УДК 539.3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

А.В. Яровая
Белорусский государственный университет транспорта

Введение. Слоистые элементы конструкций широко применяются в инженерной практике, что обусловливает необходимость разработки методов их расчета при динамических и квазистатических воздействиях. В монографиях [1–5] приведены общие подходы к постановке краевых и начально краевых задач о деформировании трехслойных стержней, пластин и оболочек, разработаны методы их решения. Применение инженерных методов расчета подобных конструкций содержится в работах [6, 7]. Колебания трехслойных вязкоупругих оболочек и круговых пластин, геометрия и движение которых описываются с помощью тех или иных гипотез, исследовались в [8–11]. Локальные динамические воздействия равномерно распределенных нагрузок на круговые трехслойные пластины и контактное взаимодействие тел рассмотрено в статьях [12–15], резонансные эффекты – в публикациях [16–18].

Здесь исследованы малые осесимметричные поперечные колебания упругой круглой трехслойной пластины связанной с упругим основанием, под действием параболических поверхностных нагрузок.

1. Общее решение начально-краевой задачи. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины приняты гипотезы ломаной нормали. Заполнитель – легкий. Используется цилиндрическая система координат r, φ, z, координатная плоскость связывается со срединной поверхностью заполнителя. Заполнитель считается легким, т.е. пренебрегается его работа в тангенциальном направлении. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ: $q = q(r, t)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластинки w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ, т. е. $w(r, t)$, $\psi(r, t)$, $u(r, t)$. Далее эти функции считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0, через G_k, K_k обозначены модули сдвига и объемной деформации k-го слоя (k = 1, 2, 3). Связь между реакцией и прогибом примем в соответствии с моделью Винклера, согласно которой $q_R = \kappa_0 w$, κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания круглой трехслойной пластины без учета обжатия и инерции вращения нормали в слоях, получена в [1] из вариационного принципа Гамильтона.

$$\left.\begin{aligned} &L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w,_r) = 0;\\ &L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w,_r) = 0;\\ &L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w,_r) - M_0\ddot{w} - \kappa_0 w = -q\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$; ρ_k – плотность материала; коэффициенты a_i и дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями

$$a_1 = \sum_{k=1}^{3} h_k K_k^+ \; ; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+) \; ; \quad K_k^+ \equiv K_k + \tfrac{4}{3} G_k \; ; \quad a_3 = h_1\left(c + \tfrac{1}{2} h_1\right) K_1^+ - h_2\left(c + \tfrac{1}{2} h_2\right) K_2^+ \; ;$$

$$a_4 = c^2\left(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \tfrac{2}{3} c K_3^+\right); \quad a_5 = c\left[h_1\left(c + \tfrac{1}{2} h_1\right) K_1^+ + h_2\left(c + \tfrac{1}{2} h_2\right) K_2^+ + \tfrac{2}{3} c^2 K_3^+\right];$$

$$a_6 = h_1\left(c^2 + c h_1 + \tfrac{1}{3} h_1^2\right) K_1^+ + h_2\left(c^2 + c h_2 + \tfrac{1}{3} h_2^2\right) K_2^+ + \tfrac{2}{3} c^3 K_3^+ \; ;$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2} \; ; \; L_3(g) \equiv \frac{1}{r}\left(r L_2(g)\right)_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2 g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3} \, .$$

Задача определения функций $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ замыкается присоединением к (1) граничных и начальных условий

$$w(r, 0) \equiv f(r), \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r) \, . \tag{2}$$

Система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластины следует из (1) при $q = 0$. Ее решение рассмотрено в [1]. В результате построена система собственных ортонормированных функций $v_n(\beta_n, r)$, которая для сплошных пластин имеет вид

$$v_n(\beta_n, r) \equiv \frac{1}{d_n}\left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r)\right] \tag{3}$$

