

## ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ПРОРАСТАНИЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРЕЩИН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Шукевич Т.В., асп. Чигарева Ю.А., Ручан М.В.

*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Старение элементов приборов при эксплуатации вследствие накопления повреждений влияет на точность и достоверность измерительной техники. Одним из возможных процессов, влияющих на возникновение микроповреждений материала деталей приборов, являются циклические нагрузки типа вибраций. Разнообразие различных моделей, описывающих возникновение макротрещины в элементах приборов, позволяет выбрать адекватное представление для этого процесса.

### Моделирование прорастания трещины алгоритмом Кантора

Образование магистральной трещины из множества распределенных по объему микротрещин часто моделируется как процесс активного роста одной из микротрещин, оказавшейся в условиях наиболее благоприятствующих ее продвижению и поглощению других трещин. При этом другие микротрещины выступают в роли пассивных жертв, поглощение которых лишь способствует росту одной изначально более активной трещины. Такой сценарий можно рассматривать как реализацию алгоритма типа эволюционного, присущего живым системам. Однако, как известно, в живых системах действуют и другие механизмы, регулирующие взаимодействие особей и образование определенных видов.

1. Пусть в пластине, растягиваемой вдоль оси  $y$ , имеются боковые выточки или разрезы, которые разделены между собой перемычкой.

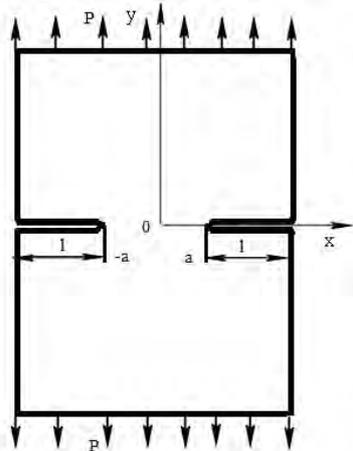


Рисунок 1.- Пластина с выточками под действием растягивающих усилий

В интервале  $-a < x < a$  материал не содержит трещин конечной длины, но может содержать микротрещины типа канторовой «пыли» так, что ее размерность равна нулю или точнее меньше любого наперед заданного значения их общей длины.

Пусть приложенная нагрузка такова, что обеспечивает стабильность длины начальных разрезов, но в то же время допускает рост микротрещин в интервале  $-a < x < a$ , их слияние, результатом чего является удлинение начальных разрезов. Для данной задачи фрактал Кантора подходит наилучшим образом, т.к. известно, что повреждения накапливаются вблизи конца трещины. Положим, что  $|a| = \frac{1}{2}$ ,

тогда длина перемычки вдоль оси  $x$  равна 1. Прямой ход алгоритма конструирования фрактала Кантора состоит, как известно, из деления отрезков на 3 и исключения из рассмотрения среднего отрезка. Визуализируем процесс с помощью графа типа бинарного дерева, причем вершинам графа (состояниям) будем приписывать длину соответствующих микротрещин (рисунок 2). Число микротрещин равно  $2^n$ , длина каждой  $(1/3)^n$ , общая длина микротрещин  $(2/3)^n$ .

Таким образом, суммарная длина микротрещин стремится к нулю, т.е. мера Лебега и топологическая размерность множества микроповреждений равны нулю, т.е. в пределе имеем идеальный бездефектный материал. Хаусдорфова размерность множества Кантора равна 0,3609 [4], что более реально отображает состояние поврежденного материала. Если с шагами деления связать дискретное время или циклы, то прямой алгоритм Кантора дает модель залечивания начальной трещины длины 1 с помощью локальных соединений краев разреза так, что в пределе останется разрез  $-1 < x < -1/6$  и сплошная среда в классическом смысле в интервалах  $1/6 < x < 1/2$ ,  $-1/2 < x < -1/6$ .

