

РАЗРАБОТКА ПЛОСКОЙ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛЕЙ СВОБОДНОГО И ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОГО ЗВЕНА ЭКЗОСКЕЛЕТА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ С ДВУМЯ ВЕСОМЫМИ АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫМИ УЧАСТКАМИ*

¹Борисов А.В., ¹Кончина Л.В., ¹Маслова К.С., ²Чигарев А.В.

¹ Филиал ФГОУ ВО «НИУ «МЭИ» в г. Смоленске

² Белорусский государственный университет, Минск

1. Введение

Ранее [1] были исследованы причины, которые вызывают изменение длины звена в опорно-двигательном аппарате человека. Была предложена модель звена переменной длины, используемая для построения моделей опорно-двигательного аппарата человека. Эта модель представляла собой невесомый стержень, изменяющий свою длину, и расположенные на нем точечные массы. Но такая модель не может быть использована при изготовлении экзоскелета. В этой статье описывается разработанная модель звена переменной длины, которую возможно использовать при создании реального экзоскелета. Данная модель отличается от ранее разработанных [2-5] наличием двух массивных абсолютно твердых участков и находящимся между ними невесомым участком переменной длины. Изменение длины невесомого участка может быть реализовано при использовании пружины, работающей на растяжение-сжатие. Однако, при этом управление изменением длины звена будет невозможно. Для управляемого изменения длины звена можно использовать шаговый электрический двигатель, пневматический или гидравлический цилиндры. В статье не конкретизируется устройство, позволяющее изменять длину звена. Оно аппроксимируется продольной силой F , направленной вдоль звена [2,3].

2. Описание плоской модели закрепленного звена экзоскелета переменной длины с двумя массивными абсолютно твердыми участками и одним невесомым переменной длины между ними и составление дифференциальных уравнений движения

Рассмотрим модель звена, которая состоит из двух весоных абсолютно жестких частей, совершающих движение относительно друг друга вдоль прямой AB , проходящей через его начало и конец (рис. 1). Цилиндрический шарнир, расположенный в точке A , жестко соединен с опорной поверхностью. Под действием силы тяжести, реакций со стороны опоры и соседних стержней (не показанных на рис. 1) происходит движение участка DB относительно участка AC вдоль направления AB , тем самым обеспечивается изменение длины звена на участке CD .

Для исследования плоского движения звена экзоскелета переменной длины введем неподвижную правую декартову систему координат $ху$ с началом в точке O . Рассмотрим плоскость $ху$, в которой происходит движение центра масс.

Система имеет два весоных абсолютно жестких стержня: AC и DB . На рис. 1 схематично изображено звено AB и введены соответствующие обозначения. Длины звеньев $AC = l_{11}$, $DB = l_{12}$, двойная нумерация индексов связана с построением многозвенной модели экзоскелета: первый индекс соответствует номеру звена, второй – номеру весоного участка на звене. Переменность длины звена реализуется за счет относительного

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Смоленской области в рамках научного проекта № 19-48-670002

The reported study was funded by RFBR and Smolensk region, project number 19-48-670002

движения вдоль направления звена AB участка DB . Участок переменной длины CD считается невесомым. Считаем, что на нем имеется сила F_1 , которая обеспечивает необходимое управляемое изменение длины звена.