где J_0, I_0, J_1, I_1 – функции Бесселя;
d_n – нормировочные коэффициенты

$$d_n^2 = \int_0^1 \left[J_0(\beta_n r) - \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)} I_0(\beta_n r)\right]^2 r dr = \frac{1}{2}\left[J_0^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)\right] -$$

$$- \frac{J_0(\beta_n)}{\beta_n I_0(\beta_n)}\left[J_1(\beta_n) I_0(\beta_n) + J_0(\beta_n) I_1(\beta_n)\right] + \frac{J_0^2(\beta_n)}{2 I_0^2(\beta_n)}\left[I_0^2(\beta_n) - I_1^2(\beta_n)\right],$$

Для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластины внешняя нагрузка $q(r, t)$ и искомые перемещения $u(r, t)$, $\psi(r, t)$, $w(r, t)$ представляются в виде разложений в ряд:

$$q(r, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t) \; ;$$

$$u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t) \, , \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t) \, , \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t) \, , \tag{4}$$

где $T_n(t)$ – неизвестная функция времени;
$q_n(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки в ряд по собственным функциям;
β_n – собственные числа; φ_n – система функций

$$\varphi_n = \frac{\beta_n}{d_n}\left[J_1(\beta_n) r - J_1(\beta_n r) + \frac{J_0(\beta_n)}{I_0(\beta_n)}\left(I_1(\beta_n) r - I_1(\beta_n r)\right)\right];$$

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2} \; ; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2} \, .$$

Алгебраические уравнения для определения собственных чисел β_n следуют из граничных условий. При заделке или шарнирном опирании контура пластины при $r = 1$ должны выполняться требования:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0; \quad \text{или} \quad u = \psi = w = M_r = 0.$$

Первые три равенства выполняются тождественно в каждом случае, а последние приводят к следующим трансцендентным уравнениям:

$$\frac{I_1(\beta)}{I_0(\beta)} = -\frac{J_1(\beta)}{J_0(\beta)}\,;$$

$$\frac{J_0(\beta)}{a_7(\beta J_0(\beta) - J_1(\beta)) + a_8 J_1(\beta)} = -\frac{I_0(\beta)}{a_7(\beta I_0(\beta) - I_1(\beta)) + a_8 I_1(\beta)}\,. \tag{5}$$

После вычисления собственных чисел частоты колебаний ω_n определяются так:

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4}{M^4}\,, \quad \beta_n^4 = \lambda_n^4 + \kappa^4\,, \tag{6}$$

где

$$a_{60} = h_1\left(c^2 + ch_1 + \tfrac{1}{3}h_1^2\right)K_1^- + h_2\left(c^2 + ch_2 + \tfrac{1}{3}h_2^2\right)K_2^- + \tfrac{2}{3}c^3 K_3^-\,;$$

$$K_k^- \equiv K_k - \tfrac{2}{3}G_k\,; \quad a_7 = a_6 - a_2 b_1 - a_5 b_2\,, \quad a_8 = a_{60} + a_2 b_1 + a_5 b_2\,.$$

$$M^4 = \frac{M_0 a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}\,, \quad \kappa^4 = \kappa_0 D\,.$$

Коэффициенты разложения нагрузки в ряд $q_n(t)$ получим, умножив первое из соотношений (4) на v_n и проинтегрировав его по площади пластины. В силу ортонормированности системы собственных функций v_n имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0}\int_0^1 q(r,t)\, v_n r\, dr \tag{7}$$

Уравнение для определения неизвестной функции времени $T_n(t)$ следует из третьего уравнения системы (1) после подстановки в него выражений (4) и использования линейной связи функций v_n, φ_n:

$$\ddot{T}_n + \omega^2 T_n = q_n\,. \tag{8}$$

Общее решение уравнения (8) будет

$$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n (t-\tau)\, q_n(\tau)\, d\tau\,. \tag{9}$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются из начальных условий (2):

$$A_n = \int_0^1 f(r) v_n r dr; \quad B_n = \frac{1}{\omega_n}\int_0^1 g(r) v_n r dr\,. \tag{10}$$

2. Вынужденные колебания параболической нагрузкой.

