Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 3»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Программные вопросы, контрольные задания и методические указания

Минск
БНТУ
2013

Министерство образования Республики Беларусь
БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 3»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Программные вопросы, контрольные задания
и методические указания для студентов-заочников
строительных специальностей экономического профиля

Минск
БНТУ
2013

УДК 51(075.4)
ББК 221я7
М34

Составители:
Т. Н. Гурина, О. А. Мороз

Рецензенты:
А. Д. Корзников, Т. С. Яцкевич

Издание содержит перечень программных вопросов по математическому программированию. В нем приводятся тексты контрольных задач, соответствующих программе, и методические указания по их выполнению.

Издание предназначено для студентов-заочников строительных специальностей экономического профиля.

© Белорусский национальный
технический университет, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Общий курс математики является фундаментом математического образования специалиста, в рамках которого проводится ориентирование на приложение математических методов в профессиональной деятельности. Студенты экономических специальностей в четвертом семестре изучают математическое программирование, поскольку в последующей практической деятельности будут встречаться с математическими методами оптимизации.

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил.

1. Каждая работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного и зеленого. Необходимо оставлять поля шириной 4-5 см. для замечаний рецензента.

2. В заголовке на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки работы в институт и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.

3. Решение задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях.

4. Перед решением каждой задачи надо полностью написать ее условие. В случае общей формулировки задач условие должно быть сформулировано с конкретными данными соответствующего номера варианта.

5. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

6. После полученной прорецензированной контрольной работы, как недопущенной, так и допущенной к собеседованию, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты в той же тетради под заголовком «Работа над ошибками», выполнить все рекомендации рецензента, после чего работа должна быть возвращена на повторное рецензирование

ПРОГРАММА КУРСА

Раздел 1. Линейное программирование

1. Предмет и задачи математического программирования. Основные определения.
2. Постановка и различные формы записи задач линейного программирования и их эквивалентность.
3. Основная теорема линейного программирования.
4. Геометрический метод решения задачи линейного программирования.
5. Основная идея симплекс-метода. Симплекс-таблица.
6. Признак оптимальности опорного плана задачи линейного программирования.
7. Улучшение начального опорного плана задачи линейного программирования с помощью симплексных преобразований.
8. Признак неограниченности целевой функции задачи линейного программирования.
9. Признак бесконечности множества оптимальных планов задачи линейного программирования.
10. Двойственная задача линейного программирования и ее построение для задачи линейного программирования в симметрической форме.
11. Построение двойственной задачи для задачи линейного программирования в канонической форме.
12. Соответствие между переменными взаимодвойственных задач и решение двойственной задачи.
13. Основное неравенство теории двойственности и его экономическая интерпретация.
14. Достаточный признак оптимальности взаимодвойственных задач линейного программирования.
15. Теоремы двойственности и их экономическая интерпретация.
16. Двойственные оценки как мера дефицитности сырья. Теорема об оценках.
17. Постановка и математическая модель транспортной задачи.
18. Признак разрешимости транспортной задачи.
19. Открытая и закрытая модели транспортной задачи их связь.
20. Построение начального опорного плана транспортной задачи.

21. Признак оптимальности опорного плана транспортной задачи.
22. Улучшение опорного плана транспортной задачи.
23. Дополнительные ограничения в постановке транспортной задачи и методы решения таких задач.

Раздел 2. Элементы теории матричных игр

24. Решение матричной игры двух лиц с нулевой суммой в чистых стратегиях.
25. Смешанные стратегии игроков и их свойства.
26. Критерий оптимальности смешанных стратегий в матричной игре.
27. Упрощение матричной игры.
28. Сведение матричной игры к паре взаимодвойственных задач.
29. Игры с природой. Платежная матрица игры, матрица тисков.
30. Критерии Байеса, Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица для определения оптимальных стратегий в играх с природой.

Раздел 3. Оптимизация на сетях

31. Основные определения и понятия теории графов.
32. Алгоритм Фалкерсона для упорядочения вершин графа.
33. Транспортная задача в сетевой постановке и ее решение.
34. Постановка задачи о максимальном потоке на сети, ее математическая модель.
35. Поток на сети, его свойства. Разрез на сети, его свойства.
36. Теорема Форда–Фалкерсона о максимальном потоке на сети.
37. Алгоритм Форда–Фалкерсона о построении минимального разреза на сети.
38. Методы «списков» и «меток» для решения задачи о максимальном потоке на сети.
39. Основные определения и принципы построения сетевых графиков.
40. Постановка задачи о минимальной продолжительности комплекса работ.
41. Временные характеристики событий сетевого графика.
42. Временные характеристики работ сетевого графика.

Раздел 4. Динамическое программирование

43. Многошаговые процессы в оптимизационных задачах. Метод динамического программирования. Уравнения Беллмана.
44. Задача о распределении ресурсов.
45. Задача о замене оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красс, М.С. Математика в экономике / М.С. Красс. – М.: ИД ФБК – ПРЕСС, 2005.
2. Кузнецов, А.В. Высшая математика. Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 2001.
3. Кузнецов, А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич. – Минск: Вышэйшая школа, 2001.
4. Сакович, В.А. Исследование операций / В.А. Сакович. – Минск: Вышэйшая школа, 1985.
5. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование / под ред. А.В. Кузнецов.– Минск: Вышэйшая школа, 1995.
6. Красс, М.С. Математика для экономического бакалавриата / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2005.
7. Математические методы и модели исследования операций / под ред. В.А. Колемаева. – М.: ЮНИТИ, 2008.
8. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. Ермакова. – М.: ИНФРА, 2006.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задания 1–10. Решить графически задачу линейного программирования.

1. $f=-2x_1+5x_2-3x_3\to\min$ $\begin{cases}6x_1+5x_2\ge 12,\\ 2x_1+x_2+x_3=10,\\ x_1\ge 1, 0\le x_2\le 4, x_3\ge 0.\end{cases}$	2. $f=x_1+2x_2-x_4\to\max$ $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-2x_4=2,\\ 2x_1+x_2-x_3=5,\\ 0\le x_1\le 10, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.\end{cases}$
3. $f=x_1-2x_2+3x_3+x_4\to\min$ $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=6,\\ x_1-x_2\ge 0,\\ x_1+x_4=8,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0, x_4\ge 0.\end{cases}$	4. $f=x_1-x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=6,\\ x_1-x_2\le 0,\\ 2x_1+x_2\le 4,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.\end{cases}$
5. $f=3x_1-x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1-3x_2\le 0,\\ 2x_1+x_2\le 4,\\ 0\le x_1\le 2, x_2\ge 0, x_3\ge 0.\end{cases}$	6. $f=x_1-3x_2+x_3\to\min$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\ 2x_1-x_2\le 1,\\ 2x_1-x_2\ge 0,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.\end{cases}$
7. $f=x_1+x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=4,\\ 2x_1-x_2\ge 0,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 1, x_3\ge 0.\end{cases}$	8. $f=-x_1+4x_2+x_3\to\max$ $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=2,\\ 3x_1-x_2\ge 1,\\ 0\le x_1\le 1, x_2\ge 0, x_3\ge 0.\end{cases}$

9.	10.
$$f=-x_1-x_2+x_3\to\min$$ $$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3,\\x_1+2x_2\ge 4,\\x_1-3x_2\ge 0,\\0\le x_1\le 10, x_2\ge 0, x_3\ge 0.\end{cases}$$	$$f=x_1-4x_2+2x_3\to\min$$ $$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\3x_1+2x_2\le 12,\\x_1\ge 1, 0\le x_2\le 4, x_3\ge 0.\end{cases}$$

Задания 11–20. Предприятие ежемесячно имеет отходы (ресурсы) трех типов B_1, B_2, B_3, объемы которых определяются величинами b_1, b_2, b_3 (усл.ед.) Из этих отходов предприятие может организовать производство четырех видов изделий A_1, A_2, A_3, A_4, причем продукция может производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен). Расход ресурсов i-го типа на производство единицы изделия j-го типа определяется величиной $a_{ij}\,(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4})$ (усл.ед.), а стоимость единицы продукции j-го типа – величиной $c_j, (j=\overline{1,4})$ (усл.руб.). Значения a_{ij}, c_j приведены в таблицах.

Требуется:

1. Составить модель задачи определения ассортиментного плана производства, при котором расход ресурсов не превысит имеющегося количества, а суммарная стоимость произведенной продукции будет максимальной.
2. Привести полученную задачу линейного программирования к каноническому виду. Объяснить экономический смысл введенных балансовых переменных.
3. Найти симплекс-методом оптимальный ассортиментный план производства. Дать экономическую интерпретацию полученного результата.
4. Составить двойственную задачу для исходной. Оценить каждый из ресурсов, чтобы при заданных объемах ресурсов и величинах стоимости единицы продукции суммарная стоимость сырья была минимальной, а оценка ресурсов, необходимых для производства единицы продукции, была не меньше стоимости единицы продукции данного вида.

5. Определить меру дефицитности сырья и увеличение стоимости продукции при изменении объема сырья на единицу.

6. Оценить целесообразность введения в план производства нового вида изделий A_5, нормы затрат ресурсов на производство единицы продукции и стоимость от реализации единицы продукции которого приведены в таблице.

№ 11	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	2	2	1	2	3	3000
B_2	2	1	1	0	1	1000
B_3	1	2	1	1	2	2500
Стоим. c_j	4	5	2	3	3	

№ 12	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	2	1	3	2	1	1500
B_2	2	2	0	2	2	1700
B_3	0	3	1	1	3	700
Стоим. c_j	3	2	3	4	2	

№ 13	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	2	4	3	1	3	3000
B_2	2	0	1	2	1	400
B_3	1	1	2	2	1	1000
Стоим. c_j	3	2	4	3	2	

№ 14	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	2	2	1	0	2	1500
B_2	2	3	2	2	2	3000
B_3	0	1	2	1	1	500
Стоим. c_j	3	3	2	2	3	

№ 15	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	2	3	2	1	3	3000
B_2	3	4	1	2	1	4200
B_3	2	1	1	0	1	500
Стоим. c_j	3	4	2	2	3	

№ 16	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	1	2	1	2	3	2500
B_2	2	1	2	0	2	1000
B_3	3	2	2	3	2	3000
Стоим. c_j	3	5	3	4	4	

№ 17	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	0	1	1	1	1	1000
B_2	2	2	2	1	2	2000
B_3	3	2	2	0	2	2400
Стоим. c_j	3	2	3	2	3	

№ 18	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	1	3	2	3	1	2400
B_2	2	2	1	2	0	1500
B_3	2	1	3	0	2	600
Стоим. c_j	3	5	3	4	2	

№ 19	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	2	2	3	2	3	3000
B_2	0	1	1	2	1	1000
B_3	3	1	1	0	2	1200
Стоим. c_j	3	2	4	3	4	

№ 20	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	2	2	2	1	2	3000
B_2	1	0	1	2	3	800
B_3	1	2	2	1	4	2800
Стоим. c_j	4	3	5	4	5	

Задания 21–30. Производственное объединение имеет в своем составе три фирмы $A_i\,(i=\overline{1,3})$, которые производят однородную продукцию в объемах a_i. Готовая продукция поставляется потребителям $B_j\left(j=\overline{1,3}\right)$, спрос которых определяется, соответственно, величинами b_j. Известны стоимости перевозки единицы продукции $c_{ij}\left(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}\right)$от поставщика $A_i\,(i=\overline{1,3})$ к потребителю $B_j\left(j=\overline{1,3}\right)$, которые приведены в таблицах.

Задача 1. Составить математическую модель задачи определения плана перевозки готовой продукции от поставщиков $A_i\,(i=\overline{1,3})$

потребителям $B_j\left(j=\overline{1,4}\right)$, чтобы запасы поставщиков были вывезены, спрос всех потребителей был удовлетворен, а суммарные транспортные издержки были минимальными. Методом потенциалов найти оптимальный план перевозки продукции от поставщиков к потребителям. Указать запасы оставшейся продукции у поставщиков.

Задача 2. Методом потенциалов найти оптимальный план перевозки при дополнительном условии, что продукция пункта производства $A_i\,(i=\overline{1,3})$, в котором себестоимость $c_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ производимой продукции наименьшая, должна быть распределена полностью, а суммарные затраты, вызванные производством и доставкой продукции, были бы минимальными.

Задача 3. Методом потенциалов найти оптимальный план перевозки продукции при дополнительном условии, что перевозка от поставщика A_n к потребителю B_k запрещена.

Задача 4. Методом потенциалов найти оптимальный план перевозки продукции при дополнительном условии, что перевозка от поставщика A_m к потребителю B_l ограничена d единицами.

Задача 5. Методом потенциалов найти оптимальный план перевозки продукции при выполнении обязательной перевозки от поставщика A_r к потребителю B_s в объеме не менее p единиц.

Во всех задачах вычислить величину наименьших суммарных затрат и сравнить с затратами начального плана перевозок.

№ 21	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	
A_1	4	3	4	100	К задаче 2: $c_1=7, c_2=9, c_3=5$
A_2	3	2	5	70	К задаче 3: n=1, k=1
A_3	5	4	4	80	К задаче 4: m=1, l=1, d=50
Спрос b_j	90	80	50		К задаче 5: r=3, s=1, p=40

№ 22	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	
A_1	3	4	5	40	К задаче 2: $c_1 = 6, c_2 = 5, c_3 = 4$
A_2	5	3	4	90	К задаче 3: n=2, k=2
A_3	4	4	5	70	К задаче 4: m=2, l=2, d=30
Спрос b_j	60	80	40		К задаче 5: r=1, s=3, p=30

№ 23	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	
A_1	3	5	4	80	К задаче 2: $c_1 = 6, c_2 = 4, c_3 = 5$
A_2	4	4	5	60	К задаче 3: n=1, k=1
A_3	5	3	3	100	К задаче 4: m=1, l=1, d=40
Спрос b_j	90	50	70		К задаче 5: r=1, s=2, p=40

№ 24	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	
A_1	3	1	4	60	К задаче 2: $c_1 = 6, c_2 = 4, c_3 = 2$
A_2	5	2	3	70	К задаче 3: n=1, k=2
A_3	2	4	5	90	К задаче 4: m=2, l=3, d=50
Спрос b_j	50	40	80		К задаче 5: r=3, s=2, p=20

№ 25	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	
A_1	9	7	6	180	К задаче 2: $c_1 = 3, c_2 = 5, c_3 = 4$
A_2	5	10	4	60	К задаче 3: n=1, k=3

A_3	3	8	2	50	К задаче 4: m=3, l=1, d=20
Спрос b_j	100	120	60		К задаче 5: r=1, s=1, p=80

№ 26	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	
A_1	7	4	9	90	К задаче 2: $c_1 = 3, c_2 = 6, c_3 = 4$
A_2	8	5	3	80	К задаче 3: n=2, k=3
A_3	4	6	5	50	К задаче 4: m=1, l=2, d=30
Спрос b_j	60	70	50	40	К задаче 5: r=3, s=2, p=30

№ 27	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	
A_1	3	9	7	100	К задаче 2: $c_1 = 5, c_2 = 6, c_3 = 4$
A_2	5	4	3	60	К задаче 3: n=1, k=1
A_3	6	8	3	80	К задаче 4: m=3, l=3, d=20
Спрос b_j	70	40	60		К задаче 5: r=1 ,s=2, p=30
№ 28	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	
A_1	1	3	4	60	К задаче 2: $c_1 = 9, c_2 = 7, c_3 = 4$
A_2	2	5	1	50	К задаче 3: n=1, k=1
A_3	4	5	3	70	К задаче 4: m=2, l=3, d=20
Спрос b_j	40	90	30		К задаче 5: r=3, s=1, p=30

№ 29	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	
A_1	6	7	8	80	К задаче 2: $c_1 = 7, c_2 = 4, c_3 = 5$
A_2	9	10	4	100	К задаче 3: n=2, k=3
A_3	3	5	9	70	К задаче 4: m=3, l=1, d=30
Спрос b_j	60	90	80		К задаче 5: r=1, s=3, p=60

№ 30	B_1	B_2	B_3	Запасы a_i	
A_1	4	8	10	120	К задаче 2: $c_1 = 4, c_2 = 6, c_3 = 7$
A_2	5	3	9	60	К задаче 3: n=2, k=2
A_3	6	7	4	90	К задаче 4: m=1, l=1, d=50
Спрос b_j	100	50	80		К задаче 5: r=2, s=3, p=40

Задания 31–40. Две отрасли *A* и *B* могут вкладывать денежные средства в строительство четырех объектов, причем отрасль *A* располагает a = 70 млн.усл.руб., а отрасль *B* – b = 56 млн.усл.руб. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль отрасли А в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы С.

Будем предполагать, что убыток отрасли *B* при этом равен прибыли отрасли *A*. Требуется:

1. Выявить игроков и описать их стратегии.
2. Проверить, имеет ли игра решение в чистых стратегиях.
3. Упростить матричную игру, исключив доминируемые стратегии игроков.
4. Составить экономико-математическую модель данной конфликтной ситуации для каждого игрока.
5. Найти оптимальные стратегии игроков.
6. На основании полученного результата распределить денежные средства между объектами.

