

Министерство высшего и среднего специального  
образования БССР

БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

---

Кафедра "Сопротивление материалов и теория упругости"

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к контрольным работам по сопротивлению материалов  
для студентов строительных специальностей  
заочного факультета

Часть 1

ПРОСТОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

М и н с к 1 9 8 6

Методические указания содержат краткие сведения из теории и типовые примеры по разделам первой части курса, а также контрольные задачи и план их решения с использованием международной терминологии и символики в соответствии со стандартом СЭВ 1565-79.

Предназначены для студентов заочного обучения с целью восполнить недостаток этих сведений в учебной литературе по сопоставлению материалов.

Составили:

В.Н.Зяц, В.А.Пенькевич,  
А.Е.Кончиц, Р.И.Фирсова

Рецензенты:

И.М.Набоков, М.Д.Подскребко

## В в е д е н и е

Сопротивление материалов является одной из сложных дисциплин, изучаемых в высших технических учебных заведениях. Наибольшие трудности обычно возникают при решении задач, выполнении контрольных работ. Настоящие методические указания преследуют цель помочь студенту-заочнику овладеть методикой решения задач и с меньшей затратой времени выполнить контрольные работы.

В первой части методических указаний рассмотрены разделы первой части курса: растяжение и сжатие, сдвиг, моменты инерции плоских сечений, кручение и плоский изгиб. По каждому разделу приводятся краткие сведения из теории, примеры решения характерных задач и предлагается контрольная задача для самостоятельного решения. В каждой контрольной задаче дается план ее решения.

Рекомендуется сначала изучить теорию соответствующего раздела курса, проработать решения примеров и только после этого приступить к решению контрольной задачи. Такая последовательность работы будет способствовать успешному решению экзаменационных задач, близких по характеру к рассмотренным в указаниях.

Методические указания составлены в соответствии со стандартом СТ СЭВ 1565-79 по буквенному обозначению нормативно-технической документации в строительстве и СНиП II-23-81 "Нормы проектирования. Стальные конструкции", предусматривающим и использование Международной системы единиц. Расчет элементов конструкций ведется по методу предельных состояний, который является основным при расчете строительных конструкций.

Контрольные задачи, приведенные в каждом разделе указаний, могут быть использованы для самостоятельного решения при работе над курсом, а также для аудиторных контрольных работ, взамен домашних, для студентов, регулярно посещающих занятия в межсессионный период (согласно решению Совета БПИ). Возможно использование контрольных задач настоящих указаний и для контрольных домашних работ.

### Указания по выполнению контрольных работ

Количество контрольных работ устанавливается учебным графиком. Номера задач, входящих в контрольные работы, приведены в

таблице.

Специальность	Кол-во контрольных работ	Номера задач контрольных работ			
		I	2	3	4
С, АД, СП, ГС	4	1, 2, 3, 4	5, 6, 7	8, 9, 10, 11	12, 13, 14
ТГ	2	1, 8, 2, 3а	5, 6ж, II, 13		
ИС, СК	I	1, 3а, 6ж II, 13			

\*) без пункта 5

Контрольные работы являются индивидуальными. Расчетная схема и числовые данные определяются тремя последними цифрами личного номера (шифра) студента и первыми тремя буквами русского алфавита, которые располагаются под шифром. Цифры, обозначающие год поступления в институт, не используются. Если личный номер состоит менее, чем из трех цифр, впереди дописываются нули:

Например:	76-832	76-12	76-012
	абв		абв

Номер схемы и числовые данные берутся из таблиц в зависимости от связи цифры шифра с буквой, написанной под ней (например: 8а, 3б, 2в). Так для шифра 76-832 из таблицы к задаче I следует взять схему II (2В),  $F_1 = 1800 \text{ кН}(8а)$ ,  $F_2 = 2300 \text{ кН}(3б)$ ,  $F_3 = 1200 \text{ кН}(2в)$ .

Работы, выполненные с нарушением этих требований, не рецензируются.

В заголовке контрольной работы должно быть четко написано: номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия, имя, отчество студента, личный номер (шифр) и точный почтовый адрес.

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради чернилами, четким почерком. На каждой странице отводятся поля в 3-4 см и I-2 страницы в конце работы для замечаний рецензента.

Чертежи к задаче выполняются карандашом на отдельной странице тетради или на миллиметровке с соблюдением масштаба изображения. Миллиметровка, по размеру листа тетради, крепится к ней. На чертеже должны быть проставлены все числовые значения (можно без буквенного обозначения), используемые в расчете.

Решение каждой задачи должно начинаться с новой страницы. Записывается условие задачи (без плана решения) и все исходные данные согласно шифру.

Последовательность решения изложена в методических указаниях в каждой задаче. По ходу решения задачи приводятся пояснения к выполняемым операциям, формулам и полученным результатам.

Все расчеты выполняются с точностью до трех значащих цифр независимо от положения запятой.

Например: 7410; 741; 0,0741.

Выявленные рецензентом ошибки исправляются студентом на отдельных листах, которые вкладываются в соответствующие места контрольной работы. В самой незначительной работе ничего не меняется.

Все выполненные студентом и зачтенные преподавателем контрольные работы должны быть представлены на зачете или экзамене и защищены после ответа на заданные вопросы, связанные с решением той или иной задачи.

## Р е з д е л I

### РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

При растяжении или сжатии в поперечном сечении стержня от внешних нагрузок возникает продольная сила  $N$ , которая определяется методом сечений. Величина продольной силы в сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на стержень по одну сторону от рассматриваемого сечения ( $N = \sum F$ ). Условимся вектор  $N$  направлять от рассматриваемого сечения (считать положительным). Тогда полученный в результате подсчета знак укажет на характер деформации: плюс - растяжение, минус - сжатие.

Нормальные напряжения  $\sigma$  при растяжении и сжатии распределяются по сечению равномерно. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq R,$$

где  $N$  - продольная сила (в Н);  
 $A$  - площадь поперечного сечения (в  $m^2$ );  
 $R$  - расчетное сопротивление материала растяжению или сжатию (в Па).

Абсолютная продольная деформация участка стержня определяется по формуле:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

где  $l$  — длина стержня (участка) в метрах;

$E$  — модуль продольной упругости материала (в Па).

В настоящем разделе рассматриваются только статически определимые системы, когда для определения опорных реакций достаточно лишь уравнений статики. О статической определимости системы будем судить по числу опорных связей и количеству возможных уравнений статики для нее.

**Пример 1.1.** Определить площади поперечных сечений на всех участках чугунного стержня (рис. 1.1, а). Построить эпюры продольных сил  $N$ , напряжений  $\sigma$  и перемещений  $W$ . Принять  $A_4 = A_3$ ,  $E = 100 \text{ ГПа}$ .

Для чугуна: расчетное сопротивление на сжатие  $R_c = 180 \text{ МПа}$ , на растяжение  $R_t = 60 \text{ МПа}$ , модуль упругости  $E = 100 \text{ ГПа}$ .

Рассматриваемый стержень имеет одну опорную реакцию  $A_z$  и для него можно составить лишь одно уравнение статики —  $\sum Z = 0$ . Значит, эта система статически определима.

$$\sum Z = A_z - F_1 + F_2 - F_3 = 0; \quad A_z = 1300 \text{ кН}.$$

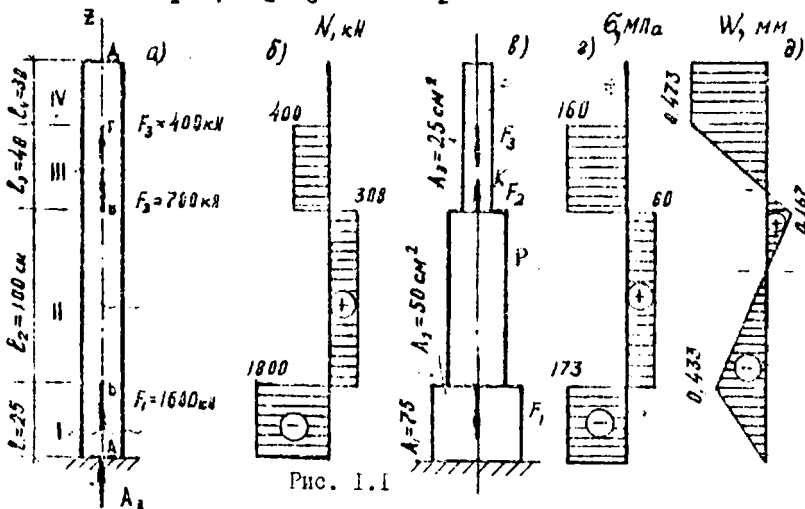


Рис. 1.1

Стержень подвергается растяжению-сжатию. Выделим участок нагружения I-4 (между точками приложения нагрузок), в пределах которых намечаются сечения I и IV.

Для определения  $N$  на первом участке рассмотрим часть стержня, расположенную ниже сечения I-I. На эту часть действуют реакция  $A_1$ , продольная сила от которой является отрицательной, так как  $A_1$  направлена к сечению I-I.  $N_1 = -A_1 = -1300$  кН.

Полученный в результате подсчета знак минус при  $N_1$  указывает, что первый участок испытывает деформацию сжатия.

Ниже сечения II-II действует кроме реакции  $A_2$  сила  $F_1$ , которая направлена от сечения и поэтому продольная сила от  $F_1$  является положительной.  $N_2 = -A_2 + F_1 = -1300 + 1600 = 300$  кН.

Полученный при  $N_2$  знак плюс указывает, что второй участок испытывает деформацию растяжения.

Аналогично определяются  $N_3$  и  $N_4$ . Пропекуйте это самостоятельно. Должны получиться следующие значения:  $N_3 = -400$  кН,  $N_4 = 0$ . По вычислительным значениям  $N$  строится эпюра продольных сил (рис. I.1, б).

Из условия прочности  $\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq R$  определяем площади поперечных сечений на участках стержня.

На первом участке требуемая площадь

$$A_1 \geq \frac{N_1}{R_c} = \frac{1300 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 7,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 72,2 \text{ см}^2$$

Здесь продольная сила взята в Н, а расчетное сопротивление в Па. Принимаем (округленно)  $A_1 = 75 \text{ см}^2$ .

На втором участке требуемая площадь

$$A_2 \geq \frac{N_2}{R_t} = \frac{300 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^6} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 50,0 \text{ см}^2$$

Принимаем  $A_2 = 50 \text{ см}^2$ .

Значения  $A_3$  и  $A_4$  вычислите самостоятельно. Требуемая площадь должна быть:  $A_3 = 22,2 \text{ см}^2$ ,  $A_4 = 0$ . По условию задачи принимаем  $A_3 = A_4 = 25 \text{ см}^2$ .

Рассчитываемый стержень с найденными площадями поперечных сечений показан на рис. I.1 в.

Вычислим нормальные напряжения на участке стержня

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-1300 \cdot 10^3}{75 \cdot 10^4} = -17,3 \cdot 10^7 \text{ Па} = -173 \text{ МПа} < R_c$$

На остальных участках напряжения будут:

$$\sigma_2 = 60 \text{ МПа} = R_1 ; \quad \sigma_3 = -160 \text{ МПа} < R_0 ; \quad \sigma_4 = 0.$$

Проведенные расчеты напряжений являются проверочными. На рис. I.1 г показана эпюра нормальных напряжений.

Далее вычислим деформации участков стержня.

$$\Delta l_1 = \frac{N l_1}{E A_1} = - \frac{1300 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^2}{100 \cdot 10^9 \cdot 75 \cdot 10^{-4}} = -4,33 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,433 \text{ мм}.$$

Здесь длина взята в м, а площадь сечения в м<sup>2</sup>.

Значения  $\Delta l_2$ ,  $\Delta l_3$  и  $\Delta l_4$  вычислите самостоятельно. Получится:  $\Delta l_2 = 0,600 \text{ мм}$ ;  $\Delta l_3 = -0,640 \text{ мм}$ ;  $\Delta l_4 = 0$ .

Чтобы построить эпюру  $W$ , надо знать перемещения граничных сечений.

Перемещение любого сечения стержня равно сумме деформаций участков, расположенных между этим сечением и неподвижной опорой.

Перемещение т. А  $W_A = 0$  (условие на опоре). Перемещение т. Б обусловлено деформацией участка I.

$$W_B = \Delta l_1 = -0,433 \text{ мм}.$$

Перемещение т. В складывается из деформаций участков I и 2.

$$W_B = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,433 + 0,600 = 0,167 \text{ мм}.$$

Перемещения остальных граничных сечений определите самостоятельно.

Получаются значения:  $W_C = -0,473 \text{ мм}$ ,  $W_D = -0,473 \text{ мм}$ .

По вычисленным значениям  $W$  строится эпюра перемещений (рис. I.1 д).

Обратите внимание, что сечения P и K не перемещаются. Четвертый участок стержня не деформируется, но перемещается за счет деформации других участков.

**Пример 2.1.** Проверить прочность стержневой системы (рис. I.2 а). Стержни 1 и 2 деревянные сечением 12x12 см,  $R_d = 13 \text{ МПа}$ . Стержень 3 стальной, составлен из двух уголков 50x50x3,  $R_y = 210 \text{ МПа}$ .

Нагрузка нормативная  $-F^H = 210 \text{ кН}$ , коэффициент перегрузки  $n = 1,2$ .

Площади поперечных сечений:  $A_1 = A_2 = 12 \cdot 12 = 144 \text{ см}^2$ ;



$A_y = 210 \cdot 0,707 = 148,47 \text{ кН}$  (по таблицам сортамента).

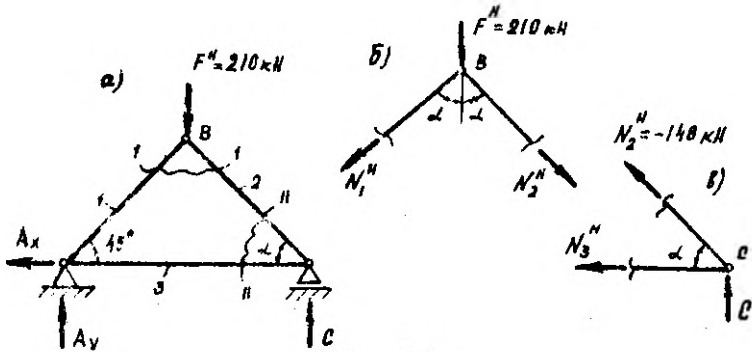


Рис. 1.2

Рассматриваемая система является статически определимой, так как трем неизвестным реакциям ( $A_x$ ,  $A_y$  и  $C$ ) соответствуют три уравнения статики ( $\sum X = 0$ ;  $\sum Y = 0$ ;  $\sum M = 0$ ). Эта система относится к частному случаю, когда внутренние силы в стержнях ее можно определить без нахождения спорных реакций.

