

УДК 621.783

Ю. С. ПОСТОЛЬНИК, д-р техн. наук (ДГТУ),
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, д-р техн. наук,
И. А. ТРУСОВА, д-р техн. наук,
П. Э. РАТНИКОВ, канд. техн. наук (БНТУ),
О. А. КОНДРАШЕВА (ДГТУ)

ПРЯМОТОЧНЫЙ КОНВЕКТИВНЫЙ НАГРЕВ МЕТАЛЛА

Как известно, при исследовании процессов нагрева движущихся материалов наибольший интерес представляют случаи прямо-точного и противоточного теплообмена. В работе [1] при помощи операционного метода изложено решение краевой задачи теплопроводности с прямоточным условием теплового баланса, представленным в дифференциальной форме. Это решение представлено неограниченными рядами, содержащими довольно сложные слагаемые и включающими в себя специальные функции математической физики, что делает решение малопримемлемым для проведения инженерных расчетов. Поэтому автор работы [1] для определения первого корня характеристического уравнения ограничивается первыми двумя членами ряда. Но если рассматривать массивные тела, то для исследования начальной стадии нагрева двух членов ряда явно недостаточно, о чем говорится, например, в работах [2, 3].

Инженерные методики расчета при этом, как правило, основываются на предположении о незначительной тепловой инерции тел. Вместе с тем для практики более предпочтительными являются простые, но в то же время достаточно точные приближенные решения, пригодные для теплового расчета тел любой массивности.

Для противоточного конвективного нагрева тел базовой формы (ТБФ) такое решение при помощи метода эквивалентных источников (МЭИ) [4] изложено в работах [5, 6] и использовано при исследовании тепловых процессов сухого тушения кокса в коксохимиче-

ском производстве [7]. Представляет интерес получить такое же решение и для прямого нагрева массивных ТБФ.

Рассмотрим соответствующую задачу:

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^m \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}; \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \text{Bi} [\theta_r(\tau) - \theta_n(\tau)]; \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d\theta_r}{d\tau} = -\text{Bi}[\theta_r(\tau) - \theta_n(\tau)] n_m; \quad (3)$$

$$\theta(\rho, 0) = \theta_0 = 0; \quad \theta_r(0) = \theta_r^0 = 1, \quad (4)$$

где введены следующие обозначения:

$$\theta(\rho, \tau) = \frac{T(\rho, \tau) - T_0}{T_r^0 - T_0}; \quad \theta_r(\tau) = \frac{T_r(\tau) - T_0}{T_r^0 - T_0}; \quad (5)$$

$$\rho = \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{at}{R^2}; \quad \text{Bi} = \frac{\alpha_k R}{\lambda}; \quad n = \frac{Vc}{V_r c_r}.$$

Здесь $T(\rho, \tau)$, $T(\tau)$ – температура тела и газа; T_0 , T_r^0 – их начальное значение; r – координата, отсчитываемая от центра сечения тела; $2R$ – толщина пластины ($m = 0$) или диаметр цилиндра ($m = 1$), шара ($m = 2$); t – время; a , λ , α_k – коэффициенты теплопроводности и конвективного теплообмена; c и c_r – объемные теплоемкости материала и газа; V и V_r – объемы тела и газа; n – отношение водяных чисел, $n_m = (1 + m)n$.

На инерционном этапе ($0 \leq \tau \leq \tau_0$), как и в работах [5, 6], воспользуемся готовым решением МЭИ [4]:

$$\theta_1(\rho, \tau) = \frac{\theta_{r1}(\tau) \text{Bi}}{[2 + \text{Bi}l(t)]l(\tau)} [\rho - \beta(t)]^2, \quad \beta(\tau) \leq \rho \leq 1, \quad (6)$$

где толщина $l(\tau) = l - \beta(\tau)$ термического слоя, которая в соответствии с работой [5] определяется формулой

$$l(\tau) = \sqrt{6(1+m)k\tau}; \quad k = (3+2\text{Bi})/(3+\text{Bi}). \quad (7)$$

Температурную функцию газа $\theta_{r1}(\tau)$ получим подстановкой решения (6) в условие теплового баланса (3). Приходим к уравнению

$$\frac{d\theta_{r1}}{\theta_{r1}(\tau)} = - \frac{\text{Bi} n_m}{1 + \frac{\text{Bi} l(\tau)}{2}} d\tau. \quad (8)$$

