МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

А. В. Забавская

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие по математике
с примерами профессионально ориентированных задач
для специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги»

Минск
БНТУ
2019

Рецензенты:

доктор педагогических наук, профессор кафедры «Информатики и методики преподавания информатики» Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка *И. А. Новик*;
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математические методы в строительстве» Белорусского национального технического университета
Е. А. Крушевский;
кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Информатики и методики преподавания информатики» Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка *С. И. Зенько*

Забавская, А.В.
Матрицы. Определители. Системы линейных алгебраических уравнений : учебно-методическое пособие по математике с примерами профессионально ориентированных задач для специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» / А.В. Забавская. – Минск. : БНТУ, 2019. – 60 с.

Темы курса математики, включенные в пособие, следующие: «Матрицы», «Определители», «Обратная матрица», «Ранг матрицы», «Невырожденные системы линейных уравнений», «Системы линейных алгебраических уравнений». Структура пособия включает лекционный материал по названным темам, сопровождаемых примерами профессионально ориентированных задач по математике, алгоритмы решения типовых задач, задания для аудиторной и внеаудиторной работы, а также вопросы для самоконтроля и любознательным студентам.

Пособие адресовано преподавателям математики и студентам специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги».

Регистрационный № БНТУ/ФТК75-83.2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для обучения математике студентов 1 курса специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» и соответствует действующей учебной программе по «Математике». Тематика материала предполагает изучение студентами следующих тем курса математики: «Матрицы», «Определители», «Обратная матрица», «Ранг матрицы», «Невырожденные системы линейных уравнений», «Системы линейных алгебраических уравнений».

Структура пособия включает лекционный материал по названным темам, сопровождаемых примерами профессионально ориентированных задач по математике, алгоритмы решения типовых задач, задания для аудиторной и внеаудиторной работы, а также вопросы для самоконтроля и дополнительные вопросы любознательным студентам.

Надеемся, издание выступит эффективным средством повышения качества математической подготовки студентов-дорожников, развития их интеллекта и культуры мышления, позволит обучаемым глубже понять суть изучаемых явлений, а также будет способствовать более активному усвоению материала специальных и общетехнических дисциплин.

Выражаю благодарность заведующей кафедрой «Математические методы в строительстве» (БНТУ) доценту, к.ф-м.н. А. В. Капусто и доценту, к.ф-м.н. Е. А. Крушевскому за ценные замечания и предложения по содержанию теоретических материалов, задач и упражнений, внесенные при подготовке рукописи к печати.

1. Матрицы

Матрицы, основные понятия, линейные операции над матрицами. Произведение матриц. Транспонирование матриц.

Для изучения многих общетехнических и специальных дисциплин («Строительство автомобильных дорог», «Проектирование автомобильных дорог», «Организация производства и управление предприятием» и др.) в курсе подготовки инженеров-строителей автомобильных дорог, необходимы знания о матрицах, операциях над ними, умения решать прикладные задачи с помощью матриц. Причем, *основным применением матриц* в инженерной деятельности дорожника является решение систем линейных уравнений.

Опр.1. *Матрицей размера* $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Их обозначают a_{ij}, где i – номер строки матрицы, j – номер столбца матрицы, на которых расположен данный элемент.

Матрицу обозначают: A или $A_{m\times n}$ или $\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ или $\left[a_{ij}\right]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$.

Опр.2. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется *нулевой* и обозначается буквой O.

Например,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – нулевая матрица 2-го порядка;

$$O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$ – нулевая матрица размера 2×3.

Опр.3. *Квадратной матрицей* называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов ($m=n$), т.е. матрица вида

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

Опр.4. ***Порядком*** квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов). Выпишем квадратные матрицы первых трех порядков:

$$(a_{11}),\quad \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

Опр.5. Элементы a_{ii} $(i=\overline{1,n})$ квадратной матрицы называются *элементами главной диагонали*, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – *элементами побочной диагонали.*

Опр.6. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все элементы, кроме a_{ii} $(i=\overline{1,n})$, равны нулю.

Например,

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$ – диагональная матрица 3-го порядка.

Опр.7. Диагональная матрица, у которой $a_{ii}=1$ $(i=\overline{1,n})$, называется *единичной матрицей n-го порядка*, обозначается E.

Например,

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$ – единичная матрица 4-го порядка.

Опр.8. Квадратная матрица называется <u>*т р е у г о л ь н о й*</u>, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Например,

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&5&4\\0&0&6\end{pmatrix}$$ – треугольная матрица 3-го порядка

Задание 1.

Используя формулу (1), для квадратной матрицы 2 порядка укажите элементы, принадлежащие главной диагонали.

Решение. Квадратной матрицей 2-го порядка называется таблица чисел:

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$, числа a_{11},a_{22} образуют <u>*главную диагональ*</u> матрицы A; числа –

a_{21},a_{12} <u>*побочную*</u> (второстепенную) <u>*диагональ*</u> матрицы.

Рассмотрим таблицу расстояний наименьшей расчетной видимости водителем в момент движения [1] (дисциплина «Строительство автомобильных дорог»):

Наименование показателей	*Величина видимости в зависимость от категории дороги*				
	I	II	III	IV	V
Видимость встречного автомобиля, м	300	250	200	150	100
Видимость поверхности дороги, м	150	125	100	75	50

Данную таблицу можно записать в компактной форме в виде матрицы видимости расстояний в зависимости от категории дороги.

$$A = \begin{pmatrix} 300 & 250 & 200 & 150 & 100 \\ 150 & 125 & 100 & 75 & 50 \end{pmatrix}$$

Здесь, например, матричный элемент $a_{11} = 300$ показывает, сколько метров составляет видимость встречного автомобиля на I категории дороги, а элемент $a_{22} = 125$ – сколько метров составляет видимость поверхности дороги на II категории автомобильных дорог.

Опр.9. Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и совпадают поэлементно.

Опр.10. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной*. Ее обозначают A^T.

Покажем на схеме процесс транспонирования матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & \boldsymbol{a}_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix}$$

Задание 2.

1. Согласно правилу транспонирования матрицы, провести операцию транспонирования матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & \pi \end{pmatrix}.$$

Решение. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 4 & \pi \end{pmatrix}.$

Ответ: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \\ 4 & \pi \end{pmatrix}$.

2. Как изменится полученная матрица в случае ее повторного транспонирования?

Ответ: Так как $A^T = (a_{ji})$, то $(A^T)^T = (a_{ij})$.

<u>Основными операциями над матрицами являются:</u>

- *сложение (вычитание) матриц;*
- *умножение матриц на число;*
- *умножение матриц.*

Операции сложение (вычитание) вводятся только для матриц одинаковой размерности.