Определим продольные силы.

Первое сечение сделаем, как показано на рис. 1.2 а, и рассмотрим равновесие узла В (рис. 1.2 б).

Проектируем все силы на ось стержня 1.

$$\sum F_x^N = 0; -F^N \cos 45^\circ - N_1^N = 0 \text{ Отсюда } N_1^N = -210 \cdot 0,707 = -148 \text{ кН.}$$

Аналогично получим  $N_2^N = -148 \text{ кН.}$

Стержни 1 и 2 испытывают деформации сжатия.

Проведя второе сечение и спроектировав все силы на ось стержня 3 (рис. 1.2 в), получим  $N_3^N = 148 \cdot 0,707 = 105 \text{ кН.}$  Стержень 3 испытывает деформацию растяжения.

Находим напряжения в стержнях системы от расчетных усилий

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N_1^N \cdot n}{A_1} = \frac{-148 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{144 \cdot 10^{-4}} = -1,24 \cdot 10^7 \text{ Па} = -12,4 \text{ МПа} < R = 13,0 \text{ МПа}$$

Недонапряжение составляет  $\frac{13,0 - 12,4}{13,0} \cdot 100 = 4,62 \%$

Вычислите напряжение в третьем стержне ( $R_y = 210 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_{\text{доп}} = 0,10$ ).  
Стержень 3 перенапряжен на 1,43 %.

В технических расчетах допускается перенапряжение до 5%.  
Итак, прочность рассмотренной стержневой системы (металло-деревянной форма) обеспечена.

**Пример 3.1.** Определить наибольшую расчетную нагрузку и перемещение точки приложения силы  $F$  (рис. 1.3 а). Стержни 1 и 2 стальные,  $d_1 = d_2 = 2 \text{ см}$ ,  $R_y = 210 \text{ МПа}$ . Элемент 3 прочный и обладает большой жесткостью (деформацией его пренебрегаем).

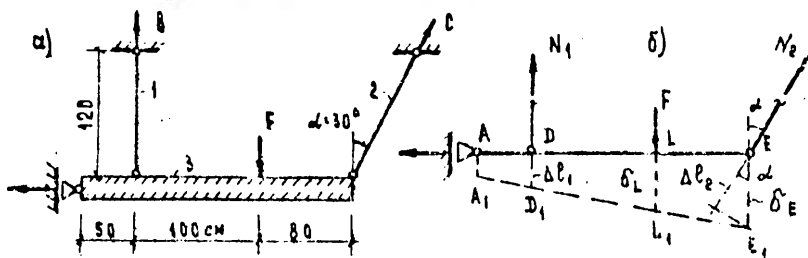


Рис. 1.3

Площадь поперечного сечения стержней

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2$$

Установите, является ли эта система статически определимой.

Нанесите сечения стержней. Установите, какому виду деформации подвергаются стержни 1 и 2. Запишите условие прочности для них.

Продольные силы в стержнях зависят от величины нагрузки  $F$  и от геометрических факторов (расстояний, углов). Надо установить зависимости  $N_1 = f_1(F)$  и  $N_2 = f_2(F)$ , используя для этого уравнения статики  $\sum M_B = -N_1 \cdot 180 + F \cdot 80 = 0$ ;  $N_1 = 0,444 F$  . (1)

$$\sum M_D = -F \cdot 100 + N_2 \sin \alpha \cdot 180 = 0; N_2 = 0,642 F \quad (2)$$

Выразим напряжения через силу  $F$ :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,444 F}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 1,41 \cdot 10^3 \text{ Па}; \sigma_2 = 2,04 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

$$\begin{aligned} \text{Условие прочности} - \sigma_{\max} \leq R_y \\ \sigma_{\max} = \sigma_2 = 2,04 \cdot 10^3 F = 210 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Тогда наибольшая расчетная нагрузка на систему не должна превышать

$$F \leq \frac{210 \cdot 10^6}{2,04 \cdot 10^3} = 103 \cdot 10^3 \text{ Н} = 103 \text{ кН.}$$

Принимаем  $F = 100 \text{ кН.}$

Вычислим деформации стержней

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E A_1} = \frac{0,444 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 8,48 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,848 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E A_2} = \frac{0,642 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 120 \cdot 10^{-2}}{200 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 0,866} = 14,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,42 \text{ мм.}$$

Изобразим перемещение элемента 3, обладающего большой жесткостью, вызванное деформацией стержней 1 и 2 (рис. 1.3).

Стержни 1 и 2 удлиняются, жесткий элемент 3 перемещается в новое положение. Перемещения бесконечно малы, поэтому принимается, что точки  $A, D, L, E$  перемещаются перпендикулярно оси элемента 3 в новое положение. Точка  $D$  перемещается вдоль оси стержня 1 на величину  $\Delta l_1$ . Точка  $E$  перемещается под углом к оси стержня 2, поэтому стержень 2 не только удлиняется, но и поворачивается вокруг точки  $C$ .

$$\text{Перемещение т. E } \delta_E = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha} = \frac{1,46}{0,866} = 1,67 \text{ мм.}$$

$$\text{Перемещение т. D } \delta_D = \Delta l_1 = 0,874 \text{ мм.}$$

Перемещение т.  $L$

$$\delta_L = \delta_D + \frac{\delta_E - \delta_D}{180} \cdot 100 = 0,874 + \frac{1,69 - 0,874}{180} \cdot 100 =$$

$= 1,327 \text{ мм.}$       **КОНТРОЛЬНАЯ ЗАДАЧА I**

Произвести расчет стержня постоянного поперечного сечения (рис. 1.4) на прочность и жесткость.

Материал стержня - сталь с расчетным сопротивлением  $R_y = 210 \text{ МПа}$  и модулем продольной упругости  $E = 200 \text{ ГПа}$ .

## План решения задачи

1. Вычислить продольные силы на участках стержня и построить эпюру  $N$ .
2. Определить размеры поперечного сечения стержня (сторону квадрата или диаметр круга).
3. Вычислить нормальные напряжения на участках стержня и построить эпюру  $\sigma$  по длине его.
4. Вычислить деформации участков стержня и построить эпюру перемещений  $W$ .

### Данные к задаче I

Строка	Схема	Нагрузка, кН			Длина участков, см			Форма сечения
		$F_1$	$F_2$	$F_3$	$l_1; l_4$	$l_2$	$l_3$	
1	I	1100	2100	1100	110	110	110	круг
2	II	1200	2200	1200	120	120	120	квадрат
3	III	1300	2300	1300	130	130	130	круг
4	IV	1400	400	1400	40	140	140	квадрат
5	V	1500	500	1500	50	150	50	круг
6	VI	1600	600	1600	160	160	60	квадрат
7	VII	1700	700	1700	170	70	70	круг
8	VIII	1800	800	1800	180	80	180	квадрат
9	IX	1900	900	1900	90	190	90	круг
0	X	2000	1000	2000	100	200	100	квадрат

	в	а	б	в	а	б	в	в
--	---	---	---	---	---	---	---	---

## Р а з д е л 2

### СДВИГ

При чистом сдвиге в поперечном сечении стержня возникает поперечная сила  $Q$ . Деформации сдвига подвергаются соединительные элементы (болты, заклепки, шпонки, электросварные швы и др.), которые испытывают еще и небольшие побочные деформации (изгиб,

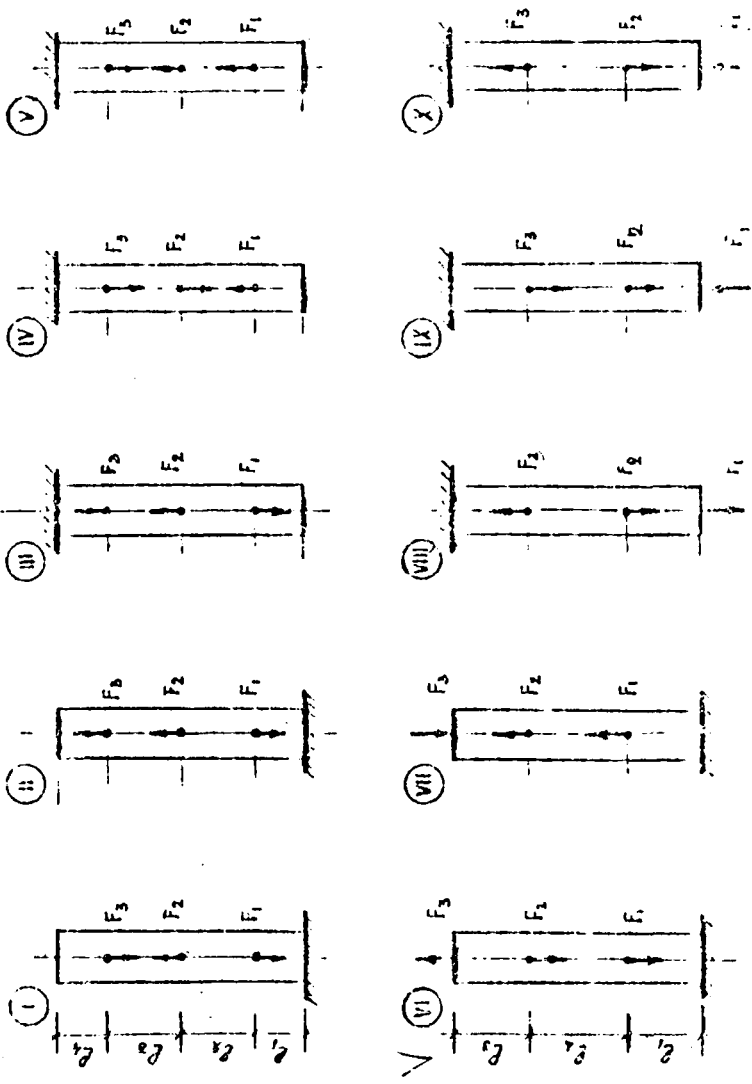


Рис. 1.4 СРЕМНИ СТЕПЕННЕЙ К ВАЛАМ 1.

растяжение или смятие). Технические расчеты производятся только на сдвиг (чистый сдвиг) без учета побочных деформаций.

В расчетах принимается, что возникающие при сдвиге касательные напряжения распределяются по сечению равномерно. Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{max} = \frac{Q}{A_s} \leq R_s,$$

где  $Q$  - поперечная сила;  
 $A_s$  - площадь сдвига (среза);  
 $R_s$  - расчетное сопротивление материала сдвигу (срезу).

Во многих случаях поперечная сила  $Q$  равна внешней силе  $F$ , действующей на соединение:  $Q = F$ .

В заклепочных соединениях заклепки рассчитываются на срез (сдвиг) и смятие, а соединяемые элементы - на разрыв по ослабленному отверстию или сечению и смятие.

Условие прочности заклепок на срез

$$\tau = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot n \cdot n_s} \leq R_s,$$

где  $d$  - диаметр стержня заклепки (в м);  
 $n$  - число заклепок в соединении;  
 $n_s$  - число срезов одной заклепки;  
 $R_s$  - расчетное сопротивление материала заклепки на срез (в Па).

Условие прочности на смятие

$$\sigma = \frac{F}{n \cdot d \cdot (\Sigma t)_{min}} \leq R_p,$$

где  $(\Sigma t)_{min}$  - наименьшая суммарная толщина соединяемых элементов, сминаемых в одном направлении (в м);  
 $R_p$  - расчетное сопротивление на смятие (в Па).

Условие прочности для соединяемых элементов на разрыв по сечению ослабленному заклепками отверстиями

$$\sigma = \frac{N}{A_{nt}} = \frac{F}{A_{nt}} \leq R_y,$$

где  $A_{nt}$  - площадь ослабленного поперечного сечения.

В сварных соединениях угловые швы рассчитываются на срез.

Условие прочности имеет вид:

$$\tau = \frac{N}{\beta_1 K_1 l_w} \leq R_{wf},$$

- $n$  - количество угловых швов (в м);  
 $K_s$  - коэффициент, зависящий от вида сварки;  
 $l_w$  - расчетная длина шва (в м);  
 $R_{wf}$  - расчетное сопротивление углового шва срезу.

Пример 2.1. Определить количество заклепок в соединении (рис. 2.1) и ширину листа в опасном сечении. Нагрузка нормальная -  $F^H = 133$  кН; коэффициент перегрузки  $\eta = 1,3$ ; расчетные сопротивления:  $R_y = 210$  МПа,  $R_s = 180$  МПа,  $R_p = 420$  МПа.

Элементы соединяются способом "внахлестку".

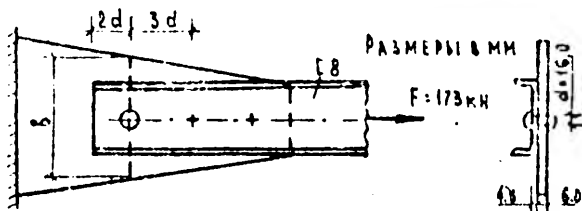


Рис. 2.1

Толщина стенки швеллера 4,5 мм, площадь поперечного сечения  $A = 8,98$  см<sup>2</sup>.

Заклепка срезается в одной плоскости. В одном направлении сдвигается лист -  $t = 6$  мм, в другом - швеллер -  $t = 4,5$  мм.

В расчете используют меньшее значение  $t$ .

Расчетная нагрузка  $F = F^H \cdot \eta = 133 \cdot 1,3 = 173$  кН.

Определим количество заклепок из условия прочности на срез

$$n = \frac{4 \cdot 173 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 16^2 \cdot 10^{-6} \cdot 180 \cdot 10^6} < 180 \cdot 10^6, \quad \text{откуда } n \geq 4,78.$$

Определим количество заклепок из условия прочности на смятие

$$n = \frac{173 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^3 \cdot 4,5 \cdot 10^{-3}} < 420 \cdot 10^6, \quad \text{откуда } n \geq 5,7.$$

Из двух значений  $n$  принимаем большее (с округлением)  $n = 6$ .  
 Из условия прочности листа требуемая площадь опасного сечения

$$A_{nt} \geq \frac{F}{R} = \frac{173 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,824 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 8,24 \text{ см}^2.$$

$A_{nt} = t(b-d) \geq 8,24$ . Ширина листа в опасном сечении  $b = 15,4 \text{ см}$ .  
Принимаем  $b = 160 \text{ мм}$ .

