УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Шукевич Т.В., д. ф.-м. н. **Чигарев А.В.**

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Рассмотрим упругую неоднородную среду, находящуюся в начальном напряженном докритическом состоянии. В момент времени $t=0$ на некоторой поверхности Σ_0 возникает скачок напряжений от σ^0 до 0, связанный с образованием микротрещины (микропоры), который для $t>0$ распространяется в виде волны (волна разгрузки). Поверхность Σ_0 - свободная поверхность образовавшейся трещины.

Под волной скачка напряжений понимается изолированная однопараметрическая поверхность $\Sigma(t)$, распространяющаяся в среде, на которой перемещения непрерывны, а напряжения, скорости перемещений и начальные напряжения терпят разрыв. Параметры $\lambda(\bar{x})$, $\mu(\bar{x})$ и их градиенты непрерывны, плотность $\rho(\bar{x})$ может терпеть разрыв.

Распространение волн описывается соотношениями[1]:

$$\sigma_{im,i} - u_{m,ni}\sigma^0_{in} - u_{m,n}\sigma^0_{in,i} = \rho\frac{d\upsilon}{dt}\,(m \neq n), \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda(\bar{x})u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(\bar{x})(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{2}$$

где σ_{in} - компоненты тензора напряжений; u_i - перемещения; σ^0_{in} - компоненты тензора начальных напряжений.

На волновой поверхности $\Sigma(t)$ с учетом начальных напряжений должны выполняться:

1) геометрические условия совместности

$$\left(\frac{\partial z}{\partial a^k}\right) = B\nu_k + g^{\alpha\beta}\frac{\partial[z]}{\partial u^\alpha}\cdot\frac{\partial a^k}{\partial u^\beta},\ B \equiv \left[\frac{\partial z}{\partial a^i}\right]\nu^i, \tag{3}$$

где $[z] \equiv z_2 - z_1$ (z_1, z_2-значение величин, характеризующих состояние среды по обе стороны от фронта), a^k- координаты фронта волны, ν_k- ковариантные компоненты внешней единичной нормали в метрике пространства $a^1a^2a^3$ перед волной, $g^{\alpha\beta}$- компоненты метрического тензора внутренней геометрии фронта волны, u^α, u^β криволинейные координаты внутренней геометрии фронта волны;

2) кинематические условия совместности первого порядка

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + GB = \frac{\delta[z]}{\delta t}, \tag{4}$$

где G – нормальная скорость движения поверхности; символ $\delta/\delta t$ означает изменение вдоль луча;

3) динамические условия совместности, которые определяют изменение количества движения на $\Sigma(t)$

$$\rho G = \rho^+\left(G - \upsilon^+_n\right), \tag{5}$$

$$[\sigma_{im}]\cdot\nu^i = -\rho G[\upsilon_m] - G^{-1}\left[\upsilon_m\sigma^0_{in}\right]\cdot\nu^i\cdot\nu^n = \rho^+G\upsilon^+_m - G^{-1}\upsilon^+_m\left[\sigma^0_{in}\right]\cdot\nu^i\cdot\nu^n, \tag{6}$$

где ν^i - компоненты единичной нормали к поверхности $\Sigma(t)$; ρ^+, υ^+ - значение плотности и компонент скорости на передней стороне поверхности $\Sigma(t)$. Скобки [*f*] обозначают разность значений функции *f* на разных сторонах поверхности $\Sigma(t)$.

Продифференцировав (1) по времени и записав его в разрывах с учетом динамических соотношений (5), (6) и условий совместности первого порядка на поверхности $\Sigma(t)$, получим

$$(\lambda + \mu)[\upsilon_k]\cdot\nu^k\nu^m + \mu[\upsilon_m] - \left[\upsilon_m\sigma^0_{in}\right]\nu^i\nu^n = \rho G^2[\upsilon_m]. \tag{7}$$

Предполагая $[\upsilon_k]\cdot\nu^k \neq 0$ на поверхности $\Sigma(t)$, умножим (5) на ν_m и просуммируем по повторяющемуся индексу, получим

$$\rho G_l^2 = \lambda + 2\mu - [\sigma_{in}^0]\cdot\nu^i\cdot\nu^n. \tag{8}$$

С другой стороны, если $[\upsilon_k]\cdot\nu^k = 0$ на $\Sigma(t)$, то из соотношений (7) следует

$$\rho G_t^2 = \mu - [\sigma_{in}^0]\cdot\nu^i\cdot\nu^n. \tag{9}$$

Таким образом, в рассматриваемой неоднородной упругой среде с начальными напряжениями существует два типа волн: безвихревые (7) и эквиволюминальные (9), которые в каждой точке среды имеют скорости продольных и поперечных волн.

