УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МИКРО-КОМПОЗИТА НА ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ

Ручан М.В., асп. **Чигарева Ю.А., Шукевич Т.В.**

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Деградация физико-механических свойств композитных материалов, из которых изготовлены многие детали современных приборов предшествует процессом появления повреждений в виде микро-нанотрещин. На стадии дегродации (скрытой фазе разрушения) идет процесс изменения свойств материала под действием нагрузок различного тепла, например, температурных. Изменение физико-механических свойств приводит к снижению эксплуатационных характеристик прибора, в частности точность измерения.

Рассмотрим стационарную задачу теплопроводности для микронеоднородной среды, в которой температура удовлетворяет уравнению теплопроводности [1]

$$\nabla_j \left(\lambda_{ij}^{(r)} \nabla_j T\right) = 0\,, \tag{1}$$

где $T = T\left(\bar{r}\right)$ – температура, $\lambda_{ij}\left(\bar{r}\right)$ – тензор теплопроводности неоднородной среды, $\bar{r} = \left(xy, z\right)$ – радиус-вектор.

Как известно, средняя температура $\left\langle T \right\rangle$ удовлетворяет уравнению [1]

$$\nabla_j \left(\lambda_{ij}^{*} \nabla_j \left\langle T \right\rangle\right) = 0 \tag{2}$$

где λ_{ij}^{*} – эффективный тензор теплопроводности.

Вычислению λ_{ij}^{*} посвящено много работ, в которых разработаны различные методы [1]. Одним из наиболее эффективных методов является метод самосогласованного поля [1], развитый для расчета различных физико-математических эффективных коэффициентов идеальных композитов, в которых имеется четко определенное количество компонент, с четко заданными свойствами и концентрацией. Плотность распределения λ, принимающего значения $\lambda_1,...\lambda_n$ и имеющие объемные концентрации $C_1,...C_n\,(C_1+...C_n)=1$ имеет вид

$$f\left(\lambda\right) = \sum_{i=1} C_i \delta\left(\lambda - \lambda_i\right) \tag{3}$$

Распределение (3) имеет математическое ожидание $f\left(\lambda\right) = \sum\limits_{i=1} C_i \lambda_i$, дисперсию $D\lambda = 0$. Для того, чтобы описать разброс свойств в процессе эксплуатации необходимо, чтобы $D\lambda = \psi\left(t\right)$, математическое ожидание в общем случае также изменялось во времени $\left\langle \lambda \right\rangle = \varphi\left(t\right)$. Плоскость вероятности в этом случае имеет вид $f\left(t, \lambda, \psi\left(t\right), \varphi\left(t\right)\right)$, если f имеет симметричный вид, для несимметричных распределений f зависит от моментов третьего и четвертого порядка.

Известно, что плотность распределения (3) обычно используется как начальное условие для плотности распределения, удовлетворяющее уравнению типа ФПК

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial\left(af\right)}{\partial \lambda} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(bf\right)}{\partial \lambda^2} \tag{4}$$

с начальным условием (3).

Как известно, уравнению (4) можно поставить в соответствие стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\lambda}{dt} = g\left(\lambda\right) + N\left(t\right) \tag{5}$$

На основе уравнений (5), (4) рассматриваются модели изменения коэффициента теплопроводности на коэффициент концентрации напряжений в микро композитных телах.

Согласно формуле Оделевского [3], эффективный коэффициент теплопроводности λ_0 n-компонентной среды находится из уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i = \langle\gamma\rangle = 0, \quad \gamma_i = \frac{\lambda_i - \lambda_0}{\lambda_i + 2\lambda_0},$$
$$\gamma = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda + 2\lambda_0}, \quad \sum_{i=0}^{n} c_i = 1. \tag{6}$$

Для изотропно неоднородной среды можем считать, что $\lambda = \lambda(x)$ и $\gamma = \gamma(x)$, причем на множестве возможных реализаций компонент $\lambda(x)$ –случайная функция. В каждой точке n-компонентной среды случайная величина, принимающая значения λ_i с вероятностью с (концентрация i-го компонента).

Формулу (6) можно рассматривать как вычисление среднего $\gamma = \gamma(\lambda)$ с плотностью распределения $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_i\delta(\lambda - \lambda_i)$:

$$\langle\gamma\rangle = \int \gamma(\lambda) f(\lambda) d\lambda. \tag{7}$$

Обобщение формулы (6) на случай n-компонентной среды, обладающей разбросом теплопроводных свойств компонентов, получим вычисляя $\langle\gamma\rangle$ в (7) с плотностью распределения $f(\lambda)$, учитывающей разброс λ от λ_i.