**Пример 2.2.** Определить наибольшую расчетную нагрузку на заклепочное соединение (рис. 2.2). Диаметр заклепок  $d = 12 \text{ мм}$ . Соединение "встык" с двумя накладками.

Расчетные сопротивления такие же, как и в предыдущем примере.

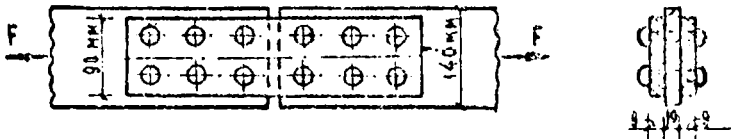


Рис. 2.2

Обратите внимание, что заклепка срезается в двух плоскостях ( $n_s = 2$ ). При соединении "встык" с накладками число заклепок берется по одну сторону от стыка ( $n = 6$ ).

Определим расчетную нагрузку из условия прочности на срез

$$\bar{T} = \frac{4F}{3,14 \cdot 12^2 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 2} \leq 180 \cdot 10^6, \text{ откуда } F \leq 244 \text{ кН}.$$

Из условия прочности на смятие  $F \leq 302 \text{ кН}$  (вычисление проведите самостоятельно).

Заметьте, что в одном направлении сминается лист, а в другом - две накладки.

Из условия прочности листа на растяжение

$$F \leq R \cdot A_{nt} = 210 \cdot 10^6 (14,0 - 1,0 \cdot 1,2 \cdot 2) \cdot 10^{-4} = 244 \cdot 10^3 \text{ Н} = 244 \text{ кН}.$$

Из условия прочности накладок  $F \leq 250 \text{ кН}$  (вычисление проведите самостоятельно). Из вычисленных значений нагрузок принимаем наименьшее:  $F = 240 \text{ кН}$ .



Пример 2.3. Определить длину сварного углового шва (рис. 2.3), если  $R_{wy} = 150$  МПа. Коэффициент  $\beta_s = 0,7$  (при ручной сварке).

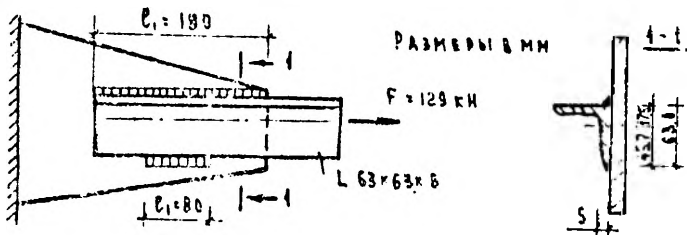


Рис. 2.3

Катет углового шва примем равным толщине уголка  $K_s = 5$  мм. Определим из условия прочности на срез расчетную длину шва

$$q = \frac{129 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot l_w} \leq 150 \cdot 10^6, \text{ откуда } l_w \geq 0,246 \text{ м.}$$

Длина шва распределяется по сторонам обратно пропорционально расстоянию стороны от центра тяжести сечения.

$$\frac{l_{1w}}{45,7} = \frac{l_{2w}}{17,3}; \quad l_w = l_{1w} + l_{2w} = 24,6 \text{ см.} \quad \text{Решение}$$

дает:  $l_{1w} = 17,8$  см,  $l_{2w} = 6,76$  см.

Полные длины участков шва с учетом непровара концов его составляют (с округлением)

$$l_1 = 17,8 + 1 = 19 \text{ см}; \quad l_2 = 6,8 + 1 = 8 \text{ см.}$$

### КОНТРОЛЬНАЯ ЗАДАЧА 2

Произвести расчет заклепочного соединения (рис. 2.4).

Материал — сталь. Расчетные сопротивления:  $R_y$  210 МПа,  
 $R_{wf} = 180$  МПа,  $R_p = 240$  МПа.

План решения задачи

1. Определить номер прокатного профиля (швеллера или уголка)

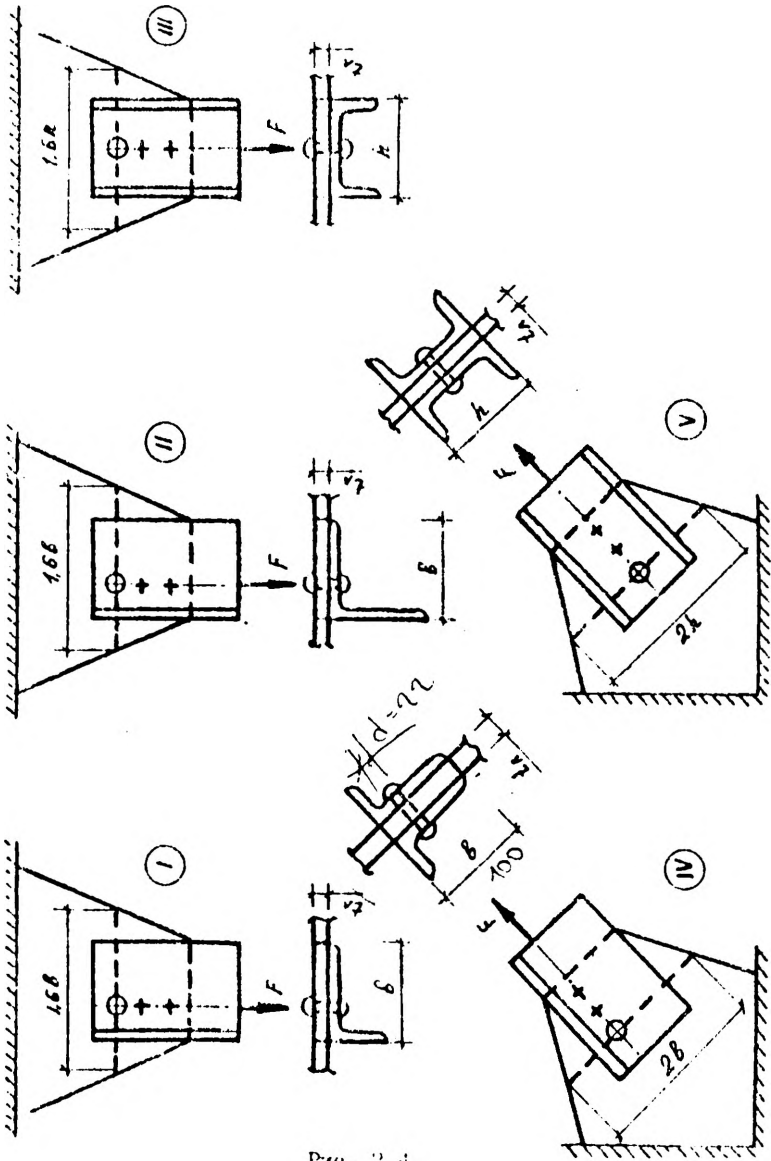
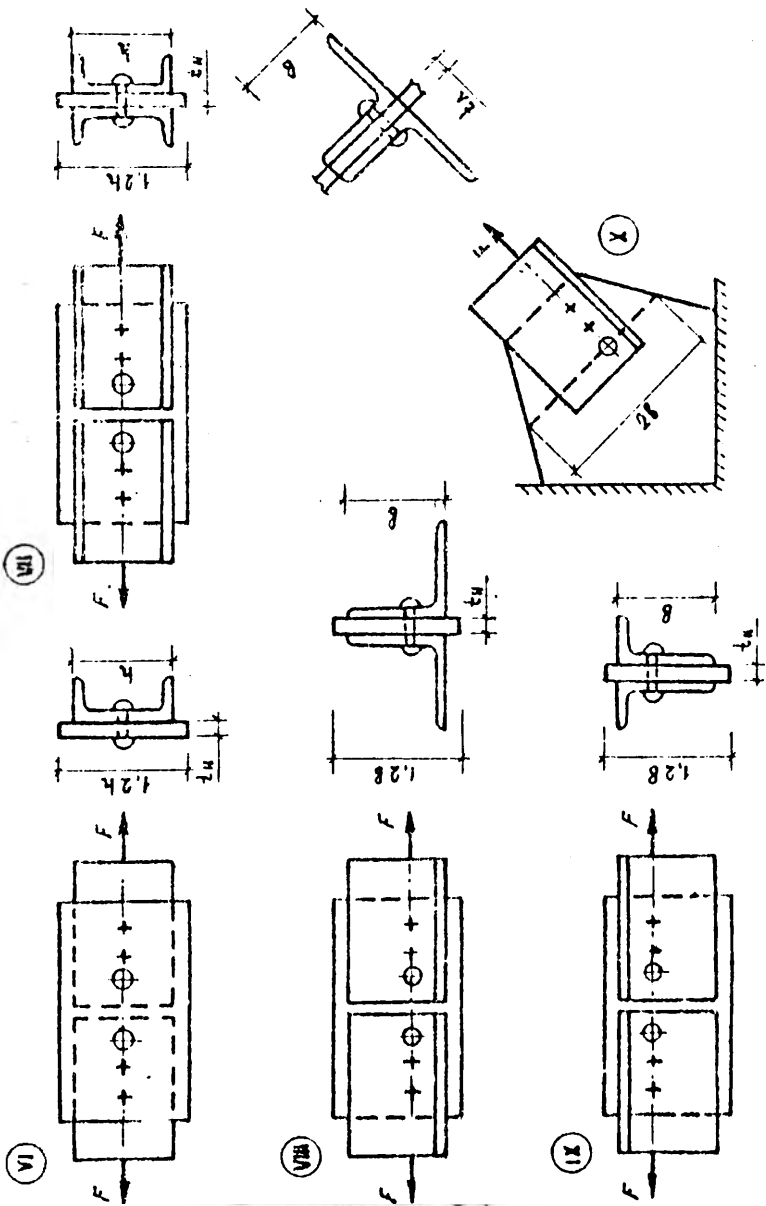


Рис. 2.4



Продолжение рис. 2.4

на), увеличив его требуемую площадь на 10% (в связи с заослобичными отверстиями).

2. Определить толщину листа или накладки, приняв ее значение согласно сортаменту ( $t = 4 - 22$  через 1 мм).

3. Определить количество заклепок из условия прочности на рыв и смятие.

4. Проверить напряжение в элементе конструкции из прокатного профиля.

Примечание: 1. Во всех схемах заклепки располагать в один ряд.

2. Расстояние между центрами заклепок  $3d$ , между центром и краем -  $2d$ .

### Данные к задаче 2

Группа	I	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Сортамент	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	$\alpha$
$F$ , мм <sup>2</sup>	410	320	230	440	350	260	470	380	290	500	$\sigma$
$t$ , мм	18	14	12	18	14	12	20	16	14	22	$\alpha$

## Раздел 3

### МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Любое плоское сечение характеризуется рядом геометрических характеристик: площадью, координатами центра тяжести, статическим моментом, моментом инерции и др.

Величина момента инерции характеризует сопротивляемость сечения деформации (кручения, изгиба) в зависимости от размеров формы поперечного сечения.

Различают моменты инерции: осевые, определяемые интегральным видом  $J_x = \int y^2 dA$ ,  $J_y = \int x^2 dA$ , полярный -  $J_p = \int \rho^2 dA$  и центробежный -  $D_{xy} = \int xy dA$ . Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны. Центробежный момент инерции может быть положительным,

отрицательным и равным нулю. Размерность моментов инерции —  $\text{см}^4$  или  $\text{м}^4$ .

Формулы для определения моментов инерции простых сечений относительно центральных осей приведены в справочниках. При вычислении моментов инерции сложных сечений часто используются формулы перехода от центральных осей частей сечений к центральным всего сечения.

$$J_x = \sum (J_{x_i} + A_i m_i^2); \quad J_y = \sum (J_{y_i} + A_i n_i^2); \quad D_{xy} = \sum (D_{x_i y_i} + A_i m_i n_i),$$

где  $J_{x_i}, J_{y_i}, D_{x_i y_i}$  — моменты инерции элементов сечения относительно центральных осей;  
 $m_i, n_i$  — координаты центров тяжести элементов сечения в центральных осях.

Важное значение имеют главные центральные оси сечения. Главными центральными называются две взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр тяжести сечения, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции имеют экстремальные значения. Главные моменты инерции обозначаются  $J_{u(max)}$  и  $J_{v(min)}$  и определяются по формуле

$$J_{u,v} = \frac{1}{2} [(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4D_{xy}^2}].$$

Положение главных осей определяется углом  $\alpha_0$ , который находится из формулы

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2D_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Угол  $\alpha_0$  откладывается от оси с большим неглавным моментом инерции, положительное значение — против хода часовой стрелки.

Если сечение, простое и сложное, имеет ось симметрии, то эта ось является главной. Другая главная ось перпендикулярна оси симметрии.

На практике часто используются сечения, составленные из нескольких прокатных профилей (двутавр, швеллер, уголок). Геометрические характеристики этих профилей приведены в таблицах сортамента.

Для неравнобокого и равнобокого уголков центробежный момент инерции относительно центральных осей, параллельных полкам, определяются по формуле

$$D_{xy} = \pm \sqrt{(J_x - J_{min})(J_y - J_{min})}.$$

Обратите внимание на обозначение главных центральных осей в таблицах сортамента для уголков.

Знак  $D_{xy}$  для уголка зависит от положения его в сечении.

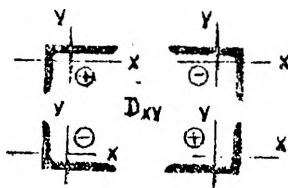


Рис. 3.1

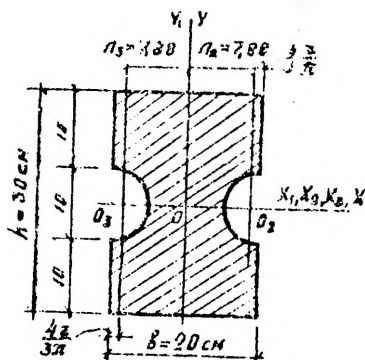


Рис. 3.2

На рис. 3.1 показаны возможные положения уголка в сечении и приведены знаки для  $D_{xy}$ .

**Пример 3.1.** Определить величины главных центральных моментов инерции сечения (рис. 3.2).

Это сложное сечение можно представить в виде прямоугольника и двух полукругов. Поскольку оно имеет две оси симметрии, центр тяжести сечения и положение главных центральных осей очевидны.