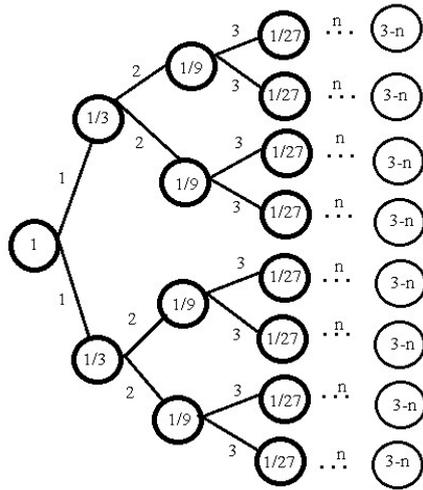


Рисунок 2. - Граф, отображающий прямой ход алгоритма Кантора

точки  $-1/6$ ,  $1/6$  соответственно. При этом хаусдорфова размерность  $D$  изменилась от 0,6309 до 1, если считать разрез за прямой отрезок или от 0,6309 до 0, если считать разрез пустым множеством.

В реальном теле микротрещины распределены не только по оси  $x$ , но и в окрестности оси. Обобщением данной модели будет модель рассеянных микроповреждений в областях, примыкающих к концам разреза. Эти повреждения можно получить, перемещая отрезок  $[-0.5, 0.5]$  с рассеянными повреждениями параллельно оси  $x$  вверх и вниз детерминированным или случайным образом, а также с поворотами ее на углы вокруг середины отрезка  $t$ . 0. Таким образом, может быть построено облако повреждений типа «пыли» Кантора. Ясно, что прорастание макротрещин в этом случае будет происходить не по оси  $x$ , а по более сложной траектории, например броуновской фрактальной кривой.

### Моделирование прорастания трещины методом статического моделирования

2. Рассмотрим алгоритм построения траектории, прорастающей через перемычку и соединяющий концы разрезов. Разделим перемычку на  $n$  одинаковых интервалов, точки деления обозначим:

$$x_0 = 0, x_n = 1, x_j = j \cdot h, h = n^{-1}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Применим метод статистического моделирования [5], выбирая случайным образом число  $0 < r < 1$  и определяя координаты правого конца микротрещины  $M_k(x_k, y_k)$

$$x_k = \frac{k}{h}, y_k = (r_1 - 1/2) + (r_2 - 1/2) + \dots + (r_k - 1/2) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Тогда каждая следующая точка  $M_k$  на плоскости расположена выше или ниже (вдоль оси  $y$ ) точки  $M_{k-1}$ . Соединяя полученные точки, находим траекторию магистральной трещины, которая флуктуирует около оси  $x$  случайным образом. Вероятностное описание броуновской фрактальной трещины может быть исследовано на основании уравнения ФПК (Фоккера-Планка-Колмогорова).

### Модель прорастания трещины с флуктуирующей длиной

3. Рассмотрим теперь модель прорастания трещины, длина которой, начиная с некоторого значения, может флуктуировать около этого значения. Подобного рода модели описываются алгоритмами ограниченного роста популяции в биологии [6], логистике [7]. Обозначим  $l_n$  – длину прорастающей трещины на  $n$ -ом шаге. Трещины могут прорасти от начальных разрезов или из середины перемычки вдоль оси  $x$ .

Модель роста самотормозящейся трещины описывается алгоритмом:

$$l_{n+1} = a l_n (1 - l_n) \quad (3)$$

Параметр  $a$  изменяется в интервале  $0 < a \leq 4$ , результатом чего является то, что  $l_n$  не выходит за границы единичного отрезка, т.е. соответствует сохранению по крайней мере одной перемычки, а следовательно, пластина не разделяется на две части. Перенесем для определенности начало системы координат в т.  $x = -0.5, y = 0$  и рассмотрим график функции

$$y = ax(1 - x), \quad (4)$$

изображенной на рисунке 3.

Процесс прорастания трещины моделируем обратным алгоритмам Кантора. Для этого задаемся большим значением  $n$ , выбираем одно из соображений среднего размера дефектов, существующих в реальных телах. Например, линейный дефект длины  $10^{-9}$  нм дает  $n = 9 \frac{\ln 10}{\ln 3}$ .