Рассмотрим n-компонентную изотропную среду, разброс компонентов которой определяется n-треуголным распределением:

$$f(\lambda) = \begin{cases} \dot{S}_i\left(1 + \dfrac{\lambda - \lambda_i}{\varepsilon_{i1}}\right), \lambda \in [\lambda_i - \varepsilon_{i1}, \lambda_i] \\ S_i\left(1 - \dfrac{\lambda - \lambda_i}{\varepsilon_{i2}}\right), \lambda \in [\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon_{i2}] \\ 0 \ \text{для} \quad \text{остальных } \lambda, \end{cases} \tag{8}$$

$$S_i = \frac{2c_i}{\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}}, \sum_{i=1}^{n} c_i = 1, i = \overline{1,n}.$$

Здесь $f(\lambda)$- плотность распределения коэффициента теплопроводности λ, λ_i- основное значение коэффициента теплопроводности i-го компонента, $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}$ - значение разбросов коэффициента теплопроводности от основного значения λ_i i-го компонента. Каждая из компонент материала представляет собой однородную изотропную среду. Вычисляя $\langle\gamma\rangle$, согласно формуле (7), с плотностью распределения (8) и полагая $\langle\gamma_i\rangle = 0$, согласно (6), получим

$$L = \sum_{i=1}^{n} S_i \sum_{\beta=1}^{2} \frac{A_{0i} + (-1)^\beta \varepsilon_{i\beta}}{\varepsilon_{i\beta}} \ln\frac{A_{0i} + (-1)^\beta \varepsilon_{i\beta}}{A_{0i}},$$
$$A_{0i} = \lambda_i - \lambda_0 + \frac{1}{L}, L = (3\lambda_0)^{-1}, A_{0i} = 2\lambda_0 + \lambda_i. \tag{9}$$

При $\varepsilon_{ij} \to 0$ плотность (8) $f(\lambda)$ переходит в распределение $f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} c_i\delta(\lambda - \lambda_i)$, а уравнение (9) – в уравнение (6). Условие (6) представляет собой условие самосогласования, а полученное λ_i решение уравнения (9) будет самосогласованно (8).

Расчет зависимости эффективной теплопроводности λ_0 от c_i согласно уравнению (9), обладает тем недостатком, что при $\varepsilon_{ij} \to 0$ правая часть представляет собой неопределенность типа 0/0, поэтому при малых ε_{ij} решение неустойчиво. При относительном разбросе $\varepsilon_{ij}\lambda_i^{-1} \le 10^{-3}$ расчет λ_0 удобно вести на основе уравнения, получим из (9) разложением правой части в ряд Маклорена. Для двухкомпонентной среды получим из (9) в безразмерном виде

$$1 = 3x\left[(1-c)\left(\frac{1}{B_{01}} + \frac{\delta_{11}-\delta_{12}}{3B_{01}^2}\right) + c\left(\frac{1}{B_{02}} + \frac{\alpha(\delta_{21}-\delta_{22})}{3B_{02}}\right)\right] \tag{10}$$

$$\alpha = \lambda_2\lambda_1^{-1}, x = \lambda_0\lambda_1^{-1}, B_{0i} = A_{0i}\lambda_1^{-1}, c = c_2.$$

Как следует из формулы (10), на зависимость x от c влияет несимметричность разброса, т.е. величина $\delta_{i1} - \delta_{i2}$. На рисунке 1 изображены зависимости λ_0 от c для медеэпоксида (эксперимент [3]). Кривая 1 получена при $\delta_{12} = 0{,}1, \delta_{21} = 0{,}05$; 2 – при $\delta_{12} = 0{,}05, \delta_{21} = 0{,}1$, 3- при $\delta_{11} = 0{,}1, \delta_{21} = 0{,}05$; 4 - при $\delta_{11} = 0{,}05, \delta_{21} = 0{,}1$. Кривая 5 соответствует случаю, когда нет разброса свойств компонентов: $\delta_{ij} = 0$. При $\delta_{ij} = 0$ уравнение переходит в уравнение (6). Из рисунка 1 видно, что существует концентрация c, при которой наличие разброса не влияет на значение коэффициента теплопроводности.

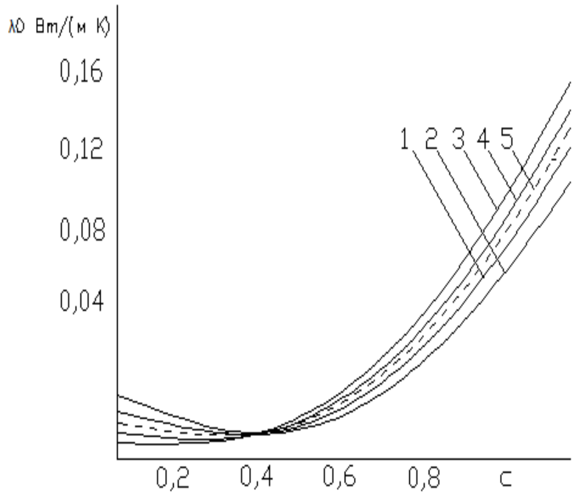

Рисунок 1 Зависимость коэффициента теплопроводности λ_0 медеэпоксида от концентрации c меди