Опр.11. *Суммой* $A+B$ *матриц* $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковых размеров $m \times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера $m \times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n}}$$

Аналогично вводится понятие разности двух матриц $C = A - B$.

Задание 3.

Найти сумму матриц A и B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. $C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Опр.12. *Произведением матрицы* $A_{m\times n}$ *и числа* α называется матрица $B_{m\times n}$ такая, что $B = \alpha \cdot A = A \cdot \alpha$ и $b_{ij} = \alpha a_{ij}, i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}$.

Задание 4.

Найти произведение матрицы A и числа 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

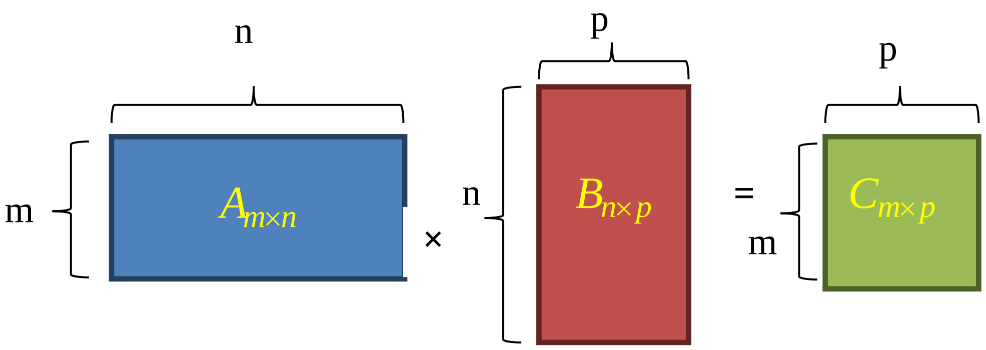
Решение. $3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$.

Опр.13. Матрицы вида $A_{m\times n}$ и $B_{n\times k}$, в которых количество столбцов в первой матрице совпадает с количеством строк во второй, называются ***согласованными.***

Опр.14. *Произведение матрицы* $A_{m\times n}$ *на матрицу* $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}$, у которой элемент $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p})$, т.е. элемент, стоящий в i-ой строке и j-м столбце матрицы C, равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

С помощью схемы, операцию умножения можно изобразить следующим образом:



<u>*Замечание 1.*</u> Произведение матриц, вообще говоря, некоммутативно, т.е. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Задание 5.

1.Всегда ли результатом умножения является прямоугольная матрица?

Ответ: если $m\neq n$, то прямоугольная матрица, если $m=n$, то квадратная матрица.

2. Найти произведение матриц A и B.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

Решение.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1+(-1)\cdot(-4) & 3\cdot2+(-1)\cdot5 & 3\cdot3+(-1)\cdot6\\ 2\cdot1+5\cdot(-4) & 2\cdot2+5\cdot5 & 2\cdot3+5\cdot6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & 1 & 3\\ -18 & 29 & 36\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}7 & 1 & 3\\ -18 & 29 & 36\end{pmatrix}$.

Опр.15. Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $A\cdot B=B\cdot A$.

Введенные операции над матрицами обладают следующими *свойствами*:

1	$A+B=B+A$	6	$k(A+B)=kA+kB$	10	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
2	$A+(B+C)=(A+B)+C$	7	$(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$	11	$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
3	$A+O=A$	8	$k_1(k_2A)=(k_1k_2)A$	12	$k(A\cdot B)=(kA)\cdot B$
4	$A-A=O$	9	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$	13	$(A+B)^T=A^T+B^T$
5	$1\cdot A=A$			14	$(A\cdot B)^T=A^T\cdot B^T$

Замечание 2. Единичная матрица выполняет роль единицы при умножении матриц. Если матрицу A справа или слева можно умножить на единичную матрицу, то результатом будет матрица A: $EA=AE=A$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется матрицей?
2. Перечислите виды матриц? Чем они отличаются между собой?
3. Что представляет собой операция сложения двух матриц? Умножения двух матриц?
4. Соблюдение какого правила позволяет перемножать две матрицы?
5. Дайте определение транспонированной матрицы.
6. Назовите основные операции над матрицами и перечислите их свойства.

Вопросы для любознательных

1. Если матрицы A и B можно умножать, следует ли из этого, что их можно складывать? Приведите пример.

2. Если матрицы A и B можно складывать, следует ли из этого, что их можно умножать? Приведите пример.

3. Можно ли умножить квадратную матрицу на неквадратную? Приведите пример.

4. Может ли произведение неквадратных матриц быть квадратной матрицей? Приведите пример.

5. Может ли при умножении ненулевых матриц получиться нулевая матрица? Приведите пример.

6. Могут ли совпадать матрицы A и A^T? Приведите пример.

Задания для самостоятельного решения

1.1. Найти сумму матриц

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.2. Вычислить $3A-2B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

1.3. Вычислить

$$\text{а) }\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix};\quad \text{б) }\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix};\quad \text{в)}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix};$$

$$\text{г)}\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix};\quad \text{д)}\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\ 6 & 9 & -5\\ 4 & 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\ 4 & -1 & 3\\ 9 & 6 & 5\end{pmatrix};\quad \text{е)}\begin{pmatrix}5 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ -2\\ 7\\ 4\end{pmatrix};$$

$$\text{ж)}\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix};\quad \text{з)}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

1.4. Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы A:

$$\text{а) } f(x)=3x^2-4,\ A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix};\quad \text{б) } f(x)=x^2-3x+1,\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Примечание. Число λ в многочлене (например, в задании а) $\lambda = -4$) следует заменить на матрицу $\lambda \cdot E$ соответствующего размера.

1.5. Найти A^3, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.6. Проверить, являются ли перестановочными матрицы A и B:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix};\quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.7. Транспонировать следующие матрицы

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix};\quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.8. Вычислить произведения AA^T и $A^T A$ при заданной матрице A:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответы: 1.1. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 1.2. $\begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 1.3. а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$; ж) (31); з) $\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

1.4. а) $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; 1.5. $\begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$; 1.6. а) $A \cdot B \neq B \cdot A$; б) $A \cdot B \neq B \cdot A$;

1.7. а) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 1.8. а) $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \\ 42 \\ 0 \end{pmatrix}$;

б) $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 20 \end{pmatrix}$; $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 20 \end{pmatrix}$.

2. Определители

Определители второго, третьего, n-го порядков. Теорема о разложении определителя по элементам ряда. Свойства определителей. Вычисление определителей методом элементарных преобразований.

Опр.1. Квадратной матрице A можно поставить в соответствие *число,* называемое *определителем*. Определитель обозначается $detA$, или $|A|$ или Δ.