Процесс моделирования начинается с задания  $n$  и начального состояния перемычки, соответствующего выбранному  $n$ , когда в интервалах  $1/6 < x < 1/2$  и  $-1/2 < x < -1/6$  дефекты рассеяны на оси  $x$ , а их длины равны между собой  $3^{-n}$ . Движение по графу идет от крайних ветвей в направлении корня. Процесс заканчивается в вершине, описывающей состояние, когда вершина каждого из начальных разрезов пришла в

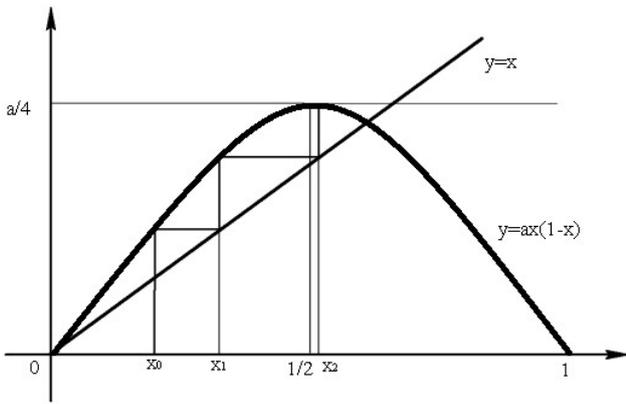


Рисунок 3.- График функции  $y(x)$

Тогда длина прорастающей трещины  $l=x$ . Прямые  $y=x$  и  $y=ax(1-x)$  пересекаются в точках, которые являются неподвижными для отображения (4). Выбирая  $x_0$  – длину начальной трещины, примыкающей к левому разрезу. Из соотношения  $x=ax(1-x)$  находятся неподвижные точки,  $x^{(0)} = 0, x^{(1)} = (a-1)a^{-1}$ , если  $1 < a \leq 4$  и одна  $x^{(0)}$  в случае  $a < 1$ .

В зависимости от значения параметра  $a$  различают устойчивые и неустойчивые неподвижные точки.

Около устойчивой неподвижной точки последовательные приближения длины трещины осциллируют, т.е. устойчивая неподвижная точка является аттрактором.

В окрестности неподвижной точки отображение (3) может быть линеаризовано, тогда на  $n+1$  шаге имеем в окрестности  $x^{(0)} = 0$ :

$$l_{n+1} = a \cdot l_n, \quad (6)$$

а в окрестностях  $x^{(1)} = (a-1)a^{-1}$

$$l_{n+1} = a(1 - 2(a-1)a^{-1})(l_n - (a-1)a^{-1}). \quad (7)$$

При  $0 < a < 1$  длина трещин флуктуирует около  $x^{(0)} = 0$ , приближаясь к нулю слева, т.е. описывает модель залечивания трещины. При  $a=1$  неподвижная точка  $x^{(0)} = 0$  теряет устойчивость, т.е. трещина начинает расти и при  $1 < a < 3$  начинает флуктуировать около другой неподвижной точки (стационарной длины трещины  $x^{(1)} = (a-1)a^{-1}$ ), причем при  $1 < a < 2$ , оставаясь все время меньше  $l_{cm} = (a-1)a^{-1}$ , а при  $2 < a < 3$  асимптотически осциллируют около  $l_{cm}$  становясь то короче, то длиннее. Это можно интерпретировать как конкуренция двух процессов залечивания и разрушения.

При увеличении параметра  $a > 3$  длина трещины начинает увеличиваться, т.е. неподвижная точка  $x^{(1)}$  теряет устойчивость ( $3 < a < 4$ ). представляет интерес для механики разрушения случай, когда начальная длина прорастающей трещины близка к стационарному значению, т.е.  $l_n$  приблизительно равно  $l_{cm}$  или в выбранной системе координат  $x_0$  приблизительно равно  $x^{(1)}$ .

При  $a=3$  логистическое отображение (4) на втором шаге теряет устойчивость в неподвижной точке  $x^{(1)}$ , которая распадается на две новые неподвижные точки  $x^{(3)}$  и  $x^{(4)}$ , которые являются сателлитами точки  $x^{(1)}$ , причем при малых  $a$  устойчивыми, но при возрастании  $a$  они становятся неустойчивыми. Первый случай соответствуют тому, что существуют две стационарные длины трещины  $l^{(3)}_{cm} < l_{cm} < l^{(4)}_{cm}$ , которые определяют бифуркацию длины трещины и ее осцилляции около  $l^{(3)}_{cm}$  или  $l^{(4)}_{cm}$ . При росте параметра  $a$  возникает бифуркация длины трещины в неустойчивые состояния.