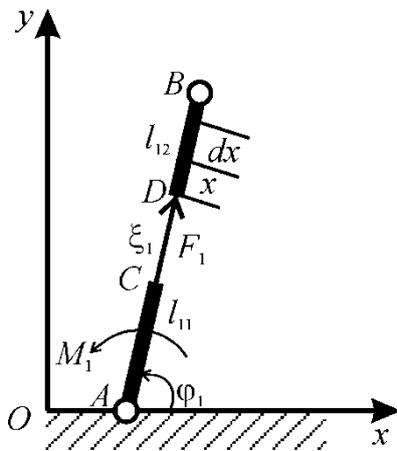


Рис. 1. Модель звена экзоскелета переменной длины на плоскости

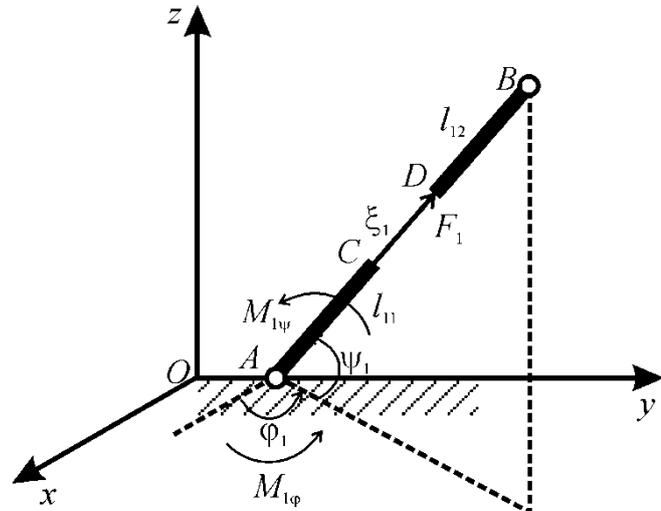


Рис. 2. Модель звена экзоскелета переменной длины в пространстве

Положение однозначно определяется углом φ_1 и переменной длиной участка стержня $\xi_1(t) = CD$. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Обозначим через M_1 момент, развиваемый в шарнире A , являющийся управлением и определяющим угловое перемещение звена. Изменение длины участка стержня $\xi_1(t)$ задается силой F_1 , которая является вторым управляющим параметром в рассматриваемой системе.

Масса стержня AC равна m_{11} , момент инерции относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения I_{11} , для стержня DB масса равна m_{12} , момент инерции относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения I_{12} .

Кинетическая энергия звена будет складываться из энергии звена AC и DB .

$$T = T_{AC} + T_{DB}.$$

$$T_{AC} = (m_{11}n_{11}^2 l_{11}^2 + I_{11}) \dot{\varphi}_1^2 / 2 \quad (1)$$

$$T_{DB} = [(\dot{\xi}_1^2)m_{12} + \{m_{12}(l_{11}^2 + l_{11}l_{12} + 2\xi_1 l_{11} + \xi_1 l_{12} + \xi_1^2) + I_{12}\} \dot{\varphi}_1^2] / 2$$

Дифференциальные уравнения движения, составленные с помощью уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид.

$$(I_{11} + I_{12} + m_{11}l_{11}^2 n_{11}^2 + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2)) \ddot{\varphi}_1 + g(m_{11}l_{11}n_{11} + m_{12}(l_{11} + l_{12}n_{12} + \xi_1)) \cos \varphi_1 + m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1) \dot{\xi}_1 \dot{\varphi}_1 = M_1, \quad (2)$$

$$-m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1) \dot{\varphi}_1^2 / 2 + gm_{12} \sin \varphi_1 + m_{12} \ddot{\xi}_1 = F_1. \quad (3)$$

Таким образом, составлена система дифференциальных уравнений движения, описывающая модель звена экзоскелета переменной длины на плоскости.

3. Модель шарнирно закрепленного звена экзоскелета в пространстве

Введем неподвижную правую декартову систему координат $Oxyz$, относительно

которой рассматривается движение механизма (рис. 2.). Звено AB переменной длины, состоящее из двух весомых частей, изменяющих свою длину, сохраняет свою конструкцию и обозначения, введенные для звена на плоскости.

Положение весомого участка звена зависит от трех параметров и однозначно определяется углами $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_{11}(t)$. Рассматриваемая система имеет три степени свободы. Обозначим через $M_{1\varphi}$ и $M_{1\psi}$ управляющие моменты, развиваемые в шарнире A . Продольная сила аналогична плоской модели.

