

Свойства релаксационных связей в динамических системах мобильных машин

Рассмотрены вопросы влияния релаксационного упругого элемента на колебания динамической системы, являющейся аналогом системы подрессоривания мобильной машины. Представлены математические модели одномассовых и двухмассовых систем с учетом релаксационных связей, а также различные форматы записи уравнений движения. Приведены амплитудно-частотные характеристики вертикальных перемещений и ускорений подрессоренной массы в зависимости от величины релаксационной жесткости, моделирующей упругое соединение диссипативного элемента с амортизируемой массой.

Ключевые слова: амортизатор, релаксация, колебательный процесс, моделирование, расчетная схема, дифференциальные уравнения движения, модель в переменных состояниях, динамическая система.

Обозначения

z_1 — вертикальное перемещение амортизированной массы;

z_{Rk} — вертикальное перемещение k -й "релаксационной" точки; $k = \overline{1, n_R}$;

n_R — количество релаксационных связей;

z_2 — вертикальное перемещение неамортизированной массы;

C_1 — жесткость упругого элемента;

C_{Rk} — жесткость k -го релаксационного упругого элемента;

K_{1k} — коэффициент сопротивления k -го амортизатора;

$C(\omega)$ — упругая составляющая динамической жесткости;

$D(\omega)$ — диссипативная составляющая динамической жесткости

Введение. Успешное решение большого количества задач в динамике механических систем связано со знанием фундаментальных свойств систем с релаксационным демпфированием. Особенностью систем релаксационного демпфирования является существование в их динамических моделях элементов Кельвина или Максвелла, т. е. последовательно соединенных демпфера и ослабляющего его действие релаксационного упругого элемента. Свойства релаксационного демпфирования определяются сжимаемостью рабочей жидкости или газа и податливостью элементов конструкции [7].

Любое уменьшение жесткости крепления амортизаторов отрицательно сказывается на ускорениях, третьих производных перемещений подрессоренных масс и деформациях рессор для всех дорог и скоростей движения [11]. Оптимальным значением является жесткость $C_R = \infty$. Что касается деформаций шин и вероятности отрыва колес от дороги, то используя нежесткое крепление амортизаторов, можно несколько повысить безопасность движения при определенных соотношениях между параметрами системы (C_1, C_2, C_R, K_1).

Влияние конструкции крепления амортизаторов на колебания автомобилей исследовано проф. А. А. Хачатуровым и его учениками [5]. Как правило, при анализе влияния сопротивления амортизаторов на колебания автомобиля, предполагается, что амортизаторы жестко прикреплены к подрессоренным и

неподдресоренным массам. Однако при наличии резиновых втулок в монтажных узлах амортизаторов это крепление нельзя признать абсолютно жестким: жесткость втулок $C_R = (3 \div 5)C_2$ (где C_2 — жесткость шины). В связи с этим возникают вопросы: как резиновые втулки влияют на колебания автомобиля, можно ли улучшить плавность хода и безопасность движения автомобиля путем подобного изменения конструкции. Отметим, что речь идет о низкочастотных колебаниях (0—20 Гц), а не о высокочастотных вибрациях, которые эффективно поглощаются такими резиновыми втулками. Проверочные испытания показывают, что использование резиновых втулок в монтажных узлах несколько ухудшает плавность хода автомобиля, но уменьшает вероятность отрыва колес от дороги, вследствие уменьшения диапазона частот колебаний, при котором происходит отрыв колес от дороги, и смещения этого диапазона в сторону высоких резонансных частот.

Ниже приведены математические модели и амплитудно-частотные характеристики перемещений и ускорений амортизированной массы в частотном диапазоне 0—16 Гц для различных значений параметра $a = C_R/K_1$, а также программа динамического анализа в MatLab колебательной системы с релаксационной связью, подверженной кинематическому возбуждению.

Общие свойства системы с релаксационным демпфированием. Уравнения движения одномассовой системы с одной релаксационной связью при динамическом возбуждении массы m гармонической силой с амплитудой F записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z}_1 + C_1\dot{z}_1 + C_R(z_1 - z_R) &= F\sin\omega t; \\ C_R(z_1 - z_R) &= K_1\dot{z}_R; \end{aligned} \right\} (1)$$

$$z_1(t_0) = z_{10}, \dot{z}_1(t_0) = \dot{z}_{10}; z_R(t_0) = z_{R0},$$

t_0 — начальный момент времени переходного процесса.