Вычислим моменты инерции относительно главных центральных осей X и Y. В этих осях координаты центров тяжести всех элементов сечений равны:  $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ ,  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = +7,88$  см ( $n_2 = \frac{b}{2} - \frac{4z}{3d} = 10 - \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 3,14} = 7,88$  см.),  $n_3 = -7,88$  см.

$$\begin{aligned}
 Y_x &= Y_{x_1} - Y_{x_2} - Y_{x_3} = \frac{b \cdot b^3}{12} - \frac{2 \cdot \pi d^4}{2 \cdot 64} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} - \frac{3 \cdot 14 \cdot 10^4}{64} = 44,5 \cdot 10^3 \text{ см}^4 \\
 Y_y &= Y_{y_1} - 2(Y_{y_2} + A_2 n_2^2) = \frac{h \cdot b^3}{12} - 2 \left( 0,112^4 + n_2^2 \frac{54 \cdot h \cdot d^2}{4 \cdot 2} \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{39,26^3}{12} - 2 \left( 0,11,5^4 + 7,88^2 \cdot \frac{3,14 \cdot 10^2}{4,2} \right) = 15,10^3 \text{ см}^4.$$

Главные моменты инерции сечения  $J_u = J_x = 44,5 \cdot 10^3 \text{ см}^4$ ,  
 $J_v = J_y = 15,0 \cdot 10^3 \text{ см}^4$ .

**Пример 3.2.** Определить величины главных центральных моментов инерции сечения (рис. 3.3). Сечение имеет ось симметрии, на которой находится центр тяжести.

Для определения положения центра тяжести сечения произвольно выбираем вспомогательную ось  $X_3$ . Тогда ординаты центров тяжести элементов сечения:  $Y_1 = 20 \text{ см}$ ,  $Y_2 = 32 \text{ см}$ .

$$y_c = \frac{\sum S_{k6}}{\sum A} = \frac{26,40 \cdot 20 - \frac{I}{2} \cdot 15,18 \cdot 32}{26,40 - \frac{I}{2} \cdot 15,18} = 18,2 \text{ см}.$$

Моменты инерции сечения относительно центральных осей:

$$J_x = \sum (J_{xi} + m_i^2 A_i); \quad J_y = \sum (J_{yi} + n_i^2 A_i).$$

Координаты центров тяжести элементов сечения в центральных осях:

$$m_1 = Y_1 - Y_c = 20 - 18,2 = 1,8 \text{ см};$$

$$m_2 = Y_2 - Y_c = 32 - 18,2 = 13,8 \text{ см}.$$

Напомним, что для равнобедренного треугольника

$$J_{x_2} = \frac{bh^3}{36}; \quad J_{y_2} = \frac{hb^3}{48}.$$

Тогда  $J_x = 115,10^3 \text{ см}^4$  (вычислить самостоятельно).

$$J_y = J_4 - J_{y_2} = \frac{40 \cdot 26^3}{12} - \frac{15,18^3}{48} = 56,8 \cdot 10^3 \text{ см}^4.$$

Установите, по какой причине оси  $XU$  являются главными и укажите величины главных центральных моментов инерции сечения.

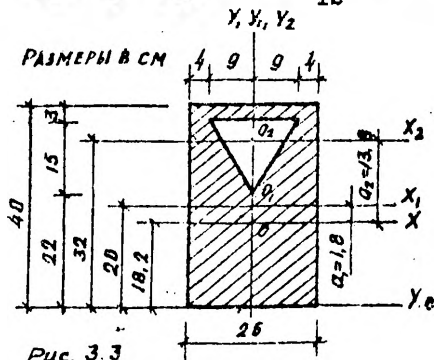


Рис. 3.3

Пример 3.3. Определить  $J_u$ ,  $J_v$  и положение главных центральных осей сечения (рис. 3.4).

Сложное сечение состоит из двух прокатных профилей.

Выписка из таблиц сортиментов (обратите внимание на рабочее положение элементов сечения).

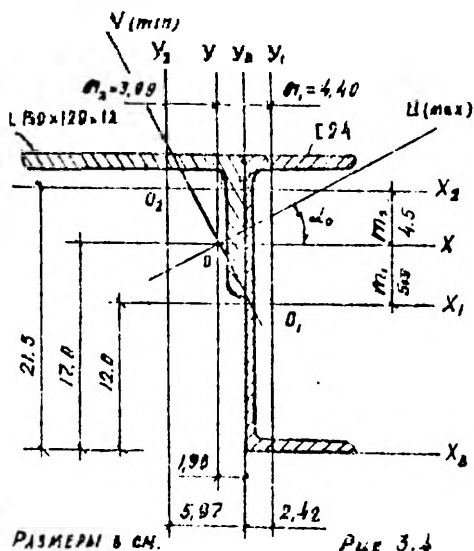
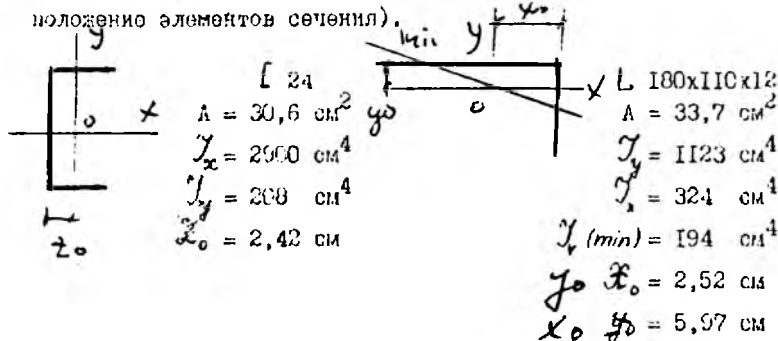


Рис. 3.4

$Y_1 X_1$  или  $Y_2 X_2$ . При этом сократился бы объем вычисления!

В качестве вспомогательных примем оси, проходящие по внешним сторонам швеллера ( $X_B, Y_B$ ).

Координаты центров тяжести элементов сечения в этих осях

$$x_1 = 2,42 \text{ см}, y_1 = 12 \text{ см},$$

$$x_2 = -5,97 \text{ см}, y_2 = 21,48 \text{ см}.$$

Координаты центра тяжести сечения

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{\sum A} = \frac{30,6 \cdot 2,42 + 33,7 \cdot (-5,97)}{30,6 + 33,7} = -1,98 \text{ см}.$$

$y_c = 17,0 \text{ см}$  (вычислите самостоятельно).

В качестве вспомогательных можно было бы выбрать, например, оси



Моменты инерции сечения относительно центральных осей

$$J_x = \Sigma (J_{xi} + m_i^2 A_i); J_y = \Sigma (J_{yi} + n_i^2 A_i); D_{xy} = \Sigma (D_{xiyi} + m_i n_i A_i)$$

Координаты центров тяжести элементов сечения в центральных осях УОХ:

$$m_1 = y_1 - y_c = -5 \text{ см} \quad m_2 = y_2 - y_c = 4,5 \text{ см}$$

$$n_1 = x_1 - x_c = 4,4 \quad n_2 = x_2 - x_c = -3,99$$

Тогда  $J_x = J_{x1} + A_1 m_1^2 + J_{x2} + A_2 m_2^2 = 2900 + 30,6 \cdot 5^2 +$

$$+ 324 + 33,7 \cdot 4,5^2 = 4670 \text{ см}^4.$$

Обратите внимание, что неравнобокий уголок в сечении расположен иначе, чем показан в таблице сортамента.

$$J_y = 2460 \text{ см}^4 \text{ (вычислите самостоятельно).}$$

Центробежный момент инерции: для швеллера  $D_{xy} = 0$  (ось симметрии), для уголка  $J_{x_2 y_2} = \sqrt{(1123-194)(324-194)} = -348 \text{ см}^4$ .

Знак минус - в связи с положением уголка в сечении.

$$\text{Для всего сечения } D_{xy} = D_{x_1 y_1} + A_1 m_1 n_1 + D_{x_2 y_2} + A_2 m_2 n_2 = 0 + 30,6 \cdot 5 \cdot 0 \cdot (-4,4) - 348 + 33,7 \cdot (-4,5) \cdot 3,99 = -1624 \text{ см}^4.$$

Проследите соблюдение знаков у  $n$  и  $m$ .

Главные моменты инерции сечения

$$J_{u,v} = \frac{I}{2} \left[ (4670 + 2460) \pm \sqrt{(4670 - 2460)^2 + 4(-1624)^2} \right] = \frac{1}{2} (7130 \pm 3930);$$

$$J_u = 5,53 \cdot 10^3 \text{ см}^4 = 5,53 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4; J_v = 1,6 \cdot 10^3 \text{ см}^4 = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Положение главных центральных осей инерции сечения

$$\text{tg } 2\alpha_0 = - \frac{2 D_{xy}}{J_x - J_y} = - \frac{2(-1624)}{4670 - 2460} = 1,471; \quad 2\alpha_0 = 55^\circ 48'.$$

$\alpha_0 = 27^\circ 54'$ . Угол  $\alpha_0$  отсчитывается от оси X, так как  $J_x > J_y$ , против хода часовой стрелки.

Проверка правильности вычисления величин  $J_u$ ,  $J_v$  и  $\alpha_0$  производится по формуле  $D_{xy}^* = \frac{J_u - J_v}{2} \sin 2\alpha_0$ . Угол  $\alpha_0$  для этой формулы отсчитывается от оси u.

$$D_{xy}^* = \frac{5530 - 1600}{2} (-0,827) = -1626 \text{ см}^4;$$

операции по вычислению  $J_u$ ,  $J_v$  и  $\alpha_0$  произведены правильно.

Рассмотренное сечение имеет наибольшую сопротивляемость изгибу относительно оси u и наименьшую - относительно оси v.

### КОНТРОЛЬНАЯ ЗАДАЧА 3

Определить геометрические характеристики несимметричного сечения (рис. 3.5), составленного из двух прокатных профилей.

#### План решения задачи

1. Выписать из таблиц сортамента необходимые данные для заданных профилей.
2. Определить положение центра тяжести сечения.
3. Определить величины осевых и центробежного моментов инерции сечения относительно произвольных (удобно выбранных) центральных осей.
4. Вычислить величины главных центральных моментов инерции сечения.
5. Определить положение главных центральных осей инерции сечения.
6. Вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все оси и использованные в расчете размеры и расстояния в числах.

#### Данные к задаче 3

Номер строки	Схема сечения	Номера профиля	
		двутавра или швеллера	неравнобокого уголка
1	I	24	11/7/0,8
2	II	22	12,5/8/1,2
3	III	<u>20a</u>	10/6,3/0,8
4	IV	<u>14</u>	14/9/1,0
5	V	22a	12,5/8/1,0
6	<u>VI</u>	16	<u>16/10/0,9</u>
7	<u>VII</u>	<u>24a</u>	<u>11/7/0,65</u>
8	VIII	18	18/11/1,0
9	IX	16a	9/5,6/0,8
0	X	20	10/6,3/1,0
	<b>В</b>	<b>б</b>	<b>в</b>

### КОНТРОЛЬНАЯ ЗАДАЧА За

Определить геометрические характеристики сечения (рис.3.6), составленного из прокатного профиля (двутавра, швеллера или уголка) и прямоугольного листа.

#### План решения задачи

1. Выписать из таблицы сортамента необходимые данные для прокатного профиля.
2. Вычислить моменты инерции и площадь сечения листа.
3. Определить положение центра тяжести сечения.
4. Определить величины осевых моментов инерции сечения относительно центральных осей (удобно выбранных).
5. Выявить главные центральные оси сечения.
6. Записать величины главных центральных моментов инерции сечения.
7. Вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нём все оси и использованные в расчёте размеры и расстояния в числах.

#### Данные к задаче За

Номер строки	Схема сечения	Номер профиля			Размеры листа	
		двутавра	швеллера	уголка	h, см	в, см
1	I	I4	I4	9/5,6/0,6	21	1,1
2	II	I6	I6	10/6,3/0,6	22	1,2
3	III	I8	I8	10/6,3/0,8	23	1,3
4	IУ	I8a	I8a	11/7,0/0,7	24	1,4
5	У	20	20	12,5/8/0,7	25	0,5
6	УI	20a	20a	12,5/8/0,8	26	0,6
7	УII	22	22	12,5/8/1,0	27	0,7
8	УIII	22a	22a	14/9/0,8	28	0,8
9	IX	24	24	14/9/1,0	29	0,9
0	X	24a	24a	16/10/0,9	30	1,0

	в	б	в	в
--	---	---	---	---

## Р а з д е л 4

### КРУЧЕНИЕ

При кручении в поперечном сечении стержня возникает крутящий момент  $T$ . Нагрузкой при кручении являются скручивающие моменты  $T_e$ , действующие относительно продольной оси стержня. Крутящий момент определяется методом сечений и равен алгебраической сумме внешних (скручивающих) моментов, действующих на рассматриваемую часть стержня  $T = \sum T_e$ . Момент считается положительным, если направлен против часовой стрелки (при взгляде со стороны сечения).

При кручении в поперечном сечении стержня возникают касательные напряжения  $\tau$ . В стержне круглого поперечного сечения наибольшие напряжения возникают по контуру сечения. Условие прочности имеет следующий вид:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} \leq R_s,$$

где  $T$  — крутящий момент (в Н.м);  
 $W_p$  — полярный момент сопротивления (в м<sup>3</sup>);  
 $R_s$  — расчетное сопротивление материала на срез (в Па).

Деформация при кручении характеризуется углом закручивания. Условие жесткости имеет вид:

$$\theta_{max} = \frac{T}{G J_p} \leq \theta_{adm},$$

где  $G$  — модуль упругости материала при сдвиге (в Па);  
 $J_p$  — полярный момент инерции сечения (в м<sup>4</sup>);  
 $\theta_{adm}$  — допускаемый угол закручивания (в радианах на метр).

Диаметр стержня, работающего на кручение, определяется из двух условий: условия прочности и жесткости. Во внимание берется больший диаметр. Окончательное значение его принимается согласно стандарту.

