УДК 539.374

ТЕРМОУПРУГИЙ ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНЫ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ НАГРУЗКОЙ

[1]Плескачевский Ю.М., [2]Журавков М.А., [3]Старовойтов Э.И.
[1]Белорусский национальный технический университет
[2]Белорусский государственный университет
[3]Белорусский государственный университет транспорта

Введение. В последнее время значительно возросло использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в машиностроении, добыче и транспортировке энергоносителей, строительстве. Это обуславливает необходимость разработки математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок.

Монографии [1–5] содержат различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, включая стержни, пластины и оболочки. В них изложены методы решения соответствующих краевых задач. Изотермическое динамическое деформирование трехслойных круговых пластин при импульсных и резонансных непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в статьях [6–9]. Постановки и методики решения краевых задач об изотермическом квазистатическом деформировании, в том числе циклическом, упругопластических слоистых стержней и пластин приведены в [10–13]. Термосиловое нагружение трехслойных пластин и оболочек исследовалось в работах [14–18]. Термоупругие перемещения в трехслойной круговой металлополимерной пластине при кольцевых нагрузках изучены в статье [19].

Здесь построено аналитическое решение краевой задачи об определении перемещений в упругой трехслойной круговой металлополимерной пластине при параболических по форме нагрузках, с учетом воздействия температурного поля. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерного пакета пластины.

1. Общее решение краевой задачи. Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина (рис.1). К наружной поверхности первого несущего слоя приложены осесимметричные распределенные нагрузки $q(r)$, $p(r)$, и пластина находится в температурном поле $T = \mathrm{const}$. Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат. Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось z перпендикулярна ей и направлена вверх. Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого жесткого заполнителя ($h_3 = 2c$), воспринимающего нагрузку в тангенциальном направлении, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины w, относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$). Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0.

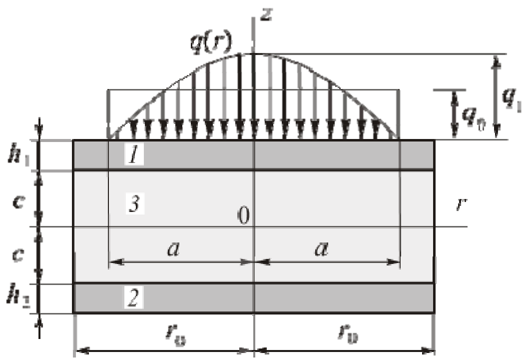

Рис. 1 Схема нагружения

Из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя следует, что

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)},_z + w,_r = \psi \ .$$

После интегрирования этого выражения с учетом принятых гипотез получим формулы, выражающие радиальные перемещения в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw,_r \quad c \le z \le c + h_1 , \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw,_r \quad -c \le z \le c , \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw,_r \quad -c - h_2 \le z \le -c , \end{aligned} \tag{1}$$

где z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (1) и соотношений Коши, напряжения – из термоупругих соотношений закона Гука:

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(T_k)\text{э}_\alpha^{(k)} , \ \ \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k) \quad (k = 1,2,3) ,$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_k(T_k)\text{э}_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi) ,$$

где $s_\alpha^{(k)}, \text{э}_\alpha^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T), K_k(T)$ – модули сдвига и объемного деформирования, зависимость которых от температуры описывается формулой Белла [1]; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k-го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины получены вариационным методом. Их общее решение приведено в [19]:

$$\begin{aligned} \psi &= C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r , \\ w &= \frac{b_2}{b_3}\int \psi \, \mathrm{d}r - \frac{a_3}{b_3 a_1}\int \mathrm{L}_2^{-1}(p)\,\mathrm{d}r + \frac{1}{b_3}\int \mathrm{L}_3^{-1}(q)\,\mathrm{d}r + \tfrac{1}{4}C_1 r^2(\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_6 \ln r + C_4 , \\ u &= \frac{a_3}{a_1} w,_r - \frac{a_2}{a_1}\psi - \frac{1}{a_1}\mathrm{L}_2^{-1}(p) + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r} , \\ \psi_r &= -K_1(\beta r)\int I_1(\beta r) f(r) r \,\mathrm{d}r + I_1(\beta r)\int K_1(\beta r) f(r) r\,\mathrm{d}r , \end{aligned} \tag{2}$$

$$f(r)=\frac{b_3}{b_1b_3-b_2^2}\left[\frac{p(a_2b_3-a_3b_2)}{a_1b_3}+\frac{b_2}{b_3r}\left(\int qr\,\mathrm{d}r-C_1\right)\right]$$