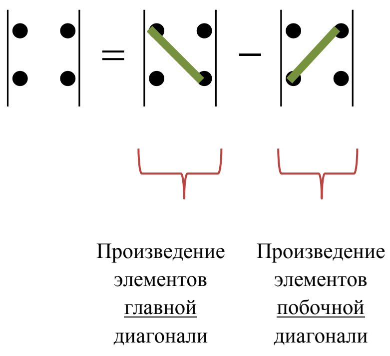
<u>Рассмотрим определители 1-го, 2-го и 3-го порядков.</u>

1. Пусть $n=1$, $A=(a_{11})$. Определитель $detA=a_{11}$.

2.Пусть $n=2$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, определитель второго порядка

$$\boxed{detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}} \qquad (1)$$

Вычисление определителя 2-го порядка можно представить в следующем виде:



*Задание 1***.**

Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.(Устно).

Ответ: -2.

На основании формулы площади треугольника из школьного курса математики $S=\pm\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]$, (где знак выбирается так, чтобы для площади получалось положительное число) и понятия определителя 2-го порядка, удобно применять для вычисления *площади треугольника*, следующую формулу (1):

$$\boxed{S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_3-\boldsymbol{y}_1 \end{vmatrix}} \qquad (2)$$

где точки $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ – координаты вершин треугольника.

Рассмотрим применение формулы (1) на практике.

Задача 2. Площадка для укладки асфальта имеет форму треугольника с вершинами $A(0,\ 1)$, $B(5,7)$ и $C(1,\ 6)$ (размеры даны в усл. ед.). Определить площадь S этой площадки.

Решение. По формуле (2) площади треугольника имеем:

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5-0 & 1-0 \\ 7-1 & 6-1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}(25-6)=9{,}5\,(\text{ед}^2).$$

Ответ: $S=9{,}5\,\text{ед}^2$.

3.Пусть $n=3$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим основные методы вычисления определителя 3-го порядка.

I.a) *Правило треугольника* :

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Вычисление определителя с помощью правила треугольника (Схема 1) показана ниже, где выделенные элементы нужно перемножить:

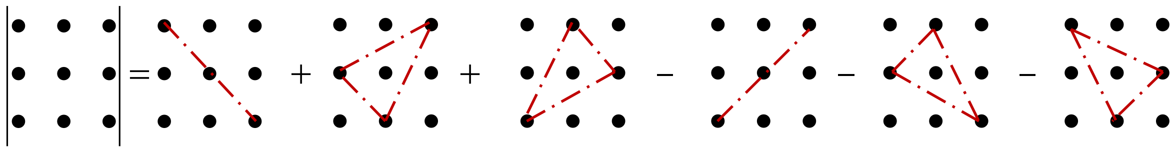


Схема 1

Задание 2.

Вычислить определитель матрицы A по правилу треугольника.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 0\cdot 5 + 6\cdot 4\cdot 7 - 5\cdot 2\cdot 7 - 6\cdot 3\cdot 5 - 4\cdot 0\cdot 1 =$$
$$= 10 + 0 + 168 - 70 - 90 - 0 = 18$$

Ответ: 18.

I.б) Правило Саррюса

Справа от определителя дописывают первых два столбца. Затем находят <u>**сумму:**</u> произведений элементов, расположенных на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, записывая их со знаком «плюс», и произведений элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, записывая их со знаком «минус» (Схема 2):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Схема 2

Задание 3.

Вычислить определитель матрицы A по правилу Саррюса.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 0\cdot 5 + 6\cdot 4\cdot 7 - 5\cdot 2\cdot 7 - 6\cdot 3\cdot 5 - 4\cdot 0\cdot 1 =$$
$$= 10 + 0 + 168 - 70 - 90 - 0 = 18$$

Ответ: 18.

При вычислении определителей используют те же термины (элементы, строки, столбцы, главная и побочная диагонали), что и для соответствующей матрицы, для которой вычисляется определитель.

Свойства определителя

1. Определитель не меняется при замене в нем всех строк соответствующими по номеру столбцами (т.е. при транспонировании).

2. Определитель изменит знак на противоположный, если в нем поменять местами любые две строки или два столбца.

3. Определитель равен нулю, если содержит нулевую строку или столбец.

4. Определитель равен нулю, если содержит две одинаковые или пропорциональные строки (столбца).

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

6. Определитель не изменится, если в нем заменить строку (или столбец) суммой этой строки и некоторой другой, предварительно умноженной на какое-либо число.

7. Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц, т.е. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Последующие методы вычисления определителя применяются также и для матриц большей размерности.

II. *Метод приведения определителя к верхнетреугольному виду.*

Рассмотрим осуществление данного метода на примере Задания 3.

Задание 4.

Вычислить определитель методом приведения его к верхнетреугольному виду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Решение.

(А) Применим три раза свойство 6:

- умножим элементы первой строки на (-4), а затем сложим ее со второй строкой;
- умножим элементы первой строки на (-7); а затем сложим ее с третьей строкой;

(Б) умножим элементы второй строки на (-2); а затем сложим ее с третьей строкой.

(В) Найдем произведение элементов, стоящих на главной диагонали, и в результате получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{vmatrix}}_{(\text{А})}=\underbrace{\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{vmatrix}}_{(\text{Б})}=\underset{\substack{\Uparrow\\(\text{В})}}{0}.$$

Заметим, что после шага (Б) для окончательного вычисления определителя в данном примере также можно использовать 3 свойство определителей (так как третья строка после преобразований стала нулевой).

Ответ: 1.

Пусть дана квадратная матрица порядка n. Выберем в ней произвольно s строк и s столбцов $(1\le s\le n)$. Элементы, стоящие на пересечении s строк и s столбцов, образуют матрицу порядка s. Определитель этой матрицы называется *минором порядка* s *матрицы* и обозначается M.

Минором M', *дополнительным к минору* M называется определитель матрицы, полученный в результате вычеркивания тех s строк и s столбцов данной матрицы, которые входят в минор M.

Алгебраическим дополнением минора M называется дополнительный к нему минор M', умноженный на $(-1)^{\sigma}$, где σ – сумма номеров тех строк и столбцов матрицы, которые входят в минор M.

Каждый элемент a_{ij} матрицы n-го порядка является минором M_{ij} первого порядка. Дополнительный минор является определителем порядка $n-1$.

Опр.3. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} *элемента* a_{ij} определителя называется минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Задание 5.

Найти алгебраические дополнения элементов a_{22} и a_{32} (как миноры 1-го порядка).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Согласно определению алгебраического дополнения

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -(8 - 12) = 4.$$

Ответ: -3; 4.