31. $C=\begin{bmatrix}12&8&10&9\\9&10&6&4\\7&7&9&8\\11&13&7&5\end{bmatrix}$	32. $C=\begin{bmatrix}5&7&5&9\\3&6&4&4\\2&5&6&5\\8&6&8&7\end{bmatrix}$	33. $C=\begin{bmatrix}5&4&8&12\\3&2&7&9\\1&1&8&7\\3&13&4&5\end{bmatrix}$
34. $C=\begin{bmatrix}9&8&7&10\\2&3&5&7\\8&7&4&3\\9&10&8&4\end{bmatrix}$	35. $C=\begin{bmatrix}7&6&4&3\\6&5&1&2\\3&4&9&8\\5&5&11&9\end{bmatrix}$	36. $C=\begin{bmatrix}2&4&7&9\\1&1&6&5\\10&9&3&4\\11&12&5&6\end{bmatrix}$
37. $C=\begin{bmatrix}8&6&5&6\\7&5&3&4\\4&2&1&6\\5&3&6&7\end{bmatrix}$	38. $C=\begin{bmatrix}8&5&11&9\\7&3&9&8\\2&6&3&1\\3&9&8&10\end{bmatrix}$	39. $C=\begin{bmatrix}2&7&5&8\\1&2&3&2\\3&4&2&1\\6&5&3&4\end{bmatrix}$
40. $C=\begin{bmatrix}5&7&9&12\\4&5&7&3\\3&8&6&5\\9&12&9&8\end{bmatrix}$		

Задания 41–50. Объем реализации товара за рассматриваемый период времени колеблется в зависимости от уровня покупательского спроса в пределах от k_1 до k_2 тыс. ед. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара равна l ден.ед. Если запасенного товара окажется недостаточно для полного удовлетворения спроса, можно заказать дополнительное количество товара, что потребует новых затрат на доставку в размере m ден.ед. в расчете на единицу товара. Если же запасенный товар полностью реализовать не удастся, то расходы на содержание и хранение остатка составят n ден.ед. в расчете на единицу товара. Предполага-

ется, что дополнительно заказанный товар полностью реализуется за тот же рассматриваемый период времени. Требуется:

1. Придать описанной производственной ситуации игровую схему, выявить игроков и описать их стратегии.
2. Составить платежную матрицу игры.
3. Дать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара на торговом предприятии, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом торговой прибыли и возможных дополнительных затрат на заказ и доставку товара, содержание и хранение остатка, если:

а) известны вероятности уровней покупательского спроса, и они, соответственно, равны q_1, q_2, q_3, q_4;

б) известно, что все уровни покупательского спроса равновероятны;

в) никакой дополнительной информации об уровнях покупательского спроса нет (для нахождения оптимальной стратегии применить критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица). Постоянная λ задана.

Числовые данные приведены в таблице:

№ задания	k_1	k_2	l	m	n	q_1	q_2	q_3	q_4	λ
41	1	4	5	3	1	0,1	0,35	0,4	0,15	0,6
42	3	6	4	2	1	0,15	0,4	0,3	0,15	0,7
43	4	7	7	3	2	0,2	0,45	0,2	0,15	0,8
44	2	5	6	4	2	0,2	0,35	0,35	0,1	0,7
45	5	8	5	2	1	0,15	0,4	0,3	0,15	0,6
46	4	7	4	2	1	0,2	0,25	0,45	0,1	0,8
47	1	4	8	4	3	0,1	0,45	0,25	0,2	0,7
48	3	6	6	3	2	0,15	0,4	0,35	0,1	0,8
49	2	5	7	4	2	0,25	0,4	0,2	0,15	0,7
50	4	7	5	3	2	0,2	0,35	0,25	0,2	0,8

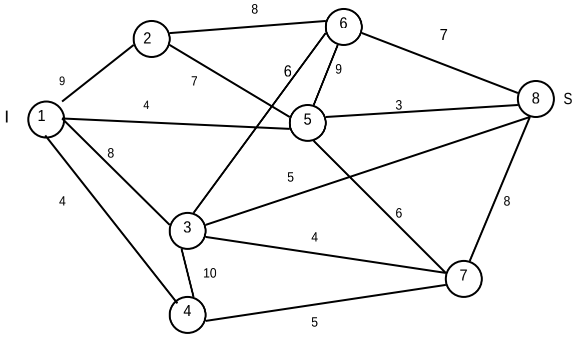
Задания 51–60. Дана сеть с указанными пропускными способностями ребер r_{ij} (одинаковы в обоих направлениях).

Найти:

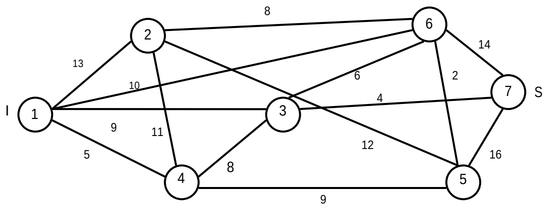
1) Максимальный поток из источника I в сток S методом меток;

2) Минимальный разрез (указать пунктирной линией на сети).

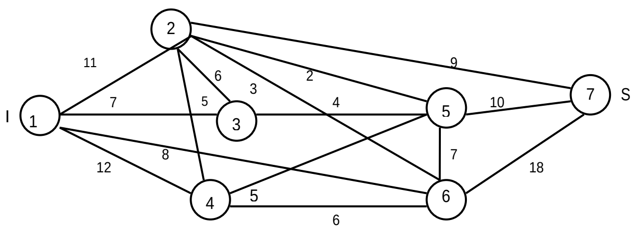
51.



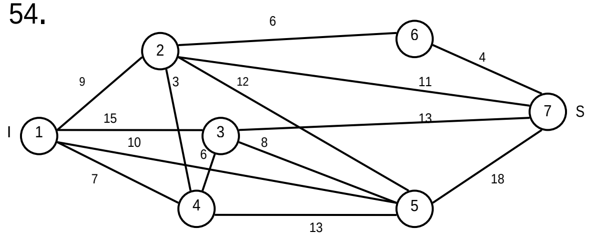
52.



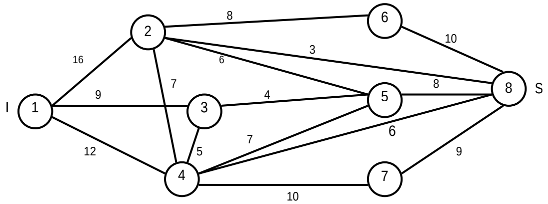
53.



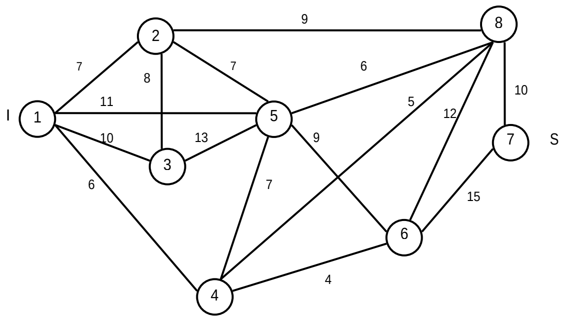
54.


I
S
1
2
3
4
5
6
7
6
4
9
3
12
11
15
13
10
6
8
7
18
13

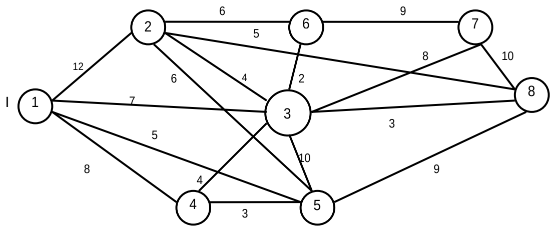
55.


I
S
1
2
3
4
5
6
7
8
8
10
16
3
6
7
8
9
4
7
6
12
5
9
10

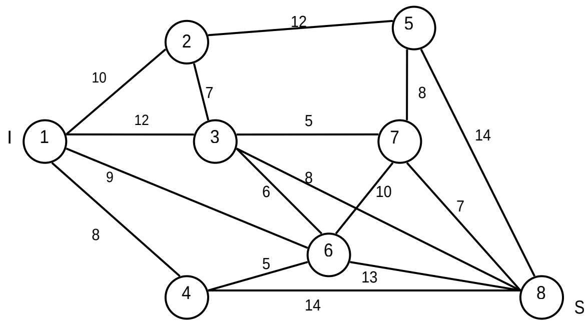
56.


I
S
1
2
3
4
5
6
7
8
9
7
8
7
6
10
11
5
12
10
13
9
6
7
15
4

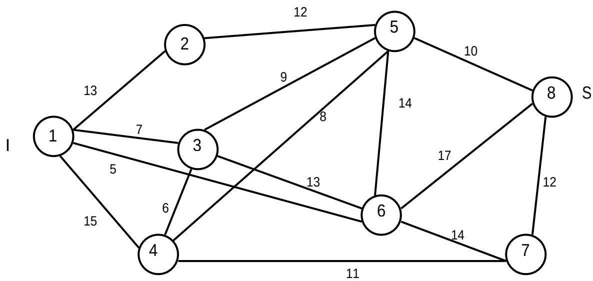
57.


I
1
2
3
4
5
6
7
8
6
9
5
12
8
10
6
4
2
7
3
5
10
8
4
9
3

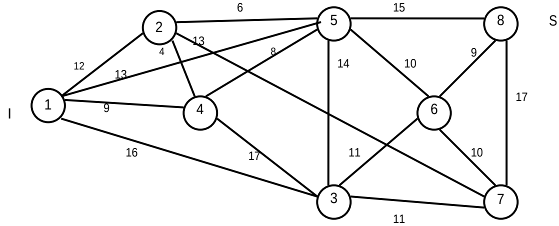
58.



59.



60.



Задания 61–70. Дан список работ, подлежащих выполнению:

61.

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы
a_1	-	3
a_2	-	7
a_3	-	4
a_4	-	5
a_5	a_1	4
a_6	a_1	2
a_7	a_2, a_6	8
a_8	a_2, a_6	6
a_9	a_3, a_6	9
a_{10}	a_3, a_4, a_6	4
a_{11}	a_4	7
a_{12}	a_5	6
a_{13}	a_5	5
a_{14}	a_7, a_9, a_{12}, a_{13}	4
a_{15}	a_{10}, a_{11}	3
a_{16}	a_{12}	9

62.

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы
a_1	-	4
a_2	-	6
a_3	-	9
a_4	-	8
a_5	a_4	3
a_6	a_4	7
a_7	a_4	2
a_8	a_3, a_7	5
a_9	a_1	8
a_{10}	a_1, a_9	4
a_{11}	a_1, a_9	3
a_{12}	a_5	4
a_{13}	a_5	9
a_{14}	a_2, a_6, a_8, a_{11}, a_{13}	4
a_{15}	a_{12}	8

63.

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы
a_1	-	3
a_2	-	7
a_3	-	4
a_4	a_1	5
a_5	a_1	3
a_6	a_1	9
a_7	a_3, a_6	2
a_8	a_3, a_6	9
a_9	a_2, a_7	6
a_{10}	a_4	8
a_{11}	a_2, a_7, a_8	2
a_{12}	a_5, a_{10}	4
a_{13}	a_2, a_7, a_8	5
a_{14}	a_2, a_7, a_8	9
a_{15}	a_9, a_{14}	7

64.

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы
a_1	-	8
a_2	-	4
a_3	-	9
a_4	a_3	5
a_5	a_3	4
a_6	a_3	7
a_7	a_1	2
a_8	a_1	8
a_9	a_1	9
a_{10}	a_2, a_3, a_4	9
a_{11}	a_7	2
a_{12}	a_6	5
a_{13}	a_5, a_{10}, a_{12}	7
a_{14}	a_5, a_{10}, a_{12}	6
a_{15}	a_8, a_{11}, a_{13}	8
a_{16}	a_6	4

65.

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы
a_1	-	7
a_2	-	9
a_3	-	3
a_4	-	4
a_5	a_1	3
a_6	a_1	9
a_7	a_2	9
a_8	a_5	8
a_9	a_4, a_5, a_6	6
a_{10}	a_4, a_5, a_6	2
a_{11}	a_4, a_5, a_6	5
a_{12}	a_2, a_3	4
a_{13}	a_2, a_3, a_{11}	6
a_{14}	a_8, a_9	7
a_{15}	a_7, a_{12}	5

66.

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы
a_1	-	3
a_2	-	7
a_3	-	5
a_4	-	5
a_5	a_3	9
a_6	a_3	3
a_7	a_1	9
a_8	a_4, a_5	4
a_9	a_4, a_5	6
a_{10}	a_7	3
a_{11}	a_1, a_2, a_6, a_9	4
a_{12}	a_1, a_2, a_6, a_9	8
a_{13}	a_8	2
a_{14}	a_{10}, a_{12}	6

67.

Работа	Непосред-ственно предше-ствующие работы	Продол-житель-ность работы
a_1	-	3
a_2	-	7
a_3	-	5
a_4	a_2	5
a_5	a_2	9
a_6	a_2	3
a_7	a_3	9
a_8	a_3	4
a_9	a_3	6
a_{10}	a_1, a_6, a_9	3
a_{11}	a_5, a_8, a_{10}	4
a_{12}	a_5, a_8, a_{10}	8
a_{13}	a_4,, a_5, a_8, a_{10}	2
a_{14}	a_7, a_{11}	6

68.

Рабо-та	Непосред-ственно предше-ствующие работы	Продолжи-тельность работы
a_1	-	5
a_2	-	8
a_3	-	4
a_4	-	2
a_5	a_3	6
a_6	a_4	9
a_7	a_4	6
a_8	a_1, a_2, a_7	2
a_9	a_1, a_2, a_7	9
a_{10}	a_2	5
a_{11}	a_2	4
a_{12}	a_2	3
a_{13}	a_5, a_{12}	7
a_{14}	a_6, a_8	7
a_{15}	a_9, a_{10}, a_{14}	6

69.

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы
a_1	-	6
a_2	-	2
a_3	-	9
a_4	-	4
a_5	a_1	7
a_6	a_1	3
a_7	a_4	6
a_8	a_4	4
a_9	a_3, a_4	5
a_{10}	a_3, a_4	8
a_{11}	a_2, a_6	5
a_{12}	a_2, a_5, a_6	8
a_{13}	a_7, a_9	4
a_{14}	a_7, a_9	2
a_{15}	a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}	9

70.

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы
a_1	-	8
a_2	-	3
a_3	-	5
a_4	a_1	6
a_5	a_1	2
a_6	a_1	4
a_7	a_3	6
a_8	a_3	8
a_9	a_2, a_4	9
a_{10}	a_5, a_9	9
a_{11}	a_5, a_9	7
a_{12}	a_5, a_9	5
a_{13}	a_3, a_7, a_{12}	2
a_{14}	a_3, a_7, a_{12}	3
a_{15}	a_3, a_7, a_{12}	6
a_{16}	a_8, a_{13}	7

Требуется:

1. Построить сетевой график выполнения комплекса работ.
2. Непосредственно на графике вычислить ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий.

3. Выделить на графике критический путь и найти критический срок.

4. Найти полные и свободные резервы времени работ.

Задания 71–80. На строительство четырех предприятий, производящих некоторую однородную продукцию, выделено 6 млн.усл.руб. По каждому из четырех предприятий известен возможный объем выпуска продукции $g_i(x)\left(i=\overline{1,4}\right)$ (усл. ед.) в зависимости от капиталовложений x $\left(0 \le x \le 6\right)$, выделенных на строительство. Значения $g_i(x)\left(i=\overline{1,4}\right)$ (усл. ед.) приведены в таблице. Требуется:

1. Составить математическую модель задачи распределения капиталовложений в строительство предприятий, чтобы суммарный объем выпускаемой продукции был максимальным, и найти решение этой задачи.

2. Используя полученное решение, найти:

а) оптимальное (в смысле наибольшего объема выпускаемой продукции) распределение 6 млн.усл.руб. между тремя предприятиями,

б) оптимальное распределение 4 млн.усл.руб. между тремя предприятиями.