где $I_1(\beta r)$ – *модифицированная функция Бесселя* первого порядка; $K_1(\beta r)$ – *функция Макдональда*; L_2^{-1}, L_3^{-1} – линейные интегральные операторы

$$\mathrm{L}_2^{-1}(f)\equiv\frac{1}{r}\int r\int f dr\,\mathrm{d}r\ ,\quad \mathrm{L}_3^{-1}(f)\equiv\frac{1}{r}\int r\int\frac{1}{r}\int rfdr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}r\ ;$$

$C_1,...,C_8$ – константы интегрирования, определяемые из условий ограниченности решения в центре пластины и граничных условий закрепления контура; a_i, b_i, β – коэффициенты, определяемые через геометрические и термомеханические характеристики материалов слоев [19].

В качестве граничных принимаются следующие кинематические условия:

- при заделке контура пластины

$$(u=\psi=w=w,_r=0\quad\text{при}\ \ r=1)\,, \tag{3}$$

- при шарнирном опирании

$$(u=\psi=w=M_r=0\ \ \text{при}\ \ r=1)\,. \tag{4}$$

2. Изгиб параболической нагрузкой, распределенной по кругу [0, *a*]. Пусть на рассматриваемую круговую трехслойную пластину действует локальная вертикальная поверхностная нагрузка параболической формы, распределенная по кругу относительного радиуса $r \le a$ (см. рисунок 1). Для нее можно принять аналитический вид

$$q(r)=q_0H_0(a-r)\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right), \tag{5}$$

где q_0 = const, $H_0(r)$ – функция Хевисайда.

Интегральный оператор третьей степени от нагрузки (5), функция $f(r)$ и интегралы от нее, входящие в решение (2), следующие:

$$L_3^{-1}(q)dr=q_0H_0(a-r)\left(\frac{3r^4-a^4}{48r}-\frac{r^5}{96a^2}-\frac{a^2r}{8}\ln\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{a^2r^2}{32}\right),$$

$$f(r)=\frac{\gamma_1}{r}\left(\int q_0\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)H_0(a-r)rdr-C_1\right)=\frac{\gamma_1}{r}\left(\frac{q_0}{4}\left(2r^2-a^2-\frac{r^4}{a^2}\right)H_0(a-r)-C_1\right),$$

$$\int I_1(\beta r)f(r)rdr=\frac{\gamma_1q_0}{4\beta^2}H_0(a-r)\left[I_0(\beta r)\left(2r^2\beta-\frac{r^4\beta}{a^2}-\frac{8r^2}{a^2\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{8I_0(\beta a)}{\beta}-\frac{16I_1(\beta a)}{\beta^2a}-4I_1(\beta r)\left(r-\frac{r^3}{a^2}-\frac{4}{a^2\beta^2}\right)\right]-\frac{C_1\gamma_1}{\beta}I_0(\beta r)\,,$$

$$\int K_1(\beta r)f(r)rdr=\frac{\gamma_1q_0}{4\beta^2}H_0(a-r)\left[-K_0(\beta r)\left(2r^2\beta-\frac{r^4\beta}{a^2}-\frac{8r^2}{a^2\beta}\right)-\right.$$

$$-\frac{8K_0(\beta a)}{\beta}-\frac{16K_1(\beta a)}{\beta^2 a}-4K_1(\beta r)\left(r-\frac{r^3}{a^2}-\frac{4}{a^2\beta^2}\right)\Bigg]-\frac{C_1\gamma_1}{\beta}I_0(\beta r)\,.$$