Кинетическая энергия звена складывается из энергии звена AC и DB .

$$T = T_{AC} + T_{DB}.$$

$$T_{AC} = (m_{11}n_{11}^2l_{11}^2 + I_{11})(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2\psi_1 + \dot{\psi}_1^2)/2 \quad (4)$$

$$T_{DB} = [(\dot{\xi}_1^2)m_{12} + \{m_{12}(l_{11}^2 + l_{11}l_{12} + 2\xi_1l_{11} + \xi_1l_{12} + \xi_1^2) + I_{12}\}(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2\psi_1 + \dot{\psi}_1^2)]/2$$

Дифференциальные уравнения движения, составленные с помощью уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид.

$$(I_{11} + I_{12} + m_{11}l_{11}^2n_{11}^2 + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2))(\ddot{\varphi}_1 \cos^2\psi_1 - 2\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1 \cos\psi_1 \sin\psi_1) + m_{12}\cos^2\psi_1(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)\dot{\xi}_1\dot{\varphi}_1 = M_{1\varphi}, \quad (5)$$

$$(I_{11} + I_{12} + m_{11}l_{11}^2n_{11}^2 + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2))\ddot{\psi}_1 + \cos\psi_1 \sin\psi_1(I_{11} + I_{12} + m_{11}l_{11}^2n_{11}^2 + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2))\dot{\varphi}_1^2 + g(m_{11}l_{11}n_{11} + m_{12}(l_{11} + l_{12}n_{12} + \xi_1))\cos\psi_1 + m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)\dot{\xi}_1\dot{\psi}_1 = M_{1\psi}, \quad (6)$$

$$-m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)(\dot{\varphi}_1^2 \cos^2\psi_1 + \dot{\psi}_1^2)/2 + gm_{12}\sin\psi_1 + m_{12}\ddot{\xi}_1 = F_1. \quad (7)$$

Таким образом, составлена система дифференциальных уравнений движения, описывающая модель звена экзоскелета переменной длины на плоскости.

4. Построение дифференциальных уравнений движения пространственного экзоскелета по соответствующим уравнениям плоской модели с шарнирным закреплением

Сравнивая уравнения движения на плоскости и в пространстве, можно получить закономерность записи уравнений трехмерного движения по соответствующему дифференциальному уравнению для двумерной модели. Приведем полученные закономерности. Плоская и пространственная модели должны быть одинаковой структуры, т.е. иметь одинаковую конструкцию звеньев, расположение массивных и невесомых участков на звене.

Дифференциальные уравнения движения звена экзоскелета в трехмерном пространстве (5)–(7) отличаются от дифференциальных уравнений (2)–(3) следующим: их количество увеличилось на одно уравнение, соответствующее обобщенной координате ψ_1 , т.е. уравнений для угловых координат стало два. Уравнение, описывающее изменение длины звена экзоскелета в пространстве (7), в сравнении с уравнением (3), описывающим изменение длины звена на плоскости, изменилось незначительно. Угол φ_1 везде изменился на ψ_1 , что связано с особенностью введения углов в двумерной (рис. 1) и пространственной системе координат (рис. 2). Возникло еще одно слагаемое, связанное с углом φ_1 : $\dot{\varphi}_1^2 \cos^2\psi_1$, множитель $\cos^2\psi_1$ связан с проекцией звена на плоскость. Эти изменения следуют из того, что в двухмерном случае, угол, связанный с вертикалью (плоскостью, в которой происходило движение центра масс) был обозначен через φ_1 , а в трехмерной модели через ψ_1 , отсюда следуют данные различия и наличие такого слагаемого. Угол φ_1 , хоть и отсчитывается, как и прежде, от оси OX , но теперь

учитывает повороты звена в пространстве по горизонтали (в плоскости XOY). Соответственно, в слагаемом, содержащем ускорение свободного падения, угол φ_1 изменяется на ψ_1 . В остальном структура уравнения не изменяется.