№ 71	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	12	14	15	18	23	25
$g_2(x)$	13	15	16	19	21	24
$g_3(x)$	14	16	18	21	22	25
$g_4(x)$	11	13	16	20	22	24

№ 72	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	27	30	32	35	37	36
$g_2(x)$	24	28	31	34	36	40
$g_3(x)$	25	29	30	32	37	42
$g_4(x)$	29	31	32	36	38	35

№ 73	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	17	20	21	23	25	30
$g_2(x)$	14	19	22	27	30	26
$g_3(x)$	16	18	21	25	27	30
$g_4(x)$	18	22	27	35	31	29

№ 74	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	10	14	18	25	29	30
$g_2(x)$	12	13	17	21	25	29
$g_3(x)$	13	18	22	23	28	25
$g_4(x)$	12	15	20	21	25	27

№ 75	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	12	18	22	24	30	35
$g_2(x)$	15	17	20	24	32	37
$g_3(x)$	14	20	21	25	29	32
$g_4(x)$	13	16	20	25	29	32

№ 76	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	24	28	32	34	37	45
$g_2(x)$	26	30	37	42	47	38
$g_3(x)$	27	29	31	36	45	46
$g_4(x)$	25	30	32	38	41	45

№ 77	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	25	27	30	35	42	50
$g_2(x)$	27	29	32	37	42	48
$g_3(x)$	22	29	34	36	46	45
$g_4(x)$	20	29	34	41	45	49

№ 78	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	15	17	19	23	27	32
$g_2(x)$	18	20	25	30	35	27
$g_3(x)$	17	19	24	27	32	35
$g_4(x)$	15	20	23	25	30	32

№ 79	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	12	18	21	28	35	39
$g_2(x)$	13	17	22	25	30	36
$g_3(x)$	9	15	18	23	25	30
$g_4(x)$	13	18	22	27	34	36

№ 80	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	10	13	17	24	28	35
$g_2(x)$	9	13	16	20	26	30
$g_3(x)$	12	16	20	24	27	29
$g_4(x)$	15	17	22	26	30	34

Задания 81–90. Разработать оптимальную политику замены оборудования возраста пяти лет, исходя из условия максимизации ожидаемой прибыли за плановый период продолжительности десяти лет. Известны стоимость продукции $r(t)$ в усл. ед., производимой в течение года с использованием данного оборудования возраста t лет; ежегодные расходы $u(t)$ в усл. ед., связанные с эксплуатацией этого оборудования; ликвидационная стоимость оборудования s в усл. ед., независящая от его возраста; стоимость p в усл. ед. нового оборудования (сюда же включены расходы, связанные с установкой, наладкой и запуском оборудования). Данные приведены в таблицах.

№ 81	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	25	24	23	22	21	20	19	18	17	15	14	3	16
u(t)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		

№ 82	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	40	39	39	37	37	36	35	34	34	32	30	9	25
u(t)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		

№ 83	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	38	37	36	35	35	33	31	30	28	27	25	2	15
u(t)	15	15	16	17	18	20	20	21	23	24	25		

№ 84	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	36	35	35	33	32	30	28	26	26	25	24	3	20
u(t)	12	12	12	15	15	17	18	20	22	24	24		

№ 85	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	40	39	38	37	36	36	34	33	33	32	30	2	14
u(t)	20	20	22	23	24	25	26	27	28	29	30		

№ 86	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	1	10
u(t)	4	5	5	6	6	7	8	8	9	10	11		

№ 87	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	50	48	47	45	40	37	35	34	32	30	29	5	30
u(t)	17	18	20	22	23	24	26	28	28	29	29		

№ 88	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	26	25	24	23	22	21	20	20	18	18	16	3	16
u(t)	5	5	7	8	9	10	11	13	15	15	16		

№ 89	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	49	47	45	42	40	38	35	35	33	31	30	5	35
u(t)	10	12	14	16	18	20	23	24	25	27	30		

№ 90	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	42	42	40	38	37	35	34	34	33	30	30	5	21
u(t)	20	20	20	22	24	24	25	27	27	28	28		

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Решение задания типа 1–10

Решить графически задачу линейного программирования

$$f = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $x_3 : x_3 = 4 - x_1 - x_2$. Так как $x_3 \ge 0$, то первое ограничение равносильно неравенству $x_3 = 4 - x_1 - x_2 \ge 0$ или $x_1 + x_2 \le 4$. Исключим переменную x_3 из целевой функции:

$$f = x_1 + 2x_2 - 2(4 - x_1 - x_2) = x_1 + 2x_2 - 8 + 2x_1 + 2x_2 = 3x_1 + 4x_2 - 8.$$

Тогда задача линейного программирования принимает вид:

$$f = 3x_1 + 4x_2 - 8 \to \max (1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} (2)$$

Здесь (1) – целевая функция, (2) – система ограничений. Эта задача содержит две переменные, и ее можно решить графически.

Для этого построим многоугольник допустимых планов, то есть множество точек плоскости x_1Ox_2, которые удовлетворяют системе ограничений (2).

В неравенствах системы ограничений знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и построим в системе координат x_1Ox_2 соответствующие прямые:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, (I) \\ x_1 - 2x_2 = 0, (II) \\ 2x_1 - x_2 = 0, (III) \\ x_1 = 0 (IV), x_2 = 0 (V). \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис.1. Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой полуплоскости – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость.

Найдем, полуплоскость, определяемую неравенством $x_1 + x_2 \leq 4$. Для этого построим прямую $x_1 + x_2 = 4$ (на рис.1 это прямая (I)), возьмем, например, точку O(0;0). Координаты этой точки удовлетворяют неравенству: $0 + 0 \leq 4$. Значит полуплоскость, которой принадлежит точка O(0;0), определяется неравенством $x_1 + x_2 \leq 4$. Это показано штрихами на рис. 1. Аналогично поступим с двумя другими неравенствами.

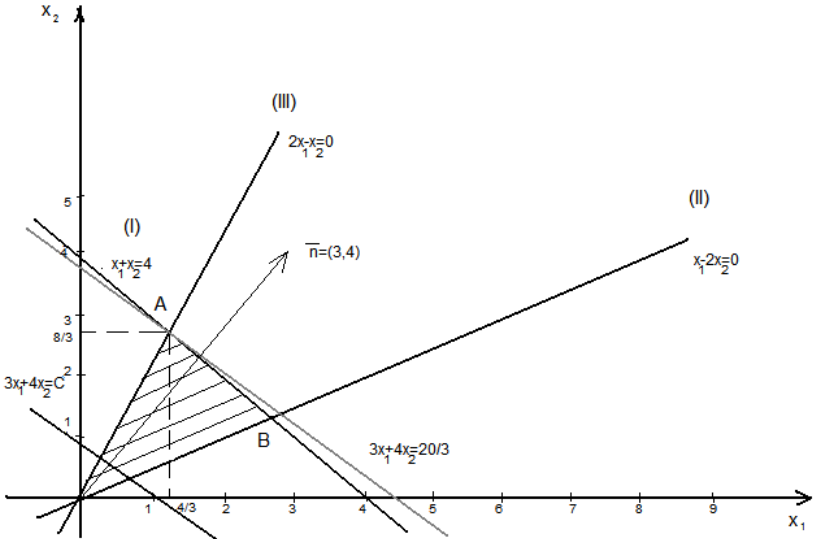


Рис. 1

Пересечение полученных таким образом полуплоскостей определяет многоугольник допустимых планов. Как видно из рис. 1 – это треугольник OAB.

Решить задачу линейного программирования графически – это значит найти точку многоугольника допустимых планов, в которой целевая функция принимает наибольшее значение. Чтобы найти эту точку построим линию уровня целевой функции $3x_1 + 4x_2 = c$, которая пересекает многоугольник допустимых планов (c – некоторая постоянная). *Линия уровня* – это множество точек плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение c. Так как задача решается на максимум, то нам надо найти линию наивысшего уровня. Нормальный вектор линии уровня $\bar{n} = (3;4) = gradf$, то есть совпадает с вектором $gradf$. Вектор $gradf$ указывает направление наибыстрейшего возрастания функции f. Чтобы найти линию наивысшего уровня, будем параллельно перемещать построенную линию в направлении $gradf$ до ее крайней точки при пересечении с многоугольником допустимых планов. Такой точкой на рис.1 является точка A. В этой точке целевая функция принимает максимальное значение.

Найдем координаты точки A как точки пересечения прямых (I) и (III), то есть решим систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$ Получаем $x_1^* = \frac{4}{3}, x_2^* = \frac{8}{3}$, тогда максимальное значение целевой функции равно $\max f = f(A) = 3 \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{8}{3} - 8 = \frac{20}{3}$. Находим $x_3^* = 4 - x_1 - x_2 = 4 - \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = 0$.

Ответ: $\bar{x}^* = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 0\right), \max f = \frac{20}{3}$.

Замечание. Если задача решается на минимум, то надо найти точку многоугольника допустимых планов, в которой целевая функция принимает наименьшее значение, то есть построить линию наименьшего уровня. Для этого линию уровня параллельно перемещают в направлении $-gradf$ до ее крайней точки при пересечении с многоугольником допустимых планов. В этой точке целевая функция принимает минимальное значение.

Решение задания типа 11–20

Предприятие ежемесячно имеет отходы (ресурсы) трех типов B_1, B_2, B_3 объемы которых определяются величинами b_1, b_2, b_3 (усл.ед.). Из этих отходов предприятие может организовать производство четырех видов изделий A_1, A_2, A_3, A_4, причем продукция может производится в любых соотношениях (сбыт обеспечен). Расход ресурсов i-го типа на производство единицы продукции j-го типа определяется величиной $a_{ij} (i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4})$ (усл.ед.), а стоимость единицы продукции j-го типа – величиной $c_j, (j = \overline{1,4})$ (усл.руб.) . Значения a_{ij}, c_j приведены в таблице:

	Расход сырья на производство единицы продукции					Объем сырья b_i
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
B_1	2	2	3	3	2	3000
B_2	0	1	1	2	3	600
B_3	2	1	2	1	1	1800
Стоим. c_j	3	2	5	4	3	

Требуется:

1. Составить модель задачи определения ассортиментного плана производства, при котором расход ресурсов не превысит имеющегося количества, а суммарная стоимость произведенной продукции будет максимальной.

2. Привести полученную задачу линейного программирования к каноническому виду. Объяснить экономический смысл введенных балансовых переменных.

3. Найти симплекс-методом оптимальный ассортиментный план производства. Дать экономическую интерпретацию полученного результата.

4. Составить двойственную задачу для исходной. Оценить каждый из ресурсов, чтобы при заданных объемах ресурсов и величинах стоимости единицы продукции суммарная стоимость сырья была минимальной, а оценка ресурсов, необходимых для производства единицы продукции, была не меньше стоимости единицы продукции данного вида.

5. Определить меру дефицитности сырья и увеличение стоимости продукции при изменении объема сырья на единицу.

6. Оценить целесообразность введения в план производства нового вида изделий A_5, нормы затрат ресурсов на производство единицы продукции и стоимость от реализации единицы продукции которого приведены в таблице.

Задание 1. Обозначим через x_j объем производимой продукции A_j j-го типа $(j=\overline{1,4})$. Тогда стоимость всей произведенной продукции будет определяться значением функции $f=3x_1+2x_2+5x_3+4x_4$, которая называется *целевой функцией* и по условию задачи должна стремиться к максимуму. На производство продукции расходуется сырье первого типа B_1: $2x_1+2x_2+3x_3+3x_4$, второго типа B_2 – $x_2+x_3+2x_4$, третьего типа B_3 – $2x_1+x_2+2x_3+x_4$, объемы которых не должны превышать запасы, соответственно, 3000, 600 и 1800 усл.ед., то есть должны выполняться условия:

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3+3x_4 \le 3000, \\ x_2+x_3+2x_4 \le 600, \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4 \le 1800. \end{cases}$$

Кроме этих ограничений, на переменные в экономических задачах, как правило, накладывается условие неотрицательности: $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}$

Таким образом, математическая модель задачи будет иметь вид:

$$f=3x_1+2x_2+5x_3+4x_4 \to \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3+3x_4 \le 3000, \\ x_2+x_3+2x_4 \le 600, \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_4 \le 1800. \end{cases} \qquad (2)$$

Задача (1)–(2) является задачей линейного программирования, записанной в симметрической форме.

Задание 2. Чтобы решить задачу (1) - (2) симплекс-методом, ее необходимо привести к каноническому виду. Для этого введем переменные:

$$x_5=3000-(2x_1+2x_2+3x_3+3x_4),$$

$$x_6=600-(x_2+x_3+2x_4),$$

$$x_7=1800-(2x_1+x_2+2x_3+x_4),$$

которые называются *балансовыми*. Они определяют остаток сырья соответствующего типа после производства продукции из этого сырья, и из ограничений (2) следует, что $x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0$. Введение балансовых переменных не изменяет целевую функцию (1), и задача в канонической форме имеет вид:

$$f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \max \qquad (3)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 3000, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 600, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_7 = 1800, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}. \end{cases} \qquad (4)$$

Задание 3. Решим задачу (3) - (4) симплекс методом. Переменные x_5, x_6, x_7 являются *базисными* переменными (БП). Каждая из этих переменных входит только в одно уравнение с коэффициентом «1» и не входит в целевую функцию, а переменные x_1, x_2, x_3, x_4 являются *свободными* переменными (СП). Запишем задачу в виде симплекс-таблицы:

СП / БП	x_1	x_2	x_3	x_4	1	θ_i
x_5	2	3	3	3	3000	1000
x_6	0	1	$\boxed{1}$	2	600←	600
x_7	2	1	2	1	1800	900
f	-3	-2	-5	-4	0	
			↑			

В столбец базисных переменных (БП) записаны переменные x_5, x_6, x_7 . В первую строку записаны свободные переменные x_1, x_2, x_3, x_4. В столбец с «1» в (столбец свободных членов) записаны правые части уравнений ограничений. В последней строке (f-строке) записаны коэффициенты целевой функции с противоположными знаками. Внутри таблицы записаны элементы матрицы системы ограничений. Правый столбец θ_i , носит вспомогательный характер, и его смысл будет выяснен ниже.

Чтобы записать опорный план, задаваемый этой таблицей, необходимо свободные переменные положить равными нулю:

$x_1=x_2=x_3=x_4=0$, а значения базисных переменных равны значениям, стоящим в столбце свободных членов: $x_5=3000$, $x_6=600$, $x_7=1800$. Начальный опорный план имеет вид $X^0 = (0, 0, 0, 0, 3000, 600, 1800)$. Значение целевой функции на этом плане стоит в f-строке в столбце свободных членов $f(X^0)=0$.

Опорный план в задаче на максимум является *оптимальным,* если в f-строке все элементы, за исключением, быть может, элемента, стоящего в столбце свободных членов, неотрицательны. План $X°$ неоптимален, так как в f - строке имеются отрицательные элементы.

От этого плана перейдем к другому опорному плану, более близкому к оптимальному. Для этого введем в базис новую переменную x_3, соответствующую отрицательному элементу f-строки с наибольшей абсолютной величиной (этот элемент - «-5»). Столбец коэффициентов, в котором стоит переменная, включаемая в базис, называется *разрешающим* и помечается «стрелочкой» (в нашей задаче это 3-й столбец).

Чтобы решить вопрос о том, какую переменную следует вывести из базиса, находят *симплексные отношения* θ_i, то есть отношения элементов столбца свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца. Из симплексных отношений выбирают наименьшее. Оно и определяет разрешающую строку и переменную, которую выводят из базиса. Обычно симплексные отношения записывают справа на краю таблицы, а разрешающую строку помечают «стрелочкой».

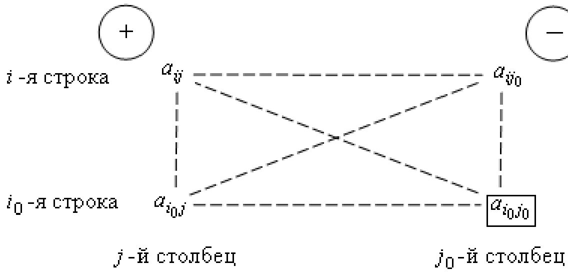
В нашей задаче симплексные отношения $\theta_1 = 3000/3 = 1000, \theta_2 = 600/1 = 600, \theta_3 = 1800/2 = 900$ и $\min(1000,600,900)=600$, следовательно, разрешающей строкой является вторая. Переменную x_6 выводим из базиса.

Элемент, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется *разрешающим*, и его выделяют в таблице. В нашей задаче это элемент $a_{23} = 1$, и он выделен «рамочкой».

Перейдем к новой симплекс-таблице, в которой переменная, выводимая из базиса, меняется местами с переменной, вводимой в базис, т. е. x_6 и x_3 меняются местами. Все остальные переменные остаются на прежних местах.

Элементы симплекс-таблицы при переходе к новому плану пересчитываются по правилам, которые называются *симплексными преобразованиями.* Они заключаются в следующем:

1) разрешающий элемент заменяется обратной величиной;
2) элементы разрешающей строки, за исключением разрешающего элемента, делятся на разрешающий элемент;
3) элементы разрешающего столбца, за исключением разрешающего элемента, делятся на разрешающий элемент и меняют знак;
4) все остальные элементы таблицы вычисляются по «правилу прямоугольника»:



$$a_{ij}' = \frac{a_{ij} \cdot a_{i_0 j_0} - a_{i_0 j} \cdot a_{ij_0}}{a_{i_0 j_0}}$$

a_{ij} – пересчитываемый элемент, $a_{i_0 j_0}$ – разрешающий элемент, a_{ij_0} – элемент, стоящий в i-й строке и разрешающем столбце, $a_{i_0 j}$ – элемент, стоящий в j-м столбце и разрешающей строке, a_{ij}' – элемент новой таблицы, стоящий в i-й строке и j-м столбце.