Рассмотрим процесс прорастания трещины в осях  $aox$  рисунок 4.

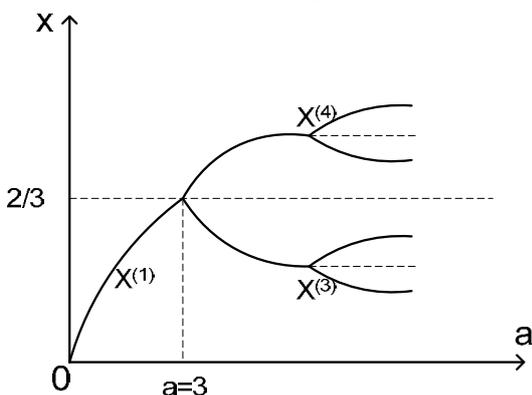


Рисунок 4.- Процесс прорастания трещины

С ростом  $a > 3$  будут появляться пары неподвижных точек, которые, начиная со второй итерации, являются неустойчивыми. Этот процесс определяет 2-цикл, когда в каждом цикле имеет место бифуркация в неустойчивое состояние, причем таких бифуркаций происходит бесконечно много, а шаг изменения параметра бифуркации уменьшается.

В результате процесс изменения длины трещины стохастизируется. Последовательность бифуркационных  $a_j$  ( $j=0, 1, \dots$ ) образуют последовательность

$$a_0 = 3, a_1 = 3,449499, a_2 = 3,544090, a_3 = 3,564407, \\ a_4 = 3,569692, a_5 = 3,569891, a_6 = 3,569934... \quad (8)$$

Из (8) можно получить, что  $a_{j \rightarrow \infty} \rightarrow a_B = 3,569946$ , причем имеет место

$$\frac{a_{j-1} - a_j}{a_j - a_{j+1}} \approx 4,6692016, \quad (9)$$

где  $F=4,6692016$  является константой Фейгенбаума.

Переход к хаотическому поведению длины трещины для  $3 < a < a_B$  заканчивается при значении параметра  $a = a_B$ . В этом интервале прогнозирование (оценка) длины трещины может быть реализована вероятностными методами.

Для значений  $a > a_B$  наблюдается чередование хаотического изменения длины трещины. Например, для  $a \approx 3,83$  существуют устойчивые длины трещины третьей итерации, которые при  $a \approx 3,841$  теряют устойчивость. Далее процесс удвоения периода тройных точек подобен описанному выше так, что на интервале ( $a_B, 4$ ) существует бесчисленное множество интервалов существования устойчивых периодических точек. Рассматриваемая модель хорошо изучена в применении к ограниченному росту популяции [4,7]. В приложении к модели прорастания трещины модель фрактального роста представляет интерес с точки зрения повышения трещиностойкости материала. Управляя параметром  $a$ , возможно получить различные сценарии разрушения. Например, для значений  $a$ , когда существуют устойчивые стационарные значения длин трещин типа аттракторов, около которых флуктуирует длина трещины, для значений  $a$  для которых стационарные длины неустойчивы. Представляет интерес также вопрос об условиях, при которых происходит разрушение бифуркаций [9,10].

#### Модель циклического прорастания трещины

4. Рассмотрим модель циклического нагружения, хорошо описывающую экспериментальные наблюдения. Скорость роста трещины описывается формулой [11]

$$\frac{dl}{dn} = -\beta \left( \frac{K_{Imax}^2 - K_{Imin}^2}{K_C^2} + \ln \frac{K_C^2 - K_{Imax}^2}{K_C^2 - K_{Imin}^2} \right) + \\ + (2\pi / \omega) V_0 \exp[(\lambda / 2)(K_{Imax} + K_{Imin})] \cdot I_0[(\lambda / 2)(K_{Imax} - K_{Imin})] \\ l = l_0 \text{ при } n = 0 \quad (10)$$

Здесь  $K_C, \beta, V_0, \lambda$  - константы, определяемые из эксперимента.

