_0 - r)$ частные решения получены аналогично

$$\begin{aligned}
u_{rn}^{(1)*} &= (-n^2 a_1 p_{rn0}^{(1)} + n a_1 p_{\varphi n0}^{(2)} - 3n a_2 p_{\varphi n0}^{(2)} - 2n a_{13} p_{\varphi n0}^{(2)} + 8a_{13} p_{rn0}^{(1)}) J_1 r^3 + \\
&\quad + (n^2 a_1 p_{rn0}^{(1)} - n a_1 p_{\varphi n0}^{(2)} + 2n a_2 p_{\varphi n0}^{(2)} + n a_{13} p_{\varphi n0}^{(2)} - 3a_{13} p_{rn0}^{(1)}) J_2 r^2, \\
u_{rn}^{(2)*} &= (-n^2 a_1 p_{rn0}^{(2)} - n a_1 p_{\varphi n0}^{(1)} + 3n a_2 p_{\varphi n0}^{(1)} + 2n a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)} + 8a_{13} p_{rn0}^{(2)}) J_1 r^3 + \\
&\quad + (n^2 a_1 p_{rn0}^{(2)} + n a_1 p_{\varphi n0}^{(1)} - 2n a_2 p_{\varphi n0}^{(1)} - n a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)} - 3a_{13} p_{rn0}^{(2)}) J_2 r^2, \\
u_{\varphi n}^{(1)*} &= (8a_1 p_{\varphi n0}^{(1)} - n a_1 p_{rn0}^{(2)} - 3n a_2 p_{rn0}^{(2)} - 4n a_{13} p_{rn0}^{(2)} - n^2 a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)}) J_1 r^3 + \\
&\quad + (-3a_1 p_{\varphi n0}^{(1)} + n a_1 p_{rn0}^{(2)} + 2n a_2 p_{rn0}^{(2)} + 3n a_{13} p_{rn0}^{(2)} + n^2 a_{13} p_{\varphi n0}^{(1)}) J_2 r^2,
\end{aligned}$$

$$u_{\varphi n}^{(2)*} = \left(8a_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} + na_1 p_{rn 0}^{(1)} + 3na_2 p_{rn 0}^{(1)} + 4na_{13} p_{rn 0}^{(1)} - n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} \right) J_1 r^3 + \left(-3a_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} - na_1 p_{rn 0}^{(1)} - 2na_2 p_{rn 0}^{(1)} - 3na_{13} p_{rn 0}^{(1)} + n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} \right) J_2 r^2, \quad (9)$$

где
$$J_1 = \frac{1}{n^4 a_1 a_{13} - 9n^2 a_1^2 - 2n^2 a_1 a_{13} + 9n^2 a_2^2 + 18n^2 a_2 a_{13} + 64a_1 a_{13}},$$

$$J_2 = \frac{1}{n^4 a_1 a_{13} - 4n^2 a_1^2 - 2n^2 a_1 a_{13} + 4n^2 a_2^2 + 8n^2 a_2 a_{13} + 9a_1 a_{13}}.$$

3. При квадратичной зависимости нагрузок от радиальной координаты $p_{rn}^{(1)}(r) = p_{rn 0}^{(1)}(r_0^2 - r^2)$, $p_{rn}^{(2)}(r) = p_{rn 0}^{(2)}(r_0^2 - r^2)$, $p_{\varphi n}^{(1)}(r) = p_{\varphi n 0}^{(1)}(r_0^2 - r^2)$, $p_{\varphi n}^{(2)}(r) = p_{\varphi n 0}^{(2)}(r_0^2 - r^2)$ частные решения