Если в модели n_R релаксационных связей, то уравнения движения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z}_1 + C_1\dot{z}_1 + \\ + \sum_{k=1}^{n_R} C_{Rk}(z_1 - z_{Rk}) &= F\sin\omega t; \\ C_{Rk}(z_1 - z_{Rk}) &= K_{1k}\dot{z}_{Rk}, k = \overline{1, n_R} \end{aligned} \right\} (2)$$

или

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z}_1 + C_1\dot{z}_1 + \\ + \sum_{k=1}^{n_R} C_{Rk}(z_1 - z_{Rk}) &= F\sin\omega t; \\ \dot{z}_{Rk} + a_k z_{Rk} &= a_k z_1, k = \overline{1, n_R}, \end{aligned} \right\} (3)$$

где $a_k = C_{Rk}/K_{1k}$ — константа k -го релаксационного элемента.

Рассмотрим основные свойства системы с релаксационным демпфированием.

1. На частотной характеристике упругой составляющей динамической жесткости

$$C(\omega) = C_1 + \sum_{k=1}^{n_R} C_{Rk} \frac{\omega^2}{a_k^2 + \omega^2} \quad (4)$$

находятся два основных и некоторое количество промежуточных участков, близких к горизонтальным. Основные участки расположены в области низких и высоких частот, они равны соответственно статической и релаксационной жесткостям системы. В точке $\omega = a_k/\sqrt{3}$ находится точка перегиба.

2. Диссипативная составляющая динамической жесткости

$$D(\omega) = \sum_{k=1}^{n_R} C_{Rk} \frac{a_k \omega}{a_k^2 + \omega^2} \quad (5)$$

и имеет экстремальные значения по частоте. Положение и величина экстремальных значений находятся в соответствии

випуклоно
копстро

с действительной составляющей. При $C_{Rk} \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ величина диссипативной составляющей стремится к нулю. Наличие максимальных значений этой величины позволяет настраивать устройства такого класса на режимы максимального демпфирования. Максимум демпфирования достигается при $\omega \rightarrow a$.

3. На амплитудно-частотной характеристике, описываемой уравнением

$$A(\omega) = \frac{F}{\sqrt{\left(-m\omega^2 + C_1 + \sum_{k=1}^{n_R} C_{Rk} \frac{\omega^2}{a_k^2 + \omega^2}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n C_{Rk} \frac{a_k \omega^2}{a_k^2 + \omega^2}\right)^2}}, \quad (6)$$

существует инвариантная точка

$$\Omega = \sqrt{\frac{2C_1 + \sum_{k=1}^{n_R} C_{Rk}}{2m}},$$

в которой наблюдается наиболее эффективное демпфирование.

Свойства двухмассовой системы с кинематическим возбуждением. Рассмотрим двухмассовую систему с одной релаксационной связью при кинематическом возбуждении, уравнения движения которой имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 &= C_1(z_2 - z_1) + C_R(z_R - z_1); \\ m_2 \ddot{z}_2 &= -[C_1(z_2 - z_1) + K_1(\dot{z}_2 - \dot{z}_R)] + \\ &+ C_2(q - z_2) + K_2(\dot{q} - \dot{z}_2); \\ K_1 \dot{z}_R &= K_1 \dot{z}_2 - C_R(z_R - z_1), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$z_1(t_0) = z_{10}, \dot{z}_1(t_0) = \dot{z}_{10};$$

$$z_2(t_0) = z_{20}, \dot{z}_2(t_0) = \dot{z}_{20}; z_R(t_0) = z_{R0}.$$

Введя обозначения:

$$\omega_1^2 = \frac{C_1}{m_1}, \omega_2^2 = \frac{C_2}{m_2}, \omega_3^2 = \frac{C_1}{m_2}, \omega_R^2 = \frac{C_R}{m_1};$$

$$\eta_1 = \frac{K_1}{m_1}, \eta_2 = \frac{K_2}{m_2}, \eta_3 = \frac{K_1}{m_2}, a = \frac{C_R}{K_1},$$

систему (7) можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_1 &= \omega_1^2(z_2 - z_1) + \omega_R^2(z_R - z_1); \\ \ddot{z}_2 &= -[\omega_3^2(z_2 - z_1) + \eta_3(\dot{z}_2 - \dot{z}_R)] + \\ &+ \omega_2^2(q - z_2) + \eta_2(\dot{q} - \dot{z}_2); \\ \dot{z}_R &= \dot{z}_2 - a(z_R - z_1). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Константы $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_R$ определяют частотные свойства системы, а константы η_1, η_2, η_3 — диссипативные свойства (рассеивание энергии). Константа a характеризует свойства релаксационной связи.