Записывая закон Гука (2) и уравнения движения (1) в разрывах с учетом условий совместности первого и второго порядков [2], получим дифференциальное уравнение для изменения интенсивности распространения волн

$$\frac{d\ln\omega^p}{ds} = \Omega_p - \frac{1}{2}\frac{d\ln G_p}{ds} + \left(\rho G_p^2\right)^{-1}[\sigma_{in}^0]\cdot\nu^i\cdot\nu^n\cdot\Omega_p \quad (p = l,t), \tag{10}$$

где s – расстояние вдоль траектории луча; Ω_p - средняя кривизна волны; $[v_i]\cdot\nu^i = \omega$.

Для общих случаев, в которых средняя кривизна $\Omega_p(\bar{s})$ изменяется в процессе распространения поверхности $\Sigma(t)$, уравнения (10) являются не замкнутыми. Для замыкания уравнений (10) необходимо получить уравнения средней кривизны $\Omega_p(\bar{s})$.

Средняя кривизна Ω связана с первой $g^{\alpha\beta}$ и второй $b_{\alpha\beta}$ квадратичными формами поверхности $\Sigma(t)$ соотношением [3]

$$2\Omega = b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}. \tag{11}$$

Проведя δ-дифференцирование по времени в соотношении (4.2.11) и учитывая, что параметры внутренней геометрии волновых поверхностей удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial s} = -2b_{\alpha\beta};\ \ \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial s} = 2b^{\alpha\beta};\\ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial s} = (\gamma_p c_p)_{,\alpha\beta} + \ln(\gamma_p c_p)_{,\alpha}\cdot\ln(\gamma_p c_p)_{,\beta} - g^{\eta\delta}b_{\alpha\eta}b_{\beta\delta};\\ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial s} = g^{\alpha\eta}g^{\beta\delta}(\ln(\gamma_p c_p)_{,\eta\delta} + \ln(\gamma_p c_p)_{,\eta}\ln(\gamma_p c_p)_{,\delta}) + 3g_{\eta\delta}b^{\alpha\eta}b^{\beta\delta};\\ \gamma_p = (1-\lambda_p)^{1/2},\end{gathered} \tag{12}$$

получим уравнение для средней кривизны в виде

$$\frac{\partial\Omega}{\partial s} = 2\Omega^2 - K + \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 - R_1), \tag{13}$$

где K – гауссова кривизна поверхности, которая находится из формулы

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 2\Omega K + 2\Omega(Q_1 - Q_2 - R_1) - P_1 + P_2 + R_2. \tag{14}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{gathered}Q_1 = (c_p\gamma_p^2)^{-1}g^{\alpha\beta}c_{p,\alpha\beta};\ Q_2 = (c_p\gamma_p^2)^{-1}g^{\alpha\beta}\lambda_p^{1/2}(\lambda_p^{1/2}c_p)_{,\alpha\beta};\\ R_1 = \gamma_p^{-4}g^{\alpha\beta}\lambda_p(\ln\lambda_p^{1/2})_{,\alpha}(\ln\lambda_p^{1/2})_{,\beta};\ P_1 = (c_p\gamma_p^2)^{-1}b^{\alpha\beta}c_{p,\alpha\beta};\\ P_2 = (c_p\gamma_p^2)^{-1}b^{\alpha\beta}\lambda_p^{1/2}\left(\lambda_p^{1/2}c_p\right)_{,\alpha\beta};\ c_p^2 = \Lambda_p\rho^{-1};\\ R_2 = \gamma_p^{-4}b^{\alpha\beta}\lambda_p(\ln\lambda_p^{1/2})_{,\alpha}(\ln\lambda_p^{1/2})_{,\beta};\\ \Lambda_l = \lambda + 2\mu;\ \Delta_t = \mu;\ \lambda_p = [\sigma_{in}^0]\nu_i\nu_n\Lambda_p^{-1}.\end{gathered} \tag{15}$$

В уравнения (13), (14), определяющие изменение средней и гауссовой кривизн волновой поверхности $\Sigma(t)$ в упругой среде с начальными напряжениями с переменной скоростью $G_p = c_p(1-\lambda_p)^{1/2}$ вдоль луча, входят члены $g^{\alpha\beta}c_{p,\alpha\beta}$; $b^{\alpha\beta}c_{p,\alpha\beta}$, являющиеся инвариантами поверхности $\Sigma(t)$. Первый называется дифференциальным параметром Бельтрами и связан с кривизной луча, а второй зависит еще и от кручения луча.