Уравнение, описывающее изменение угловой координаты при плоском движении (2), распадается на два уравнения (5) и (6). Слагаемое, содержащее ускорение свободного падения, теперь содержится в уравнении (6), описывающем изменение угла ψ_1 и в соответствующем выражении угол φ заменяется на ψ_1 . То же касается и углового ускорения $\ddot{\psi}_1$. В уравнении (6) также возникает дополнительное слагаемое, содержащее $\cos\psi_1\sin\psi_1\dot{\varphi}_1^2$, связанное с угловой скоростью вращения звена в плоскости XOY .

Уравнение (5) получается из первого уравнения системы (2) следующим образом: отсутствует слагаемое, содержащее ускорение свободного падения; в слагаемых, содержащих $\dot{\xi}_1$ и $\ddot{\varphi}_1$ добавляется множитель $\cos^2\psi_1$, что, связано проекцией звена на плоскость XOY ; возникает слагаемое с множителем $\cos\psi_1\sin\psi_1\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1$, связанное с одновременным движением звена в двух плоскостях. В остальном уравнение сохраняет структуру двумерного. И изменяются соответствующим образом управляющие моменты.

Описанные закономерности позволяют при переходе к многозвенной модели экзоскелета, получить алгоритм построения систем дифференциальных уравнений движения трехмерных моделей экзоскелетов по уравнениям двумерных экзоскелетов, аналогично тому, как это описано в работах [4, 5] для звеньев, моделирующих опорно-двигательный аппарат человека.

5. Модель свободного звена экзоскелета переменной длины с двумя массивными абсолютно твердыми участками и одним невесомым переменной длины между ними на плоскости

Для исследования плоского движения звена экзоскелета переменной длины введем неподвижную правую декартову систему координат (рис. 3) $Oxuz$ с началом в точке O . Рассмотрим плоскость xOy , в которой происходит движение центра масс.

Рассмотрим модель звена, которая состоит из двух весоных абсолютно жестких частей, совершающих движение относительно друг друга вдоль прямой AB , проходящей через его начало и конец (рис. 3). В качестве полюса выберем точку A с координатами $(x_A(t), y_A(t))$ в неподвижной системе координат $Oxuz$. Под действием внутренней управляющей силы F_1 обеспечивается необходимое изменение длины звена на участке CD , которое происходит за счет движения участка DB относительно участка AC вдоль направления AB .

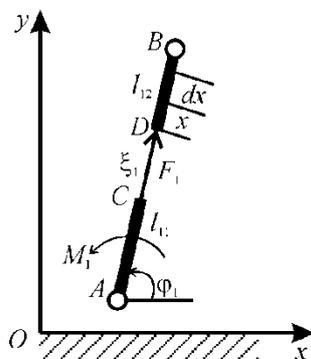


Рис. 3. Модель звена экзоскелета переменной длины на плоскости

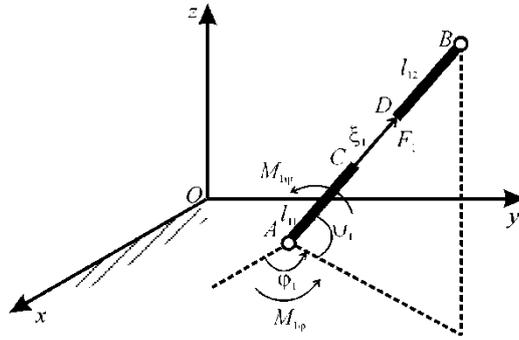


Рис. 4. Модель звена экзоскелета переменной длины в пространстве, движущегося по горизонтальной плоскости

Система имеет два весомых абсолютно жестких стержня: AC и DB . На рис. 4 схематично изображено звено AB и введены соответствующие обозначения. Длины звеньев $AC = l_{11}$, $DB = l_{12}$, двойная нумерация индексов связана с построением в дальнейшем многозвенной модели экзоскелета: первый индекс соответствует номеру звена, второй – номеру весомого участка на звене. Переменность длины звена реализуется за счет относительного движения вдоль направления звена AB участка DB . Участок переменной длины CD считается невесомым.