Используя эти правила, переходим к новой таблице. Все расчеты приведем в таблице:

СП / БП	x_1	x_2	x_6	x_4	1

x_5	2	$\frac{2\cdot 1-3\cdot 1}{1}=-1$	$-\frac{3}{1}=-3$	$\frac{3\cdot 1-3\cdot 2}{1}=-3$	$\frac{3000\cdot 1-3\cdot 600}{1}$ $=1200$
x_3	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{1}{1}=1$	1	$\frac{2}{1}=2$	$\frac{600}{1}=1$
x_7	2	$\frac{1\cdot 1-1\cdot 2}{1}=-1$	$-\frac{2}{1}=-2$	$\frac{1\cdot 1-2\cdot 2}{1}$ $=-3$	$\frac{1800\cdot 1-2\cdot 600}{1}$ $=600$
f	-3	$\frac{-2\cdot 1+5\cdot 1}{1}=3$	$-\frac{-5}{1}=5$	$\frac{-4\cdot 1+5\cdot 2}{1}$ $=6$	$\frac{0\cdot 1+5\cdot 600}{1}$ $=3000$

Запишем эту таблицу, опустив вычисления:

СП / БП	x_1	x_2	x_6	x_4	1	θ_i
x_5	2	-1	-3	-3	1200	600
x_3	0	1	1	2	600	–
x_7	$\boxed{2}$	-1	-2	-3	600 $\leftarrow$	300
f	-3	3	5	6	3000	
	$\uparrow$					

Получили новый план $X^1 = (0, 0, 600, 0, 1200, 0, 600)$, $f(X^1)=3000$. План не является оптимальным, так как в f - строке имеется отрицательный элемент (он равен «-3»). Он единственный, поэтому первый столбец будет разрешающим. Находим симплексные отношения: $\theta_1 = 1200/2 = 600$, θ_2 – не существует, $\theta_3 = 600/2 = 300$ и $\min(600,300)=300$, следовательно, разрешающей строкой будет третья, а разрешающий элемент $a_{31}=2$. Переменную x_1 выводим из базиса, а переменную x_7 вводим в базис. Переходим к новой таблице, элементы которой вычисляем по тем же правилам, что и в предыдущей.

СП / БП	x_7	x_2	X_6	x_4	1
x_5	-1	0	-1	0	600
x_3	0	1	1	2	600
x_1	1/2	-1/2	-1	-3/2	300
f	3/2	3/2	2	3/2	3900

Полученный план $X^* = (300, 0, 600, 0, 600, 0, 0)$ является оптимальным, так как в f - строке все элементы неотрицательны.

$\max f(X)= f(X^*)=3900$.

Дадим полученному результату *экономическую интерпретацию*. Для того чтобы суммарная стоимость произведенной продукции была максимальной, необходимо из имеющегося сырья произвести 300 единиц изделий вида A_1 ($x_1^*=300$), 600 единиц изделий вида A_3 ($x_3^*=600$), изделия вида A_2 и A_4 не производить ($x_2^*=x_4^*=0$). Значения $x_5^*=600$, $x_6^*=x_7^*=0$ показывают, что остаток сырья B_1 равен 600усл.ед., а сырье B_2 и B_3 израсходовано полностью. Максимальная стоимость произведенной продукции равна 3900 усл.руб. ($f(X^*)=3900$).

Задание 4. Чтобы построить двойственную задачу к данной, обозначим через y_1, y_2, y_3 стоимость единицы ресурсов B_1, B_2, B_3, соответственно. Они должны принимать такие значения, чтобы суммарная оценка всех ресурсов $F=3000y_1+600y_2+1800y_3$, была минимальной (чтобы не допустить необоснованного завышения оценки ресурсов). Коэффициенты функции F – это правые части в системе ограничений (2).

Суммарная стоимость ресурсов, используемых для производства единицы продукции каждого вида, должна быть не меньше стоимости этой произведенной единицы продукции, то есть $2y_1+2y_3 \geq 3$, $2y_1+y_2+y_3 \geq 2$, $3y_1+y_2+2y_3 \geq 5$, $3y_1+2y_2+y_3 \geq 4$. На переменные накладывается условие неотрицательности: $y_i \geq 0$, $i=\overline{1,3}$.

Таким образом, математическая модель задачи будет иметь вид:

$$F=3000y_1+600y_2+1800y_3 \rightarrow \min \qquad (5)$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_3 \geq 3, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 2, \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 5, \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 4, \\ y_i \geq 0, i = \overline{1,3}. \end{cases} \tag{6}$$

Матрица системы (6) получается из матрицы систем (2) транспонированием, а правые части системы ограничений (6) равны коэффициентам целевой функции (1).

Задача (5), (6) является *двойственной* для задачи (1)-(2). Чтобы установить соответствие между переменными прямой и двойственной задач, необходимо двойственную задачу записать в канонической форме:

$$F = 3000y_1 + 600y_2 + 1800y_3 \rightarrow \min \tag{7}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_3 - y_4 = 3, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 - y_5 = 2, \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 - y_6 = 5, \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 - y_7 = 4, \\ y_i \geq 0, i = \overline{1,7}. \end{cases} \tag{8}$$

Переменные y_4, y_5, y_6, y_7 показывают, на сколько стоимость сырья, из которого производится единица изделия вида A_1, A_2, A_3, A_4, соответственно, больше стоимости произведенного изделия.

Задача (7)-(8) является двойственной для задачи (3)-(4), и между их переменными можно установить соответствие:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{matrix} x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix}}^{\text{БП}}}_{\text{СП}} \qquad \underbrace{\overbrace{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{matrix}}^{\text{СП}}}_{\text{БП}}$$

Решая одну из пары взаимодвойственных задач (3)-(4) или (7)-(8), можно записать решение другой задачи. Решение задачи (3)-(4) содержит последняя симплекс-таблица. Запишем ее с учетом установленного соответствия между переменными прямой и двойственной задач.

СП	БП	y_3	y_5	y_2	y_7	F
	СП / БП	x_7	x_2	x_6	x_4	1
y_1	x_5	-1	0	-1	0	600
y_6	x_3	0	1	1	2	600
y_4	x_1	1/2	-1/2	-1	-3/2	300
	f	3/2	3/2	2	3/2	3900

Из этой таблицы выписываем решение двойственной задачи: свободные переменные $y_1^* = y_6^* = y_4^* = 0$, значения базисных переменных расположены в f – строке: $y_3^* = 3/2$, $y_5^* = 3/2$, $y_2^* = 2$, $y_7^* = 3/2$, $F_{min} = F(Y^*) = f(X^*) = 3900$. Оптимальный план двойственной задачи (7)-(8) имеет вид: $Y^* = (0, 2, 3/2, 0, 3/2, 0, 3/2)$.

Задание 5. Полученные оценки $y_1^* = 0$, $y_2^* = 2$, $y_3^* = 3/2$ являются *мерой дефицитности ресурсов.*

$y_1^* = 0$ означает, что ресурс типа B_1 не является дефицитным. Он после производства продукции имеется в избытке (остаток B_1 равен 600 усл.ед., определено в задании 3 $x_5^*=600$). При увеличении запасов сырья типа B_1 на единицу максимальная стоимость произведенной продукции не изменится.

Оценки $y_2^* = 2$, $y_3^* = 3/2$ отличны от нуля и указывают на дефицитность ресурсов типа B_2 и B_3. Эти ресурсы израсходованы полностью. При увеличении запасов сырья типа B_2 на единицу максимальная стоимость произведенной продукции увеличится на величину оценки y_2^* сырья B_2, то есть на 2 усл.руб. При увеличении запасов сырья типа B_3 на единицу максимальная стоимость произведенной продукции увеличится на величину оценки y_3^* сырья B_3, то есть на 3/2 усл.руб. Сырье B_2 поэтому считается более дефицитным, чем сырье B_3.

Задание 6. Если в план производства включаются новые виды продукции, то оценка целесообразности их введения определяется по формуле

$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* - c_j$, где a_{ij} – расход ресурсов i-го типа на производство единицы изделия j-го типа, c_j – стоимость единицы продукции j-го типа, y_i^* – оптимальные двойственные оценки ресурса i-го типа. Если $\Delta_j < 0$, то продукцию целесообразно вводить в план производства, так как стоимость сырья, идущего на производство единицы продукции, меньше стоимости единицы продукции. Если $\Delta_j \geq 0$, продукцию нецелесообразно вводить в план производства.

В нашем задании $\Delta_5 = 2\cdot0+3\cdot2+(3/2)\cdot1-3=9/2 > 0$. Это означает, что стоимость сырья, идущего на производство единицы продукции A_5, больше стоимости единицы этойпродукции, поэтому продукцию A_5 нецелесообразно вводить в план производства.

Решение задания типа 21–30

Производственное объединение имеет в своем составе три фирмы $A_i\,(i=\overline{1,3})$, которые производят однородную продукцию в объеме a_i. Готовая продукция поставляется потребителям $B_j\left(j=\overline{1,3}\right)$, спрос которых определяется, соответственно, величинами b_j. Известны стоимость перевозки единицы продукции $c_{ij}\left(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}\right)$от поставщика $A_i\,(i=\overline{1,3})$ потребителю $B_j\left(j=\overline{1,3}\right)$, которые приведены в таблице:

	B_1	B_2	B_3	Запасы	

				a_i	
A_1	4	3	5	70	К задаче2: $c_1 = 6, c_2 = 5, c_3 = 4$
A_2	3	4	3	80	К задаче 3: n=1, k=2
A_3	4	5	5	50	К задаче 4: m=1, l=2, d=20
Спрос b_j	40	80	50		К задаче 5: r=1, s=3, p=30

Задача 1. Составить математическую модель задачи определения плана перевозки готовой продукции от поставщиков $A_i\,(i=\overline{1,3})$ потребителям $B_j\left(j=\overline{1,4}\right)$, чтобы запасы поставщиков были вывезены, спрос всех потребителей был удовлетворен, а суммарные транспортные издержки были минимальными. Методом потенциалов найти оптимальный план перевозки продукции от поставщиков к потребителям. Указать запасы оставшейся продукции у поставщиков.

Задача 2. Методом потенциалов найти оптимальный план перевозки при дополнительном условии, что продукция пункта производства $A_i\,(i=\overline{1,3})$, в котором себестоимость $c_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ производимой продукции наименьшая, должна быть распределена полностью, а суммарные затраты, вызванные производством и доставкой продукции, были бы минимальными.

Задача 3. Методом потенциалов найти оптимальный план перевозки продукции при дополнительном условии, что перевозка от поставщика A_n к потребителю B_k запрещена.

Задача 4. Методом потенциалов найти оптимальный план перевозки продукции при дополнительном условии, что перевозка от поставщика A_m к потребителю B_l ограничена d единицами.

Задача 5. Методом потенциалов найти оптимальный план перевозки продукции при выполнении обязательной перевозки от поставщика A_r к потребителю B_s в объеме не менее p единиц.

Во всех задачах вычислить величину наименьших суммарных затрат и сравнить с затратами начального плана перевозок.

Решение задачи 1. Для того чтобы спрос всех потребителей был удовлетворен, а запасы всех поставщиков были вывезены, необходимо и достаточно, чтобы сумма запасов равнялась сумме спроса, то есть $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j$. Такая транспортная задача называется задачей закрытого типа. В нашей задаче 70+80+50≠40+80+50: предложение (200 ед.) больше спроса (170 ед.) – задача открытого типа. Чтобы ее решить надо ввести фиктивного потребителя, спрос которого будет равен 200-170=30ед. Тарифы перевозок к фиктивному потребителю полагают равными нулю.

Обозначим через $x_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$ объемы перевозок от i-го поставщика A_i к j –му потребителю B_j. Целевой функцией задачи является функция, определяющая суммарные транспортные издержки, и она равна $f = 4x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 4x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33} \to \min.$ Ограничениями задачи будут:

а) объем продукции от поставщиков должен быть вывезен:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 70,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 80,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50;$$

б) спрос всех потребителей должен быть удовлетворен:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 50,$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30;$$

в) обратные перевозки исключены: $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}.$

Целевая функция и ограничения составляют экономико-математическую модель транспортной задачи.

Обычно транспортную задачу записывают в виде таблицы, в правых верхних углах клеток которой указывают тарифы перевозок, а в левых нижних – объем перевозимого груза по данному маршруту. Если по какому-нибудь маршруту груз не перевозится, то левый нижний угол соответствующей клетки остается пустым. Такая таблица называется *распределительной таблицей* транспортной задачи.

Построим начальный опорный план транспортной задачи *методом минимального элемента*.

Суть метода минимального элемента заключается в том, что максимально возможное количество груза перевозится по самым дешевым маршрутам. В нашей задаче такой маршрут (1,2), так как тариф по этому маршруту наименьший, он равен 3 усл.ед. Запасы A_1 равны 70 ед., спрос B_2 равен 80 ед., тогда по этому маршруту можно перевезти 70 единиц груза, т. е. $x_{12} = \min(70, 80) = 70$. Все запасы A_1 вывезены, и первая строка распределительной таблицы закрыта для заполнения. Из незаполненных клеток находим клетку с наименьшим тарифом. Такими клетками являются (2,1) и (2,3). Заполним (2,1): $x_{21} = \min(80,40) = 40$. Спрос B_1 удовлетворен, и первый столбец закрыт для заполнения. Заполним (2,3): $x_{23} = \min(80-40, 50) = 40$. Все запасы A_2 вывезены, и вторая строка закрыта для заполнения. Заполним клетки (3,2) и (3,3), которые имеют одинаковый тариф равный 5: $x_{32} = \min(50,80-70)=10$; $x_{33} = \min(50-10,50-40)=10$. В последнюю очередь заполняют клетки для фиктивного потребителя: $x_{34} = \min(50-20,30)=30$. Таким образом, план составлен и имеет вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	4	3 70	5	0	70
A_2	3 40	4	3 40	0	80
A_3	4	5 10	5 10	0 30	50
Спрос b_j	40	80	50	30	

Клетки, в которых находятся отличные от нуля перевозки, называются *занятыми,* а остальные – *свободными.* Набор клеток распределительной таблицы, в которой две и только две соседние клетки расположены в одной строке или в одном столбце, а первая и последняя клетки лежат либо в одной строке, либо в одном столбце, называется *циклом.* Графически цикл представляет собой замкнутую ломаную линию, отрезки которой лежат либо в строке, либо в столбце.

Для того чтобы построенный план был *опорным*, необходимо, чтобы он удовлетворял двум условиям:

а) число занятых клеток должно быть не больше (m+n-1), где m – число поставщиков, n – число потребителей,

б) из занятых клеток таблицы нельзя составить ни одного замкнутого цикла.

Если занятых клеток ровно (m+n-1), то план называется *невырожденным,* если меньше – *вырожденным.* Построенный план в нашей задаче является опорным и невырожденным: число занятых клеток равно 3+4-1=6. Он имеет вид $X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 70 & 0 \\ 40 & 0 & 40 \\ 0 & 10 & 10 \end{bmatrix}$, а транспортные издержки равны $f(X^0) = 70 \cdot 3 + 40 \cdot 3 + 40 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 5 = 550$(усл.руб.)

Если при построении опорного плана занятых клеток будет меньше, чем (m+n-1), то в свободные клетки, соответствующие наименьшим тарифам, заносят нули так, чтобы занятых клеток было ровно (m+n-1), и из занятых клеток таблицы нельзя было составить ни одного замкнутого цикла. Эти клетки с нулевыми перевозками считаются занятыми.

Оптимальный план перевозки продукции найдем *методом потенциалов*. С помощью этого метода от одного плана переходят к другому, на котором значение целевой функции не больше, чем на предыдущем, и так до тех пор. пока не получат оптимальный план.

Введем понятие потенциалов. Числа u_i, $i = 1,2,3$, и v_j, $j = 1,2,3,4$, называются *потенциалами поставщиков и потребителей*, соответственно, если для каждой занятой клетки сумма потенциалов равняется тарифу клетки. Потенциалы обычно записывают на краю таблицы.

В нашей задаче для определения потенциалов получаем систему уравнений: $u_1+v_2=3$, $u_2+v_1=3$, $u_2+v_3=3$, $u_3+v_2=5$,$u_3+v_3=5$, $u_3+v_4=0$. в которой ($m+n$) неизвестных и ($m+n-1$) уравнений (столько занятых клеток). Эта система имеет бесконечное множество решений, любое из которых составит систему потенциалов. Чтобы найти одно из решений, определяют один из потенциалов, например, $u_3=0$ и вычисляют остальные потенциалы: $v_2=5$, $v_3=5$, $v_4=0$, $u_1=-2$, $u_2=-2$, $v_1=5$. Результаты записывают в распределительной таблице:

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4	3 70		0	-2
A_2	– 3 40	4	+ 3 80	0	-2
A_3	4 +	5 10	5 10 –	0 30	0
v_j	5	5	5	0	

План является *оптимальным*, если для всех свободных клеток сумма потенциалов не меньше тарифа этой клетки, т. е. $u_i+v_j \leq c_{ij}$. Следовательно, чтобы проверить план на оптимальность, вычисляют оценки (*косвенные тарифы*) свободных клеток: $s_{ij}=c_{ij}-(u_i+v_j)$. Если $s_{ij} \geq 0$, то план оптимален, если хотя бы одна оценка
$s_{ij} < 0$, то план не оптимален и его можно улучшить.