**Пример 4.1.** Определить диаметры поперечных сечений участков стержня (вала) (рис. 4.1, а), если  $R_s = 100$  МПа, а  $\theta_{adm} = 1,5^\circ/\text{м}$ . Построить эпюру углов поворота сечений.

$$\theta_{adm} = 1,5^\circ/\text{м} = 1,5 \cdot \frac{3,14}{180} = 26,2 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}.$$

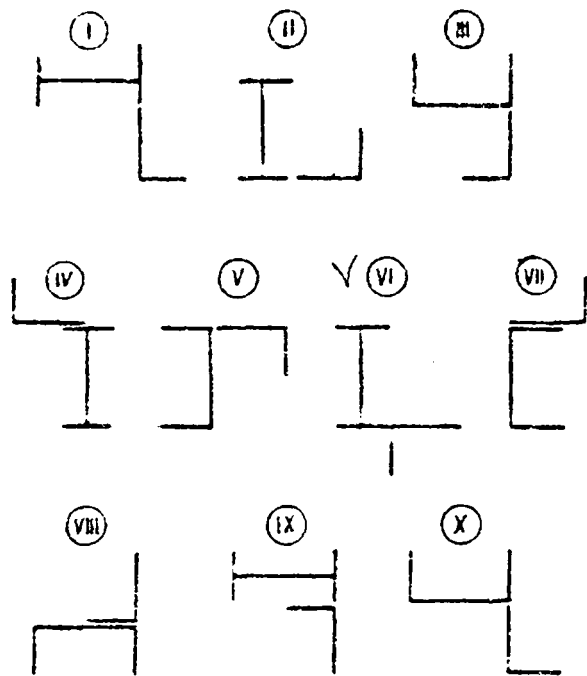


Рис. 3.5. Схемы сечений к задаче 3.

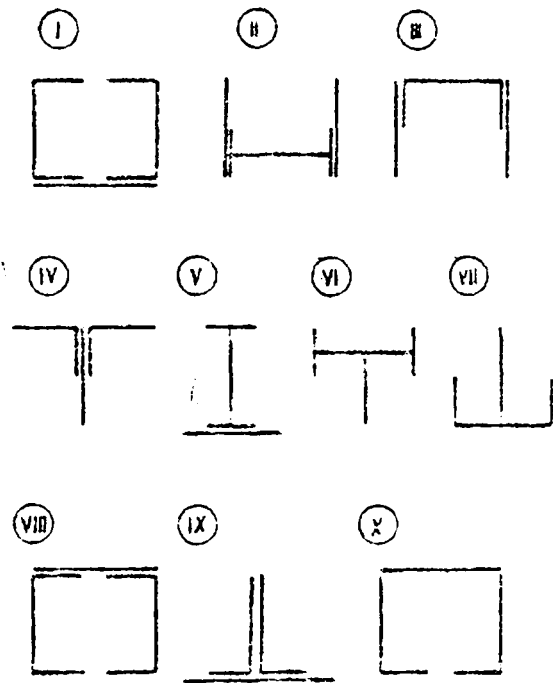


Рис. 3.6. Схемы сечений к задаче 3а.

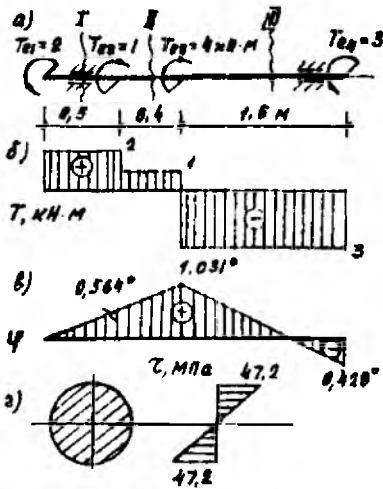


Рис. 4.1

Должно выполняться

условие равновесия

$$\Sigma M_x = 0.$$

$$\Sigma M_x = T_{e1} - T_{e2} - T_{e3} + T_{e4} = 2 - 1 - 4 + 3 = 0.$$

Для определения крутящих моментов  $T$  на участках стержня будем рассматривать левую часть его. Участок I:  $T_1 = T_{e1} = 2$  кН·м.

$$\text{Участок II: } T_2 = T_{e1} - T_{e2} = 2 - 1 = 1 \text{ кН·м.}$$

Значение  $T_3$  определите самостоятельно ( $T_3 = -3$  кН·м). По вычисленным значениям  $T$  строится эпюра (рис. 4.1.Б).

Преобразуем условия

прочности и жесткости к виду, удобному для определения диаметра стержня. Условие прочности

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3} \leq R_s,$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi R_s}}.$$

Условие жесткости

$$\theta_{\max} = \frac{T}{G J_p} = \frac{32T}{G \pi d^4} \leq \theta_{adm},$$

откуда

$$d = \sqrt[4]{\frac{32T}{G \pi \theta_{adm}}}.$$

На первом участке:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = \sqrt[3]{0,102 \cdot 10^{-3}} = 0,467 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 4,67 \text{ см};$$

$$d_1^r = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 2 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 26,2 \cdot 10^{-3}}} = \sqrt[4]{0,0972 \cdot 10^{-4}} = 0,558 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 5,58 \text{ см}.$$

Согласно стандарту принимаем  $d_1 = 6$  см.

На втором участке:

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{16,1 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 0,371 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 3,71 \text{ см},$$

$$d_2' = \sqrt[4]{\frac{32,1 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 26,2 \cdot 10^{-3}}} = 0,470 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 4,70 \text{ см}.$$

Принимаем  $d_2 = 5 \text{ см}$ .

Третий участок для самостоятельного решения ( $d_3 = 5,35 \text{ см}$ ,  $d_3' = 6,18 \text{ см}$ , принимаем  $d_3 = 7 \text{ см}$ ).

Если стержень имеет постоянное сечение, то диаметр его определяется исходя из максимального значения  $T_{max}$ .

Определяем деформации участков стержня:

$$\varphi_1 = \frac{T_1 l_1}{G J_{P1}} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 6^4 \cdot 10^{-8}} = 9,83 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,564^\circ.$$

Значение  $\varphi$  на других участках следующие:

$$\varphi_2 = 8,15 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 0,467^\circ; \quad \varphi_3 = -26,5 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -1,46^\circ.$$

Углы поворота перемещения характерных сечений (границ участков) равны:

$$\varphi_A = 0; \quad \varphi_B = \varphi_1 = 0,564^\circ; \quad \varphi_C = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,564 + 0,467 = 1,031^\circ.$$

Значение  $\varphi_D$  определите самостоятельно ( $\varphi_D = -0,429^\circ$ ).

Эпюра углов поворота сечений показана на рис. 4.1 в.

Вычислим максимальные напряжения на участках стержня:

$$\tau_{1,max} = \frac{T}{W_{P1}} = \frac{16 T_1}{\pi d_1^3} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 6^3 \cdot 10^{-6}} = 47,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{2,max} = 40,8 \text{ МПа} < R_s; \quad \tau_{3,max} = 44,6 \text{ МПа} < R_s.$$

Вычисленные значения диаметров участков стержня обеспечивают его прочность и жесткость.

#### КОНТРОЛЬНАЯ ЗАДАЧА 4

Произвести расчет стального вала круглого постоянного поперечного сечения (рис. 4.2).

#### План решения задачи

1. Построить эпюру крутящих моментов, вычислив их значения на участках вала.

2. Определить диаметр вала из условия прочности, приняв окончательное значение его согласно стандарту ( $d = 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 170, 200$  мм).

3. Вычислить наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении вала и построить эпюру касательных напряжений!

4. Вычислить деформации на участках вала и построить эпюру углов поворота сечений.

5. Проверить жесткость вала, если  $\vartheta_{adm} = 2^\circ/\text{м}$ .

Примечание: В схемах 2, 4, 6, 8 и 10:

а) предварительно определить скручивающий момент  $T_0$  ;

б) при построении эпюры углов поворота  $\varphi$  крайнее левое сечение вала принять условно за неподвижное.

Данные к задаче 4

Номер строки	Схема	Расстояния, м			Моменты, кН·м			$R_s,$ МПа
		$a$	$b$	$c$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	
1	I	1,1	2,1	1,1	2,1	4,1	1,1	80
2	II	1,2	0,2	1,2	3,2	6,2	2,2	65
3	III	0,3	1,3	1,3	2,3	5,3	1,3	75
4	IV	1,4	1,4	0,4	3,4	2,4	1,4	60
5	V	0,5	1,5	1,5	2,5	4,5	2,5	75
6	VI	1,6	0,6	1,6	2,6	6,6	0,6	70
7	VII	0,7	1,7	0,7	1,7	5,7	1,7	65
8	VIII	1,8	0,8	1,8	2,8	4,8	0,8	70
9	IX	0,9	1,9	0,9	1,9	5,9	0,9	80
0	X	1,0	1,0	2,0	2,0	6,0	1,0	60

	в	а	б	в	в	б	в	в
--	---	---	---	---	---	---	---	---





Рис. 4.2. Схемы к задаче 4.

## Раздел 5

### ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

При плоском поперечном изгибе в поперечном сечении балки возникает поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ , которые определяются методом сечения.

Чтобы определить поперечную силу в сечении балки, нужно взять алгебраическую сумму проекций на плоскость сечения всех сил, действующих на рассматриваемую часть балки.

Чтобы определить изгибающий момент в сечении балки, нужно взять алгебраическую сумму моментов относительно центра тяжести

этого сечения от всех сил, действующих на рассматриваемую часть балки.

Правило знаков при определении  $Q$  и  $M$  отличается от принятого при составлении уравнений статики и установлено следующим.

Если внешняя сила ( $F$ ,  $q$ ) стремится повернуть рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести сечения по ходу часовой стрелки, то в этом сечении возникает положительная поперечная сила; если против хода часовой стрелки - отрицательная (рис. 5.1 а).

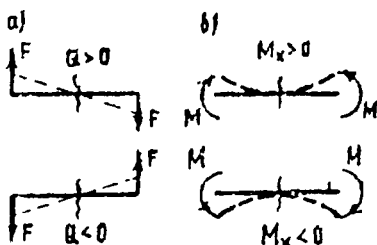


Рис. 5.1

Рис. 5.1

Если внешняя сила ( $P$ ,  $q$ ,  $M$ ) стремится изогнуть рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести сечения выпуклостью вниз, то в этом сечении возникает положительный момент; если выпуклостью вверх - отрицательный (рис. 5.1 б).

Найденные при изгибе нормальные напряжения распределяются по высоте сечения неравномерно, вызывая растяжение одной части и сжатие другой.

Условие прочности по нормальным напряжениям для балки любой формы поперечного сечения имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{J_x} y_{dan} \leq R,$$

где  $M_x$  - изгибающий момент в сечении балки (в Н.м);  
 $J_x$  - момент инерции поперечного сечения (в м<sup>4</sup>);  
 $y_{dan}$  - расстояние от нейтральной оси до опасной точки в поперечном сечении (в м).

Для балок, поперечные сечения которых симметричны относительно нейтральной оси, условие прочности преобразуется к виду:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq R,$$

где  $W_x$  - момент сопротивления поперечного сечения (в м<sup>3</sup>).

Вычисленные при изгибе касательные напряжения распределяются по сечению неравномерно, достигая максимального значения (в

большинстве случаев) на нейтральной оси.

Условие прочности по касательным напряжениям при изгибе имеет вид:

$$\tau_{\max}^{\nu} = \frac{Q \cdot S_{x, \max}'}{J_x \cdot b} \leq R_s,$$

где,  $Q$  - поперечная сила в сечении балки (в Н);

$S_{x, \max}'$  - статический момент полусечения относительно нейтральной оси (в м<sup>3</sup>);

$b$  - ширина слоя в сечении на нейтральной оси (в м).

При изгибе в крайних точках поперечного сечения балки имеет место линейное напряженное состояние, а в остальных - плоское. В случае плоского напряженного состояния проверка прочности ведется по гипотезам прочности. Главные напряжения и положение главных плоскостей определяются по формулам:

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} [\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}] \text{ и } \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma},$$

где  $\sigma$  и  $\tau$  - напряжения в опасной точке сечения балки.

Условная прочность по III и IV гипотезам имеет вид:

$$\sigma_{\text{ред}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R \text{ и } \sigma_{\text{ред}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} \leq R.$$

Следует заметить, что проверка прочности балки по гипотезам прочности (полная проверка прочности) проводится лишь для сечений типа "двутавр" в точке приложения полка к стенке.

**Пример 5.1.** Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  для двухопорной балки (рис. 5.2 а).

Определяем опорные реакции:

$$\sum X = -A_x = 0; \quad A_x = 0.$$

$$\sum M_A = B_y \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - M - F \cdot 6 = 0; \quad B_y = 29,6 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -A_y \cdot 5 + q \cdot 3 \cdot 3,5 - M - F \cdot 1 = 0; \quad A_y = 15,4 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = A_y - q \cdot 6 + B_y - F = 0;$$

$$15,4 - 10 \cdot 3 + 29,6 - 15 = 0 \quad - \text{реакции найдены верно.}$$

По условиям нагружения балка имеет три участка. В пределах I участка произвольно напомним сечение. Для составления выражений  $Q$  и  $M$  будем рассматривать левую часть балки. На эту часть балки действует реакция  $A_y$  и часть распределенной нагрузки  $q$ . Реакция  $A_y$  стремится повернуть рассматриваемую часть балки отно-

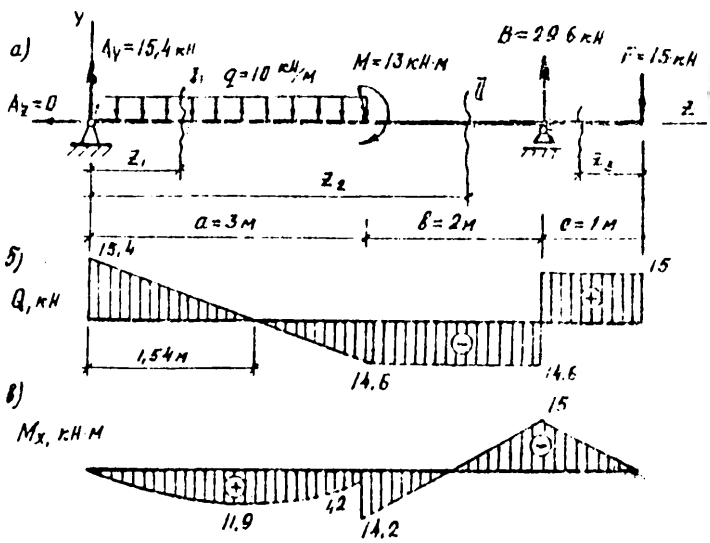


Рис. 5.2

сительно центра тяжести сечения по ходу часовой стрелки, а нагрузка  $q$  - против. Выражение поперечных сил имеет вид:

$$Q = A_y - q x_1 \quad (\text{линейная зависимость}).$$

Реакция  $A_y$  стремится изогнуть рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести сечения выпуклостью вниз, а нагрузка

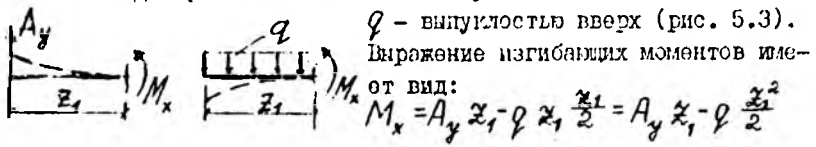


Рис. 5.3 (квадратная зависимость).