Положение звена экзоскелета однозначно определяется координатами точки $A(x_A(t), y_A(t))$, углом φ_1 и переменной длиной участка стержня $\xi_1(t) = CD$. Рассматриваемая система имеет четыре степени свободы. Изменение длины участка стержня $\xi_1(t)$ задается силой F_1 , которая является управляющим параметром в рассматриваемой системе.

Масса стержня AC равна m_{11} , момент инерции относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения I_{11} , для стержня DB масса равна m_{12} , момент инерции относительно оси проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения I_{12} .

Кинетическая энергия звена будет складываться из энергии звена AC и DB .

$$T = T_{AC} + T_{DB}.$$

$$T = [\theta(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \dot{\xi}_1^2 m_{12} + \zeta_1 \dot{\varphi}_1^2 + \dot{y}(2m_{12} S_1^\varphi \dot{\xi}_1 + \eta_1 C_1^\varphi \dot{\varphi}_1) + \dot{x}(2m_{12} C_1^\varphi \dot{\xi}_1 - \eta_1 S_1^\varphi \dot{\varphi}_1)]/2, \quad (8)$$

где: $\theta = m_{11} + m_{12}$ – масса всего механизма, $\eta_1 = m_{11}(l_{11} + 2l_{12}) + m_{12}(l_{12} + 2\xi_1)$, $\zeta_1 = I_{11} + I_{12} + m_{11}l_{12}(l_{11} + l_{12} + 2\xi_1) + m_{12}\xi_1(l_{12} + \xi_1)$, $C_1^\varphi = \cos\varphi_1$, $S_1^\varphi = \sin\varphi_1$.

Дифференциальные уравнения движения, составленные в форме уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид

$$\theta \ddot{x} - \eta_1 S_1^\varphi \ddot{\varphi}_1/2 + m_{12} C_1^\varphi \ddot{\xi}_1 - \eta_1 C_1^\varphi \dot{\varphi}_1^2/2 - 2m_{12} S_1^\varphi \dot{\xi}_1 \dot{\varphi}_1 = 0, \quad (9)$$

$$\theta \ddot{y} + \eta_1 C_1^\varphi \ddot{\varphi}_1/2 + m_{12} S_1^\varphi \ddot{\xi}_1 - \eta_1 S_1^\varphi \dot{\varphi}_1^2/2 + 2m_{12} C_1^\varphi \dot{\xi}_1 \dot{\varphi}_1 + \theta g = 0, \quad (10)$$

$$\eta_1 (C_1^\varphi \ddot{y} - S_1^\varphi \ddot{x})/2 + \zeta_1 \ddot{\varphi}_1 + \lambda_1 g C_1^\varphi + v_1 \dot{\xi}_1 \dot{\varphi}_1 = 0, \quad (11)$$

$$-v_1 \dot{\varphi}_1^2/2 + gm_{12} S_1^\varphi + m_{12} C_1^\varphi \ddot{x} + m_{12} S_1^\varphi \ddot{y} + m_{12} \ddot{\xi}_1 = F_1. \quad (12)$$

где в дополнение к обозначениям к формуле (8) вводятся следующие обозначения: $v_1 = 2m_{11}l_{12} + m_{12}(l_{12} + 2\xi_1)$, $\lambda_1 = m_{11}l_{11}/2 + m_{12}(l_{11} + l_{12}/2 + \xi_1)$.

6. Модель звена экзоскелета в пространстве, свободно движущегося по горизонтальной плоскости

Введем неподвижную правую декартову систему координат $Oxyz$, в которой происходит движение механизма (рис. 4). Звено AB переменной длины, состоящее из двух весомых частей изменяющих свою длину сохраняет свою конструкцию и обозначения, введенные для звена на плоскости. Предполагаем, что движение полюса A происходит в плоскости x,y .