III. *Метод разложения определителя по элементам ряда.*

Назовем строки и столбцы матрицы ее *рядами*.

Теорема 1. (о разложении определителя по элементам ряда). Определитель квадратной матрицы порядка n, $(n>1)$ равен сумме произведений элементов некоторого ряда на их алгебраические дополнения, т.е. справедлива формула:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} \ \ (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}).$$

Для $n = 3$ и $i = 1$ эта формула примет вид:

$$detA=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

где $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Используем теорему «О разложении определителя по элементам ряда» при вычислении определителей в Заданиях 5 и 6.

Задание 6.

Вычислить определитель матрицы A с помощью ее разложения по элементам 1-й строки.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot(2\cdot5-4\cdot0)-3\cdot(6\cdot5-5\cdot0)+7\cdot(6\cdot4-5\cdot2)=$$

$$=10-3\cdot30+7\cdot14=10-90+98=18.$$

Ответ: 18.

Задание 7.

Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Сначала применим теорему для разложения элементов матрицы по 2-й строке, затем по элементам 3 столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{21} + (-1) \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24} = -1 \cdot (-1)^4 M_{22} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 3 \cdot A_{33}) = -M_{13} - 3 \cdot M_{33} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} -$$

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -(3-4) - 3(1+9) = 1 - 30 = -29.$$

Ответ: -29.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется определителем матрицы?

2. Напишите формулу вычисления определителя 2-го порядка?

3. Перечислите методы вычисления определителя 3-го порядка.

4. Сформулируйте основные свойства определителей.

5. В чем разница между минором и алгебраическим дополнением?

6. Сформулируйте теорему о разложении определителя по элементам ряда.

Вопросы для любознательных

1. Всегда ли определитель суммы матриц равен сумме их определителей?

2. Какие еще существуют способы вычисления определителей? (Найти из других источников). Привести пример.

Задания для самостоятельного решения

2.1. Вычислить определители второго порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

2.2. Решить уравнения:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3. Вычислить определители с помощью «правила треугольников»:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$$

2.4. Вычислить определители 3-го порядка разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \text{ г) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

2.5. Вычислить определители, используя приведение к верхнетреугольному виду:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

2.6. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2.7. Решить неравенство:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \le 4.$$

Ответы: 2.1.а) 2; б) 0; в) 0; г) $ad-bc$. 2.2.а) 13; б) 1;2. 2.3.а) -6; б) $-xyz$; в) 0; г) 0; 2.4.а) -8; б) 0; в) 0; г) 48; 2.5.а) 100; б) 17; в) -178; 2.6.а) 60; б) 150;

2.7. $(-\infty; -\frac{36}{5})$.

3. Обратная матрица

Обратная матрица. Теорема существования и единственности обратной матрицы. Решение матричных уравнений.

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Опр.1. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю, т.е. $\Delta = detA \neq 0$. Если $\Delta = detA = 0$, то матрица называется *вырожденной*.

Опр.2. Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A, если выполняется равенство $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица.

Теорема 1. Для невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}.

В случае квадратной матрицы n-го порядка обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{|A|}A^*, \qquad (2)$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Приведем без доказательства *алгоритм нахождения обратной матрицы*:

1. Найти $detA$. Если $detA \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ существует.
2. Вычислить матрицу алгебраических дополнений элементов матрицы A.
3. Транспонировать полученную матрицу, обозначаем $A*$.
4. Построить обратную матрицу $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} A^*$.

Задание 1.

Найти обратную матрицу к матрице A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Применим *алгоритм нахождения обратной матрицы*

1. Найдем $detA$: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ существует.

2. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

   $A_{11} = 4, A_{12} = -7, A_{13} = -6, A_{21} = -8, A_{22} = 9, A_{23} = 10, A_{31} = 4, A_{32} = -5, A_{33} = -6$.

3. Транспонированная матрица $A*$ из алгебраических дополнений имеет вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. Построим обратную матрицу $A^{-1}=\frac{1}{detA}A^*$:

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}A^*=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Для проверки вычисления применим равенство: $A\cdot A^{-1}=E$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Замечание 1. Для невырожденной квадратной матрицы 2-го порядка

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, из формулы (2) следует равенство:

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

Теорема 2. Если $|A| \neq 0$ и $A,\ B$ – матрицы порядка n, то решение матричного уравнения

$$A \cdot X = B,$$

где X – квадратная матрица порядка n, находится по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Замечание 2. Для решения матричного уравнения $X \cdot A = B$, где $A,\ B,\ X$ – матрицы порядка n, и $|A| \neq 0$, справедлива формула $X = B \cdot A^{-1}$.

Задание 2.

Вывести формулу, позволяющую решить матричное уравнение $A \cdot X \cdot C = B$.

Решение.

Умножим данное уравнение слева на A^{-1}, а справа на C^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, $C^{-1} \cdot C = E$ и $E \cdot X \cdot E = X$, то получаем $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

Ответ. $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 3. Если $|A| \neq 0$ и $|C| \neq 0$, где $A,\ B,\ C$ – матрицы размерностью $n \times n,\ n \times m,\ m \times m,$ то решение матричного уравнения: $A \cdot X \cdot C = B$, где X – матрица размерности $n \times m$, находится по формуле $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.

Рассмотрим применение обратной матрицы к решению матричных уравнений

Задание 3.

Решить матричное уравнение:

$$A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдем матрицу, обратную к матрице A:

$$|A| = 4 - 6 = -2 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Умножив обе части уравнения на A^{-1} слева, получим:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \text{ или } X = A^{-1} \cdot B.$$

Следовательно,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Теорию матриц можно применять для определения затрат сырья и общей стоимости сырья.

Задача 1. Предприятие выпускает автодорожный материал трех видов: P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, где каждый элемент a_{ij}

$(i=1,2,3;\ j=1,2)$ показывает, сколько единиц продукции j- типа расходуется на производства единицы продукции i-го вида. План

выпуска продукции задан матрицей-строкой $C=(100\ 80\ 130)$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом $B=\begin{pmatrix}30\\ 50\end{pmatrix}$.

Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

Решение.

I способ. Затраты 1–го сырья составляют $S_1=2\cdot100+5\cdot80+1\cdot130=730$ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение:

$$S=C\cdot A=\begin{pmatrix}100 & 80 & 130\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}730 & 980\end{pmatrix}.$$

Тогда общая стоимость сырья $Q=730\cdot30+980\cdot50=70900$ ден. ед. может быть записана в матричном виде $Q=S\cdot B=(CA)B=(70900)$.