Проверим построенный план нашей задачи на оптимальность. Вычислим оценки свободных клеток: $s_{11}=4-(5-2)=1$, $s_{13}=5-(5-2)=2$, $s_{14}=0-(0-2)=2$, $s_{22}=4-(5-2)=1$, $s_{24}=0-(0-2)=2$, $s_{31}=4-(5+0)=-1$.

Так как среди оценок есть отрицательная: $s_{31}< 0$, то план не оптимален и его можно улучшить. Выполняют это следующим образом.

а) Находят клетку с наибольшей по модулю отрицательной оценкой. Такая клетка называется *перспективной*. В нашей задаче – это клетка (3,1). Если таких клеток несколько, то в качестве «перспективной» выбирают ту из них, которая имеет наименьший тариф.

б) Для перспективной клетки и части занятых клеток строят замкнутый цикл. В нашей задаче: (3,1) → (3,3) → (2,3) → (2,1).

Вершины этого цикла помечают чередующимися знаками «+» и «−», начиная с перспективной клетки (3,1), в которой ставится знак «+». Построенный цикл обозначен на предыдущей таблице.

в) Вычисляют объем перераспределяемого груза Δ, который равен минимальному из объемов, стоящих в клетках, помеченных знаком «—». В нашей задаче: $\Delta = \min(40, 10) = 10$.

г) Строят новый план. Для этого в клетках, помеченных знаком «+», объем перераспределяемого груза Δ прибавляют, а в клетках, помеченных знаком «–», объем перераспределяемого груза Δ вычитают, остальные объемы перевозок остаются без изменения. Перспективная клетка (3,1) становится занятой, а клетку, в которой получается «нулевая» перевозка, делают свободной.

Замечание. Если таких клеток несколько, то свободной делают ту из них, которая имеет наибольший тариф. Построенный новый план должен содержать ровно $(m+n-1)$ занятых клеток.

Полученный план запишем в таблицу:

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4	3 70	5	0	-2
A_2	3 30	4	3 50	0	-1
A_3	4 10	5 10	5	0 30	0
v_j	4	5	4	0	

Проверяем его на оптимальность. Составляем систему уравнений для определения потенциалов поставщиков и потребителей: $u_1+v_2=3$, $u_2+v_1=3$, $u_2+v_3=3$, $u_3+v_1=4$, $u_3+v_2=5$, $u_3+v_4=0$. Полагаем $u_3=0$ и вычисляем остальные потенциалы: $v_1=4$, $v_2 = 5$, $v_4=0$, $u_2=-l$, $u_1=-2$, $v_3=-1$.

Вычисляем оценки свободных клеток: $s_{11}=4-(4-2)=2$, $s_{13}=5-(4-2)=3$, $s_{14}=0-(0-2)=2$, $s_{22}=4-(5-1)=0$, $s_{24}=0-0-1)=1$, $s_{23}=5-(4+0)=1$.

Так как все оценки неотрицательны, то полученный план являет-ся оптимальным. Он имеет вид $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 70 & 0 \\ 30 & 0 & 50 \\ 10 & 10 & 0 \end{bmatrix}$. У поставщика A_3 останется 30 единиц груза (тот объем, который он поставляет фиктивному потребителю B_4). Транспортные издержки оптимального плана:

$f(X^*) = 70 \cdot 3 + 30 \cdot 3 + 50 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 540$(усл.руб.), что на 10(усл.руб.) меньше по сравнению с начальным планом X^0.

Решение задачи 2. В нашей задаче для A_1 себестоимость производимой продукции равна c_1=5, для A_2 – c_2=6, для A_3 – c_3=4. Для учета себестоимости к элементам матрицы тарифов прибавляем себестоимость производимой продукции. Для того чтобы продукцию от поставщика A_3 полностью вывезти (так как у него себестоимость наименьшая) запретим его перевозку к фиктивному потребителю, для этого тариф перевозки определим равным сколь угодно большому числу M>0, то есть c_{34}=M. Тогда распределительная таблица транспортной задачи примет вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	4+5=9	3+5=8	5+5=10	0+5=5	70
A_2	3+6=9	4+6=10	3+6=9	0+6=6	80
A_3	4+4=8	5+4=9	5+4=9	0+M=M	50
Спрос b_j	40	80	50	30	

Построим начальный опорный план транспортной задачи методом минимального элемента (расчеты выполняются аналогично расчетам задачи1) и результаты запишем в распределительную таблицу. Число занятых клеток равно 5<(m+n-1)=6, то есть построенный план является вырожденным. Чтобы найти потенциалы поставщиков и потребителей число занятых клеток должно быть равно 6, для этого в одну из клеток (в нашем случае это клетка (3,3)) ставят нулевую перевозку и ее считают занятой.

Вычисляем потенциалы поставщиков и потребителей из системы уравнений: $u_1+v_2=8$, $u_2+v_3=9$, $u_2+v_4=6$, $u_3+v_1=8$, $u_3+v_2=9$, $u_3+v_3=9$ и запишем их на краях таблицы:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i	u_i
A_1	9	8 70	10	5	70	-1
A_2	9	10	9 50	6 30	80	0
A_3	8 40	9 10	9 0	M	50	0
Спрос b_j	40	80	50	30		
v_j	8	9	9	0		

Вычисляем оценки свободных клеток: $s_{11}=9-(8-1)=2$, $s_{13}=10-(9-1)=2$, $s_{14}=5-(0-1)=6$, $s_{21}=9-(8+0)=1$, $s_{22}=10-(9+0)=1$, $s_{24}=M-(0+0)=M$. Так как все оценки положительны, то полученный план является оптимальным. Он имеет вид $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \\ 40 & 10 & 0 \end{bmatrix}$. У поставщика A_2 останется 30 единиц груза (тот объем, который он поставляет фиктивному потребителю B_4). Суммарные затраты, вызванные производством и доставкой продукции, для оптимального плана минимальны и равны: $f(X^*) = 70\cdot 8 + 50\cdot 9 + 40\cdot 8 + 10\cdot 9 = 1420$(усл. руб.).

Решение задачи 3. В задаче перевозка от поставщика A_1 к потребителю B_2 запрещена, поэтому тариф перевозки в клетке (1,2) полагают равным M>0, где M – сколь угодно большое число. Построим начальный опорный план транспортной задачи методом минимального элемента (расчеты выполняются аналогично расчетам задачи 1). Чтобы найти потенциалы поставщиков и потребителей число занятых клеток должно быть равно $(m+n-1)=6$, для этого в одну из клеток (в нашем случае это клетка (1,4)) ставят нулевую перевозку и ее считают занятой. Результаты запишем в распределительную таблицу. Вычисляем потенциалы поставщиков и потребителей из системы уравнений: $u_1+v_1=4$, $u_1+v_2=M$, $u_1+v_4=0$, $u_2+v_3=3$, $u_2+v_4=0$, $u_3+v_2=5$ и запишем их на краях таблицы:

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 40	− M 30	5	+ 0	0
A_2	3	4 +	3 50	0 30 −	0
A_3	4	5 50	5	0	5-M
v_j	4	M	3	0	

Вычисляем оценки свободных клеток: $s_{13}=5-(3+0)=2$, $s_{21}=3-(4+0)=-1<0$, $S_{22}=4-(M+0)=4-M<0$, $s_{31}=4-(4+5-M)=M-5>0$, $s_{33}=5-(3+5-M)=M-3>0$, $s_{34}=0-(0+5-M)=M-5>0$. Так как среди оценок есть отрицательные: $s_{21}<0$, $s_{22}<0$, то план не оптимален. Перспективной является клетка с наибольшей по модулю отрицательной оценкой, В нашей задаче это клетка (2,2). С этой клеткой строят замкнутый цикл и вершины этого цикла помечают чередующимися знаками «+» и «-». Построенный цикл обозначен отрезками прямых на предыдущей таблице. Вычисляем объем перераспределяемого груза $\Delta=\min(30,30)=30$.

Строим новый план (расчеты выполняются аналогично расчетам задачи 1). В клетках (1,2) и (2,4), помеченных знаком «—», получаются нулевые перевозки. Одну из этих клеток делают свободной (причем ту, которая имеет наибольший тариф), а в другой записывают нулевую перевозку и ее считают занятой. В нашей задаче клетка (1,2) – свободная, а в клетке (2,4) – нулевая перевозка. Построенный план записываем в новой таблице. Вычисляем потенциалы поставщиков и потребителей из системы уравнений: $u_1+v_1=4$, $u_1+v_4=0$, $u_2+v_2=4$, $u_2+v_3=3$, $u_2+v_4=0$, $u_3+v_2=5$ и запишем их на краях таблицы:

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 40	M	5	0 30	0
A_2	3	+ 4 30	3 50	– 0 0	0
A_3	4	5 50 –	5	0 +	1
v_j	4	4	3	0	

Вычисляем оценки свободных клеток: s_{12}=M-(4+0)=M-4>0, s_{13}=5-(3+0)=2, S_{21}=3-(4+0)=-1, s_{31}=4-(4+1)=-1, s_{33}=5-(3+1)=1, s_{34}=0-(0+1)=-1. Так как среди оценок есть отрицательные: s_{21}< 0, s_{31}<0, s_{34}<0, то план не оптимален. Три клетки (2,1), (3,1) и (3,4) имеют одинаковую отрицательную оценку. В качестве перспективной выбираем клетку (3,4) (так как у нее наименьший тариф из этих трех клеток), с ней строим замкнутый цикл, обозначенный на предыдущей таблице. Вычисляем объем перераспределяемого груза Δ=min (0,50)=0. Строим новый план, вычисляем потенциалы поставщиков и потребителей и записываем в новой таблице:

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4 40	M	5	0 30	0
A_2	3	4 30	3 50	0	-1
A_3	4	5 50	5	0 0	0
v_j	4	5	4	0	

Вычисляем оценки свободных клеток: s_{12}=M-(5+0)=M-5>0, s_{13}=5-(4+0)=1, S_{21}=3-(4-1)=0, s_{31}=4-(4+0)=0, s_{33}=5-(4+0)=1, s_{24}=0-(0-1)=1.Так как все оценки неотрицательны, то полученный план является оптимальным. Он имеет вид $X^* = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix}$. У поставщика

A_1 останется 30 единиц груза (тот объем, который он поставляет фиктивному потребителю B_4). Транспортные издержки оптимального плана:

$f(X^*) = 40 \cdot 4 + 30 \cdot 4 + 50 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 50 \cdot 5 = 680$(усл.руб.), что на 140(усл.руб.) больше по сравнению с оптимальным планом в задаче без ограничений.

Решение задачи 4. В задаче перевозка от поставщика A_1 к потребителю B_2 ограничена 20-ю единицами. Для решения этой задачи потребителя B_2 представляют в виде двух составляющих B_2' и B_2''. Спрос B_2' считают равным 20 единицам, а спрос B_2'' – 80-20=60 единицам, Тариф перевозки от поставщика A_1 к потребителю B_2' полагают таким же как и тариф к потребителю B_2, а перевозку от A_1 к B_2'' запрещают, то есть тариф от A_1 к B_2'' равен M>0, где M – сколь угодно большое число. Тарифы от поставщиков A_2 и A_3 к потребителям B_2' и B_2'' такие же, как и к потребителю B_2. Построим начальный опорный план транспортной задачи методом минимального элемента и вычислим потенциалы поставщиков и потребителей (расчеты выполняются аналогично расчетам предыдущих задач). Результаты запишем в таблицу:

	B_1	B_2'	B_2''	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	4	3 20	– M 10	+ 5 10	0 30	70	0
A_2	3 40	4	4 +	3 40 –	0	80	-2
A_3	4	5	5 50	5	0	50	5-M
b_j	40	20	60	50	30		
v_j	5	3	M	5	0		

Среди свободных клеток отрицательные оценки имеют $s_{11} = 4 - (5 + 0) = -1$ и $s_{12}'' = 4 - (M - 2) = 6 - M$, поэтому план не является оптимальным и перспективной клеткой является (1,2''), так как ее оценка наибольшая по модулю среди отрицательных. С этой клеткой строим замкнутый цикл и вершины этого цикла помечаем чередующимися знаками «+» и «-» (он обозначен на предыдущей таблице). Вычисляем объем перераспределяемого груза $\Delta=\min(10,40)=10$. Строим новый план, вычисляем потенциалы поставщиков и потребителей и записываем в новой таблице:

	B_1	B_2'	B_2''	B_3	B_4	u_i
A_1	+ 4	3 20	M	– 5 20	0 30	0
A_2	3 40 –	4	4 10	3 30 +	0	-2
A_3	4	5	5 50	5	0	-1
v_j	5	3	6	5	0	

Среди свободных клеток отрицательную оценку имеет $s_{11} = 4 - (5 + 0) = -1$, поэтому план не является оптимальным и перспективной клеткой является (1,1). С этой клеткой строим замкнутый цикл, обозначенный на предыдущей таблице. Вычисляем объем перераспределяемого груза $\Delta=\min(20,40)=20$. Строим новый план, вычисляем потенциалы поставщиков и потребителей и записываем в новой таблице:

	B_1	B_2'	B_2''	B_3	B_4	u_i
A_1	4 20	3 20	M	5	0 30	0
A_2	3 20	4	4 10	3 50	0	-1
A_3	4	5	5 50	5	0	0
v_j	4	3	5	4	0	

Так как все оценки свободных клеток неотрицательны, то полученный план является оптимальным. Объединяя перевозки к потребителям B_2' и B_2'', получаем план $X^* = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 20 & 10 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \end{bmatrix}$. У поставщика A_1 останется 30единиц груза (тот объем, который он поставляет фиктивному потребителю B_4). Транспортные издержки оптимальногопла-

на: $f(X^*) = 20 \cdot 4 + 20 \cdot 3 + 20 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 50 \cdot 5 + 50 \cdot 3 = 640$(усл.руб.), что на 100 (усл.руб.) больше по сравнению с оптимальным планом в задаче без ограничений.

Решение задачи 5. В задаче требуется выполнить обязательную перевозку от поставщика A_1 к потребителю B_3 в объеме не менее 30 единиц. Предполагается, что такая перевозка в объеме 30 единиц выполнена, поэтому у поставщика A_1 осталось 40 единиц груза, а потребителю B_3 осталось получить еще 20 единиц груза. Построим начальный опорный план транспортной задачи методом минимального элемента и вычислим потенциалы поставщиков и потребителей (расчеты выполняются аналогично расчетам предыдущих задач). Результаты запишем в таблицу:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i	u_i
A_1	4	3 40	5	0	40	-2
A_2	3 40	+ 4	3 20	– 0 20	80	0
A_3	4	5 40 –	5	0 10 +	50	0
Спрос b_j	40	80	20	30		
v_j	3	5	3	0		

Среди свободных клеток отрицательную оценку имеет $s_{22} = 4 -$ $- (5 + 0) = -1$, поэтому план не является оптимальным и перспективной клеткой является (2,2). С этой клеткой строим замкнутый цикл, обозначенный на предыдущей таблице. Вычисляем объем перераспределяемого груза $\Delta = \min(20,40) = 20$. Строим новый план, вычисляем потенциалы поставщиков и потребителей и записываем в новой таблице:

	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	4	3 40	5	0	-1
A_2	3 40	4 20	3 20	0	0
A_3	4	5 20	5	0 30	1
v_j	3	4	3	-1	

Так как все оценки свободных клеток неотрицательны, то полученный план является оптимальным. Учитывая перевозку от поставщикаA_1 к потребителю B_3 в объеме 30 единиц, получаем план $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 30 \\ 40 & 20 & 20 \\ 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}$. У поставщика A_3 останется 30единиц груза. Транспортные издержки оптимального плана: $f(X^*) = 40\cdot 3 + 30\cdot 5 + 40\cdot 3 + 20\cdot 4 + 20\cdot 3 + 20\cdot 5 = 630$(усл.руб.), что на 90(усл.руб.) больше по сравнению с оптимальным планом в задаче без ограничений.

Решение задания типа 31–40

Две отрасли *A* и *B* могут вкладывать денежные средства в строительство четырех объектов, причем отрасль *A* располагает a = 70 млн.усл.руб., а отрасль *B* – b= 56 млн.усл.руб. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль отрасли А в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы $C = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 10 & 13 \end{bmatrix}$. Будем предполагать, что убыток отрасли *B* при этом равен прибыли отрасли *A.* Требуется:

1. Выявить игроков и описать их стратегии.
2. Проверить, имеет ли игра решение в чистых стратегиях.

3. Составить экономико-математическую модель данной конфликтной ситуации для каждого игрока.

4. Найти оптимальные стратегии отраслей.

5. На основании полученного результата распределить денежные средства между объектами.

Задание 1. Отрасль A будем считать игроком A, и его чистыми стратегиями будут: A_1 – отрасль A вкладывает в строительство первого объекта a_1 млн. усл.руб., A_2 – отрасль A вкладывает в строительство второго объекта a_2 млн.усл.руб., A_3 – отрасль A вкладывает в строительство третьего объекта a_3 млн.усл.руб., A_4 – отрасль A вкладывает в строительство четвертого объекта a_4 млн. усл. руб., при этом $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a = 70$ (млн. усл. руб.).