Уравнение лучей определяются из принципа минимума функционала Ферма [4] и имеют вид

$$\frac{\partial \nu^t}{\partial s} = -(\ln G)_{,\alpha} g^{\alpha\beta} x^j_\beta; \quad \frac{\partial x^i}{\partial s} = \nu^i. \tag{16}$$

Вектор $\{x^i_\beta\} = \bar{\tau}_\beta$, касательный к поверхности $\Sigma(t)$, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \bar{\tau}_\alpha}{\partial s} = (\ln c_p \gamma_p)_{,\alpha} \bar{\nu} - g^{\delta\gamma} b_{\delta\alpha} \bar{\tau}_\gamma . \tag{17}$$

Рассмотрим несколько случаев изменения параметров внутренней геометрии поверхности волны.

1. Плоская волна

Рассмотрим упругую неоднородную среду, в которой скорость распространения волны равна $G(\bar{x})$, плотность ρ и начальные напряжения σ^0_{ij}. В момент времени *t=0* происходит разгрузка. Волна разгрузки распространяется вдоль оси 0x.

Для случая плоской волны $\Omega_p = 0$, тогда из уравнения (10) следует

$$\frac{\partial \omega^l}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln(G(\bar{x}))\cdot \omega^l , \tag{18}$$

Из уравнения (4.2.16) находим зависимость интенсивности волны от скорости:

$$\frac{\omega^l}{\omega^l_0} = \left(\frac{G(x)}{G_0}\right)^{-1/2}, \tag{19}$$

где ω^l_0, G_0 - значения функций ω^l, $G(x)$ при $x=x_0$.

Рассмотрим случай неоднородности для функции распространения волны:

$$\frac{G(x)}{G_0} = \frac{x}{x_0} . \tag{20}$$

Начальная скорость распространения волны G_0 принимает следующие значения: a)1, b)10, c)100, d)1000.

На рисунке 1 приведена зависимость интенсивности волны от переменной x при различных начальных скоростях распространения волны

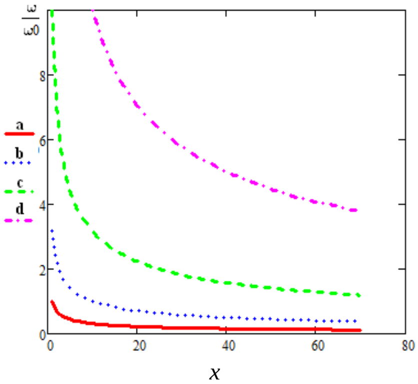


Рисунок 1 - Зависимость интенсивности плоской волны ω/ω_0, распространяющейся перпендикулярно слоям в микрослоистой среде от переменной x

2. Сферическая волна

Пусть в бесконечном неоднородном пространстве имеется сферическая полость радиуса r_0, находящаяся в начальном напряженном состоянии σ^0_{ij}, плотность среды - ρ.

Скорость распространения волны в среде примем равной $G_p = G_o - a\cdot t$, где *a* – постоянное ускорение.

Для случая сферической волны $\Omega_p = -\dfrac{1}{2(r_0 + G_p \cdot t)}$, тогда из уравнения (10) следует

$$\frac{\partial \ln \omega^p}{\partial r} = \Omega_p - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln G_p}{\partial r} + \left(\rho G_p^2\right)^{-1}\left[\sigma_{ij}^0\right]\cdot \nu^i \cdot \nu^j \cdot \Omega_p, \tag{21}$$

Из уравнения (10) находим зависимость интенсивности волны от скорости:

$$\frac{\omega^l}{\omega_0^l} = \left(\frac{G_p}{G_o}\right)^{-\frac{1}{2}} + e^{\int_{r_0}^{r}\Omega_p dr} + e^{\frac{[\sigma_{ij}^0]\nu_i\nu_j}{\rho}\cdot\int_{r_0}^{r}\frac{\Omega_p}{G_p^2}\cdot dr}, \tag{22}$$

где ω_0^l, - значения функции ω^l при $r=r_0$.