II способ. Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья S на единицу продукции, т.е. матрицу:

$$S=A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}30\\ 50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}210\\ 250\\ 230\end{pmatrix}$$

а затем общую стоимость сырья Q:

$$Q=C\cdot S=C\cdot(AB)=\begin{pmatrix}100 & 80 & 130\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}210\\ 250\\ 230\end{pmatrix}=(70900).$$

Ответ: затраты сырья составят $S_1=730,\ S_2=980$, общая стоимость сырья $Q=70900$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение обратной матрицы.
2. В чем разница между невыроженной и вырожденной матрицами?
3. Сформулируйте теорему существования и единственности обратной матрицы.
4. Перечислите этапы алгоритма нахождения обратной матрицы.
5. Запишите формулу нахождения обратной матрицы 2-го порядка.
6. Запишите формулы, позволяющие решить матричные уравнения.

Вопросы для любознательных

1. Может ли матричное уравнение $A \cdot X = B$ иметь:

а) одно решение?

б) два решения?

в) 17 решений?

г) ни одного решения?

Задания для самостоятельного решения

3.1. Определить обратную матрицу A^{-1} для матрицы A, если они существуют:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & -x \end{pmatrix}$.

3.2. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

е) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$.

Ответы: 3.1.а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; в) $A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) не существует; д) $\begin{pmatrix} -x & -z \\ -y & x \end{pmatrix}$. 3.2. а) $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & \frac{67}{12} & \frac{65}{12} \\ -4 & \frac{35}{6} & \frac{37}{6} \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & 3 \\ \frac{5}{13} & -1 \\ \frac{30}{13} & 4 \end{pmatrix}$.

4. Ранг матрицы

Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований.

Опр.1. *Элементарными преобразованиями строк* матрицы называются преобразования следующих трех типов:

1) *перестановка местами двух строк матрицы* (условное обозначение: , где стрелки указывают на строки, переставляемые местами);
2) *замена строки суммой этой строки и некоторой другой, вспомогательной, предварительно умноженной на какое-либо число* α (условное обозначение: $\cdot(\alpha)$, где стрелка указывает на изменяемую строку;

   множитель $\cdot(\alpha)$ ставится рядом со вспомогательной строкой);
3) *умножение строки на ненулевое число* α (условное обозначение: $\cdot(\alpha)$, ставится рядом с преобразуемой строкой).

<u>*Замечание 1.*</u> Аналогично вводятся элементарные преобразования столбцов матрицы.

Опр.2. *Опорным элементом строки* матрицы называется первый слева ненулевой элемент этой строки. Если строка нулевая, то опорного элемента у нее нет.

Опр.3. Матрица называется *ступенчатой* (или *имеющей ступенчатый вид* или *трапециевидной*), если выполнены следующие условия:

•если какая-то строка матрицы нулевая, то все последующие строки – нулевые;
•опорный элемент в каждой последующей строке, начиная с первой, расположен правее, чем в предыдущей.

Опр.4. *Рангом матрицы* A называется число ненулевых строк в ступенчатом виде этой матрицы.

Опр.5. *Рангом матрицы* называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Обозначения ранга матрицы: $rangA,\ r(A),\ r_A,\ r$

<u>*Замечание 2.*</u> Ранг равен 0 только у нулевой матрицы.

Опр.6. Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется *базисным минором* матрицы.

<u>*Замечание 3.*</u> Ранг матрицы не меняется при применении к матрице A элементарных преобразований, то есть не зависит от способа приведения матрицы к ступенчатому виду.

<u>*Замечание 4.*</u> Ранг не меняется при транспонировании матрицы.

Элементарные преобразования позволяют сделать более удобной процедуру нахождения ранга матрицы.

Опр.7. Минором, окаймляющим минор M_k матрицы A, называется минор M_{k+1}(порядка $(k+1)$) этой матрицы, содержащий минор M_k.

Опр.8. Строки и столбцы матрицы A, на пересечении которых находятся ее опорные элементы, называются *базисными строками* и *базисными столбцами* исходной матрицы.

Задание 1.

Указать два ступенчатых вида матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Назвать базисные строки и столбцы матрицы A.

Решение. *Способ 1:*

$$A=\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&2\\1&2&4&6\\2&4&0&-4\end{pmatrix}(-1)\;\;(-2)\;\rightarrow\;\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&2\\0&0&1&2\\0&0&-6&-12\end{pmatrix}(-1)\;\;(6)\;\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем: у матрицы A базисные строки – *1-я, 2-я*; базисные столбцы – *1-й, 3-й.*

Способ 2.

$$A=\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&2\\1&2&4&6\\2&4&0&-4\end{pmatrix}\;\rightarrow\;\begin{array}{c}(3)\\(2)\\(1)\\(4)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&4&6\\0&0&1&2\\1&2&3&4\\2&4&0&-4\end{pmatrix}(-1)\;\;(-2)\;\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{array}{c}(3)\\(2)\\(1)\\(4)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&4&6\\0&0&1&2\\0&0&-1&-2\\0&0&-8&-16\end{pmatrix}(1)\;\;(8)\;\rightarrow\;\begin{array}{c}(3)\\(2)\\(1)\\(4)\end{array}\begin{pmatrix}1&2&4&6\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Отсюда заключаем: у матрицы A базисные строки – *2-я, 3-я*; базисные столбцы – *1-й, 3-й.*

Ответ: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ базисные строки – *1-я, 2-я*; базисные столбцы – *1-й, 3-й*;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ базисные строки – *2-я, 3-я*; базисные столбцы – *1-й, 3-й.*

Задание 2.

Привести матрицу к ступенчатому виду и найти ранг матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение.
Выполним следующую цепочку элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ значит

$r(A) = 3$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; ранг матрицы $r(A) = 3$.

Задание 3.

Найти ранг матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Выполним следующую цепочку элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} (-2) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

Задание 4.

Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Миноры первого порядка (сами элементы матрицы) отличны от нуля. Все миноры второго и третьего порядков данной матрицы равны нулю, так как элементы строк этих миноров пропорциональны. Следовательно, ранг матрицы, равен 1.

Ответ: $r = 1$.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите все элементарные преобразования строк.
2. Дайте определение ступенчатой матрицы.

3. Дайте определение ранга матрицы.

4. Что такое базисный минор матрицы?

5. Перечислите действия, при которых ранг матрицы не меняется.

6. Что называет базисными строками и базисными столбцами?

Вопросы для любознательных:

1. Может ли ранг матрицы быть:

а) равен нулю?

б) меньше нуля?

в) раным 2,5?

2. Ранг матрицы A равен r. Что можно сказать о:

а) $r(2A)$?

б) $r(-A)$?

в) $r(0 \cdot A)$?

3. Как может измениться ранг матрицы при транспонировании?

4. Как может измениться ранг матрицы при добавлении к ней:

а) одной произвольной строки?