После чего частное решение ψ_r можно выписать в виде

$$\psi_r=\frac{\gamma_1 q_0}{4\beta^4 a^2}H_0(a-r)\left[\beta^2 r^3+\frac{\beta^2 a^4}{r}+r(8-2\beta^2 a^2)-8\beta a^2(K_1(\beta r)I_0(\beta a)+\right.$$

$$\left.+I_1(\beta r)K_0(\beta a))+16a\left(K_1(\beta r)I_1(\beta a)-I_1(\beta r)K_1(\beta a)\right)\right]+\frac{C_1\gamma_1}{\beta^2 r}\,. \qquad (6)$$

Общий вид решения (2) остается в данном случае без изменения, если учесть выражение (6) и следующие интегралы:

$$\int L_3^{-1}\left(q(r)\right)=H_0\left(a-r\right)\left(\frac{r^4}{64}-\frac{r^6}{576a^2}+\frac{a^2r^2}{64}-\frac{a^2r^2}{16}\ln\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{a^4}{48}\ln\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{17a^4}{576}\right),$$

$$\int\psi\,\mathrm{d}r=\frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta}-\frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta}+\frac{C_1\gamma_1}{\beta^2}\ln(r)+\frac{\gamma_1 q_0}{4\beta^4 a^2}H_0(a-r)\times$$

$$\times\left[\beta^2 a^4\ln\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{16a}{\beta}\left(K_1(\beta a)I_0(\beta r)+I_1(\beta a)K_0(\beta r)\right)+\frac{16}{\beta^2}+4(r^2-a^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta^2 r^4}{4}+\frac{3\beta^2 a^4}{4}-\beta^2 a^2 r^2-8a^2\left(K_0(\beta a)I_0(\beta r)-I_0(\beta a)K_0(\beta r)\right)\right].$$

Константы интегрирования определяем из условия заделки контура пластины (3) и условия гладкости решения в ее центре. В результате

$$C_1=-\frac{q_0 a^2}{4},\quad C_2=\frac{2\gamma_1 q_0}{\beta^3 I_1(\beta)}\left(\frac{\beta a^2}{8}-K_1(\beta)\left(I_0(\beta a)-\frac{2}{\beta a}I_1(\beta a)\right)\right),$$

$$C_3=\frac{2q_0\gamma_1}{\beta^3}\left(I_0(\beta a)-\frac{2}{\beta a}I_1(\beta a)\right),$$

$$C_4=-\frac{\gamma_1 b_2 q_0}{\beta^3 b_3 I_1(\beta)}\left(\frac{a^2 I_0(\beta)}{4}+\frac{2}{\beta^2}\left(I_0(\beta a)-\frac{2}{\beta a}I_1(\beta a)\right)\right)+\frac{q_0 a^4}{96b_3}+\frac{q_0 a^2}{32b_3}\,, \qquad (7)$$

$$C_5=\frac{q_0 a^2}{24}\left(3+a^2\right),\; C_6=\frac{q_0 a^4}{48b_3},\quad C_7=0,\quad C_8=0\,.$$

При шарнирно-опертом контуре из (4) получим:

$$C_4=\frac{b_2}{b_3}\left(-\frac{C_2 I_0(\beta)}{\beta}+\frac{C_3 K_0(\beta)}{\beta}\right)-\frac{1}{4b_3}\left(C_1+C_5\right), \qquad (8)$$

$$C_5=\frac{q_0a^2}{8}\left(1-\frac{a^2}{3}\right)\frac{a_3^2-a_1b_3+a_7a_1}{a_1(a_6+a_7)}-\frac{6b_3}{a_6+a_7}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{0k}\int_{h_k}K_kT_kz\,\mathrm{d}z\,,$$

$$C_7=\frac{2a_3}{a_1\left(a_6+a_7\right)}\left(3\sum_{k=1}^{3}\alpha_{0k}\int_{h_k}K_kT_kz\,\mathrm{d}z+\frac{q_0a^2}{8}\left(1-\frac{a^2}{3}\right)\right).$$

Константы C_1, C_2, C_3, C_6, C_8 сохраняют вид (7).