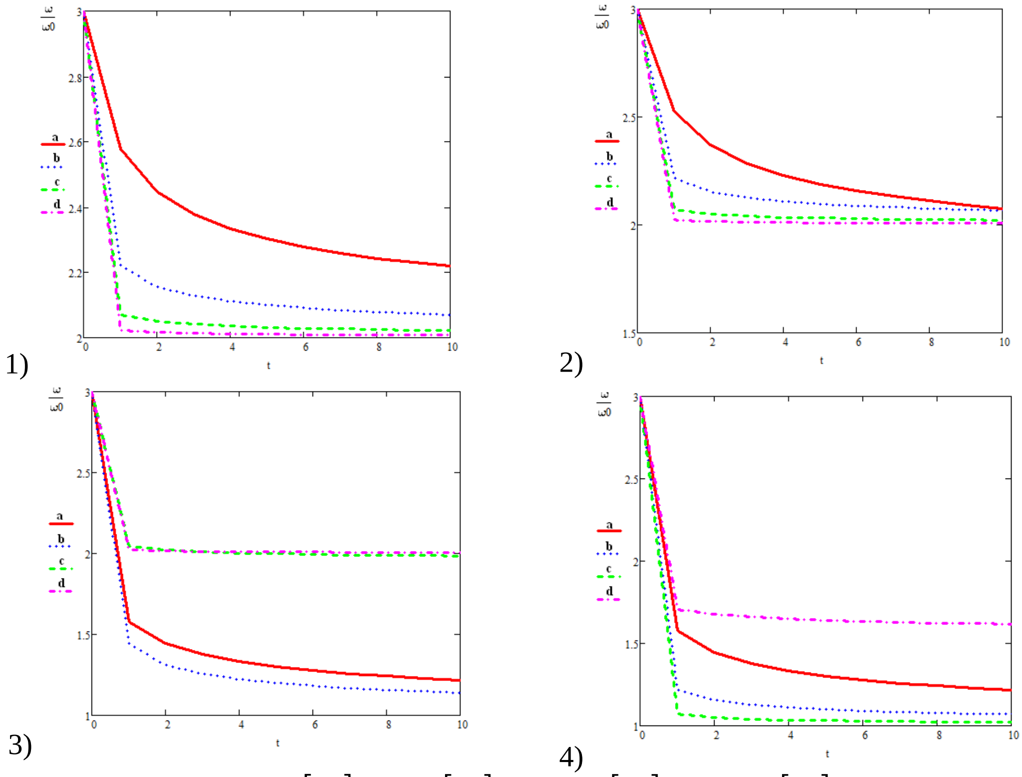
Перейдем в выражении для интенсивности (22) от переменной r к переменной t

$$\frac{\omega^l}{\omega_0^l} = \left(\frac{G_p}{G_o}\right)^{-\frac{1}{2}} + e^{\int_{0}^{t}G_p\cdot\Omega_p dt} + e^{\frac{[\sigma_{ij}^0]\nu_i\nu_j}{\rho}\cdot\int_{0}^{t}\frac{\Omega_p}{G_p}\cdot dt}, \tag{23}$$

где ω_0^l, G_o - значения функции ω^l, G_p при $t=t_0$.

Начальная скорость распространения волны G_0 принимает следующие значения: a)1, b)10, c)100, d)1000.

Зависимость интенсивности сферической волны от переменной t при различных скоростях распространения волны представлена на рисунке 2.



$$1)\ \frac{[\sigma_r]}{\sigma_m}=1,\ 2)\ \frac{[\sigma_r]}{\sigma_m}=10^3,\ 3)\ \frac{[\sigma_r]}{\sigma_m}=10^6\ \ 4)\ \frac{[\sigma_r]}{\sigma_m}=10^9$$