б) одного произвольного столбца?

5. Как может измениться ранг матрицы при вычеркивании:

а) одной строки?

б) одного столбца?

6. Найти из других источников вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров. Привести пример.

Задания для самостоятельного решения

4.1. Найти ранг матриц методом элементарных преобразований

$$а)\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix};\quad б)\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12\\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13\end{bmatrix};\quad в)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11\end{pmatrix};$$

$$г)\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix};\quad д)\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

4.2. Укажите матрицу, ранг которой равен 2.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -2 & -4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1 & 2\\ 5 & 0 & 0 & 1\\ 6 & 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

4.3. Определить ранг и найти базисные миноры матриц.

$$а)\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0\end{pmatrix};\quad б)\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

4.4. Найти ранг матриц с помощью элементарных преобразований и указать какой-либо базисный минор.

$$а)\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 0 & 6\\ 2 & -4 & -8 & 4\end{pmatrix};\quad б)\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 5 & 3\\ -4 & -2 & -6 & 2\\ 0 & 1 & 7 & 7\end{pmatrix}.$$

Ответы: 4.1.а) $r=2$; б) $r=3$; в) $r=2$; г) $r=2$; д) $r=3$; 4.2. D; 4.3. а) $r=2$, базисными минорами являются миноры 2 порядка, отличные от нуля; базисных миноров 8; б) $r=3$, базисными минорами являются миноры 3 порядка, отличные от нуля; базисных миноров 2; 4.4. а) $r=3$; $\begin{vmatrix}-1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 6\\ 2 & -4 & 4\end{vmatrix}$; б) $r=2$; $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}$.

5. Невырожденные системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений. Матричный метод решения невырожденных систем. Формулы Крамера.

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводятся многочисленные прикладные задачи (по некоторым оценкам более 75% всех задач). Можно с полным основанием утверждать, что решение линейных систем является одной из самых распространенных и важных задач вычислительной математики.

Опр.1. Системой линейных уравнений, состоящей из m уравнений с n неизвестными $x_1,\dots x_n$, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где числа $a_{11},\dots a_{mn}$ называются коэффициентами системы, а числа $b_1,\dots b_m$ – свободными членами.

Если в системе (1) $\boxed{b_1=0,\dots,b_m=0}$, то она называется *линейной однородной*.

В противном случае система (1) называется *линейной неоднородной системой*.

<u>*Замечание 1.*</u> Система (1) может быть записана в матричной форме

$$\boxed{A\cdot X=B} \qquad (2)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ - матрица системы;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец (вектор-столбец) неизвестных;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – столбец (вектор-столбец) свободных членов.

Опр.2. *Расширенной матрицей* системы (1) называется матрица, полученная приписыванием к A справа (после вертикальной черты) столбца B (обозначается $(A|\mathrm{B})$):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Опр.3. Решением системы (1) называется упорядоченное множество чисел $(c_1, c_2 \dots, c_n)$, если каждое из уравнений системы обращается в верное равенство после подстановки вместо $(x_1, x_2 \dots x_n)$ соответственно чисел $c_1, c_2 \dots, c_n$.

Опр.4. Система уравнений называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется *несовместной.*

Опр.5. Система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *недоопределенной*, если она имеет более одного решения. *Переопределённая* система — система, число уравнений которой больше числа неизвестных.

Замечание 2. Любая однородная СЛАУ имеет хотя бы одно решение – нулевое (его ещё называют тривиальное), в котором все переменные равны нулю.

Замечание 3. Однородная система линейных уравнений имеет только тривиальное решение, если ранг матрицы системы равен **количеству переменных.**

Рассмотрим квадратную систему линейных уравнений.

Опр.6. Система (1) называется *невырожденной*, если $\Delta = detA \neq 0$. Невырожденная система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено:

1.Матричным методом

Теорема 1. Если матрица A – невырожденная, то система (2) имеет единственное решение, вычисляемое по формуле:

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B} \qquad (3)$$

где A^{-1} – матрица, обратная к матрице A.

2. По формулам Крамера

Теорема 2. Если матрица A – невырожденная, то система (2) имеет единственное решение x_j, которое может быть вычислено по формуле:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1, \ldots, n} \qquad (4)$$

где Δ - определитель матрицы A, Δ_j – определитель матрицы, полученной из A заменой в ней j-го столбца на столбец B.

Габриэль Крамер (1704-1752) швейцарский математик, философ, ученик Иоганна Бернулли, один из создателей линейной алгебры

Замечание 4. Решения, построенные по формулам (3) и (4), совпадают.

Рассмотрим невырожденную совместную систему уравнений, имеющих единственное решение с тремя неизвестными x, y, z:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (5)$$

где $a_{ij,}b_i\,(i, j = 1,2,3)$ некоторые постоянные числа.

Применяя формулы Крамера (4), решение системы (5) запишется в виде:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} \qquad (6)$$

Задание 1.

Решить систему матричным методом и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \end{cases}$$

Решение.

1. Применим матричный метод.

Найдем

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из Теоремы 1 (формула 3), находим:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 28 \\ 35 \\ -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ответ: (4,5,-3).

2. Применим формулы Крамера (Теорему 2).

Матрица системы: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы системы A равен: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$,

следовательно, система является невырожденной и имеет единственное решение.

Используем формулы Крамера (6) и находим $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 28; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 35; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -21.$$

Тогда $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{28}{7} = 4; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{35}{7} = 5; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-21}{7} = -3$.

Ответ: $(4;5;-3)$.

Теорема 3. Если определитель системы (5)

$$\Delta = 0,$$

но хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2 или Δ_3 отличен от нуля, то система (5) не имеет решения.

Задание 2.

Решить систему

$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ 2y - z = 5, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 2 + 1 + 0 = 0.$$

Следовательно, по Теореме 3 система не имеет единственного решения, т.е. либо она несовместна, либо имеет бесчисленное множество решений.

Вычислим определители Δ_1, Δ_2 или Δ_3. Например, Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+4+5-8+2-0=3 \neq 0 .$$

Следовательно, не вычисляя Δ_2, Δ_3, заключаем по Теореме 3, что система не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение системы линейных уравнений.
2. В чем разница между линейной однородной и неоднородной системой уравнений?
3. Что называется расширенной матрицей системы?
4. В чем разница между совместной и несовместной системой уравнений?
5. Какие системы уравнений называются эквивалентными или равносильными?
6. Перечислите возможные преобразования эквивалентных систем уравнений?
7. Запишите формулу нахождения решения системы уравнений матричным способом.
8. Запишите формулу нахождения решения системы уравнений с помощью правила Крамера.
9. Запишите формулу нахождения решения системы уравнений с тремя неизвестными, применяя правило Крамера.
10. Укажите количество решений системы уравнений в зависимости от значения определителя матрицы системы согласно правилу Крамера.