На первом участке  $0 \leq x_1 \leq 3 \text{ м}$ .

- При  $x_1 = 0$ ,  $Q = 15,4 \text{ кН}$ ,  $M_x = 0$
- При  $x_1 = 3 \text{ м}$ ,  $Q = 15,4 - 10 \cdot 3 = -14,6 \text{ кН}$ ;
- $M_x = 15,4 \cdot 3 - 10 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Поскольку изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы, для построения эпюры  $M_x$  необходимо вычислить значение его еще хотя бы в одном сечении. Представляет интерес сечение, в котором  $Q = 0$ . Найдем значение  $x_0$ .

$$Q = A_y - q x_0 = 0, \text{ откуда } x_0 = \frac{A_y}{q} = \frac{15,4}{10} = 1,54 \text{ м}$$

$$\text{При } x_1 = 1,54 \text{ м, } M_x = 11,9 \text{ кН.м.}$$

Наметим сечение 2 на участке II, рассмотрим левую часть балки.

$$3 \text{ м} \leq x_2 \leq 5 \text{ м}; Q = A_y - qa; M_x = A_y x_2 - qa \left( x_2 - \frac{a}{2} \right) + M$$

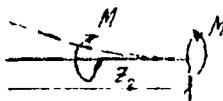


Рис. 5.4

Нагрузка  $M$  стремится изогнуть рассматриваемую часть балки выпуклостью вниз (рис. 5.4). В обоих случаях зависимость линейная.

$$\text{При } x_2 = 3 \text{ м, } Q = -14,6 \text{ кН, } M_x = 14,2 \text{ кН.м.}$$

$$\text{При } x_2 = 5 \text{ м, } Q = -14,6 \text{ кН, } M_x = 15 \text{ кН.м.}$$

Для определения  $Q$  и  $M_x$  на 3 участке целесообразно рассматривать правую часть балки. Абсцисса отсчитывается от сечения Д.

$$0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}; Q = F = 15 \text{ кН}; M_x = -F \cdot x_3$$

$$\text{При } x_3 = 0, M_x = 0; \text{ при } x_3 = 1 \text{ м, } M_x = -15 \text{ кН.м.}$$

По вычисленным значениям  $Q$  и  $M_x$  строятся соответствующие эпюры в удобном масштабе (рис. 5.2 б, в). При расчете строительных конструкций принято строить эпюры  $M$  со стороны растянутых волокон, т.е. откладывать положительные значения вниз от оси балки. При выполнении контрольных работ обязательно придерживаться этого правила.

Из эпюр следует, что абсолютные максимальные значения внутренних сил следующие:  $Q_{\max} = 15,4 \text{ кН}; M_{\max} = 15 \text{ кН.м.}$

Обратим внимание на следующие характерные особенности эпюр  $Q$  и  $M_x$ . На участке балки, где  $q \neq 0$ , эпюра  $Q$  очерчена наклонной прямой, а эпюра  $M_x$  — параболой. На участке балки, где  $q = 0$ , эпюра  $Q$  прямая, параллельная оси, эпюра  $M_x$  — наклонная прямая. В сечении балки, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре  $Q$  имеется ступенчатка (скачок) на величину этой силы. В сечении балки, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре  $M_x$  образуется скачок, равный этому моменту. В том сечении балки, где  $Q = 0$ , на

эпюре  $M$  имеется экстремум.

Изучив закономерность изменения  $Q$  и  $M_x$  на участках балки в зависимости от характера нагрузки, эпюры можно построить не по их уравнениям, а по отдельным ординатам, вычисленным для характерных сечений. Характерными являются сечения границ участков балки, а также те, где  $Q = 0$ .

**Пример 5.2.** Построить эпюры  $Q$  и  $M_x$  для консольной балки (рис. 5.5 а).

Ординаты эпюр будем определять лишь для характерных сечений. Поскольку балка имеет свободный конец, для определения  $Q$  и  $M_x$  можно рассматривать правую часть ее и не определять опорные реакции.

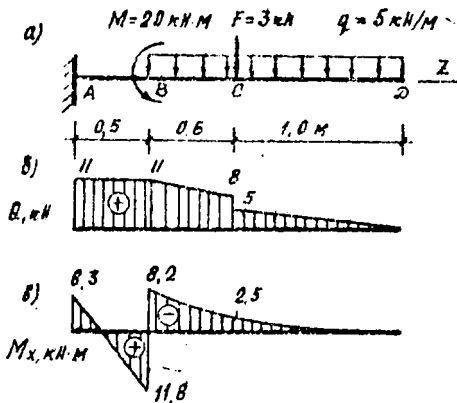


Рис. 5.5

**Сечение Д.** Справа от сечения нет сил. Значит  $Q = 0$ ,  $M_x = 0$ .

**Сечение С.** В этом сечении приложена сила  $F$ , отчего на эпюре  $Q$ , должен быть скачок. Поэтому надо вычислить два значения  $Q$ , взяв одно сечение немного правее силы  $F$ , а другое - левее.

$$Q_{\text{П}} = 5 \cdot 1 = 5 \text{ кН};$$

$$Q_{\text{Л}} = 5 \cdot 1 + 3 = 8 \text{ кН};$$

$$M_x = -5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -2,5 \text{ кН.м.}$$

**Сечение В.** Здесь приложен момент  $M$ . Вычисляем два значения ординаты  $M_x$ :

$$Q = 5 \cdot 1,6 + 3 = 11 \text{ кН};$$

$$M_{\text{П}} = -5 \cdot 1,6 \cdot \frac{1,6}{2} - 3 \cdot 0,6 = -8,2 \text{ кН.м};$$

$$M_{\text{Л}} = -5 \cdot 1,6 \cdot \frac{1,6}{2} - 3 \cdot 0,6 + 20 = 11,8 \text{ кН.м.}^2$$

**Сечение А.**  $Q = 5 \cdot 1,6 + 3 = 11 \text{ кН};$

$$M_x = -5 \cdot 1,6 \left( 0,5 + \frac{1,6}{2} \right) - 3 \cdot 1,1 + 20 = -6,3 \text{ кН.м.}$$

Эпюры  $Q$  и  $M_x$  показаны на рис. 5.5 б, в. Для рассмотренной балки:  $Q_{\text{max}} = 11 \text{ кН}$ ,  $M_{\text{max}} = 11,8 \text{ кН.м}$ . Ординаты эпюр в сечении А

реакции соответствующими опорным реакциям. Проверьте это.

**Пример 5.3.** Определите размеры следующих типов поперечных сечений стальной балки: прямоугольного ( $h/b = 2$ ), круглого, двутаврового и состоящего из двух швеллеров (рис. 5.6 а). Нормативная нагрузка  $q^H = 10 \text{ кН/м}$ , коэффициент перегрузки  $n_F = 1,1$ . Расчетные сопротивления:  $R_y = 210 \text{ МПа}$ ,  $R_s = 130 \text{ МПа}$ . Проверить прочность по касательным напряжениям. Расчетная нагрузка

$$q = q^H n_F = 10 \cdot 1,1 = 11 \text{ кН/м}.$$

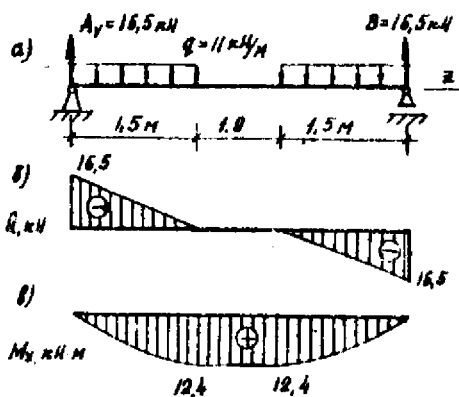


Рис. 5.6

Вследствие симметрии нагрузки реакции равны  $A_y = B_y = 11 \cdot 1,5 = 16,5 \text{ кН}$ . Вычисляем ординаты эпюр  $Q$  и  $M_x$ .

Сечение А.

$$Q = 16,5 \text{ кН}, M_x = 0.$$

Сечение С.

$$Q = 16,5 - 11 \cdot 1,5 = 0$$

$$M_x = 16,5 \cdot 1,5 - 11 \cdot \frac{1,5^2}{2} =$$

$$= 12,4 \text{ кН·м}.$$

Сечения Д и В рассмотреть самостоятельно.

Из эпюр  $Q$  и  $M_x$ , показанных на рис. 5.6 в, б —

$$Q_{\max} = 16,5 \text{ кН}, M_{\max} =$$

$$= 12,4 \text{ кН·м}.$$

Требуемый момент сопротивления из условия прочности по нормальным напряжениям

$$W_x \geq \frac{M_x}{R} = \frac{12,4 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,0591 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 59,1 \text{ см}^3.$$

а). Прямоугольное сечение

$$W_x = \frac{b h^2}{6} = \frac{h \cdot h^2}{2 \cdot 6} = 59,1 \text{ откуда } h = 8,91 \text{ см} \approx 9 \text{ см},$$

$$b = \frac{h}{2} = 4,5 \text{ см}$$

$$\text{Площадь } A = 9 \cdot 4,5 = 40,5 \text{ см}^2.$$

Наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{3 \cdot 16,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 40,5 \cdot 10^{-4}} = 0,611 \cdot 10^7 \text{ Па} = 6,11 \text{ МПа} < R_s$$

б). Круглое сечение

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 59,1, \quad \text{откуда } d = 8,44 \text{ см. Принимаем } Q_{\text{см}}, R = 63,6 \text{ см}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{4 \cdot 16,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 63,6 \cdot 10^{-4}} = 0,346 \cdot 10^7 \text{ Па} = 3,46 \text{ МПа} < R_s$$

в). Двутавровое сечение

Проверим I № 12. Из таблиц сортамента:  $W_x = 58,4 \text{ см}^3$ ;

$$J_x = 350 \text{ см}^4; S_x = 33,7 \text{ см}^3; A = 14,7 \text{ см}^2; d = 4,8 \text{ мм.}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{12,4 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 0,212 \cdot 10^9 \text{ Па} = 212 \text{ МПа}$$

Перенапряжение составляет 0,95% (допустимо до 3%).

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S'_{x, \max}}{b \cdot J_x} = \frac{16,5 \cdot 10^3 \cdot 33,7 \cdot 10^{-6}}{4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 350 \cdot 10^{-8}} = 0,331 \cdot 10^8 \text{ Па} = 33,1 \text{ МПа}$$

Ширина нейтрального слоя у двутавра равна толщине стенки

( $b = d$ ).

Принимаем двутавр I № 12.

г). Сечение из двух швеллеров. Для одного швеллера требуется  $W_x = \frac{59,1}{2} = 29,6 \text{ см}^3$ .

Проверим швеллер [ № 10.

Для него:  $W_x = 34,8 \text{ см}^3$ ,  $J_x = 174 \text{ см}^4$ ,  $S'_x = 20,4 \text{ см}^3$ ,  
 $d = 4,5 \text{ мм}$ ,  $A = 10,9 \text{ см}^2$ .

$$\sigma_{\max} = \frac{12,4 \cdot 10^3}{34,8 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 0,178 \cdot 10^9 \text{ Па} = 178 \text{ МПа}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S'_{x, \max}}{b \cdot J_x} = \frac{16,5 \cdot 10^3 \cdot 20,4 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 174 \cdot 10^{-8}} = 0,215 \cdot 10^8 \text{ Па} = 21,5 \text{ МПа}$$

Принимаем два [ № 10.

Заметим, что самой экономичной из рассмотренных форм сечений балки является двутавр, имеющий наименьшую площадь поперечного сечения. Другие формы сечений по сравнению с двутавром имеют большую площадь:

круглое в  $\frac{63,6}{14,7} = 4,33$ ; прямоугольное в  $\frac{40,5}{14,7} = 2,76$ ;  
 из двух швеллеров в  $\frac{10,9 \cdot 2}{14,7} = 1,48$  раза.



Пример 5.4. Определить наибольшую расчетную нагрузку для чугунной балки (рис. 5.7 а).

Расчетные сопротивления: на растяжение  $R_t = 45$  МПа, на сжатие  $R_c = 160$  МПа.

Определение центра тяжести и момента инерции сечения не приводятся ( $J_x = 880$  см<sup>4</sup>).

Построение эскиз Q и M, показанных на рис. 5.7 б, в, проведите самостоятельно.

Согласно эпюре  $M_x$  опасным является сечение посредине пролета балки с растянутыми нижними волокнами. Поскольку балка изготовлена из крупкого материала, лучше работающего на сжатие, чем на растяжение, сечение ее следует расположить так, как показано на рис. 5.8.

В этом случае наибольшие нормальные напряжения, возникающие в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, окажутся в сжатой зоне.