1. Пусть на пластину действует локально приложенная выпуклая параболическая нагрузка (рис. 1, *a*)

$$q(r) = q_0 H_0(a-r)\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right), \tag{11}$$

где $H_0(r)$ − единичная функция Хевисайда; q_0 = const.

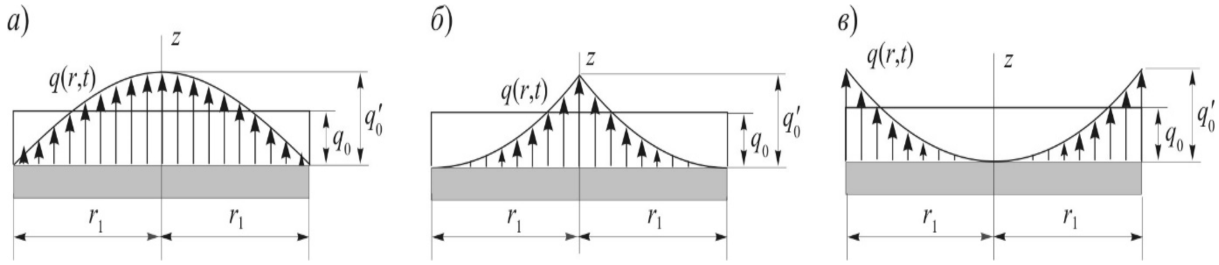


Рис. 1. Расчетная схема

Подставив (11) в формулу $(4)_1$, получим следующее интегральное выражение для параметров разложения нагрузки в ряд по системе собственных ортонормированных функций:

$$q_n(t) = \frac{q_0}{M_0 d_n a^2}\int_0^{r_1} H_0(a-r)\left(J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r)\right)(a^2 - r^2) r dr .$$

После вычисления определенных интегралов, содержащих произведения степенных, бесселевых функций и функций Хевисайда, получим

$$q_n(t) = \frac{2q_0}{M_0 d_n \lambda_n^2}\left[J_2(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n)}{I_0(\lambda_n)} I_2(\lambda_n a)\right] \tag{12}$$

2. Пусть вогнутая параболическая нагрузка распределена по кругу радиуса $r = a$ (рис. 1, *б*). Ее аналитический вид

$$q(r,t) = q_0 H_0(a-r)\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)\right)^2 . \tag{13}$$

Подставив (13) в формулу $(4)_1$, имеем

$$q_n(t) = \frac{4q_0}{M_0 d_n \lambda_n^3 a}\left[\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(\lambda_n a) + \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m I_{2m+1}(\lambda_n a)\right] \tag{14}$$

3. Пусть внезапно приложенная нагрузка распределена по кругу $r \le a$, обращаясь в нуль в центре пластины и достигая максимума на контуре силовой окружности (рис. 1, *в*):

$$q(r,t) = \frac{q_0 r^2}{a^2} H_0(a-r) . \tag{15}$$

В этом случае выражение для параметров разложения нагрузки в ряд будет

$$q_n(t) = \frac{q_0}{M_0 d_n \lambda_n}\left[a J_1(\lambda_n a) - \frac{2}{\beta_n} J_2(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)}\left(a I_1(\lambda_n a) - \frac{2}{\beta_n} I_2(\lambda_n a)\right)\right] \tag{16}$$

4. Для случая равномерно распределенной локальной прямоугольной нагрузки

$$q(r,t) = q_0 H_0(a-r) \tag{17}$$

параметры разложения в ряды (3) будут

$$q_n(t) = \frac{q_0 a}{M_0 d_n \lambda_n}\left(J_1(\lambda_n a) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_1(\lambda_n a) \right) \tag{18}$$

Теперь перемещения в рассматриваемой задаче о вынужденных колебаниях круговой трехслойной пластины определяются соотношениями (4), а функция $T_n(t)$ вычисляется по формуле (9) с учетом параметров нагрузок (12), (14), (16), (18).