Положение весомого участка звена экзоскелета зависит от пяти параметров и однозначно определяется координатами полюса $A(x_A(t), y_A(t))$, углами $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_{11}(t)$. Рассматриваемая система имеет пять степени свободы. Продольная сила аналогична плоской модели.

Кинетическая энергия звена складывается из энергии звена AC и DB .

$$T = [\theta(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \dot{\xi}_1^2 m_{12} + \zeta_1((C_1^\psi)^2 \dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2) + \dot{y} \{2m_{12} S_1^\phi C_1^\psi \dot{\xi}_1 + \eta_1(C_1^\phi C_1^\psi \dot{\phi}_1 - S_1^\phi S_1^\psi \dot{\psi}_1)\} + \dot{x} \{2m_{12} C_1^\phi C_1^\psi \dot{\xi}_1 - \eta_1(S_1^\phi C_1^\psi \dot{\phi}_1 + C_1^\phi S_1^\psi \dot{\psi}_1)\}]/2, \quad (13)$$

где: $C_1^\psi = \cos\psi_1$, $S_1^\psi = \sin\psi_1$.

Дифференциальные уравнения движения, составленные в форме уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид.

$$\theta \ddot{x} - \eta_1(S_1^\phi C_1^\psi \ddot{\phi}_1 + C_1^\phi S_1^\psi \ddot{\psi}_1)/2 + m_{12} C_1^\phi C_1^\psi \ddot{\xi}_1 - \eta_1 C_1^\phi C_1^\psi (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2)/2 - 2m_{12} S_1^\phi C_1^\psi \dot{\xi}_1 \dot{\phi}_1 - 2m_{12} C_1^\phi S_1^\psi \dot{\xi}_1 \dot{\psi}_1 + \eta_1 S_1^\phi S_1^\psi \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 = 0, \quad (14)$$

$$\theta \ddot{y} + \eta_1(C_1^\phi C_1^\psi \ddot{\phi}_1 - S_1^\phi S_1^\psi \ddot{\psi}_1)/2 + m_{12} S_1^\phi C_1^\psi \ddot{\xi}_1 - \eta_1 S_1^\phi C_1^\psi (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2)/2 + 2m_{12} C_1^\phi C_1^\psi \dot{\xi}_1 \dot{\phi}_1 - 2m_{12} S_1^\phi S_1^\psi \dot{\xi}_1 \dot{\psi}_1 + \eta_1 C_1^\phi S_1^\psi \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 = 0, \quad (15)$$

$$\eta_1(C_1^\phi C_1^\psi \ddot{y} - S_1^\phi C_1^\psi \ddot{x})/2 + \zeta_1((C_1^\psi)^2 \ddot{\phi}_1 - 2S_1^\psi C_1^\psi \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1) + v_1(C_1^\psi)^2 \dot{\xi}_1 \dot{\phi}_1 = 0, \quad (16)$$

$$- \eta_1(S_1^\phi S_1^\psi \ddot{y} + C_1^\phi S_1^\psi \ddot{x})/2 + \zeta_1(S_1^\psi C_1^\psi \dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2) + \lambda_1 g C_1^\psi + v_1 \dot{\xi}_1 \dot{\psi}_1 = 0, \quad (17)$$

$$- v_1((C_1^\psi)^2 \dot{\phi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2)/2 + g m_{12} S_1^\psi + m_{12} C_1^\phi C_1^\psi \ddot{x} + m_{12} S_1^\phi C_1^\psi \ddot{y} + m_{12} \ddot{\xi}_1 = F_1. \quad (18)$$