3. Изгиб нагрузкой, равномерно распределенной по кругу [0, *a*]. Если на рассматриваемую трехслойную пластину действует локальная поверхностная нагрузка цилиндрической формы, равномерно распределенная по кругу относительного радиуса $r \leq b$, то ее можно записать в виде

$$q(r)=q_0H_0(b-r),\quad p=0\,. \tag{9}$$

Интегральный оператор третьей степени от нагрузки (9), функция $f(r)$ и интегралы от нее, входящие в решение (2), следующие:

$$\mathrm{L}_3^{-1}\left(q(r)\right)=q_0\left(\frac{r^3}{16}-\frac{b^4}{16r}-\frac{b^2r}{4}\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right)H_0\left(b-r\right).$$

$$f(r)=\frac{b_2}{(b_1b_3-b_2^2)r}\left(\int q_0H_0(b-r)rdr-C_1\right)=\frac{\gamma_1}{r}\left(\frac{q_0\left(r^2-b^2\right)}{2}H_0(b-r)-C_1\right),\ \gamma_1=\frac{b_2}{(b_1b_3-b_2^2)}\,.$$

Внося функцию $f(r)$ в интегралы, входящие в частное решение ψ_r, получим

$$\int I_1(\beta r)f(r)rdr=\frac{\gamma_1q_0}{2\beta}\left(r^2I_2(\beta r)-b^2I_2(\beta b)\right)H_0(b-r)-$$

$$-\frac{\gamma_1q_0b^2}{2\beta}\left(I_0(\beta r)-I_0(\beta b)\right)H_0(b-r)-\frac{C_1\gamma_1}{\beta}I_0(\beta r)=$$

$$=\frac{\gamma_1q_0}{2\beta}H_0(b-r)\left[\left(r^2-b^2\right)I_0(\beta r)+\frac{2}{\beta}\left(bI_1(\beta b)-rI_1(\beta r)\right)\right]-\frac{C_1\gamma_1}{\beta}I_0(\beta r)\,, \tag{10}$$

$$\int K_1(\beta r)f(r)rdr=\frac{\gamma_1q_0}{2\beta}H_0(b-r)\left[\left(b^2-r^2\right)K_0(\beta r)+\frac{2}{\beta}\left(bK_1(\beta b)-rK_1(\beta r)\right)\right]+\frac{C_1\gamma_1}{\beta}K_0(\beta r)\,.$$

В результате частное решение ψ_r принимает вид

$$\psi_r=\frac{\gamma_1q_0}{2\beta^2}H_0(b-r)\left[\frac{b^2}{r}-r+2b\left(K_1(\beta b)I_1(\beta r)-I_1(\beta b)K_1(\beta r)\right)\right]+\frac{C_1\gamma_1}{\beta^2r} \tag{11}$$

Подставляя (10) в решение (2), с учетом (11) получим искомые перемещения в трехслойной круговой пластине при действии равномерно распределенной круговой нагрузки, где

$$\int L_3^{-1}(q)dr = q_0\left(\frac{r^4-5b^4}{64}-\frac{b^4}{16}\ln\left(\frac{r}{b}\right)-\frac{b^2r^2}{8}\ln\left(\frac{r}{b}\right)+\frac{b^2r^2}{16}\right)H_0(b-r),$$

$$\int \psi dr = \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta}-\frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta}+\frac{C_1\gamma_1}{\beta^2}\ln(r)+\frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2}H_0(b-r)\times$$

$$\times\left[\frac{b^2-r^2}{2}+b^2\ln\left(\frac{r}{b}\right)+\frac{2b}{\beta}\left(K_1(\beta b)I_0(\beta r)+I_1(\beta b)K_0(\beta r)\right)-\frac{2}{\beta^2}\right].$$

Константы интегрирования определяем из условия закрепления пластины и условия гладкости решения в ее центре. Из условия гладкости следует

$$C_1=-\frac{q_0 b^2}{2},\quad C_3=\frac{q_0\gamma_1 b I_1(\beta b)}{\beta^2},\quad C_6=\frac{q_0 b^4}{16 b_3},\quad C_8=0.$$