Вопросы для любознательных

1. К системе линейных уравнений с n неизвестными дописали произвольное уравнение с n неизвестными. Как при этом изменится множество решений системы?
2. Из несовместной системы линейных уравнений удалили какое-то одно уравнение. Будет ли полученная система совместной?
3. Множество решений двух систем линейных уравнений совпадают.

а) Равны ли расширенные матрицы этих систем?

б) Равны ли ранги этих матриц?

Задания для самостоятельного решения

5.1. Решить системы уравнений.

а) $\begin{cases} 2x-2y=1 \\ -3x+6y=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-2y=1 \\ -3x+6y=4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x-2y=3 \\ -3x+6y=-9 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 5x+10y=20 \end{cases}$.

5.2. Решить системы уравнений.

а) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-y+4z=5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-7y+z=11 \\ 2y+3z=7 \\ 3x+y-z=-1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-5y-z=0 \\ 2x-3y+2z=-1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=3 \end{cases}$

д) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2y-z=5 \\ x+y=7 \end{cases}$; е) $\begin{cases} x+3y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ x+2y+3z=3 \end{cases}$;

5.3. Определить, при каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} 5x-ay=10 \\ x+2y=b \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;

б) не имеет решений;

в) имеет бесконечное множество решений.

5.4. Найти сумму $x_1+x_2+x_3$, где $(x_1;x_2;x_3)$ - решение системы

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ x_2+4x_3=7 \\ x_3=2 \end{cases}$$

5.5. Какое из уравнений:

а) $x_1+x_2=1$; б) $x_1-x_2=0$; в) $2x_1+2x_2=0$

можно приписать к уравнению $x_1+x_2=0$, чтобы составить совместную систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1,x_2.

5.6. Решить однородные системы линейных уравнений

$$\text{а)}\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3=0 \\ 3x_1+2x_3=0 \end{cases};\quad \text{б)}\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0 \\ 5x_1+4x_2-6x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases}.$$

Ответы: 5.1. а) $(x=\frac{7}{3};y=\frac{11}{6})$; б) $\otimes$; в) $(x;\frac{x-3}{2})$, где x любое число; г) $(4-2y;y)$. 5.2. а) $(\frac{1}{2};2;\frac{3}{2})$; б) $(1;-1;3)$; в) $\otimes$; г) $(1-2y-3z;y;z)$; д) $(7-y;y;2y-5)$, где y любое число; е) $\otimes$; 5.3. а) $a\neq-10$; б) $a=-10, b\neq 2$; в) $a=-10, b=2$. 5.4. 2. 5.5. только не а). 5.6. $x_1=x_2=x_3=0$; б) $(4x_3;-\frac{7}{2}x_3;x_3)$.

6. Системы линейных уравнений

Эквивалентные системы. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса.

Численное решение линейных алгебраических уравнений с помощью определителей удобно производить для систем двух и трех уравнений. В случае же систем большего числа уравнений гораздо выгоднее пользоваться *методом Гаусса*, который заключается в последовательном исключении неизвестных.

Опр.1. Две системы уравнений называются *эквивалентными* или *равносильными*, если любое решение одной из них является также решением другой и наоборот.

Эквивалентные системы уравнений получаются в результате следующих преобразований:

- умножения уравнения системы на число, отличное от нуля;
- сложения одного уравнения с другим, умноженного на любое число;
- перестановки местами двух уравнений системы.

Исследовать систему линейных уравнений означает выяснить, совместна она или нет, а для совместной системы определить, имеет ли она единственное решение или бесконечное число решений.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{11},\ldots a_{mn}, b_1,\ldots b_m$ – некоторые числа.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли). Система (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то есть

$$\boxed{r(A) = r(A|\mathrm{B})}$$

При этом, возможны три случая:

1. $r(A) \neq r(A|B)$ – система несовместна (т.е. решений нет), и $r(A) = r(A|B) - 1$;
2. $r(A) = r(A|B)$ – система совместна и имеет *единственное решение,* если в ее ступенчатом виде последнее уравнение содержит одно неизвестное;
3. $r(A) = r(A|B)$ – система совместна и имеет *бесчисленное множество решений*, если в ее ступенчатом виде последнее уравнение содержит более одного неизвестного;

Опр.2. *Базисными неизвестными* совместной системы называют те неизвестные, коэффициенты при которых образуют базисный минор матрицы системы; остальные неизвестные называют *свободными неизвестными.*

Метод Гаусса

Решение системы линейных уравнений (1) осуществляют следующим образом:

1.Находят ранг матрицы A и ранг расширенной матрицы $(A|\mathrm{B})$. Если $r(A) \neq r(A|\mathrm{B})$, то система несовместна.

2.Если $r(A) = r(A|\mathrm{B}) = r$, выделяют базисный минор и базисные неизвестные.

3. Данную систему заменяют равносильной, состоящей из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора.

4. Если $r = n$, т.е. число базисных неизвестных равно числу неизвестных системы, то система имеет единственное решение.

5. Если $r < n$, т.е. число базисных неизвестных меньше числа неизвестных системы, то из системы, полученной в п. 3, находят выражение базисных неизвестных через свободные. При этом базисные неизвестные оставляют в левой части уравнений, а свободные переносят в правую. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получают бесконечное множество решений исходной системы.

Карл Фридрих Гаусс (1777-1855)
Немецкий математик, физик, астроном

Задание 1.

Исследовать на совместность.

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x - y = 1 \\ 4x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Решение.

В данном случае

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Применим метод Гаусса:

$$(A|\mathrm{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-3)(-4) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -6 & -3 \end{array}\right) (-1) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Следовательно: $r(A) = 2, \quad r(A|\mathrm{B}) = 3$ и $r(A) \neq r(A|\mathrm{B})$.

Ответ: система несовместна, т.е. решений нет.

<u>*Замечание 1.*</u> Применение метода Гаусса не требует, чтобы матрица системы A была квадратной и предварительного вычисления ее определителя.

Задание 2.

Исследовать на совместность и решить систему.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение.