3. Численные результаты получены для защемленной по контуру круговой трехслойной пластины, несвязанной и связанной с основанием средней жесткости $\kappa_0 = 10^8$ Па/м. Линейные размеры отнесены к радиусу пластины. Слои набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т с относительной толщиной $h_1 = h_2 = 0{,}01$, $c = 0{,}05$. Начальные условия движения нулевые, что позволяет положить в (9) константы интегрирования $A_n = B_n = 0$. Анализ сходимости суммируемых рядов при вычислении перемещений показал, что достаточно удерживать первые 14 слагаемых, так как добавление последующих на результат практически не влияет.

Примем, что равнодействующая параболической (16) и прямоугольной (17) нагрузок одинакова. Для этого потребуем равенство интегралов по объему, занимаемому соответствующей нагрузкой в фиксированный момент времени. В результате получим соответствующую амплитуду параболической нагрузки

$$q_0' = q_0 \int_V H_0(a-r)dV \Bigg/ \int_V H_0(a-r)\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)dV = 2q_0 \tag{19}$$

Рис. 2, *а* демонстрирует изменение во времени прогибов в центре рассматриваемой пластины, связанной с упругим основанием, при воздействии на внешнюю поверхность верхнего слоя нагрузки параболической (кривая *1*, = 70 кПа) и прямоугольной (кривая *2*, $q_0' = 2q_0$) форм с одинаковой равнодействующей. На рис. 2, *б* показано изменение прогиба в зависимости от радиуса пятна локальной распределенной динамической нагрузки в момент времени $t = \pi/\omega_0$ при одинаковой по величине равнодействующей. Максимальный прогиб от выпуклой параболической нагрузки в момент $t = 0{,}0355$ с превосходит по величине прогиб от прямоугольной нагрузки в 1,35 раз. Следовательно, при одинаковой по величине равнодействующей выпуклая параболическая нагрузка более опасна, чем прямоугольная, как вызывающая в пластине бóльшие прогибы.

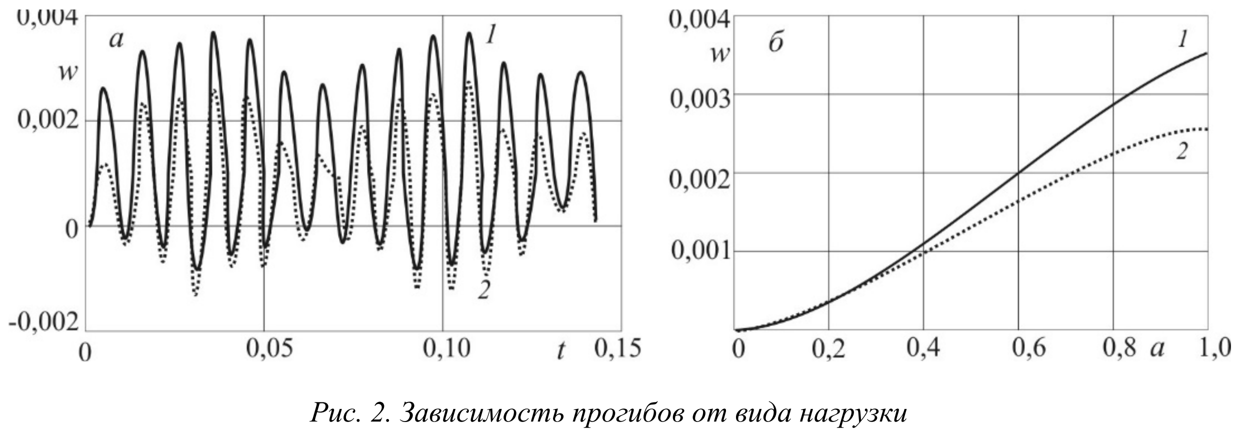
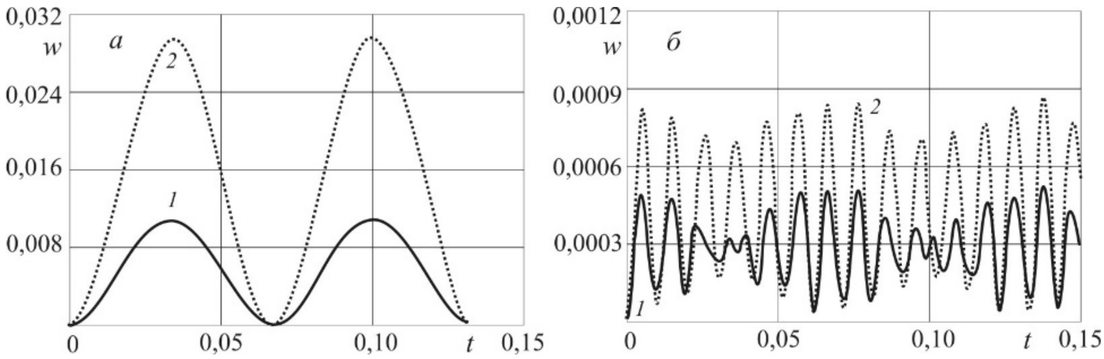