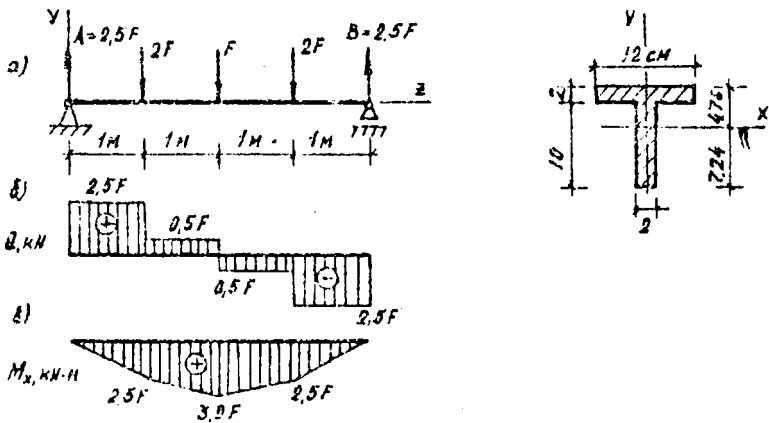


Рис. 5.7

Условие прочности (опасная точка Д):

$$\sigma_D = \frac{M_{\max}}{J_x} \cdot y_D \leq R_t.$$

Из этого условия наибольший изгибающий момент, который может воспринять балка, равен

$$M_{\max} \leq \frac{R_t \cdot J_x}{y_0} = \frac{45 \cdot 10^6 \cdot 880 \cdot 10^{-8}}{4,76 \cdot 10^{-2}} = 8320 \text{ Н.м.}$$

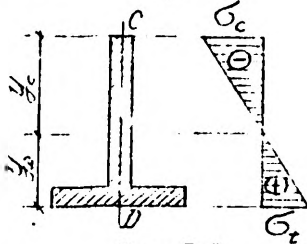


Рис. 5.8

Максимальный момент, создаваемый нагрузкой, равен  $3,0 F$ . По условию  $3,0 F \leq 8320$  наибольшая расчетная нагрузка равна  $F \leq 2773 \text{ Н} = 2,77 \text{ кН}$ .

Принимаем  $F = 2,7 \text{ кН}$ .

Вычислим наибольшие напряжения в зонах растяжения и сжатия.

$$\sigma_t = \frac{M_{\max}}{J_x} = y_x = \frac{3 \cdot 2,70 \cdot 10^3}{880 \cdot 10^{-8}} \cdot 4,76 \cdot 10^{-2} = 43,8 \text{ МПа} < R_t.$$

$$\sigma_c = \frac{M_{\max}}{J_x} y_c = \frac{3 \cdot 2,70 \cdot 10^3}{880 \cdot 10^{-8}} \cdot 7,24 \cdot 10^{-2} = 0,0666 \cdot 10^9 \text{ Па} = 66,6 \text{ МПа} < R_c.$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 5.8.

#### Определение перемещений при изгибе

Перемещения при изгибе характеризуются прогибом  $V$  и углом поворота поперечного сечения  $\theta$ , величины которых определяются из обобщенных уравнений изогнутой оси балки.

Уравнение прогиба имеет вид:

$$EJ \theta = [ \gamma V_0 + E \gamma \theta_0 ] x + \sum M \frac{(x-a)^2}{2} + \sum F \frac{(x-b)^3}{6} + \sum q \frac{(x-c)^4}{24},$$

где  $V_0, \theta_0$  - прогиб и угол поворота сечения в начале координат;

$a, b$  - расстояния от начала координат до сечения, в котором приложен внешний силовой фактор ( $F$  или  $M$ );

$c$  - расстояние от начала координат до начала распределенной нагрузки  $q$ ;

$x$  - абсцисса рассматриваемого сечения.

Начало координат назначается в центре тяжести крайнего левого сечения балки. Начальные параметры  $V_0$  и  $\theta_0$  определяются из условий на опорах.

Пример 5.3. Определить прогибы в характерных сечениях балки (рис. 5.9 а) и построить изогнутую ось ее.

Произвести полную проверку прочности балки, если коэффициент перегрузки  $n_p = 1,2$ .

Деформации балки определяются от нормативной нагрузки, а проверка прочности ведется по расчетной нагрузке.

Построение эпюр  $Q$  и  $M$ , а также подбор сечения балки производите самостоятельно. (Принимается  $I_{x, \text{н}} \text{ с } W_x = 109 \text{ см}^3$ ,

$$J_x = 873 \text{ см}^4, S_x = S_{x, \text{max}} = 62,3 \text{ см}^3 \text{ и } d = 5 \text{ мм}.$$

Начало координат помещаем в крайнем левом сечении балки (или опоре А). Распределенную нагрузку  $q$  доводим до конца балки и на этом участке показываем компенсирующую (уравновешивающую) нагрузку.

Составим уравнение прогибов балки от нормативных нагрузок

$$EY = EY_0 + EY\theta_0 x + A_y \frac{x^3}{6} - M^0 \frac{(x-1)^2}{2} - q^0 \frac{(x-1)^4}{24} + B_y \frac{(x-3)^3}{6} + q^0 \frac{(x-3)^4}{24} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{matrix}$$

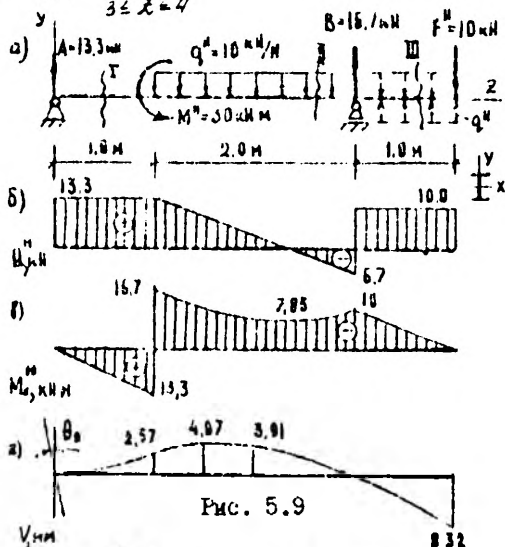


Рис. 5.9

Рассматриваемая балка имеет три участка нагружения. В уравнении прогибов отмечены границы участков. Слагаемые уравнения от соответствующего внешнего фактора имеют такой же знак, как и при определении изгибающего момента.

Начальные параметры  $Y_0$  и  $\theta_0$  определяются из условий, что в опорных сечениях балки прогибы равны нулю.

При  $x = 0$  (I участок)

$$EY_0 = EY_0 + EY\theta_0 \cdot 0 + 13,3 \frac{0^3}{6} = 0, \quad Y_0 = 0.$$

При  $Z = 3$  м (2 участок)

$$EJ\theta_0 = EJ\theta_0 \cdot 3 + 13,3 \frac{3^3}{6} - 30 \frac{(3-1)^2}{2} - 10 \frac{(3-1)^4}{24} = 0,$$

откуда  $EJ\theta_0 = 2,27 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$ , а  $\theta_0 = \frac{2,27 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 1,30 \cdot 10^{-3}$  рад.

Положительное значение  $\theta_0$  откладывается против хода часовой стрелки. (рис. 5.9, 2)

Определим прогибы в характерных сечениях балки, при  $Z = 1,0$  м,  $EJv = 2,27 \cdot 1 + 13,3 \frac{1^3}{6} = 4,49 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$ , а прогиб

$$v = \frac{4,49 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,57 \text{ мм}.$$

Величину прогиба при  $Z = 2,0$  м определите самостоятельно. (Получается:  $EJv = 6,82 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$ ,  $v = 3,91 \text{ мм}$ ).

В межопорной части балки максимальный прогиб будет примерно посередине пролета.

При  $Z = 1,5$  м,  $EJv_{max} = 7,11 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$ ,  $v_{max} = 4,07 \text{ мм}$ .

При  $Z = 4,0$  м,  $EJv = 2,27 \cdot 4 + 13,3 \frac{4^3}{2} - 30 \frac{(4-1)^2}{2} - 10 \frac{(4-1)^4}{24} +$   
 $+ 16,7 \frac{(4-3)^3}{6} + 10 \frac{(4-3)^4}{24} = -14,5 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$ , а  $v = \frac{14,5 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 873} =$   
 $= -8,32 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -8,32 \text{ мм}$ .

Изогнутая ось балки, показанная на рис. 5.9 г, представляет собой плавную кривую, очерченную на первом участке выпуклостью вниз (так как ординаты эпюры  $M$  лежат снизу оси), а на втором и третьем - выпуклостью вверх (так как ординаты эпюры  $M$  лежат сверху оси). Точка перегиба находится в сечении  $CM = 0$ .

Максимальный относительный прогиб в пролетной части балки равен

$$\frac{v_{max}}{l} = \frac{4,07}{3 \cdot 10^{-3}} = \frac{l}{737}, \text{ на конце консоли } -\frac{v_{max}}{l} = \frac{8,32}{1 \cdot 10^3} = \frac{l}{120}.$$

В некоторых случаях начало координат может оказаться на свободном конце балки. В этом случае  $v_0 \neq 0$  и  $\theta_0 \neq 0$ . Начало координат может оказаться и в опорном закреплении. Тогда  $v_0 = 0$  и  $\theta_0 = 0$ .

Полная проверка прочности балки осуществляется в сечении, где  $Q$  и  $M$  одновременно возможно большие. В опасном сечении ( $Z = 1,0$  м):  $Q^H = 13,3 \text{ кН}$ ,  $M^H = 16,7 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Опасной в сечении является

точка примыкания полки двутавра к стенке (т.С на рис. 5.10 а).

Напряжения в т.С от расчетной нагрузки

$$\sigma_c = -\frac{M}{J_x} \cdot y_c = \frac{16,7 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{873 \cdot 10^{-8}} \cdot 72,2 \cdot 10^{-3} = 1,66 \cdot 10^8 \text{ Па} = 166 \text{ МПа}$$

$$\tau_c = \frac{Q \cdot S_x'}{b \cdot J_x} = \frac{13,3 \cdot 10^3 \cdot 1,2 (81 \cdot 7,8 \cdot 76,1) \cdot 10^9}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 175 \cdot 10^6 \text{ Па} = 17,5 \text{ МПа}$$

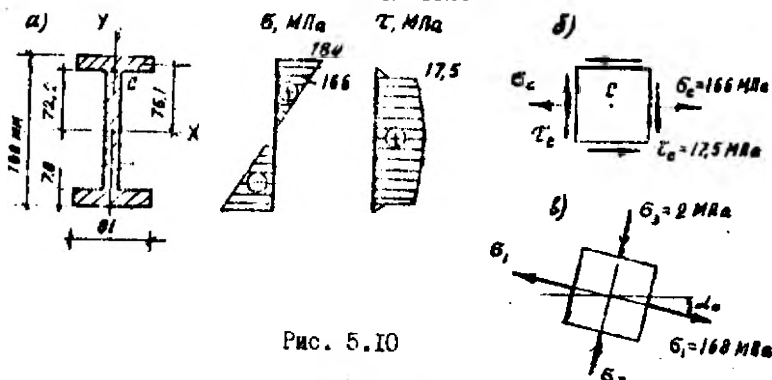


Рис. 5.10

Статический момент  $S_x'$  вычисляется для площади, расположенной выше точки С.

Положение главных площадок  $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_c}{\sigma_c} = -\frac{2 \cdot 17,5}{166}$

$$2\alpha_0 = -11^\circ 58', \quad \alpha_0 = -5^\circ 59', \quad = -0,211,$$

Отрицательное значение угла  $\alpha_0$  откладывается от оси X по ходу часовой стрелки. При этом получаем направление  $\sigma_{max}$ .

Главные напряжения в т.С.

$$\sigma_{max/min} = \frac{1}{2} [\sigma_c \pm \sqrt{\sigma_c^2 + 4\tau_c^2}] = \frac{1}{2} [166 \pm \sqrt{166^2 + 4 \cdot 17,5^2}] = \frac{1}{2} [166 \pm 170]$$

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = 168 \text{ МПа}, \quad \sigma_{min} = \sigma_3 = -2,0 \text{ МПа}.$$

На рис. 5.10 показан элемент, выделенный вокруг т.С с напряжениями ( $\sigma$ ) и главными ( $\sigma$ ) напряжениями.

Проверить прочность балки по третьей гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{зад}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 168 - (-2) = 170 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Наибольшее нормальное напряжение в крайних волокнах балки

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x,max}}{W_x} = \frac{16,7 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{109 \cdot 10^{-6}} = 0,184 \cdot 10^8 \text{ Па} = 184 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

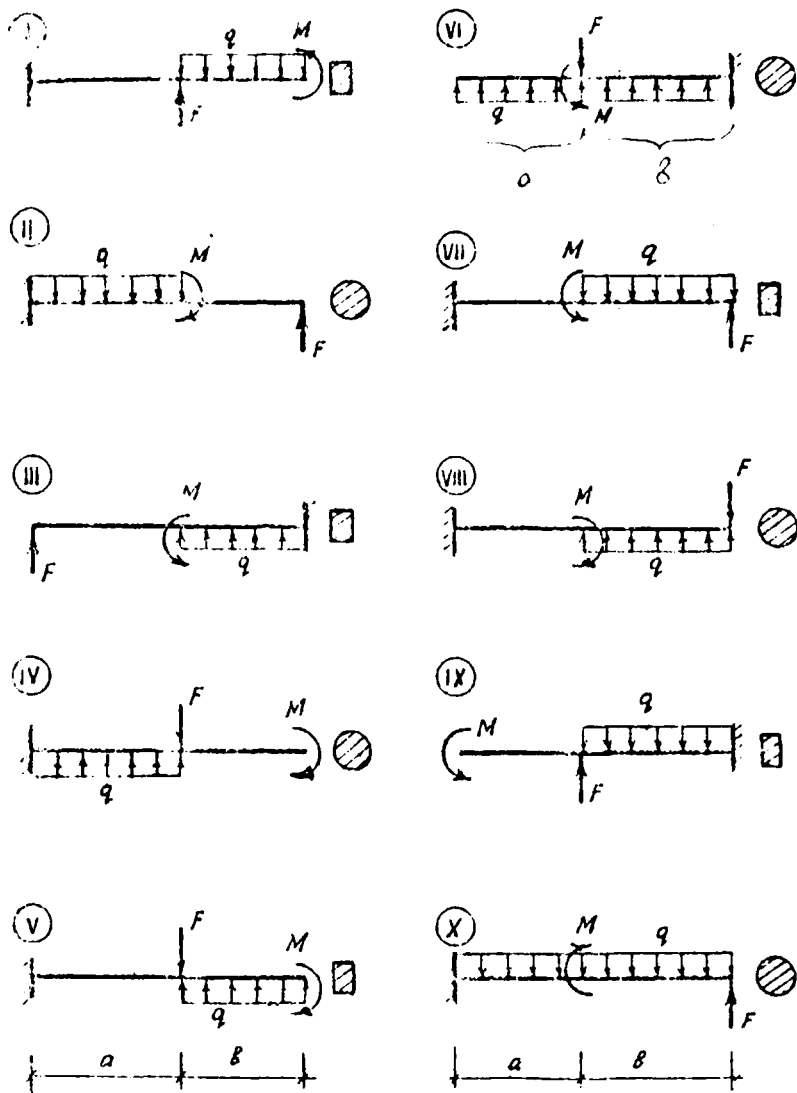


Рис. 5.11. Схемы балок к задаче 5.