Конкретизируем модель для рассматриваемого случая, полагая

$$K_l = 4,2 \lambda \mu L^{-3/2} \sqrt{(1 - l/L)^{-3} - (1 - l/L)^3} \\ \lambda = \begin{cases} 1,15 - 60(l/L)^2 & \text{при } 0 < l/L < 0,05 \\ 1 & \end{cases} \quad (11) \\ \text{при } 0,05 < l/L < 1 \\ V_0 = 0,$$

тогда уравнение для скорости имеет вид

$$\frac{dl}{dn} = -\beta \left( A \lambda^2 \alpha(l/L) + \ln[1 - A \lambda^2 \alpha(l/L)] \right) \\ \alpha(l/L) = (1 - l/L)^{-3} - (1 - l/L)^3 \\ A = (4,2)^2 M_{max}^2 / (L^3 K_C^2) \quad (12)$$

Запишем уравнение (12) в дискретном виде

$$l_{n+1} = l_n - \beta \left\{ A \lambda^2 \alpha(l_n / L) + \ln[1 - A \lambda^2 \alpha(l_n / L)] \right\} \quad (13)$$

Значению параметра  $a = a_*$  ( $1 < a_* < 3$ ) соответствует флуктуация  $l$  около  $l^{(2)}$  так, что нет увеличения длины за любое конечное число циклов равное периоду флуктуаций. Приравнивая левые и правые части уравнения (4) и (13), получим условие на параметры задачи

$$a_* l_n^* (1 - l_n^*) = l_n^* - \beta \left\{ A \lambda^2 \alpha(l_n^* / L) + \ln[1 - A \lambda^2 \alpha(l_n^* / L)] \right\} \quad (14)$$

Соотношение (14) дает условие на параметры  $K_C, \beta, M_{max}$ , выбирая которые подходящим образом получаем устойчивое флуктуирование длины трещины около значения  $l^{(1)}$ .

## Заклучение

1. Модель прорастания микротрещин в магистральную трещину на основе фрактала Кантора позволяет оценить время (количество циклов) необходимых для того, чтобы из «пыли» дефектов возникла магистральная трещина.

2. Модель логистического типа позволяет описать процессы стабилизации роста трещины около некоторых критических длин, причем модель позволяет описать случаи, когда критическая длина стабильна, а длина трещины может флуктуировать около нее, не приводя к разрушению детали, что характерно для некоторых материалов.

## РЕЗЮМЕ

Для механики разрушения представляет интерес сценарий образования магистральной трещины как результата активного роста всех элементов множества микротрещин вплоть до образования ими кластера, пронизывающего тело и ведущего к его разрушению. В теории конструктивных и динамических фракталов разработано много различных моделей и соответствующих алгоритмов, которые могут быть применены в механике разрушения, на что указывал еще Мандельброт [1]. Представляет интерес рассмотреть процесс развития трещины из состояния деформируемого твердого тела, содержащего зародыши дефектов (повреждений), но никак не проявляющихся на микроскопическом уровне.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelbrot B.V. The fractal geometry of nature - New York: Freeman, 1982.-342с. (Перевод на русский: Б. Мандельброт Фрактальная геометрия природы - РХД, Ижевск.-2002.-342с.)
2. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения.—М.: Наука, 1987.—80 с.
3. Качанов Л.М. Теория пластичности. – М.: Наука, 1969.—420 с.
4. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов - РХД, Москва-Ижевск.—2002.—159 с.
5. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы -- М.: Наука, 1971.—327с.
6. Берже П. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль – Меркурий-Пресс,—2000.—366 с.
7. Малинецкий Г.Г.. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г Малинецкий, А.Б. Потапов -- М.: Эдиториал УРСС, 2000. - 336 с.
8. Данилов Ю.А. Лекции по нелинейной динамике – Москва: Постмаркет, 2006. – 189 с.
9. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике – М.Мир, 1985.—254 с.
10. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций / Ж. Йосс, Д. Джозеф – М.Мир, 1963.—300 с
11. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения -- М.: Наука, 1974. – 640 с.

## SUMMARY

*For fracture mechanics is interesting scenario of the main crack as a result of strong growth of all elements of microcracks up to the formation of the cluster, which permeates the body and lead to its destruction. In theory, constructive and dynamic fractals developed many different models and corresponding algorithms that can be used in fracture mechanics, as was pointed more Mandelbrot [1]. It is interesting to consider the process of crack from the state of solids containing embryos defects (damage), but does not appear on the microscopic level.*

Поступила в редакцию 26.09.2013