Отрасль B будем считать игроком B, и его чистыми стратегиями будут: B_1 – отрасль B вкладывает в строительство первого объекта b_1 млн.усл.руб., B_2 – отрасль B вкладывает в строительство второго объекта b_2 млн.усл.руб., B_3 – отрасль B вкладывает в строительство третьего объекта b_3 млн.усл.руб., B_4 – отрасль B вкладывает в строительство четвертого объекта b_4 млн.усл. руб., при этом

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = b = 56$ (млн.усл.руб.).

Задание 2. Матричная игра двух лиц имеет решение в чистых стратегиях, когда нижняя чистая цена игры α равна верхней чистой цене игры β.

По определению $\alpha = \max\limits_i \alpha_i$, где $\alpha_i = \min\limits_j c_{ij}$, $\beta = \min\limits_j \beta_j$, где $\beta_j = \max\limits_i c_{ij}$, c_{ij} – элементы платежной матрицы игры.

Вычислим нижнюю чистую цену игры α:

α_1 = min (7, 6, 9, 8) = 6, α_2 = min (5, 4, 3, 4) = 3, α_3 =min (1, 7, 6, 7) = 1, α_4 = min (2, 8, 10, 13) = 2, α = max (6, 3,1, 2) = 6.

Вычислим верхнюю чистую цену игры β:

β_1= max (7, 5,1, 2) = 7, β_2= max (6, 4, 7, 8) = 8, β_3 = max (9, 3, 6, 10) = 10, β_4 =max (8, 4, 7,13) = 13, β = min (7, 8, 10 13) = 7.

Обычно платежную матрицу игры записывают в виде таблицы, а значения α_i и β_j на краях таблицы:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	6	9	8	6
A_2	5	4	3	4	3
A_3	1	7	6	7	1
A_4	2	8	10	13	2
β_j	7	8	10	13	$\alpha=6$ / $\beta=7$

Так как $\alpha \neq \beta$, $(6 \neq 7)$, то игра не имеет решение в чистых стратегиях. Однако любая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях. Чтобы найти это решение, удобно матрицу игры предварительно упростить.

Задание 3. Стратегию A_k для игрока *А* называют *доминирующей* над стратегией A_s, если $c_{kj} \geq c_{sj}$ для всех j, при этом стратегию A_s называют *доминируемой*.

В нашем примере стратегия A_1 доминирует над стратегией A_2:7>5, 6>4, 9>3, 8>4, стратегия A_4 доминирует над стратегией A_3:2>1, 8>7, 10>6, 13>7.

Стратегии A_2 и A_3 являются доминируемыми. В связи с этим, опустив вторую и третью строки матрицы игры, получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 & 8 \\ 2 & 8 & 10 & 13 \end{bmatrix}.$$

Стратегию B_l для игрока *В* называют *доминирующей* над стратегией B_r, если $c_{il} \geq c_{ir}$ для всех i, при этом стратегию B_r называют *доминируемой*.

В нашем примере стратегия B_2 доминирует над стратегиями B_3 (6<9, 8<10) и B_4 (6<8, 8<13). Стратегии B_3 и B_4 являются доминируемыми.

Вероятности выбора игроками доминируемых стратегий равны нулю, поэтому из матрицы игры можно вычеркнуть строки и столбцы, соответствующие доминируемым стратегиям, и перейти к игре меньшей размерности.

Если $\overline{p}=(p_1, p_2, p_3, p_4)$ смешанная стратегия игрока A, то в нашем примере $p_2 = p_3 = 0$ (A_2 и A_3 доминируемые), и из матрицы игры вычеркиваем вторую и третью строки. Аналогично, если $\overline{q}=(q_1, q_2, q_3, q_4)$ смешанная стратегия игрока B, то $q_3 = q_4 = 0$ (B_3 и B_4 доминируемые), и из матрицы игры вычеркиваем третий и четвертый столбцы.

В результате этих преобразований мы перешли к игре, матрица которой имеет вид $C' = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$,

Смешанные стратегии игрока $A - \overline{p'} = (p_1, p_4)$, игрока $B - \overline{q'} = (q_1, q_2)$, цена v' этой игры совпадает с ценой v первоначальной игры, $v' = v$.

Задание 4. Для того, чтобы стратегия $\overline{q'} = (q_1, q_2)$ игрока В была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\sum_{j=1}^{2} a_{ij} q_j \le v, \ i = 1{,}4$, где V — цена игры.

Разделив это неравенство на V, $V > 0$, получаем $\sum_{j=1}^{2} a_{ij} \dfrac{q_j}{v} \le 1,$ $i = 1{,}4$.

Если обозначить $x_i = \dfrac{q_i}{v}, \ \ j = 1{,}2$, то неравенство принимает вид $\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le 1, \ \ i = 1{,}4$. Очевидно, что $x_i \ge 0, \ \ j = 1{,}2$.

Составим функцию $f = x_1 + x_2 = \dfrac{q_1}{v} + \dfrac{q_2}{v} = \dfrac{1}{v}(q_1 + q_2) = \dfrac{1}{v}$, так как $\sum_{j=1}^{2} q_j = 1$ – по определению смешанной стратегии. Игрок *B* стремится свой выигрыш минимизировать, поэтому $f = x_1 + x_2 = \frac{1}{v} \to \max$.

Объединяя эти результаты, получаем экономико-математическую модель для игрока *B*:

$$f = x_1 + x_2 \to \max, \tag{1}$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 8x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

Аналогично для игрока А. стратегия $\bar{p} = (p_1, p_4)$ будет оптимальной тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1,4} a_{ij} p_i \le v, \quad j = 1,2$. Разделив это неравенство на v, $v > 0$, получаем $\sum_{i=1,4} a_{ij} \frac{p_i}{v} \ge 1, \quad j = 1,2$.

Если обозначить $y_i = \frac{q_i}{v}, \quad i = 1,4$, то неравенство принимает вид $\sum_{i=1,4} a_{ij} y_i \ge 1, \quad j = 1,2$, $y_i \ge 0, \quad i = 1,4$.

Составим функцию $F = y_1 + y_4 = \frac{p_1}{v} + \frac{p_4}{v} = \frac{1}{v}(p_1 + p_4) = \frac{1}{v}$,

так как $\sum_{i=1,4} p_i = 1$ – по определению смешанной стратегии. Игрок *A* стремится свой выигрыш максимизировать, поэтому $F = y_1 + y_4 = \frac{1}{v} \to \min$.

Объединяя эти результаты, получаем экономико-математическую модель для игрока *A*:

$$F = y_1 + y_4 \to \min \tag{3}$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_4 \ge 1, \\ 6y_1 + 8y_4 \ge 1, \\ y_1, y_4 \ge 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Задачи (1), (2) и (3), (4) являются парой взаимодвойственных задач линейного программирования. Решив одну из них, запишем решение другой.

Задание 5. Для того. чтобы решить задачу (1), (2), приведем ее к каноническому виду:

$$f = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + x_3 \qquad = 1, \\ 2x_1 + 8x_2 \qquad + x_4 = 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Решим эту задачу симплекс-методом. Решение задач линейного программирования симплекс-методом было разобрано при выполнении задания типа 11–20, поэтому выполняя стандартные действия приведем здесь только последовательность симплекс-таблиц, которая представляет решение задачи.

БП \ СП	x_1	x_2	1	θ_i
x_3	$\boxed{7}$	6	1 $\leftarrow$	1/7
x_4	2	8	1	1/2
f	–1	– 1	0	
	$\uparrow$			

БП \ СП	x_3	x_2	1	θ_i
x_1	1/7	6/7	1/7	1/6
x_4	–2/7	$\boxed{44/7}$	5/7 $\leftarrow$	5/44
f	1/7	– 1/7	1/7	
		$\uparrow$		

СП / БП	x_3	x_4	1
x_1	2/11	–3/22	1/22
x_2	-1/22	7/44	5/44
f	3/22	1/44	7/44

Все элементы f-строки положительны, поэтому план оптимален и имеет вид: $x_1^* = 1/22$, $x_2^* = 5/44$, $f_{\max} = f\left(\bar{x}^*\right) = 7/44$. Тогда цена игры $v = \dfrac{1}{f_{\max}} = \dfrac{44}{7}$, а

$$q_1^* = x_1^* \cdot v = \frac{1}{22} \cdot \frac{44}{7} = \frac{2}{7}, \quad q_2^* = x_2^* \cdot v = \frac{5}{44} \cdot \frac{44}{7} = \frac{5}{7}.$$

$q_3^* = 0$, $q_4^* = 0$, так как стратегии B_3 и B_4 для игрока *B* были доминируемыми.

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока *B* имеет вид $\bar{q}^* = \left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{5}{7}, 0, 0\right)$, а цена игры $v = \dfrac{44}{7}$.

Чтобы записать решение двойственной задачи (3), (4), приведем ее к каноническому виду:

$$F = y_1 + y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_4 - y_2 \qquad = 1, \\ 6y_1 + 8y_4 \qquad - y_3 = 1, \\ y_i \ge 0, i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Установим соответствие между переменными прямой и двойственной задач:

$$\overbrace{x_1 \quad x_2}^{СП} \qquad \overbrace{x_3 \quad x_4}^{БП}$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \qquad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$\underbrace{y_2 \quad y_3}_{БП} \qquad \underbrace{y_1 \quad y_4}_{СП}$$

Запишем симплекс-таблицу, содержащую оптимальный план, с учетом этого соответствия:

	БП	y_1	y_4	F
СП	СП \ БП	x_3	x_4	1
y_2	x_1	2/11	–3/22	1/22
y_3	x_2	–1/22	7/44	5/44
1	f	3/22	1/44	7/44

Отсюда $y_1^* = \frac{3}{22}$, $y_4^* = \frac{1}{44}$, $F_{\min} = \frac{7}{44}$.

Тогда $v = \frac{44}{7}$, $p_1^* = y_1^* \cdot v = \frac{3}{22} \cdot \frac{44}{7} = \frac{6}{7}$, $p_4^* = y_4^* \cdot v = \frac{1}{44} \cdot \frac{44}{7} = \frac{1}{7}$.

$p_2^* = p_3^* = 0$, так как стратегии A_2, A_3 для игрока *A* являются доминируемыми. Оптимальная смешанная стратегия игрока *A* имеет вид $\overline{p}^* = \left(\frac{6}{7}, 0, 0, \frac{1}{7}\right)$, цена игры $v = \frac{44}{7}$.

Задание 6. Зная оптимальные стратегии игроков, денежные средства необходимо распределить следующим образом.

Отрасль *A*: вкладывает в строительство первого объекта – $a_1 = a \cdot p_1^* = 70 \cdot \frac{6}{7} = 60$ (млн.усл.руб.); четвертого объекта – $a_4 = a \cdot p_4^* = 70 \cdot \frac{1}{7} = 60$ (млн.усл.руб.); второго и третьего – $a_2 = a_3 = 0$ (млн.усл.руб.), так как $p_2^* = p_3^* = 0$.

Отрасль *B*: вкладывает в строительство первого объекта – $b_1 = b \cdot q_1^* = 56 \cdot \frac{2}{7} = 16$ (млн.усл.руб.); второго объекта – $b_2 = b \cdot q_4^* = 56 \cdot \frac{5}{7} = 40$ (млн.усл.руб.); третьего и четвертого– $b_3 = b_4 = 0$ (млн.усл.руб.), так как $q_3^* = q_4^* = 0$.

Решение задания типа 41–50

Объем реализации товара Т за рассматриваемый период времени колеблется в зависимости от уровня покупательского спроса в пределах от 5 до 8 тыс. ед. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара Т равна 6 ден.ед. Если запасенного товара окажется недостаточно для полного удовлетворения спроса, можно заказать дополнительное количество товара, что потребует новых затрат на доставку в размере 3 ден.ед. в расчете на единицу товара. Если же запасенный товар полностью реализовать не удастся, то расходы на содержание и хранение остатка составят 2 ден.ед. в расчете на единицу товара. Предполагается, что дополнительно заказанный товар полностью реализуется за тот же рассматриваемый период времени. Требуется:

1. Придать описанной производственной ситуации игровую схему, выявить игроков и описать их стратегии.
2. Составить платежную матрицу игры.
3. Дать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара на торговом предприятии, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом торговой прибыли и возможных дополнительных затрат на заказ и доставку товара, содержание и хранение остатка, если

а) известны вероятности уровней покупательского спроса, и они, соответственно, равны 0,2; 0,4; 0,3; 0,1.

б) известно, что все уровни покупательского спроса равновероятны;

в) никакой дополнительной информации об уровнях покупательского спроса нет (для нахождения оптимальной стратегии применить критерии Вальда, Сэвиджа, Гурвица). Постоянная λ=0,7.

Задание 1. Участниками данной конфликтной ситуации являются торговое предприятие и рынок, который определяет спрос на данную продукцию. Торговое предприятие свои стратегии выбирает осознанно и такого игрока называют *статистиком* и обозначают А. Рынок влияет на результат игры, но спрос на продукцию формируется стихийно, такого игрока называют *«природой»* и обозначают П.

Природа П может находиться в одном из своих состояний: $П_1$ – спрос на товар равен 5 тыс.ед.; $П_2$ – спрос на товар равен 6 тыс.ед.;

$П_3$ – спрос на товар равен 7 тыс.ед.; $П_4$ – спрос на товар равен 8 тыс.ед.

Торговое предприятие (игрок А) может использовать одну из своих чистых стратегий: A_1 – взять на реализацию 5 тыс.ед.; A_2 – взять на реализацию 6 тыс.ед.; A_3 – взять на реализацию 7 тыс.ед.; A_4 – взять на реализацию 8 тыс.ед.

Задание 2. *Платежная матрица игры* – это матрица, элементы которой a_{ij} определяют величину выигрыша игрока А, если он выбрал свою стратегию A_i , а природа находилась в состоянии $П_j$. Вычислим элементы этой матрицы.

Если игрок А (торговое предприятие) выбрал свою стратегию A_1 (взял на реализацию 5 тыс.ед.) и природа находилась в состоянии $П_1$ (спрос на товар равен 5 тыс.ед.), то он реализует 5 тыс.ед. и величина прибыли игрока А будет равна $a_{11} = 5 \cdot 6 = 30$. Если игрок А выбрал свою стратегию A_1 и природа находилась в состоянии $П_2$ (спрос на товар равен 6 тыс.ед.), то торговое предприятие закажет дополнительно 1 тыс.ед. товара и реализует 6 тыс.ед., но заплатит 3 ден.ед. за доставку 1 тыс.ед. Величина прибыли игрока А в этом случае будет равна $a_{12} = 6 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 33$. Если игрок А выбрал свою стратегию A_2 (взял на реализацию 6 тыс.ед.) и природа находилась в состоянии $П_1$ (спрос на товар равен 5 тыс.ед.), то торговое предприятие реализует только 5 тыс.ед. и будет платить 2 ден.ед. за хранение 1 тыс.ед. товара. Величина прибыли игрока А в этом случае будет равна $a_{21} = 5 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 28$. Аналогично вычисляем остальные элементы платежной матрицы и записываем в таблицу:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	$5 \cdot 6 = 30$	$6 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 33$	$7 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 36$	$8 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 39$
A_2	$5 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 28$	$6 \cdot 6 = 36$	$7 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 39$	$8 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 42$
A_3	$5 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 26$	$6 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 34$	$7 \cdot 6 = 42$	$8 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 45$
A_4	$5 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 24$	$6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 32$	$7 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 40$	$8 \cdot 6 = 48$

Задание 3а). Если известны вероятности уровней покупательского спроса, то для определения оптимальной стратегии торгового предприятия используют критерий Байеса.

Оптимальной по-Байесу является стратегия, на которой достигается максимальная средняя прибыль равная $\overline{a_i}^{\text{В}} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} q_j, i = \overline{1,4}$, где q_j - это вероятности уровней покупательского спроса, и они, соответственно, равны 0,2; 0,4; 0,3; 0,1. Результаты вычислений запишем в таблице:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	Средняя прибыль $\overline{a_i}^{\text{В}}$
A_1	30	33	36	39	$\overline{a_1}^{\text{В}} = 30 \cdot 0{,}2 + 33 \cdot 0{,}4 + 36 \cdot 0{,}3 + 39 \cdot 0{,}1 = \\ = 33{,}9$
A_2	28	36	39	42	$\overline{a_2}^{\text{В}} = 28 \cdot 0{,}2 + 36 \cdot 0{,}4 + 39 \cdot 0{,}3 + 42 \cdot 0{,}1 = \\ = 35{,}9$
A_3	26	34	42	45	$\overline{a_3}^{\text{В}} = 25 \cdot 0{,}2 + 34 \cdot 0{,}4 + 41 \cdot 0{,}3 + 45 \cdot 0{,}1 = \\ = 35{,}4$
A_4	24	32	40	48	$\overline{a_4}^{\text{В}} = 24 \cdot 0{,}2 + 32 \cdot 0{,}4 + 40 \cdot 0{,}3 + 48 \cdot 0{,}1 = \\ = 34{,}4$
q_j	0,2	0,4	0,3	0,1	

Вычислим $\max \overline{a_i}^{\text{В}} = \max\{33{,}9; 35{,}9; 35{,}4; 34{,}4\} = 35{,}9$. Это равенство достигается на A_2, следовательно, стратегия A_2 является оптимальной по-Байесу. Это значит, что торговое предприятие должно взять на реализацию 6 тыс.ед. и ожидаемое среднее значение прибыли будет равно 35,9 тыс.ден.ед.