Дифференцируя выражения $l(\tau)$ (7), имеем

$$d\tau = \frac{l \, dl}{3(1+m)k},$$

после чего уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d\theta_{r1}}{\theta_{r1}(\tau)} = - \frac{\text{Bi} n}{3k} \frac{l \, dl}{1 + \frac{\text{Bi} l}{2}}.$$

Интегрируя с использованием начальных условий (4), находим

$$\theta_{r1}(\tau) = \exp \left\{ -M \left[l(\tau) - \frac{2}{\text{Bi}} \ln \left(1 + \frac{\text{Bi} l(\tau)}{2} \right) \right] \right\},$$

где

$$M = \frac{2n}{3k}.$$

При $\tau = \tau_0 = (3 + \text{Bi})/[6(1 + m)(3 + 2\text{Bi})]$, когда заканчивается этап прогрева, $l(\tau_0) = 1$, температура тела и газа определяется выражением

$$\theta_1(\rho, \tau_0) = \theta_1^0(\rho) = \frac{\theta_{r1}^0 \text{Bi}}{2 + \text{Bi}} \rho^2; \quad (9)$$

$$\theta_{r1}(\tau_0) = \theta_{r1}^0 = \exp \left\{ -M \left[1 - \frac{2}{Bi} \ln(1 + Bi/2) \right] \right\}. \quad (10)$$

На упорядоченном этапе нагрева ($\tau \geq \tau_0$) разрешающее уравнение МЭИ принимаем по первому (основному) варианту

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^m \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \right) + f_2(\tau) = 0, \quad (11)$$

где «эквивалентный» источник определяется условием [5]

$$f_2(\tau) = -(1+m) \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \theta_2(\rho, \tau) \rho^m d\rho. \quad (12)$$

Интегрируя уравнение (11) дважды по ρ и используя граничные условия (2), получаем

$$\theta_2(\rho, \tau) = \theta_{ц2}(\tau) + Bi[\theta_{r2}(\tau) - \theta_{ц2}(\tau)] \frac{\rho^2}{2 + Bi}; \quad (13)$$

$$f_2(\tau) = -2(1+m)Bi[\theta_{r2}(\tau) - \theta_{ц2}(\tau)]/(2 + Bi). \quad (14)$$

Подставляя функции (13), (14) в интегральное условие (12), приходим к дифференциальному уравнению

$$(2 + Bi)\bar{\theta}_{ц2}' / [(1+m)Bi] + (\bar{\theta}_{r2} - \bar{\theta}_{ц2}) / (3+m) = 2[\theta_{r2}(\tau) - \theta_{ц2}(\tau)], \quad (15)$$

где $\bar{\theta}_{r2}$ и $\bar{\theta}_{ц2}$ полные производные по времени функций температур газа и центра.

Полагая в решении (13) $\rho = 1$, находим

$$\theta_{ц2}(\tau) = \theta_{ц2}(\tau) + [\theta_{r2}(\tau) - \theta_{ц2}(\tau)] Bi / (2 + Bi), \quad (16)$$

после чего условие теплового баланса (3) можно записать в следующем виде:

$$\bar{\theta}_{r2}(\tau) = -\frac{2\text{Bi}}{2 + \text{Bi}} \frac{n_m}{n} [\theta_{r2}(\tau) - \theta_{u2}(\tau)]. \quad (17)$$

Это позволяет выражение (15) свести к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{\alpha[\theta_{r2}(\tau) - \theta_{u2}(\tau)]}{\theta_{r2}(\tau) - \theta_{u2}(\tau)} = \frac{(1+m)\text{Bi}(1+n)}{1 + \text{Bi}/(3+m)} d\tau,$$

интегрируя которое, с учетом начальных условий (9), (10) для упорядоченного нагрева, имеем

$$\theta_{u2}(\tau) = \theta_{r2}(\tau) - \theta_{r1}^0 \Phi(\tau), \quad (18)$$

где

$$\Phi(\tau) = \exp[-\mu(\tau - \tau_0)]; \quad \mu = \frac{(1+m)\text{Bi}}{1 + \text{Bi}/(3+m)} (1+n).$$

Подставляя выражение (22) в (19), находим

$$\theta_{n2}(\tau) = \theta_{r2}(\tau) - \frac{2\theta_{r1}^0}{2 + \text{Bi}} \Phi(\tau).$$