Следует отметить, что модели с закрепленным в начале координат шарниром на плоскости и в пространстве A являются частными случаями рассмотренных выше более общих моделей. Так, дифференциальные уравнения движения плоской модели с закрепленным шарниром получаются исключением первых двух уравнений (9)–(10) и заменой в уравнениях (11)–(12) обобщенных координат $x_A(t), y_A(t)$ и их производных нулями. Для пространственной модели соответственно исключаются уравнения (14)–(15), а в уравнениях (16)–(18) обобщенные координаты $x_A(t), y_A(t)$ и их производные заменяются нулями. Однако, в этих моделях становится возможным управляемое движение модели, если ввести в точке A цилиндрический шарнир с возможностью создания управляющего момента.

7. Построение системы дифференциальных уравнений движения экзоскелета в пространстве по соответствующим уравнениям плоской модели

Дифференциальные уравнения движения экзоскелета в трехмерном пространстве (14)–(18) отличаются от дифференциальных уравнений движения экзоскелета на плос-

кости (9)–(12) следующим: их количество увеличилось на одно уравнение, соответствующее обобщенной координате ψ_1 , т.е. уравнений для угловых координат стало два. Изменения дифференциальных уравнений движения вызваны тем, что в двухмерном случае угол, связанный с вертикалью (плоскостью, в которой происходило движение центра масс), был обозначен через ϕ_1 , а в трехмерной модели через ψ_1 , отсюда следуют различия и возникают дополнительные слагаемые, связанные с углом ψ_1 . Угол ϕ_1 , отсчитывается, как и прежде, от оси Ox , но теперь от проекции звена на горизонтальную плоскость xOy . Соответственно, слагаемое, содержащее ускорение свободного падения отстает в третьем уравнении и находится в четвертом уравнении, при этом к тригонометрическим функциям угла ϕ_1 добавляются функции угла ψ_1 . В остальном структура уравнений не изменяется.

В первом уравнении для плоской модели (9) и пространственной (14), соответствующим обобщенной координате x , изменения следующие. К обобщенной координате $\dot{\phi}_1^2$ добавилось аналогичное слагаемое, содержащее $\dot{\psi}_1^2$. Обобщенные ускорения $\ddot{\phi}_1$ и $\ddot{\xi}_1$ домножились на $\cos\psi_1$ и появилось слагаемое с обобщенным ускорением $\ddot{\psi}_1$. Слагаемое, содержащее $\dot{\xi}_1 \dot{\phi}_1$ домножилось на $\cos\psi_1$ и появились слагаемые с $\dot{\xi}_1 \dot{\psi}_1$ и $\dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1$.

В уравнениях (10) и (15), соответствующих обобщенной координате y , произошли изменения, аналогичные обобщенной координате x , кроме того отсутствует слагаемое, связанное с силой тяжести в уравнении (15), что объясняется тем, что в трехмерной модели плоскость xOy – это горизонтальная плоскость, а не вертикальная как в плоской модели.

Уравнение, описывающее изменение угловой координаты при плоском движении (11), распадается на два уравнения (16) и (17). Слагаемое, содержащее ускорение свободного падения, теперь содержится в уравнении (17), описывающем изменение угла ψ_1 и в соответствующем выражении угол ϕ_1 заменяется на ψ_1 . То же касается и углового ускорения $\ddot{\psi}_1$. К ускорениям \ddot{x} и \ddot{y} добавляется множитель $\sin\psi_1$. В уравнении (17) также возникает дополнительное слагаемое, содержащее $\cos\psi_1 \sin\psi_1 \dot{\phi}_1^2$, связанное с угловой скоростью вращения звена в плоскости xOy .

Уравнение (16) получается из уравнения (11) следующим образом: отсутствует слагаемое, содержащее ускорение свободного падения; к ускорениям \ddot{x} и \ddot{y} добавляется множитель $\cos\psi_1$, в слагаемых, содержащих $\dot{\xi}_1$ и $\dot{\phi}_1$ добавляется множитель $\cos^2\psi_1$, что, связано проекцией звена на плоскость xOy ; возникает слагаемое с множителем $\cos\psi_1 \sin\psi_1 \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1$, связанное с одновременным движением звена в двух плоскостях. В остальном уравнение сохраняет структуру двухмерного.