Задание 3б). Если известно, что все уровни покупательского спроса равновероятны, то для определения оптимальной стратегии торгового предприятия используют критерий Лапласа.

Оптимальной по-Лапласу является стратегия, на которой достигается максимальная средняя прибыль равная $\overline{a_i}^{\Lambda} = \sum_{j=1}^{4} a_{ij} q_j , i = \overline{1,4}$, где q_j - вероятности уровней покупательского спроса. Так как вероятности все равны, то $q_j = 0{,}25$. Результаты вычислений запишем в таблице:

	П1	П2	П3	П4	Средняя прибыль $\overline{a_i}^{\Lambda}$
A1	30	33	36	39	$\overline{a_1}^{\Lambda} = 0{,}25 \cdot (30 + 33 + 36 + 39) = 34{,}5$
A2	28	36	39	42	$\overline{a_2}^{\Lambda} = 0{,}25 \cdot (28 + 36 + 39 + 42) = 36{,}25$
A3	26	34	42	45	$\overline{a_3}^{\Lambda} = 0{,}25 \cdot (25 + 34 + 41 + 45) = 36{,}25$
A4	24	32	40	48	$\overline{a_4}^{\Lambda} = 0{,}25 \cdot (24 + 32 + 40 + 48) = 36$

Вычислим $\max \overline{a_i}^{\Lambda} = \max\{34{,}5; 36{,}25; 36{,}25; 36\} = 36{,}25$. Это равенство достигается на A2 и A3, следовательно, стратегии A2 и A3 являются оптимальными по-Лапласу. Это значит, что торговое предприятие должно взять на реализацию 6 тыс.ед. или 7 тыс.ед. и ожидаемое среднее значение прибыли будет равно 36,25 тыс.ден.ед.

Задание 3в). Если никакой дополнительной информации об уровнях покупательского спроса нет, то для нахождения оптимальной стратегии применяют критерии или Вальда, или Сэвиджа, или Гурвица.

Оптимальной по-Вальду является стратегия, на которой достигается максимальная прибыль при наихудшем состоянии природы, то есть стратегия, на которой выполняется равенство: $\alpha = \max_i \alpha_i$, где $\alpha_i = \min_j a_{ij}$.

Результаты вычислений запишем в таблице:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	α_i
A_1	30	33	36	39	$\alpha_1 = \min\{30;33;36;39\} = 30$
A_2	28	36	39	42	$\alpha_2 = \min\{28;36;39;42\} = 28$
A_3	26	34	42	45	$\alpha_3 = \min\{26;34;42;45\} = 26$
A_4	24	32	40	48	$\alpha_4 = \min\{24;32;40;48\} = 24$

Вычислим $\alpha = \max_i\{30;28;26;24\} = 30$. Это равенство достигается на A_1, следовательно, стратегия A_1 является оптимальной по-Вальду. Это значит, что если торговое предприятие возьмет на реализацию 5 тыс.ед., то его прибыль будет не меньше 30 тыс.ден.ед.

Критерий Сэвиджа применяют в том случае, если игра задана матрицей рисков. Построим для нашей игры *матрицу рисков*, элементы r_{ij} которой равны разности между наибольшим выигрышем β_j при данном состоянии природы и текущим выигрышем a_{ij}, то есть $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, где $\beta_j = \max_i a_{ij}$. Результаты вычислений запишем в таблице:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	$30-30=0$	$36-33=3$	$42-36=6$	$48-39=9$
A_2	$30-28=2$	$36-36=0$	$42-39=3$	$48-42=6$
A_3	$30-26=4$	$36-34=2$	$42-42=0$	$48-45=3$
A_4	$30-24=6$	$36-32=4$	$42-40=2$	$48-48=0$
β_j	30	36	42	48

Оптимальной по-Сэвиджу является стратегия, на которой достигается минимальный риск при наихудшем состоянии природы, то есть стратегия, на которой выполняется равенство: $\alpha = \min_i \alpha_i$, где $\alpha_i = \max_j a_{ij}$. Результаты вычислений запишем в таблице:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	α_i
A_1	0	3	6	9	$\alpha_1 = \max\{0;3;6;9\} = 9$
A_2	2	0	3	6	$\alpha_2 = \max\{2;0;3;6\} = 6$
A_3	4	2	0	3	$\alpha_3 = \max\{4;2;0;3\} = 4$
A_4	6	4	2	0	$\alpha_4 = \max\{6;4;2;0\} = 6$

Вычислим $\alpha = \min_i\{9;6;4;6\} = 4$. Это равенство достигается на A_3, следовательно, стратегия A_3 является оптимальной по-Сэвиджу. Это значит, что если торговое предприятие возьмет на реализацию 7 тыс.ед., то его риск будет не больше 4 тыс.ден.ед.

Оптимальной по-Гурвицу является стратегия, на которой выполняется равенство

$$\alpha = \max_i \alpha_i \text{, где } \alpha_i = \lambda \cdot \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \max_j a_{ij},$$

λ – постоянная, $0 \le \lambda \le 1$. Если λ=1, то оптимальной является стратегия, на которой достигается максимальная прибыль при наихудшем состоянии природы, то есть критерий Гурвица становится критерием Вальда (критерием пессимиста). Если λ=0, то оптимальной является стратегия, на которой достигается максимальная прибыль при наилудшем состоянии природы, то есть критерий оптимиста. На практике чаще всего выбирают $0{,}6 \le \lambda \le 0{,}8$. В нашем задании λ=0,7. Результаты вычислений запишем в таблице:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$0{,}7 \cdot \min_j a_{ij}$	$0{,}3 \cdot \max_j a_{ij}$	α_i
A_1	30	33	36	39	0,7·30=21	0,3·39=11,7	32,7
A_2	28	36	39	42	0,7·28=19,6	0,3·42=12,6	32,2
A_3	26	34	42	45	0,7·26=18,2	0,3·45=13,5	31,7
A_4	24	32	40	48	0,7·24=16,8	0,3·48=14,4	31,2

Вычислим $\alpha = \max_i\{32{,}7;32{,}2;31{,}7;31{,}2\} = 32{,}7$. Оптимальной по-Гурвицу является стратегия A_1. Это значит, что торговое предприятие должно брать на реализацию 5 тыс.ед. товара.

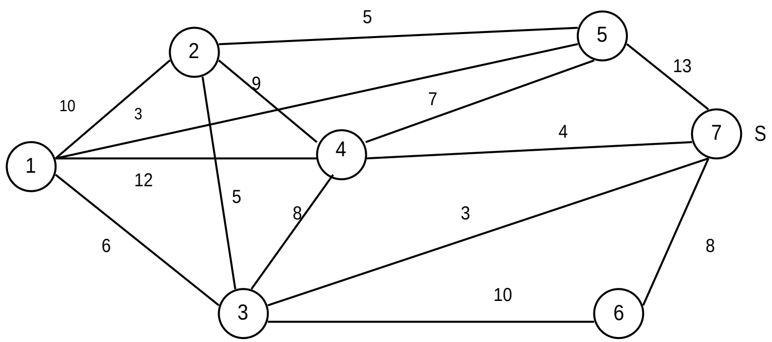
Решение задания типа 51–60

Дана сеть с указанными пропускными способностями ребер r_{ij} (одинаковы в обоих направлениях).

Найти:

1) Максимальный поток из источника I в сток S методом меток;

2) Минимальный разрез (указать пунктирной линией на сети).



Задание 1. Рассмотрим сеть с одним источником I и одним стоком S. Нужно определить максимальную величину потока υ (количество вещества, информации), который может войти в сетевую систему и выйти из неё в заданный период времени. Построим поток через ребра сети, учитывая пропускные способности ребер и предполагая, что поток, вытекающий из вершины, равен потоку, втекающему в нее.

Определим некоторые пути из I в S и величины потоков по этим путям:

L_1 : 1 – 2 – 5 – 7 , υ_{10}=5;

L_2 : 1 – 5 – 7 , υ_{20}=3;

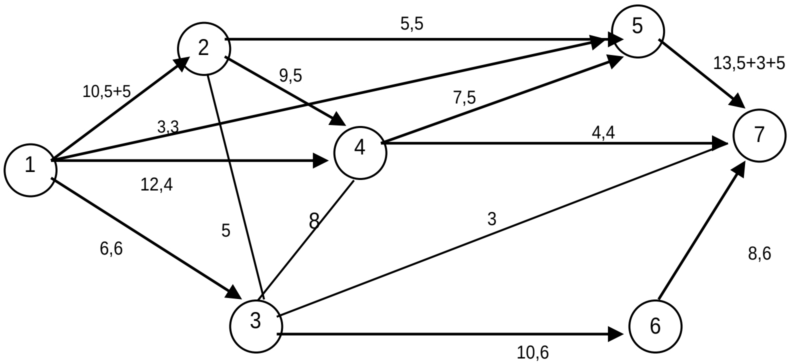
L_3 : 1 – 4 – 7 , υ_{30}=4;

L_4 : 1 – 3 – 6 – 7 , υ_{40}=6;

L_5: 1 – 2 – 4 – 5 – 7 , υ_{50}=5;

Таким образом, начальный поток будет равен: $\upsilon_0 = \upsilon_{10} + \upsilon_{20} + \upsilon_{30} + \upsilon_{40} + \upsilon_{50}$ =23(ед.)

Стрелками на ребрах покажем направление потока, а числа x_{ij}, стоящие рядом с пропускными способностями r_{ij}, будут показывать его величину.



Назовем ребро ненасыщенным, если $r_{ij} > x_{ij}$; если же $r_{ij} = x_{ij}$, то ребро насыщенно. Когда нельзя указать ни одного пути из I в S по ненасыщенным ребрам, то построенный поток является максимальным и его нельзя увеличить. В противном случае построенный поток можно увеличить и для этого надо найти путь из ненасыщенных ребер от I к S.Для построения такого пути используется метод меток.

Источнику I припишем метку (0, $+\infty$). Это означает, что из величины I может поступить вещество в любом объеме. Находим на сети вершину, связанную с вершиной I ненасыщенным ребром, например, вершину 4. Ей приписываем метку

$$(1^+,\ \varepsilon_1 = \min\ \{\infty, r_{14} - x_{14}\}) =$$

$$=(1^+,\ \varepsilon_1 = \min\ \{\infty, 12 - 4\}) = (1^+, 8).$$

Величине ε_1=8 показывает насколько можно будет увеличить поток от I до вершины 4.
Далее, рассмотрим вершину, связанную с вершиной 4 ненасыщенным ребром, например, вершину 3. Припишем ей метку

$$(4^+,\ \varepsilon_2 = \min\ \{\varepsilon_1, r_{43} - x_{43}\}) = (4^+, \varepsilon_2 = \min\ \{8{,}8-0\})=$$

$$=(4^+,8).$$

Аналогично, вершине 6 приписываем метку

$$(3^+,\ \varepsilon_3 = \min\ \{\varepsilon_2, r_{36} - x_{36}\}) = (3^+, \varepsilon_3 = \min\ \{8{,}10-6\})=$$

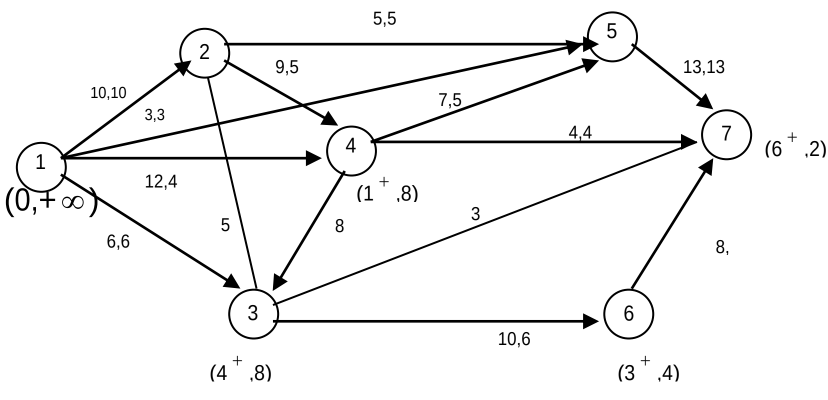
$$=(3^+,4).$$

и вершине 7 приписываем метку

$$(6^+,\ \varepsilon_4 = \min\ \{\varepsilon_3, r_{67} - x_{67}\}) = (6^+, \varepsilon_4 = \min\ \{4{,}8-6\})=$$

$$=(6^+,2).$$

Проставим полученные метки на сети:



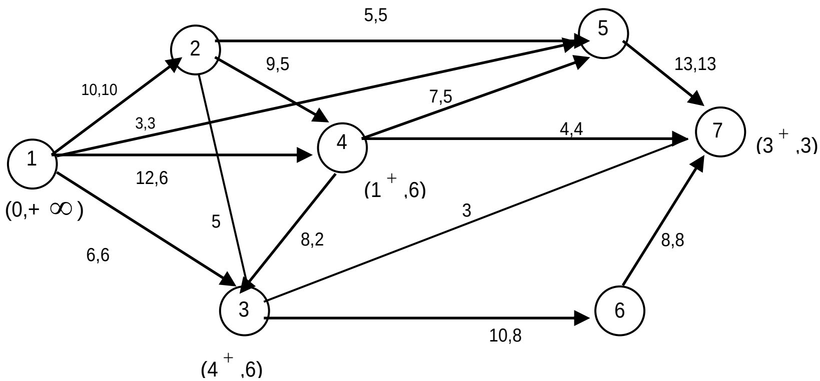
Т.к сток оказался помеченным, это означает, что существует путь из I в S, состоящий из ненасыщенных ребер, и поток на этом пути

(1 – 4 – 3 – 6 – 7) можно увеличить на ε единиц, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\} = \min\{8,8,4,2\} = 2.$

Величина нового потока будет равна:

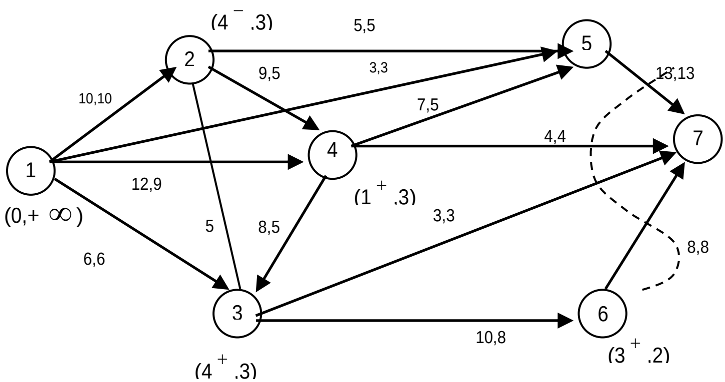
$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + 2 = 23 + 2 = 25(\text{ед.})$$

Вершина 1 связана с вершиной 4 ненасыщенным ребром, поэтому вновь расставляем метки и увеличиваем мощность потока по пути 1 – 4 – 3 – 7 на 3 единицы.



Суммарный поток составит $\upsilon_3 = 25 + 3 = 28(ед.)$

Расставим метки по ненасыщенным ребрам (рис.) от I к S. Т.к сток оказался непомеченным, то от источника I к стоку S не существует ни одного пути, состоящего из ненасыщенных ребер.



Следовательно, построенный поток является максимальным и его мощность равна

$$\upsilon_{\max} = 28(ед.)$$

Задание 2. Для построения на сети минимального разреза разобьем множество всех вершин сети на два непересекающихся подмножества А и В. К множеству А относятся источник I и все вершины, которые можно достичь из I в S по ненасыщенным ребрам, т.е. помеченные вершины. К множеству В относятся все остальные вершины. В нашем задании:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\} \quad , \quad B = \{7\}.$$

Совокупность дуг (i, j), начальные вершины которых принадлежат множеству А, а конечные – множеству В, будут определять разрез минимальной пропускной способности, отделяющий источник от стока:

$$A/B = \{(5,7),(4,7),(3,7),(6,7)\}.$$

На рисунке разрез А/В изображен пунктирной линией.