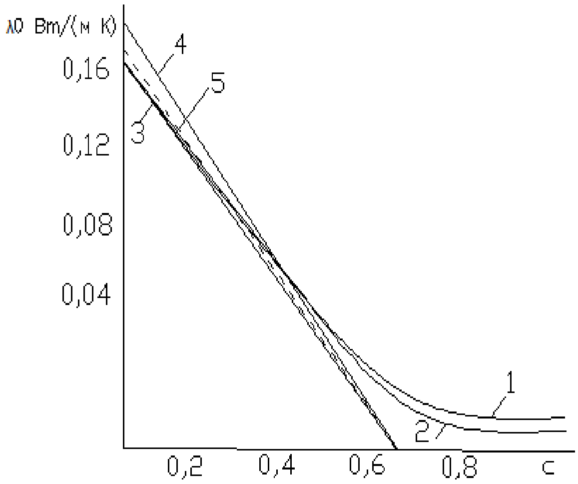

Рисунок 2 - Зависимость коэффициента теплопроводности λ_0 пористой эпоксидной смолы от концентрации c пор

Эффективный коэффициент теплопроводности пористой среды удовлетворяет уравнению (10), если положить в нем $\lambda_2 = 0, \delta_{21} = 0, \alpha = 0$. На рисунке 2 изображена зависимость λ_0 от c - концентрации пор для эпоксидной смолы: 1- при $\delta_{11} = 0{,}1, \delta_{22} = 0{,}1$; 2 – при $\delta_{11} = 0{,}1$; 5 – при $\delta_{ij} = 0$. Как следует из рисунка 2 (кривые 1,2), наличие разброса δ_{22} дает зависимость коэффициента теплопроводности λ_0 от пористости c для всех значений $0 \le c \le 1$. Для пористой среды при отсутствии разброса δ_{22} самосогласованный метод обращение λ_0 в нуль при $c_* = 0{,}63$ причем разбросы δ_{11}, δ_{12} компоненты λ_1 при этом практически не сказываются на значении c_*.

Формулы (9), (10), связывающие значения эффективного коэффициента λ_0, компонентов λ_i, концентраций c_i, разбросов ε_{ij}, могут быть использованы для решения задачи определения разброса ε_{ij} по измерению и заданным значениям $\lambda_0, \lambda_i, c_i$. Эта задача по отношению к задаче вычисления эффективных коэффициентов по заданным $\lambda_i, c_i, \varepsilon_{ij}$ является обратной, позволяя получить оценку разброса свойств в реальных композитах. Отметим, что на основе условия самосогласования $\langle\gamma\rangle = 0$ можно получить уравнение для эффективного коэффициента теплопроводности λ_0 неоднородных сред, распределение материальных коэффициентов которых подчиняется любым другим законам распределения. При этом, если в пределе взятое распределение переходит в комбинацию функций $f(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}c_i\delta(\lambda-\lambda_i)$, то уравнения (9), (10) в известные уравнения n-компонентной среды, получаемые методом самосогласования или эквивалентным ему (формула Одоевского (6)).

Заключение. Предлагаемый подход позволяет учесть влияние разброса значений компонент в композите на его эффективные свойства не только в теплопроводности, но и в электропроводности, упругости, диффузии. Непосредственно из формул (2)-(5) следует, что он применим для композитов естественного происхождения с непрерывным распределением физико-механических свойств типа горных пород, грунтов, почв.

РЕЗЮМЕ

В процессе эксплуатации в композитных материалах под действием термосиловых воздействий идут процессы деградации их свойств, проявляющиеся в изменении их коэффициентов, теплопроводности, упругости, пластичности и т.д. Как правило, процессы старения в штатных режимах эксплуатации происходят сравнительно медленно так, что можно считать, поле температур квазистационарным, по крайней мере на начальном этапе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микрооднородных сред – М.: Наука, 1976. –450с.
2. Малинецкий Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.П.Платонов – Москва: УРСС, 2000.—335с.
3. Rosenberg H.M. Low temperature thermal conduction in particle dispersed polyethylene / H.M. Rosenberg, J. Phys, F.F.T Araujo - D Appl. Phys 1976.- p. 665 −675.

SUMMARY

During the operation in composite materials under the influence of thermopower effects are processes of degradation of their properties, manifested in changes in their coefficients, thermal conductivity, elasticity, plasticity, etc. As a rule, the aging process in-house operating conditions occur relatively slowly, so that it can be assumed quasi-stationary temperature field, at least at the initial stage.

Поступила в редакцию 09.09.2013