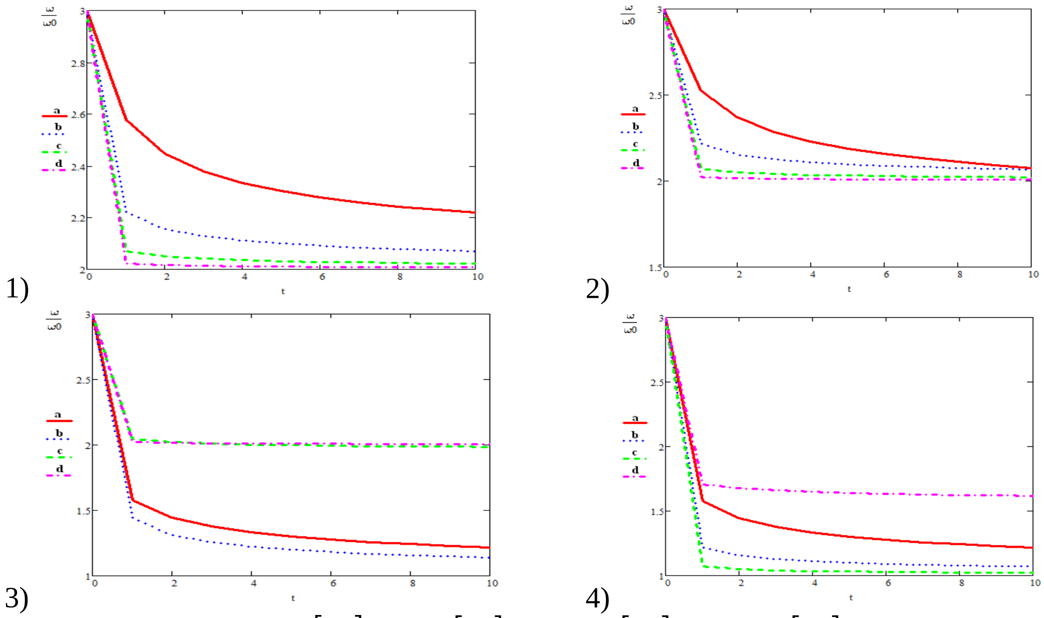
Рисунок 2 - Зависимость интенсивности сферической волны ω/ω_0 от переменной t

3 Цилиндрическая волна

Для случая цилиндрической волны $\Omega_p = -\frac{1}{r_0 + 2G_p \cdot t}$, тогда согласно уравнению (23) получим следующие зависимости для интенсивности волны.

Начальная скорость распространения волны G_0 принимает следующие значения: a)1, b)10, c)100, d)1000.

Зависимость интенсивности цилиндрической волны от переменной t при различных скоростях распространения волны представлена на рисунке 3.



$$1)\ \frac{[\sigma_r]}{\sigma_m}=1,\ 2)\ \frac{[\sigma_r]}{\sigma_m}=10^3,\ 3)\ \frac{[\sigma_r]}{\sigma_m}=10^6\ \ 4)\ \frac{[\sigma_r]}{\sigma_m}=10^9$$

Рисунок 3 - Зависимость интенсивности цилиндрической волны ω/ω_0 *от переменной t*

Полученная система уравнений (10), (12) - (17) определяет изменение интенсивности волны в неоднородной упругой среде с начальными напряжениями в зависимости от параметров внутренней геометрии фронта волны. Следовательно, изменение начального напряженного состояния позволяет управлять направлением распространения лучей и параметрами внутренней геометрии фронта волны, а полученная зависимость интенсивности волны от неоднородности (через скорость) и начальных напряжений дает возможность оценить величину совместного и раздельного влияния неоднородности и начальных напряжений на интенсивность.

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрена упругая неоднородная среда, находящаяся в начальном напряженном докритическом состоянии. В момент времени t=0 на некоторой поверхности возникает скачок напряжений от σ^0 до 0, связанный с образованием микротрещины (микропоры), который для t>0 распространяется в виде волны (волна разгрузки). Определена интенсивность волны разгрузки, в зависимости от параметров внутренней геометрии фронта волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Payton R.G. Elastic wave propagation in homogeneous - rod. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1966.-91с.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями.— Киев.: Наук. думка, 1986.-535 с.
3. Чигарев А.В. К геометрии волновых фронтов в неоднородных средах.- Акуст. журнал, 1980. – 912 с.
4. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. - Мн: УП «Технопринт», - 2000. – 426 с.

SUMMARY

The article considers the heterogeneous elastic medium in the initial voltage sub-critical. At time t = 0 on the surface there is a surge of σ^0 to 0, associated with the formation of cracks (microvoids) that for t > 0 applies to the form of waves (wave discharge). Defined wave intensity discharge, depending on the parameters of the internal geometry of the wave front.

Поступила в редакцию 04.10.2013