$$\begin{aligned} u_{rn}^{(1)*} &= \left(-n^2 a_1 p_{rn 0}^{(1)} + na_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} - 4na_2 p_{\varphi n 0}^{(2)} - 3na_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} + 15a_{13} p_{rn 0}^{(1)} \right) Y_1 r^4 + \\ &+ \left(n^2 a_1 p_{rn 0}^{(1)} - na_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} + 2na_2 p_{\varphi n 0}^{(2)} + na_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} - 3a_{13} p_{rn 0}^{(1)} \right) Y_2 r^2, \\ u_{rn}^{(2)*} &= \left(-n^2 a_1 p_{rn 0}^{(2)} - na_1 p_{\varphi n 0}^{(1)} + 4na_2 p_{\varphi n 0}^{(1)} + 3na_{13} p_{\varphi n 0}^{(1)} + 15a_{13} p_{rn 0}^{(2)} \right) Y_1 r^4 + \\ &+ \left(n^2 a_1 p_{rn 0}^{(2)} + na_1 p_{\varphi n 0}^{(1)} - 2na_2 p_{\varphi n 0}^{(1)} - na_{13} p_{\varphi n 0}^{(1)} - 3a_{13} p_{rn 0}^{(2)} \right) Y_2 r^2, \\ u_{\varphi n}^{(1)*} &= \left(15a_1 p_{\varphi n 0}^{(1)} - na_1 p_{rn 0}^{(2)} - 4na_2 p_{rn 0}^{(2)} - 5na_{13} p_{rn 0}^{(2)} - n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(1)} \right) Y_1 r^4 + \\ &+ \left(-3a_1 p_{\varphi n 0}^{(1)} + na_1 p_{rn 0}^{(2)} + 2na_2 p_{rn 0}^{(2)} + 3na_{13} p_{rn 0}^{(2)} + n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(1)} \right) Y_2 r^2, \\ u_{\varphi n}^{(2)*} &= \left(15a_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} + na_1 p_{rn 0}^{(1)} + 4na_2 p_{rn 0}^{(1)} + 5na_{13} p_{rn 0}^{(1)} - n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} \right) Y_1 r^4 + \\ &+ \left(-3a_1 p_{\varphi n 0}^{(2)} - na_1 p_{rn 0}^{(1)} - 2na_2 p_{rn 0}^{(1)} - 3na_{13} p_{rn 0}^{(1)} + n^2 a_{13} p_{\varphi n 0}^{(2)} \right) Y_2 r^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где
$$Y_1 = \frac{1}{n^4 a_1 a_{13} - 16n^2 a_1^2 - 2n^2 a_1 a_{13} + 16n^2 a_2^2 + 32n^2 a_2 a_{13} + 225a_1 a_{13}},$$

$$Y_2 = \frac{1}{n^4 a_1 a_{13} - 4n^2 a_1^2 - 2n^2 a_1 a_{13} + 4n^2 a_2^2 + 8n^2 a_2 a_{13} + 9a_1 a_{13}}.$$

Заключение. Предложенная постановка краевой задачи и полученные частные решения при степенной зависимости нагрузок от радиуса позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойной круговой пластины под действием неосесимметричных нагрузок, действующих в ее плоскости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т19РМ-089).

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
2. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая // Проблемы прочности. – 2002. – Т. 34, № 5 – С. 70–79.
3. Горшков, А. Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А. Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.

4. Старовойтов, Э. И. Изгиб с растяжением трехслойного термоупругого стержня / Э. И. Старовойтов, А. В. Попченко, Д. В. Тарлаковский // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сборник. – Мн. : 2013. – Вып. 28. – С. 23–26.
5. Козел, А. Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, заземленной по контуру, на основании Пастернака / А. Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск: БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С. 318–323.
6. Старовойтов, Э. И. Изгиб упругой трехслойной круговой пластины на основании Пастернака / Э. И. Старовойтов, А. Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24, №1. – С.392–406.
7. Зеленая, А. С. Цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле / А. С. Зеленая // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – №1 (38). – С. 45–49.
8. Зеленая, А. С. Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – №6 (105). – С. 89–95.
9. Захарчук, Ю. В. Влияние сжимаемости наполнителя на перемещения в трехслойной круговой симметричной пластине // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. – 2018. – № 2 – Режим доступа: <http://mathmod.esrae.ru/18-69>. – Дата доступа: 24.11.2019.
10. Старовойтов, Э. И. Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Захарчук // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – № 4. – С. 88–97.
11. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. – № 4. – С. 55–62.
12. Нестерович, А. В. Осесимметричное растяжение-сжатие круговой трехслойной пластины в температурном поле // Современные вопросы механики сплошных сред 2019 : сб. ст. по материалам конференции с междунар. участием; изд-во Чуваши. ун-та. – Чебоксары, 2019. – С.43–46.
13. Нестерович, А. В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А. В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.
14. Нестерович, А. В. Напряжения в круговой пластине типа Тимошенко при неосесимметричном растяжении-сжатии / А. В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. / Белорус. гос. ун-т. транспорта. – Гомель, 2018. – Вып. 11. – С. 195–203.
15. Нестерович, А. В. Уравнения равновесия трехслойной круговой пластины при неосесимметричном нагружении / А. В. Нестерович // Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С. 154–159.