Функция температурного газа $\theta_{r2}(\tau)$ определяется интегрированием выражения (17) с учетом (18)

$$\theta_{r2}(\tau) = \theta_{r1}^0 \{1 - D[1 - \Phi(\tau)]\}, \quad (19)$$

где

$$D = \frac{2n [1 + \text{Bi}/(3+m)]}{(2 + \text{Bi})(1+n)}.$$

Теперь решение (13) принимает следующий окончательный вид:

$$\theta_2(\rho, \tau) = \theta_{r1}^0 \left\{ (1-D) - \left[(1-D) - \frac{Bi}{2+Bi} \rho^2 \right] \Phi(\tau) \right\}. \quad (20)$$

Полагая в (20) $\rho = 1$ и $\rho = 0$, получаем функции температур поверхности и центра тела:

$$\theta_{n2}(\tau) = \theta_{r1}^0 \left[(1-D) - \left(\frac{2}{2+Bi} - D \right) \Phi(\tau) \right]; \quad (21)$$

$$\theta_{u2}(\tau) = \theta_{r1}^0 (1-D) [1 - \Phi(\tau)]. \quad (22)$$

При теплотехнических расчетах иногда необходимо знать среднemasсовую температуру тела

$$\bar{\theta}(\tau) = (1+m) \int_0^1 \theta_2(\rho, \tau) \rho^m d\rho.$$

Подставляя сюда функцию (21), после интегрирования имеем

$$\bar{\theta}(\tau) = \theta_{r1}^0 \left\{ (1-D) - \left[(1-D) - \frac{1+m}{3+m} \frac{Bi}{2+Bi} \right] \Phi(\tau) \right\}. \quad (30)$$

Для оценки точности полученных решений был проведен численный эксперимент на примере, заимствованном из работы [1]:

$$m = 0; \quad Bi = 1; \quad n = 0,5.$$

Результаты вычислений по приближенному (19), (21), (22) и точному [1] решениям представлены на рис. 1, откуда видно, что точность предложенного здесь решения вполне приемлема для инженерных расчетов.

При этом имеющиеся расхождения между точным и предложенным приближенным решением вполне компенсируются исключительной простотой последнего.

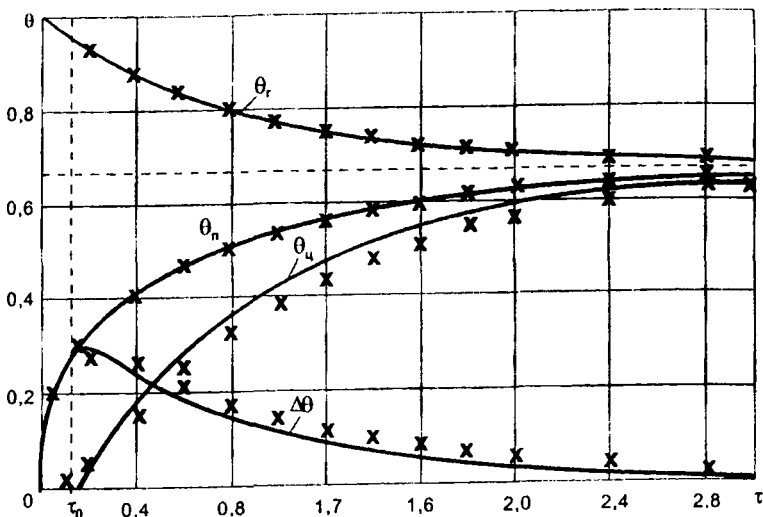


Рис. 1. Изменение температур прямоточно нагреваемой пластины при данных (31):
 ———— — приближенное решение МЭИ; x x x — точное решение [1]

Для убедительности приведем точное решение (в наших обозначениях):

$$\left. \begin{aligned}
 \theta(\rho, \tau) &= \frac{1}{1+n} - \sum_{n=1}^{\infty} P_m(\mu_n) \frac{J_m(\mu_n, \rho)}{J_m(\mu_n) \rho^m} \exp(-\mu_n \tau); \\
 \theta_r(\tau) &= \frac{1}{1+n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_m(\mu_n)}{\frac{\mu_n}{(1+m) \text{Bi} \omega} - 1} \exp(-\mu_n \tau); \\
 P_m(\mu_n) &= \frac{2 \text{Bi} [\mu_n + (1+m) \text{Bi} n]}{[\text{Bi} + (1-m)] \text{Bi} \mu_n + (1+m)^2 \text{Bi}^2 n + [\mu_n + (1+m) \text{Bi} n]}
 \end{aligned} \right\} (23)$$

Здесь μ_n — корни характеристического уравнения.

$$\frac{J_m}{J_{m+1}} = \frac{\mu_n}{\text{Bi}} - \frac{(1+m)n}{\mu_n} \quad (24)$$

Приближенное решение МЭИ (19), (20) по своей простоте ни в какое сравнение не идет с решением (23), (24). Кстати, автор работы [1], сохраняя два члена ряда в решении (23), получает первый (приближенный) корень уравнения (24), точно совпадающий с нашим показателем.