Для компьютерного моделирования систему (8) представим в векторно-матричном виде в переменных состояния. Для перехода от системы (8) к модели в переменных состояния произведем замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= x_1, \dot{z}_1 = x_2; \\ z_2 &= x_3, \dot{z}_2 = x_4; \\ z_R &= x_5, \dot{z}_R = x_6; \\ q &= u_1, \dot{q} = u_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

При обозначениях (9) система (8) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \omega_1^2(x_3 - x_1) + \omega_R^2(x_5 - x_1); \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -[\omega_3^2(x_3 - x_1) + \eta_3(x_4 - x_2)] + \\ &+ \omega_2^2(u_1 - x_3) + \eta_2(u_2 - x_4); \\ \dot{x}_5 &= x_4 - a(x_5 - x_1); \\ x_i(t_0) &= x_{i0}, i = 1, \dots, 5. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

К системе (10) добавляются три уравнения для выходных переменных:

$$y_1 = z_1; y_2 = z_2; y_3 = z_R. \quad (11)$$

Системы уравнений (10)–(11) можно записать в векторно-матричной форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= A\vec{x} + B\vec{u}; \\ \vec{y} &= C\vec{x}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где \vec{x} — вектор состояния; A — матрица коэффициентов; B — матрица входа; \vec{u} — вектор входа; \vec{y} — вектор выхода; C — матрица выхода;

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -(\omega_1^2 + \omega_R^2) & 0 & \omega_1^2 & 0 & \omega_R^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega_3^2 & \eta_3 & -(\omega_2^2 + \omega_3^2) & -(\eta_2 + \eta_3) & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & -a \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_2^2 & \eta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

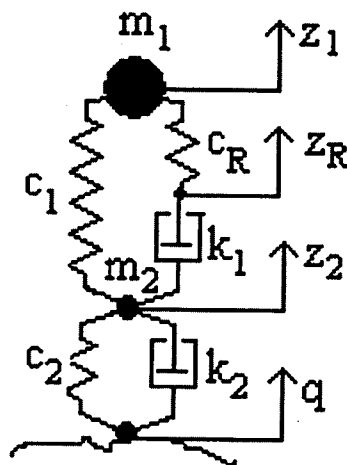


Рис. 1. Расчетная схема динамической системы

Таблица

Значения параметров модели

Обозначение	Единица измерения	Значение
m_1	кг	5 000
m_2	кг	500
C_1	Н/м	500 000
k_1	Н · с/м	20 000
C_2	Н/м	1 000 000
k_2	Н · с/м	5 000

Система уравнений в переменных состояния (12) позволяет достаточно легко использовать численные процедуры решения дифференциальных уравнений методами Эйлера, Рунге-Кутты и др., а также упрощает вычисления в средах MathCAD, MatLab, Simulink.

Компьютерное моделирование. Расчетная схема динамической системы с одной релаксационной связью приведена на рис. 1, а ее параметры — в таблице. Моделирование проводилось при кинематическом возмущении $q(t) = q_0 \sin \omega_q t$, где q_0 — амплитуда. Принималось $q_0 = 0,1$ м.

На рис. 2 представлены амплитудно-частотные характеристики перемещений подрессоренной массы m_1 , полученные для различных значений параметра a . Амплитудно-частотные характеристики ускорений при этих же параметрах приведены на рис. 3. Результаты получены в среде ADMOS [3, 4, 6].

Анализ кривых рис. 2 показывает, что значительное снижение жесткости релаксационного элемента (резиновой

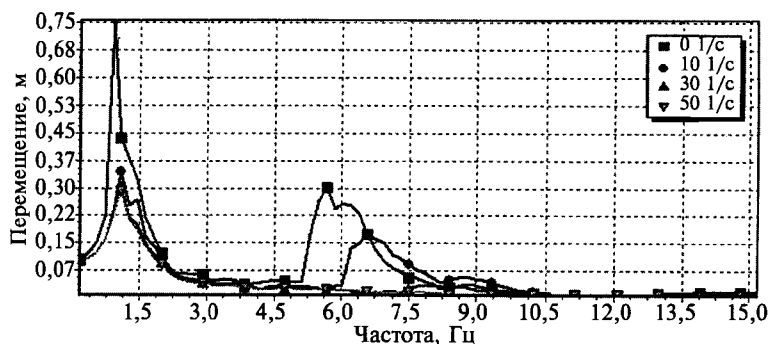


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики вертикальных перемещений подрессоренной массы m_1 , соответствующие различным значениям параметра a