Воспользуемся методом Гаусса. Для этого составим матрицу системы, столбец свободных членов и преобразуем расширенную матрицу $(A|\mathrm{B})$ к виду Гаусса:

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\
-1 & 2 & 3 & -2 & 4 & 0 \\
-1 & 7 & 11 & 3 & 8 & 1 \\
-2 & 4 & 6 & -4 & 1 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
(1)\quad (2) \\ \\ \\ \\
\end{array}
\rightarrow
$$

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\
0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\
0 & 10 & 16 & 10 & 8 & 2 \\
0 & 10 & 16 & 10 & 1 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ (-2) \\ \\ \\
\end{array}
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\
0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ (-1/7)
\end{array}
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\
0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
\rightarrow
$$

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\
0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ (-4) \\ \\
\end{array}
\rightarrow
\left[\begin{array}{c}
r(A) = r(A|\mathrm{B}) = 3 \Rightarrow \\
\textit{система совместна} \\
n = 5 \Rightarrow \textit{имеет бесконечное} \\
\textit{множество решений} \\
n - r = 2 - \textit{число свободных} \\
\textit{неизвестных } x \\
x_1, x_2, x_5 - \textit{базисные неизвестные} \\
x_3, x_4 - \textit{свободные неизвестные}
\end{array}\right]
\rightarrow
$$

$$
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\
0 & 5 & 8 & 5 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ (\frac{1}{5}) \\ \\
\end{array}
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 8/5 & 1 & 0 & 1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ (-3) \\ \\
\end{array}
\rightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 1/5 & 4 & 0 & 2/5 \\
0 & 1 & 8/5 & 1 & 0 & 1/5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right).
$$

Ответ:
$$
\begin{cases}
x_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}c_1 - 4c_2 \\
x_2 = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}c_1 - c_2 \\
x_3 = c_1 \\
x_4 = c_2 \\
x_5 = 0 \\
c_1, c_2 \in R
\end{cases}.
$$

Для изучения дисциплин «Организация, планирование и управление в дорожном хозяйстве», «Производственные предприятия дорожной отрасли» будет полезным рассмотрение Задачи 1.

Задача 1. Производственное предприятие асфальтовых смесей выпускает три вида продукции p_1, p_2, p_3, на производство которых затрачивается четыре вида сырья s_1, s_2, s_3, s_4. Нормы расхода сырья и его запасы заданы в таблице:

Продукция / Сырье	p_1	p_2	p_3	Запасы сырья
s_1	1	1	2	190
s_2	2	0	2	180
s_3	2	1	0	160
s_4	1	2	2	250

Определить план выпуска продукции, при котором расходуется полностью все сырье.

Решение. Пусть три вида продукции выпускается в количестве x_1, x_2, x_3. Тогда по условиям задачи получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 190 \\ 2x_1 + 2x_3 = 180 \\ 2x_1 + x_2 = 160 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 250 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее к ступенчатому виду:

$$\left(A|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 2 & 0 & 2 & 180 \\ 2 & 1 & 0 & 160 \\ 1 & 2 & 2 & 250 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 0 & -2 & -2 & -200 \\ 0 & -1 & -4 & -220 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & -2 & -80 \\ 0 & 0 & -4 & -160 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы: $r(A) = r(A|B) = 3$, количество неизвестных $n = 3$, значит, система совместна и имеет единственное решение.

Запишем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 190 \\ x_2 = 60 \\ x_3 = 40 \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 50, x_2 = 60, x_3 = 40.$

Ответ: для выполнения плана выпуска необходимо производство продукции в количестве $x_1 = 50, x_2 = 60, x_3 = 40.$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие системы можно назвать эквивалентными?

2. В результате каких преобразований получаются эквивалентные системы уравнений?

3. Сформулируйте Теорему Кронекера-Капелли.

4. Что значит «исследовать систему линейных уравнений»?

5.Укажите, в каком случае система будет несовместна?

6. Укажите, в каком случае система будет иметь бесконечное множество решений?

7. Укажите, в каком случае система будет иметь единственное решение?

8. Перечислите основные этапы решения системы уравнения методом Гаусса.

Вопросы для любознательных

1. Могут ли быть эквивалентными две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных, но с разным числом уравнений?

2. Могут ли различные методы решения системы линейных уравнений (метод Крамера и метод обратной матрицы) дать различные ответы?

3. Возможно ли, чтобы система линейных уравнений имела решение с помощью метода Гаусса, но не имела решения по формулам Крамера?

Задания для самостоятельного решения

6.1. Исследовать на совместность и решить в случае совместности:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y + 2z = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$; д) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$; е) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 16 \end{cases}$.

6.2. Исследовать на совместность и решить систему при всех значениях параметра a:

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = 1 \end{cases}$$

6.3. Исследовать на совместность и решить в случае совместности:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7 \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 - x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$.

Ответы: 6.1. а) $(-2;-1;1)$; б) $(-1;3;-2;2)^T$; в) $(-\frac{2}{11}+\frac{1}{11}c_1-\frac{9}{11}c_2;\frac{10}{11}-\frac{5}{11}c_1+\frac{1}{11}c_2;c_1;c_2)^T$; г) $(3;-4;-1;1)^T$; д) $\varnothing$; е) $(-c-8;4-2c;c)$. 6.2. $\varnothing$ при $a=-3;(1-c_1-c_2;c_1;c_2)^T$ при $a=0;\left(\frac{1}{a+3};\frac{1}{a+3};\frac{1}{a+3}\right)^T$ при $a\neq-3;a\neq 0$. 6.3 а) $(\frac{9-c_1-14c_2-c_3}{7};\frac{4c_1-7c_2-3c_3-1}{7};c_1;c_2;c_3)$; $(5;4;3;1;2)$.

Список использованных источников

1.Некрасов В. К. Строительство автомобильных дорог. – М. : Автотрансиздат, 1957. – 487 с.
2. Данко П.Е., Попов А. Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. I. – 4-е изд., испр. И доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 304 с.
3.Сборник задач для втузов. В 4-х частях. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: учеб. пособие для втузов / Болгов В. А., Демидович Б. П., Ефимов А. В. и др. под общ. ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 3-е изд., испр. М. : наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1993. – 480 с.
4. Сухая Т. А., Бубнов В. Ф. Задачи по высшей математике : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1. – Мн.: Высш. шк., 1993. – 416 с.
5. Жукова Г. С., Рушайло М.Ф. Линейная алгебра в примерах и задачах : учеб. Пособие. – М.: изд. Центр РХТУ им.Д.И. Менделеева, 2000. – 344 с.
6. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – М.: Айрис-прес, 2008. – 576с.: ил.
7. Математика: учебно-методический комплекс (для студентов технических специальностей заочного отделения) / сост. И. Н. Катковская [и др.], - БНТУ, каф. «Высшая математика №1», [Электронный ресурс]. - Ч. 1. - Минск : БНТУ, 2013.
8. Сборник профессионально ориентированных задач и упражнений по математике (с использованием электронно-образовательных ресурсов): для специальностей 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены» / А.В. Забавская. [Электронный ресурс]. - Минск : БНТУ, 2019. – 58 с.