Следует также отметить, что по точному решению (23), (24) невозможно получить в явном виде формулу для расчета времени t_* , необходимого для нагрева тела до требуемой температуры T_* . Решение (19), (20) позволяют такие формулы получить.

Продолжительность нагрева до наперед заданной той или иной температуры определяется из соответствующей формулы [или (19), или (21), или (22)], при равенстве ее требуемой температуре:

$$\left. \begin{aligned} \tau_r^* &= \tau_0 - \frac{1}{\mu} \ln \frac{(1-D) - \theta_r^* / \theta_{rl}^0}{D}; \\ \tau_n^* &= \tau_0 - \frac{1}{\mu} \ln \frac{(1-D) - \theta_n^* / \theta_{rl}^0}{2/(2 + Bi) - D}; \\ \tau_{ц}^* &= \tau_0 - \frac{1}{\mu} \ln \left[1 - \frac{\theta_n^* / \theta_{rl}^0}{1-D} \right]; \\ \bar{\tau}_* &= \tau_0 - \frac{1}{\mu} \ln \frac{(1-D) - \bar{\theta}_* / \theta_{rl}^0}{(1-D) - \frac{1+m}{3+m} Bi / (2+Bi)}. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, при помощи приближенного метода (МЭИ) довольно просто и однозначно решается обратная временная задача теплопроводности (ОЗТ) при прямоточном нагреве, тогда как точное решение ОЗТ встречает известные математические трудности [8, 9, 10].

В заключение следует обратить внимание на то, что постановку и решение задачи нагрева движущихся материалов в газовом потоке

автор работы [1] объединил в единую математическую модель, отличающуюся лишь знаком скорости изменения температуры газа. В конечном итоге это выразилось в том, что при исследовании прямочного нагрева в полученном решении перед параметром водяных чисел $n = Vc/V_r c_r$ необходимо принимать знак «минус», а в случае противотока – «плюс».

Сопоставляя полученное в настоящей работе решение для прямого тока с решением [5], легко обнаружить, что они также отличаются лишь знаком перед коэффициентом D (21).

Полученное приближенное решение задачи нагрева движущихся заготовок или слитков в прямочном газовом потоке обладает достаточной для практики простотой и точностью и может найти эффективное применение для расчетов соответствующих процессов в проходных печах скоростного нагрева металла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдфарб, Э. М. Теплотехника металлургических процессов / Э. М. Гольдфарб. – М., 1967. – 439 с.
2. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М., 1967. – 599 с.
3. Коваленко, А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – Киев, 1970. – 307 с.
4. Постолюник, Ю. С. Приближенные методы исследований в термомеханике / Ю. С. Постолюник. – Киев-Донецк, 1984. – 158 с.
5. Постолюник, Ю. С. К расчету температур и времени нагрева массивных тел при противоточном теплообмене / Ю. С. Постолюник // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1990. – № 6. – С. 84–86.
6. Тимошпольский, В. И. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии / В. И. Тимошпольский, Ю. С. Постолюник, Д. Н. Андрианов. – Мн., 2005. – 560 с.
7. Постолюник, Ю. С. Исследование процесса сухого тушения кокса / Ю. С. Постолюник, Д. А. Мучник, О. И. Машенко // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1991. – № 10. – С. 80–82.
8. Коздоба, Л. А. Методы решения обратных задач теплопереноса / Л. А. Коздоба, П. Г. Круковичий. – Киев, 1982. – 360 с.
9. Алифанов, Д. М. Обратные задачи теплообмена / Д. М. Алифанов. – М., 1988. – 280 с.
10. Мацевитый, Ю. М. Обратные задачи теплопроводности / Ю. М. Мацевитый: в 2 т. – Т. 1: Методология. – Киев, 2000.