Уравнение, описывающее изменение длины звена экзоскелета в пространстве, (18) в сравнении с уравнением (12), описывающим изменение длины звена на плоскости, изменилось незначительно. К углу ϕ_1 добавился угол ψ_1 , что связано с особенностью введения углов в двумерной (рис. 3) и пространственной системах координат (рис. 4). Возникло еще одно слагаемое, связанное с квадратом угловой скорости $\dot{\psi}_1^2$. Изменилось слагаемое, связанное с углом ϕ_1 : $\dot{\phi}_1^2 \cos^2\psi_1$, множитель $\cos^2\psi_1$ связан с проекцией звена на плоскость xOy .

Опишем, как получить уравнения пространственной модели по плоской. Например, если обозначить коэффициент в уравнении (9) при $\ddot{\phi}_1$ через $a_{\ddot{\phi}_1}^{2D}$, а в уравнении (14) через $a_{\ddot{\phi}_1}^{3D}$, то тогда они связаны между собой следующим равенством:

$$a_{\ddot{\phi}_1}^{3D} = \cos\psi_1 a_{\ddot{\phi}_1}^{2D}, \quad (19)$$

т.е. мы получили формулу перехода от плоской модели к пространственной. Тогда для отсутствующего в плоской модели коэффициента для $\ddot{\psi}_1$ формула перехода имеет вид:

$$a_{\ddot{\psi}_1}^{3D} = \operatorname{ctg}\varphi_1 \cos\psi_1 a_{\ddot{\varphi}_1}^{2D}. \quad (20)$$

Аналогичные формулы перехода от плоской модели к пространственной могут быть построены для всех коэффициентов, входящих в систему дифференциальных уравнений движения.

8. Заключение

Для предложенной конструкции звена экзоскелета переменной длины, состоящего из двух массивных абсолютно твердых участков и расположенным между ними невесомым участком переменной длины, получены системы дифференциальных уравнений движения, описывающие движения звена на плоскости и в пространстве. Рассмотрена модель с шарнирным закреплением к неподвижной плоскости и свободного движения незакрепленного звена. Предложен метод записи дифференциальных уравнений движения для пространственного экзоскелета со звеньями переменной длины по соответствующим уравнениям плоского механизма. Данную модель можно использовать при изготовлении экзоскелета со звеньями, приближенными по функциональным возможностям к звеньям опорно-двигательного аппарата человека, и обеспечивающего комфортабельное передвижение в нем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов, А. В. Причины, вызывающие изменение длины звена человека, и механическая модель звена переменной длины / А. В. Борисов, Маслова К.С. // *Международный журнал теории и научной практики*. – Том 2. – Выпуск 1. – Смоленск, 2019. – С. 145–150.
2. Борисов, А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им / А. В. Борисов, Г. М. Розенблат // *ПММ*. – 2017. – Т. 81 – № 5. – С. 511–522.
3. Борисов, А. В. Моделирование динамики экзоскелета с управляемыми моментами в суставах и переменной длиной звеньев с использованием рекуррентного метода составления дифференциальных уравнений движения / А. В. Борисов, Г. М. Розенблат // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2018. – № 2. – С. 148–174.
4. Чигарев, А. В. Рекурсивный метод получения дифференциальных уравнений движения деформируемых плоских антропоморфных систем в безопорной и двухопорной фазах движения / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник*. – Минск: БНТУ. – 2015. – Вып. 30. – С. 70–81.
5. Чигарев, А. В. Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения пространственных стержневых антропоморфных систем типа экзоскелета со звеньями переменной длины / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник*. – Минск: БНТУ. – 2017. – Вып. 32. – С. 52–58.