Наибольшее касательное напряжение в нейтральном слое балки

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S'_x}{b \cdot y_x} = \frac{13,3 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 62,3 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 873 \cdot 10^{-8}} = 0,274 \cdot 10^8 \text{ Па} = 27,4 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}.$$

Таким образом, прочность балки по нормальным, касательным и главным напряжениям обеспечена.

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5

Произвести расчет на прочность консольной балки (рис. 5.11) нагруженной расчетной нагрузкой.

Материал балки - древесина с расчетными сопротивлениями: на изгиб  $R = 13 \text{ МПа}$ , на скалывание  $R_s = 2,4 \text{ МПа}$ .

#### План решения задачи

1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
2. Определить диаметр круглого сечения балки или стороны прямоугольного сечения при  $h/b = 2$ . (Вычисленные размеры сечения балки округлить до целого или 0,5 см).
3. Изобразить эпюры нормальных и касательных напряжений, вычислив их наибольшие значения.

#### Данные к задаче 5

Номер строки	Номер схемы	Нагрузки			Длина, м	
		F, кН	M, кН.м	q, кН/м	a	b
1	2	3,1	4,1	3,1	1,1	1,1
2	II	3,2	4,2	3,2	1,2	1,2
3	III	3,3	4,3	3,3	1,3	1,3
4	IV	3,4	4,4	3,4	1,4	1,4
5	V	3,5	4,5	3,5	1,5	1,5
6	VI	4,6	3,6	2,6	0,6	0,6
7	VII	4,7	3,7	2,7	0,7	0,7
8	VIII	4,8	3,8	2,8	0,8	(0,8)
9	IX	4,9	3,9	2,9	0,9	10,9
10	X	5,0	4,0	3,0	1,0	1,0
46	11	5,1	4,1	3,1	1,1	1,1

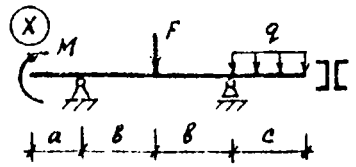
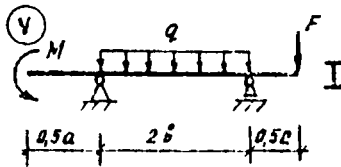
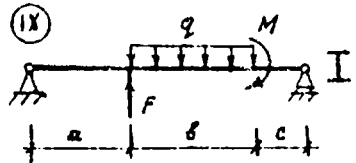
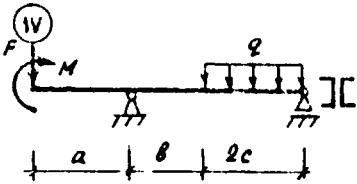
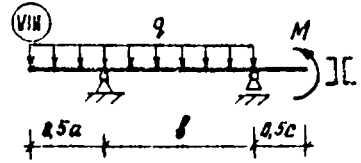
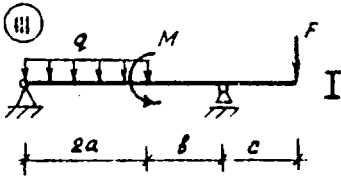
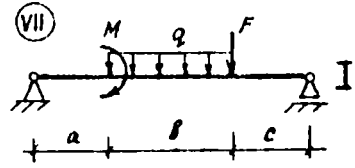
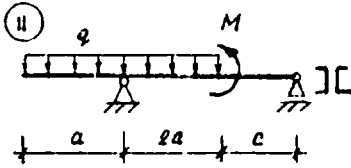
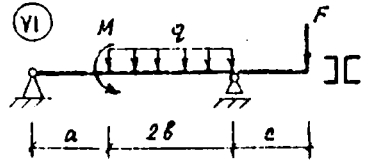
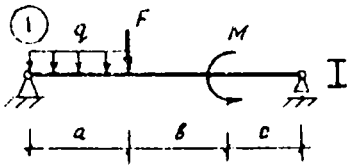


Рис. 5.12. Схемы балок к задаче 6.



1	2	3	4	5	6	7
9	IX	4,9	3,9	2,9	0,9	0,9
0	X	5,0	4,0	3,0	1,0	1,0
	в	а	б	в	б	в

### КОНТРОЛЬНАЯ ЗАДАЧА 6

Привести расчет на прочность двухопорной балки (рис. 6.1).  
 Нагрузка нормативная, коэффициент перегрузки  $k_F = 1,2$ .

Материал балки - сталь с расчетными сопротивлениями:  $R_y = 210$  МПа и  $R_s = 130$  МПа.

#### План решения задачи

1. Определить опорные реакции и проверить правильность определения их.
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
3. Подобрать номер профиля сечения.
4. Изобразить эпюры нормальных и касательных напряжений, вычислив их наибольшие значения.
5. В опасном сечении балки (где Q и M одновременно возможно больше) сделать полную проверку прочности:
  - а). вычислить  $\sigma$  и  $\tau$  в точке примыкания полки со стенкой;
  - б). вычислить главные напряжения и их направление;
  - в). проверить прочность по IV гипотезе прочности;
  - г). изобразить элемент, выделенный вокруг опасной точки, и показать действующие по его граням напряжения.

#### Данные к задаче 6

Номер строки	Схема	Нагрузки			Длины участков, м		
		$F^H$ , кН	$M^H$ , кН·м	$q^H$ , кН/м	а	в	с
1	2	3	4	5	6	7	8
I	I	10	10	10	1,1	1,1	1,1

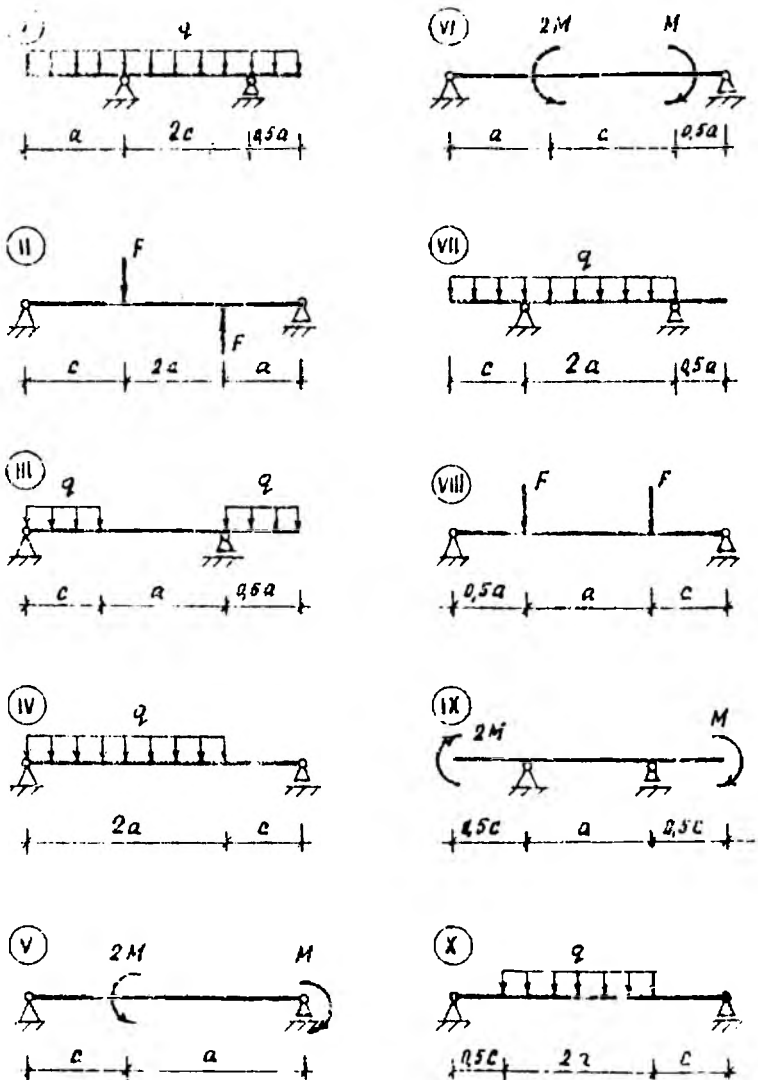


Рис 5.13. Схемы балок к задаче 7.

I	2	3	4	5	6	7	8
2	II	20	20	20	1,2	1,2	1,2
3	III	30	30	30	1,3	1,3	1,3
4	IV	40	40	40	1,4	1,4	1,4
5	V	50	50	50	1,5	1,5	1,5
6	VI	60	60	60	1,6	1,6	1,6
7	VII	70	70	70	1,7	1,7	1,7
8	VIII	80	80	80	1,8	1,8	(1,8)
9	IX	90	90	90	1,9	1,9	1,9
0	X	100	100	100	2,0	2,0	2,0
	в	а	б	в	а	б	в

### КОНТРОЛЬНАЯ ЗАДАЧА 7

Определить несущую способность балки (рис. 5.13, 5.14).

Материал балки - чугун с расчетными сопротивлениями: на сжатие  $R_c = 160$  МПа, на растяжение  $R_t = 45$  МПа.

#### План решения задачи

1. Построить эпюры  $Q$  и  $M$  в долях от нагрузки.
2. Определить центр тяжести сечения и момент инерции его.
3. Выбрав рациональное положение сечения балки по отношению к нагрузке, определить наибольшее расчетное значение ее ( $F$ ,  $Q$  или  $M$ ).
4. Вычислить наибольшие растягивающие и сжимающие нормальные напряжения в балке и построить их эпюру.

**Примечание.** Рациональным (по отношению к нагрузке) будет такое положение сечения балки, при котором растягивающие напряжения окажутся меньшими (по модулю), чем сжимающие.

Данные к задаче 7

Номер строки	Номер схемы	Тип сечения	Длины, м		Размеры сечения, см	
			a	c	h	b
1	I	I	2,1	1,1	40	20
2	II	2	2,2	1,2	60	32
3	III	3	2,3	1,3	44	24
4	IV	4	2,4	1,4	64	32
5	V	5	2,5	1,5	48	24
6	VI	6	2,6	1,6	36	16
7	VII	7	2,7	1,7	52	28
8	VIII	8	2,8	1,8	32	20
9	IX	9	2,9	1,9	56	28
0	X	10	3,0	2,0	28	16

	в	б	б	а	в
--	---	---	---	---	---

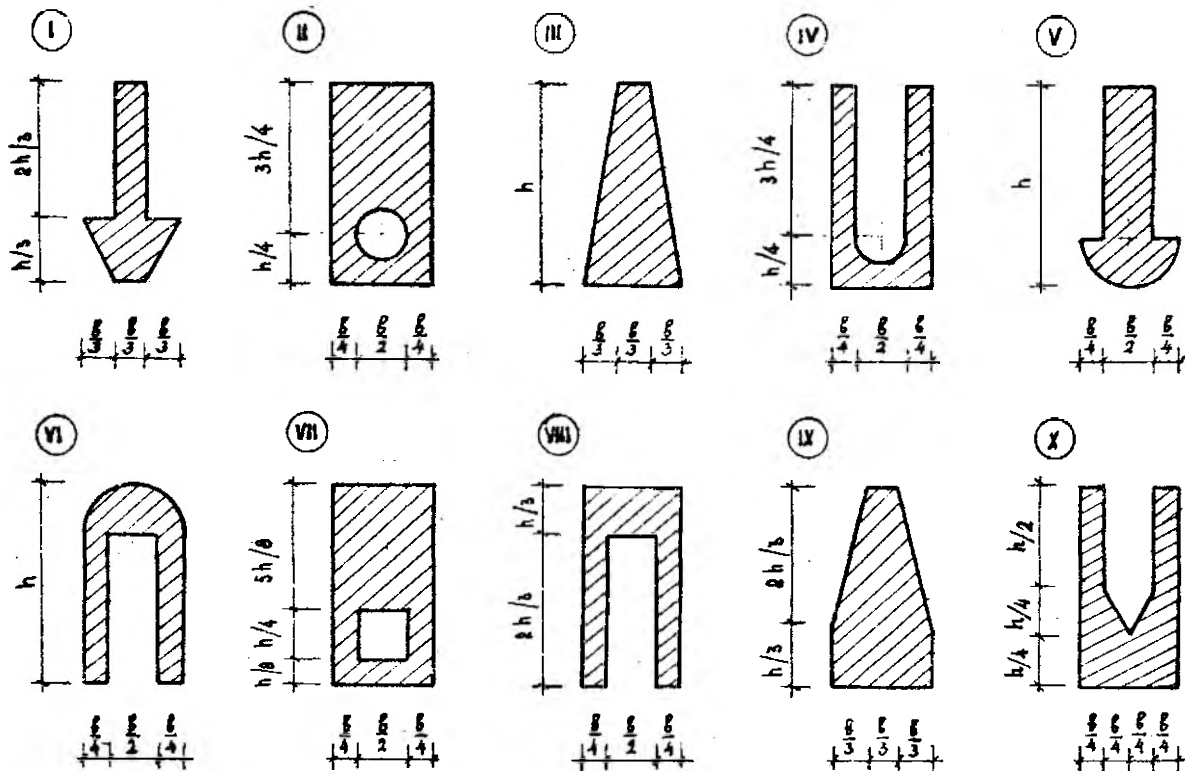


Рис. 5.14 СХЕМЫ РЕЧЕНИЙ К ЗАДАЧЕ 7.

## С о д е р ж а н и е

В в е д е н и е .....	3
Р а з д е л 1. Растяжение и сжатие .....	5
Р а з д е л 2. Сдвиг .....	13
Р а з д е л 3. Моменты инерции плоских сечений .....	20
Р а з д е л 4. Кручение .....	29
Р а з д е л 5. Плоский изгиб .....	33

Владимир Николаевич ЗАЯЦ  
Владимир Александрович ПЕНЬКЕВИЧ  
Анатолий Евгеньевич КОНЧИЦ  
Раиса Ивановна ФИРСОВА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к контрольным работам по сопротивлению материалов  
для студентов строительных специальностей  
заочного факультета

Часть I  
ПРОСТОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Редактор И.В. Иванова  
Корректор Н.Н. Лелея

---

Подписано в печать 29.05.86.

Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага т. № 2. Офс. печ.

Усл. печ. л. 3,26. Уч.-изд. л. 2,55. Тир. 300. Зак. 509. Бесплатно.

---

Отпечатано на ротационной машине БИИ. 220027, Минск, Ленинский пр., 65.