В случае заделки контура пластины остальные константы интегрирования будут:

$$C_2=\frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)}\left(\frac{b^2}{2}-bK_1(\beta)I_1(\beta b)\right),\quad C_4=-\frac{b_2\gamma_1 q_0}{b_3\beta^4 I_1(\beta)}\left(\frac{b^2 I_0(\beta)\beta}{2}-bI_1(\beta b)\right)+\frac{q_0 b^4}{32 b_3}+\frac{q_0 b^2}{16 b_3},$$

$$C_5=\frac{q_0 b^2}{8}\left(2-b^2\right),\quad C_7=0.$$

При шарнирном опирании контура из условий (4) получим:

$$C_2=\frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)}\left(\frac{b^2}{2}-bK_1(\beta)I_1(\beta b)\right),\quad C_4=\frac{b_2}{b_3}\left(-\frac{C_2 I_0(\beta)}{\beta}+\frac{C_3 K_0(\beta)}{\beta}\right)-\frac{1}{4b_3}\left(C_1+C_5\right),$$

$$C_5=\frac{q_0 b^2}{4}\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\frac{a_3^2-a_1 b_3+a_7 a_1}{a_1(a_6+a_7)}-\frac{6b_3}{a_6+a_7}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{0k}\int_{h_k}K_k T_k z\,\mathrm{d}z, \tag{12}$$

$$C_7=\frac{2a_3}{a_1\left(a_6+a_7\right)}\left(3\sum_{k=1}^{3}\alpha_{0k}\int_{h_k}K_k T_k z\,\mathrm{d}z+\frac{q_0 b^2}{4}\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\right)$$

Следует отметить, что при шарнирном опирании контура пластины решения явно зависят от температуры через константы интегрирования (9), (12).

Численные результаты получены для упругой круговой трехслойной пластины, *шарнирно опертой* по контуру слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, соответствующие механические характеристики материалов приведены в [2]. Величина интенсивности распределенной нагрузки q_0 = 1 МПа, относительные толщины слоев h_1 = 0,02; h_2 = 0,06; h_3 = 0,4.

На рис. 2 *а, б* показано изменение относительного сдвига в заполнителе и прогиба пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены при различных значениях радиуса b пятна локальной параболической поверхностной нагрузки: *1*– b = 0,5; *2* – b = 0,75; без штриха – T = 293 K, со штрихом – T = 323 K.

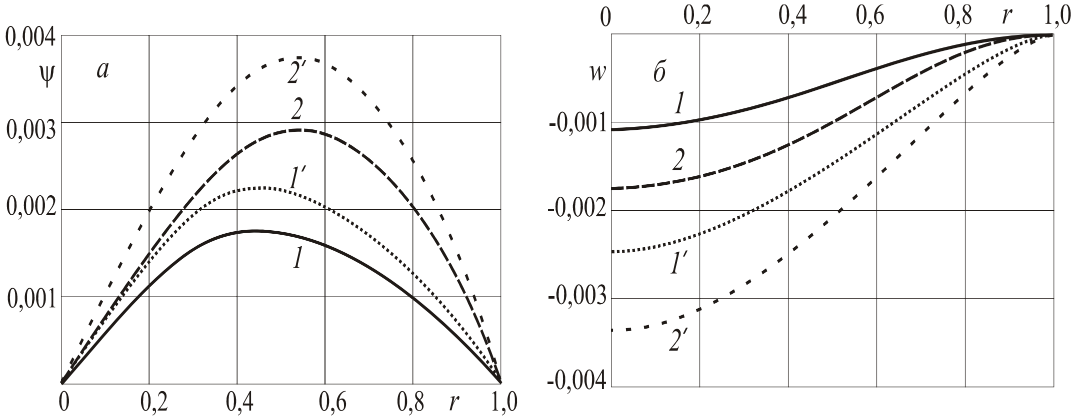

Рис. 2. Изменение относительно сдвига

На рисунке 3 показана зависимость прогиба круговой трехслойной пластины в центре от радиуса силового пятна различных по форме и величине нагрузок: *1* – параболическая амплитуды q_0; *2* – прямоугольная q_0; *3* – параболической амплитуды $q_1 = 2q_0$. Без штриха – комнатная температура, со штрихом – $T = 323$ K. Параболическая нагрузка с амплитудой q_1 статически эквивалентна прямоугольной q_0, т.к.

$$q_1\int_A\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)H_0(a-r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi=q_0\int_A H_0(a-r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

отсюда $q_1 = 2q_0$.