Рис. 2. Зависимость прогибов от вида нагрузки

На рис. 3 показано изменение прогибов пластины во времени при воздействии локальной распределенной нагрузки вогнутой параболической формы (18): *1* – a = 0,5; *2* – a = 1 (*а* – без основания, *б* – на основании средней жесткости). В этом случае амплитуда вогнутой параболической нагрузки, рассчитанная по формуле аналогичной (19), превосходит интенсивность принятой прямоугольной нагрузки q_0 = 60 кПа в 6 раз: $q_0' = 6q_0$. При наличии основания максимальный прогиб уменьшается примерно в 27 раз. Распространение нагрузки на всю поверхность пластины увеличивает прогиб в 2,7 раза пластины несвязанной с упругим основанием, и в 1,6 раза при наличии основания. Подобный результат наблюдается и для относительного сдвига в заполнителе.



1 –a = 0,5; *2* – a = 1

Рис. 3. Изменение прогибов при воздействии нагрузки вогнутой параболической формы при отсутствии основания (а) и на основании средней жесткости (б)

Заключение. Таким образом, рассмотрена методика исследования вынужденных колебаний круглых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием и находящихся под действием локальных поверхностных параболических нагрузок. Получены аналитические решения ряда начально-краевых задач для пластин с легким заполнителем и проведена их численная апробация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю.М. Динамика металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. навука, 2004. – 386 с.

2. Журавков, М.А. Математические модели сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э. И. Старовойтов – Минск: БГУ, 2011.– 540 с.

3. Starovoitov, E.I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E.I. Starovoitov, F.B. Nagiyev. – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, 2012. – 346 p.

4. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Бел. навука, 2017. – 275 с.

5. Яровая, А.В. Изгиб трехслойной ортотропной пластины с усиливающей накладкой / А.В. Яровая // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – Вып. 33. – С. 112–116.

6. Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А.В. Яровая – УО БелГУТ Гомель, 2013.

7. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

8. Старовойтов, Э.И. Исследование решения системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающей колебания трехслойной вязкоупругой оболочки / Э.И. Старовойтов, С.А. Воробьев // Известия Академии наук Белорусской ССР. Серия физико-математических наук. – 1990. № 1. – С. 19–24.

9. Горшков, А. Г. Колебания круглой линейно-вязкоупругой трехслойной пластинки / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Проблемы прочности. – 2001. – № 3. – С. 100–107.

10. Gorshkov, A.G. Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell / A.G. Gorshkov, E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya // International applied mechanics. – 2001. – Vol. 37, N 9. – P. 1196–1203.

11. Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989.– № 5. – С. 114 –119.

12. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. –Vol. 39, N 8. – P. 945–952.

13. Старовойтов, Э. И. Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А.В. Яровая // Проблемы прочности. – 2002.– Т. 34. № 5.– С. 70–79.

14. Fedotenkov, G.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlakovskiy // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 162, No. 2. – P. 246–253.

15. Tarlakovskii, D.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, No. 2. – P. 145–152.

16. Starovoitov, E.I. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, N 12.– P. 1458–1463.

17. Starovoitov, Resonant local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation/ E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, N 1. – P. 86–93.

18. Starovoitov, E.I. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, N 5. – P. 561–570.