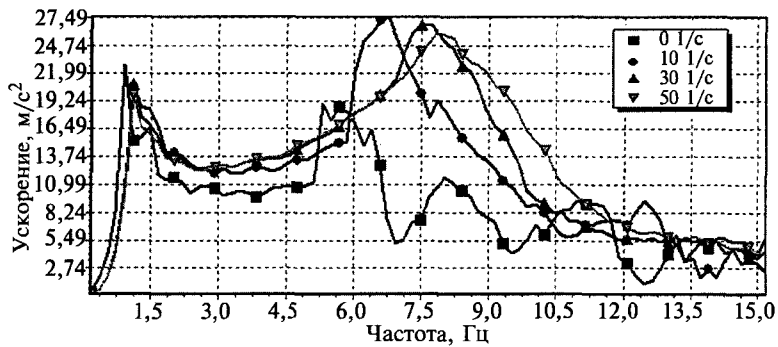


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики вертикальных ускорений подрессоренной массы m_1 , соответствующие различным значениям параметра a

втулки монтажного узла крепления амортизатора) ведет к росту перемещений амортизированной массы m_1 в резонансных низкочастотной и высокочастотной зонах и в асимптотическом случае стремится к режиму недемпфированных колебаний. При этом, как видно из рис. 3, изменение жесткости релаксационного элемента в рассмотренных пределах мало влияет на уровень ускорений подрессоренной массы, а лишь несколько смещается положение высокочастотного резонанса. Видно, что влияние амортизатора при $C_R \Rightarrow \infty$ ухудшает показатели по плавности в зоне высокочастотного резонанса.

Вывод. В результате компьютерного эксперимента установлено, что воздействие релаксационного элемента на колебательные процессы динамической системы в основном наблюдаются в области высокочастотного резонанса. Аналогичные результаты получены при моделировании как в среде MatLab, так и в среде ADMOS. Приведенная модель и программная реализация могут быть использованы в других задачах, связанных с моделированием колебаний пассивных и активных систем подрессорирования мобильных машин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белоусов, А. И. Один из эффективных путей решения актуальных проблем двигателестроения [Текст] / А. И. Белоусов // Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. Межвуз. сб. — Куйбышев: КуАИ, 1981. — Вып. 2. — С. 166—176.
2. Вибрации в технике: справочник в 6 т. / Ред. К. В. Фролов. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Машиностроение, 1999. — Т. 6: Защита от вибрации и ударов / Р. И. Фу-

- рунжиев, В. К. Асташев [и др.]; ред. К. В. Фролов. — М.: Машиностроение, 1995. — 460 с.
3. Гурский, Н. Н. Моделирование, анализ и оптимизация колебаний многоопорных машин [Текст] / Н. Н. Гурский, Р. И. Фурунжиев // Сб. науч. тр. III Белорусского Конгресса по теорет. и прикл. механике. ОИМ НАН Беларуси, Минск, 16—18 октября 2007 г. С. 184—191. — ISBN 978-985-6637-17-2.
4. Гурский, Н. Н. Моделирование и оптимизация колебаний многоопорных машин. [Текст] / Н. Н. Гурский, Р. И. Фурунжиев. — Минск: Изд. БНТУ, 2008. — 296 с.
5. Динамика системы "Дорога—шина—автомобиль—водитель". Под ред. А. А. Хачатурова. — М.: Машиностроение, 1976. — 535 с.
6. Программное обеспечение моделирования и оптимизации динамических систем ADMOS. Роспатент: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2000610671 от 21 июля 2000 г. (Copyright of the ADMOS) / Р. И. Фурунжиев, Н. Н. Гурский.
7. Стрелков, С. П. Введение в теорию колебаний [Текст] / С. П. Стрелкова. — М.: Наука, 1964. — 437 с.
8. Филипс, Ч. Системы управления с обратной связью [Текст] / Ч. Филипс, Р. Харбор. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 616 с.
9. Фурунжиев, Р. И. Автоматизированное проектирование колебательных систем [Текст] / Р. И. Фурунжиев. — Минск: Высш. шк., 1977. — 454 с.
10. Чегодаев, Д. Е. Общие свойства пневматических и гидравлических устройств управления как систем релаксационного демпфирования [Текст] / Д. Е. Чегодаев, А. И. Белоусов // Пневматические и гидравлические устройства и системы управления. Сб. [X Международная конференция "Яблонна—86"]. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — С. 285—286.
11. Behles, F. Federung und Dämpfung unter den Gesichtspunkten der Fahrsicherheit und des Komforts [Text] / F. Behles. ATZ. — 1970. — N 72, P. 320—381.