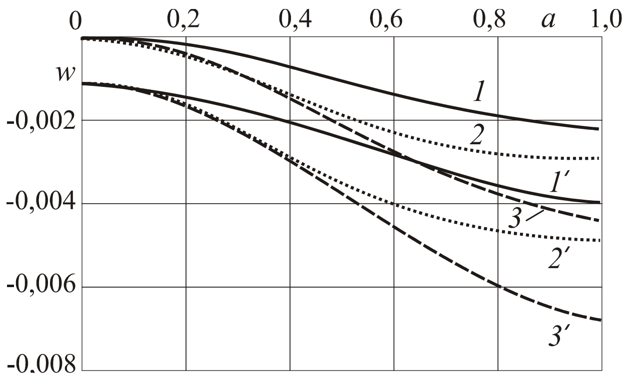

Рис. 3. Прогиб трехслойной пластины

С ростом радиуса пятна нагрузки прогиб увеличивается нелинейно, достигая максимума при нагрузке, распределенной по всей поверхности пластины. При одинаковой амплитуде (*1*, *2*) прямоугольная нагрузка вызывает больший прогиб. В случае статически эквивалентных нагрузок (*2*, *3*) прогиб от параболической больше на 47 %, при нагревании разница уменьшается до 40 %.

Выводы. Таким образом, приведенные в этой статье результаты показали, что напряженно-деформированное состояние несимметричных по толщине упругих круговых трехслойных пластин существенно зависит от воздействия температурного поля, вида и формы нагрузки, граничных условий.

Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект Т18Р-090).

ЛИТЕРАТУРА

1. Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая – Минск: Бел. навука. 200, – 342 с.

2. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

3. Журавков, М. А. Математические модели сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э. И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011.– 540 с.

4. Starovoitov, E.I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity, and viscoelasticity / E.I. Starovoitov, F.B. Nagiyev – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey. – 2012.– 346 p.

5. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко // – Минск: Бел. навука, 2017. –275 с.

6. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. –Vol. 39, № 8. – P. 945–952.

7. Starovoitov, E.I. Vibrations of circular sandwich plates under resonant loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 12. – P. 1458–1463.

8. Starovoitov, Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation/ E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 46, № 1. – P. 86–93.

9. Starovoitov, E.I. Resonance vibrations of a circular composite plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovsky // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol. 51, № 5. – P. 561–570.

10. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 267–273. doi.org/10.1007/BF00611609

11. Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37–40.

12. Захарчук, Ю.В. Деформирование круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – № 33. – С. 363–369.

13. Козел, А.Г. Деформирование круговой трехслойной пластины, защемленной по контуру, на основании Пастернака / А.Г. Козел // Теоретическая и прикладная механика. – 2018. – № 33. – С. 318–323.

14. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. – № 1. – С. 91–97.

15. Старовойтов, Э. И. Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек / Э. И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989.– № 5.– С. 114–119.

16. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–60.

17. Плескачевский, Ю.М. Локальные нагружения трехслойной балки со сжимаемым заполнителем в температурном поле / Ю.М. Плескачевский, М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник.– Мн.: БНТУ, 2018. − Вып. 33. – С. 12–17.

18. Старовойтов, Э.И. Цилиндрический изгиб ортотропной трехслойной пластины с нелинейно вязкоупругим заполнителем / Э.И. Старовойтов, И.И. Протуро, Д.В. Тарлаковский // Теоретическая и прикладная механика. Мн.: БНТУ, 2012 г. – № 27. с. 64–69.

19. Плескачевский, Ю.М. Термоупругие перемещения в трехслойной круговой металлополимерной пластине при кольцевых нагрузках / Ю.М. Плескачевский, М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. – Минск: БНТУ, 2019. − Вып. 34. – С. 3–9.