Из теоремы Форда-Фолкерсона следует, что величина максимального потока в сети равна минимальной пропускной способности разреза, т.е:

$$\upsilon_{\max} = R(A/B) = r_{5,7} + r_{4,7} + r_{3,7} + r_{6,7} = 28(ед.)$$

Ответ:

$$\upsilon_{\max} = R(A/B) = 28(ед.),$$
$$A/B = \{(5,7),(4,7),(3,7),(6,7)\}$$

Решение задания типа 61–70

Дан список работ, подлежащих выполнению:

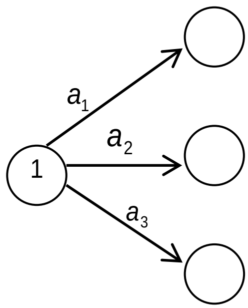
Работа	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы
a_1	-	7
a_2	-	5
a_3	-	9
a_4	a_3	4
a_5	a_3	7
a_6	a_3	5
a_7	a_1	9
a_8	a_1	6
a_9	a_8	2
a_{10}	a_2 , a_6 , a_7	3
a_{11}	a_2 , a_6 , a_7	8
a_{12}	a_2 , a_6 , a_7	4
a_{13}	a_4 , a_5 , a_{12}	9
a_{14}	a_4	3
a_{15}	a_9 , a_{12}	6

Требуется:

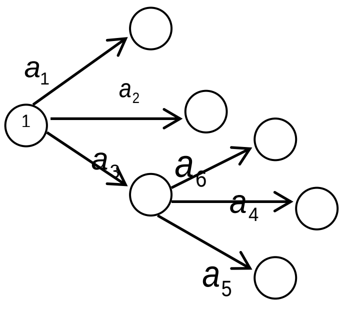
1. Построить сетевой график выполнения комплекса работ.
2. Непосредственно на графике вычислить ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий.
3. Выделить на графике критический путь и найти критический срок.
4. Найти полные и свободные резервы времени работ.

Задание 1. Работы на сетевом графике обозначаются дугами, а результат выполнения одной или нескольких работ является событием и обозначается кружком.

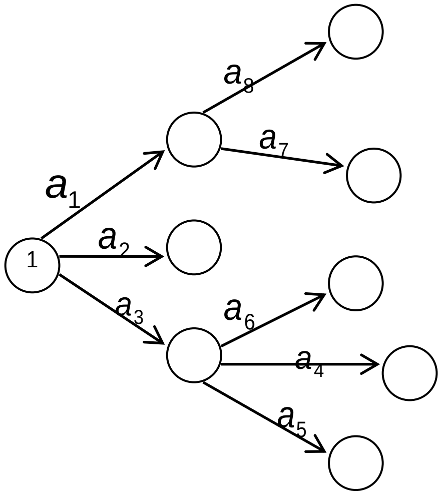
Работы a_1, a_2, a_3 не имеют предшествующих, поэтому реализация комплекса начинается с этих работ. Они изображаются дугами, выходящими из одной вершины, определяющей начальное событие 1(дуги на рисунке располагаются в произвольном порядке). Каждая работа оканчивается событием.



Работам a_4, a_5, a_6 предшествует работа a_3, поэтому дуги a_4, a_5, a_6 располагаются вслед за событием, которым заканчивается работа a_3.

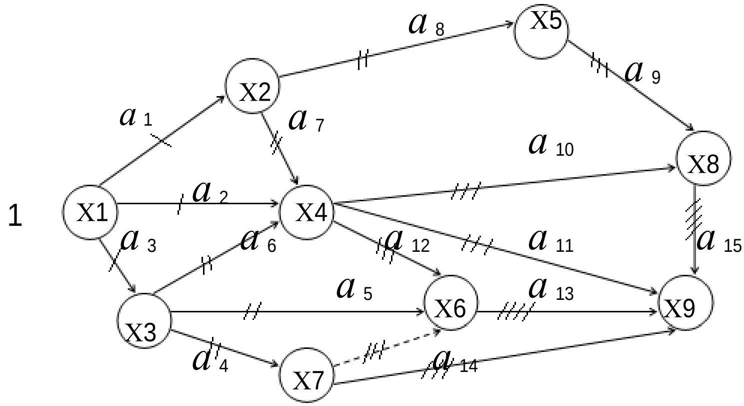


Работам a_7, a_8 предшествует работа a_1, поэтому дуги a_7 и a_8 располагаются вслед за дугой a_1 и т.д.



Чтобы не изображать параллельными дугами одновременно выполняемые работы, вводят фиктивные работы нулевой продолжительности, обозначаемые пунктирной линией.

Т.о получили сетевой график комплекса работ с начальным событием 1 и конечным событием x_9.



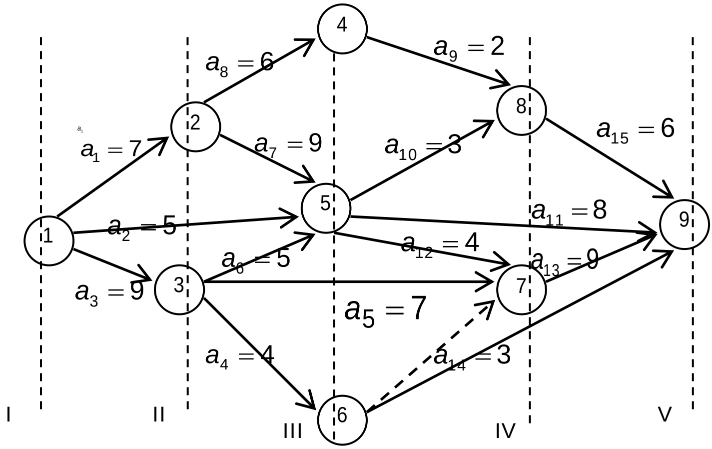
Упорядочим вершины данной сети методом Фалкерсона. Пронумеруем вершины в произвольном порядке x1, x2, …, x9. Находим вершины, в которые не входит ни одна дуга. Это будет группа I, в которую входит лишь одна вершина x1=1.

Исключаем из рассмотрения вершину x1=1 и исходящие из неё дуги (помечаем одной чертой).

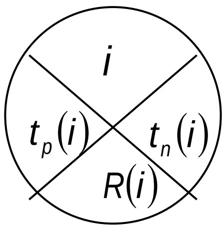
В оставшейся сети находим вершины, в которые не входит ни одна дуга. Это будут вершины x2 и x3, они образуют группу II и нумеруются в произвольном порядке, например, x2=2; x3=3.

Исключаем из рассмотрения вершины x2, x3 и дуги, из них исходящие (помечаем двумя чертами) и т.д.

Изобразим группы упорядоченных дуг с пронумерованными вершинами:



Задание 2. Запишем временные характеристики событий непосредственно на сети. Для этого разобьем каждый кружок на четыре сектора:



где i – номер события, $t_p(i)$ – ранний срок свершения события i, $t_n(i)$ – поздний срок свершения события i, $R(i)$ – резерв времени события i.

I. При вычислении ранних сроков свершения событий перемещаемся по сети от начального события 1 к конечному событию 9 в порядке возрастания номеров с использованием формулы:

$$\begin{cases} t_p(1) = 0, \\ t_p(j) = \max\{t_p(i) + t(i,j)\} \end{cases}$$
$$(i,j) \in \bigcup_j^+$$

где $\bigcup_j^+$ - множество работ, входящих в j-ое событие;

$t_p(i)$ - ранний срок свершения начального события работы (i,j);

t (i,j) – продолжительность работы (i,j).

Например,

$t_p(2) = \max\{t_p(1) + 7\} = \max\{0 + 7\} = 7;$

$t_p(3) = \max\{t_p(1) + 9\} = \max\{0 + 9\} = 9;$

$t_p(5) = \max\{t_p(2) + 9; t_p(1) + 5; t_p(3) + 5\} = \max\{7 + 9; 0 + 5; 9 + 5\} = 16;$

и т.д.

Полученные результаты записываем в левый сектор кружка.

II. При вычислении поздних сроков свершения событий перемещаемся по сети от завершающего события 9 к начальному событию 1 в порядке убывания номеров с использованием формулы:

$$\begin{cases} t_n(9) = t_p(9), \\ t_n(i) = \min\{t_n(j) - t(i,j)\}, \end{cases}$$
$$(i,j) \in \bigcup_i^-,$$

где $\bigcup_i^-$ – множество работ. выходящих из i-ого события; $t_n(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы (i,j).

Например,

$t_n(9) = t_p(9) = 29;$

$t_n(8) = \min\{t_n(9) - 6\} = 29 - 6 = 23;$

$t_n(7) = \min\{t_n(9) - 9\} = 29 - 9 = 20;$

$t_n(5) = \min\{t_n(9) - 8; t_n(8) - 3; t_n(7) - 4\} = \min\{29 - 8; 23 - 3; 20 - 4\} = \min\{21; 20; 16\} = 16;$

и т.д.

Полученные результаты заносим в правый сектор кружка.

III. Разность между поздним и ранним сроками свершения события составляет резерв R(i) времени этого события т.е.

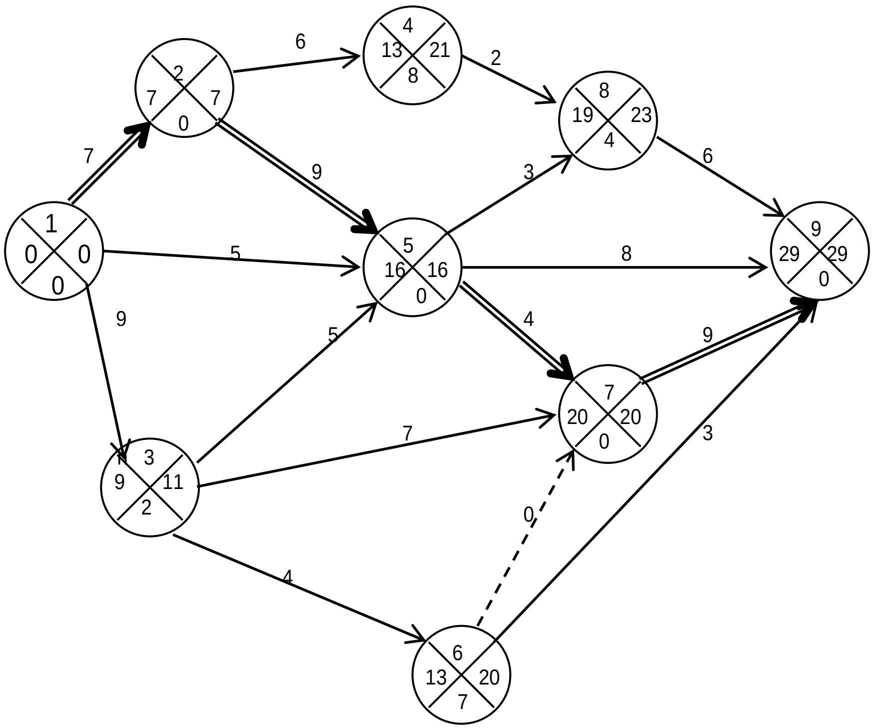
$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Например,

$$R(5) = t_n(5) - t_p(5) = 16 - 16 = 0.$$

$$R(8) = t_n(8) - t_p(8) = 23 - 19 = 4.$$

Полученные результаты заносим в нижний сектор кружка.



Задание 3. Так как у критических событий резерв времени равен нулю, то критический путь лежит на событиях с нулевыми резервами (указан двойной линией).

Если продолжительность работы принять за длину соответствующей дуги, то критическим называют путь максимальной длины от начального до завершающего события. Длина этого пути определяет критическое время $t_{кр}$ выполнения всего комплекса работ, т.е.

$$t_{кр} = 7 + 9 + 4 + 9 = 29.$$

Задание 4.При распределении ресурсов при выполнении отдельных работ комплекса могут быть использованы такие показатели резерва времени работы (i,j), как

– полный резерв $R_n(i, j)$: максимальная задержка работы (i,j) без нарушения критического срока

$$R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j);$$

– свободный резерв $R_{св}(i, j)$:максимальная задержка работы (i,j), которая не влияет на ранние сроки последующих работ

$$R_{св}(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t\ (i, j) = R_n(i, j) - R(j).$$

Работа (i,j)	(1,5)	(1,3)	(3,6)	(3,7)	(3,5)	(2,4)	(4,8)	(5,8)	(5,9)	(6,9)	(8,9)
$R_n(i, j)$	16-0-5=11	11-0-9=2	20-9-4=7	20-9-7=4	16-9-5=2	21-7-6=8	23-13-2=8	23-16-3=4	29-16-8=5	29-13-3=13	29-19-6=4
$R_{св}(i, j)$	11-0=11	2-2=0	7-7=0	4-0=4	2-0=2	8-8=0	8-4=4	4-4=0	5-0=5	13-0=13	4-0=4

Решение задания типа 71–80

На строительство четырех предприятий, производящих некоторую однородную продукцию, выделено 6 млн.усл.руб. По каждому из четырех предприятий известен возможный объем выпуска продукции $g_i(x)$ $\left(i = \overline{1,4}\right)$ в зависимости от капиталовложений x $(0 \le x \le 6)$, выделенных на строительство.

	1	2	3	4	5	6
$g_1(x)$	21	23	25	29	30	31
$g_2(x)$	20	22	26	28	29	32
$g_3(x)$	19	21	24	27	29	33
$g_4(x)$	20	21	25	27	29	33

Требуется:

1. Составить математическую модель задачи распределения капиталовложений в строительство предприятий, чтобы суммарный объем выпускаемой продукции был максимальным, и найти решение этой задачи.
2. Используя полученное решение, найти:

а) оптимальное (в смысле наибольшего объема выпускаемой продукции) распределение 6 млн.усл.руб. между тремя предприятиями,

б) оптимальное распределение 4 млн.усл.руб. между тремя предприятиями.

Задание 1. Обозначим через $F_1(x), F_2(x), F_3(x), F_4(x)$ максимальное значение объема выпускаемой продукции, если бы выделяемый объем ресурса x, $(0 \le x \le 6)$, был выделен либо одному предприятию $(F_1(x))$, либо распределен между двумя предприятиями $(F_2(x))$, либо между тремя предприятиями $(F_3(x))$, либо между четырьмя предприятиями $(F_4(x))$.

1 шаг. Пусть ресурс *x* выделяется только одному (первому) предприятию. Тогда $F_1(x) = g_1(x)$ (1)

x	1	2	3	4	5	6
$F_1(x)$	21	23	25	29	30	31

2 шаг. Пусть объем средств x, $(0 \le x \le 6)$ распределяется между двумя предприятиями. Если второму предприятию выделяют x_2 средств, то первому предприятию остается $(x - x_2)$ средств и максимальный объем выпускаемой продукции будет равен

$$F_2(x)=\max_{0\le x_2\le x}\left[g_2(x_2)+F_1(x-x_2)\right]. \qquad (2)$$

Запишем вычисления значений $F_2(x)$ в таблице, при этом справа будем отмечать оптимальные значения ресурса x_2^*, выделенные второму предприятию. Первое слагаемое в сумме будет соответствовать $g_2(x_2)$, а второе $F_1(x-x_2)=g_1(x-x_2)$.

Таблица 1

$x \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	6	F_2	x_2^*
1	0+21 =21	20+0 =20						21	0
2	0+23 =23	20+21 =41	22+0 =22					41	1
3	0+25 =25	20+23 =43	22+21 =43	26+0 =26				43	1,2
4	0+29 =29	20+25 =45	22+23 =45	26+21 =47	28+0 =28			47	3
5	0+30 =30	20+29 =49	22+25 =47	26+23 =49	28+21 =49	29+0 =29		49	1,3 ,4
6	0+31 =31	20+30 =50	22+29 =51	26+25 =51	28+23 =51	29+21 =50	32+0 =32	51	2,3 ,4

Поясним вычисления в табл. 1.

1-я строка:

$x=1$, тогда x_2 принимает значения: $x_2=0$ и $x_2=1$. Поэтому

$$F_2(1)=\max(g_2(0)+F_1(1),\ g_2(1)+F_1(0))=\max(0+21,\ 20+0)=21$$

при $x_2^*=0$.

2-я строка:

$x=2$, тогда $x_2=0$, $x_2=1$ и $x_2=2$. Поэтому

$$F_2(1)=\max(g_2(0)+F_1(2),\ g_2(1)+F_1(1),\ g_2(2)+F_1(0))=$$
$$\max(0+23,\ 20+21,\ 22+0)=\max(23,41,22)=41$$

при $x_2^*=1$.

3-я строка:

$x=3$, тогда $x_2=0$ $x_2=1$, $x_2=2$, $x_2=3$. Поэтому

$$F_2(3)=\max(g_2(0)+F_1(3),\ g_2(1)+F_1(2),\ g_2(2)+F_1(1),\ g_2(3)+F_1(0))=$$

$$=\max(0+25,\ 20+23,\ 22+21,\ 26+0)=\max(25,43,43,26)=43$$

при $x_2^*=1$ или $x_2^*=2$.

4-я строка:

$x=4$, тогда $x_2=0$ $x_2=1$, $x_2=2$, $x_2=3$, $x_2=4$. Поэтому

$$F_2(4)=\max\begin{pmatrix} g_2(0)+F_1(4),\ g_2(1)+F_1(3),\ g_2(2)+F_1(2),\ g_2(3)+F_1(1), \\ g_2(4)+F_1(0) \end{pmatrix}=$$

$$=\max(0+29,\ 20+25,\ 22+23,\ 26+21,\ 28+0)=\max(29,45,47,28)=47$$

при $x_2^*=3$.

5-я строка:

$x=5$, тогда $x_2=0$ $x_2=1$, $x_2=2$, $x_2=3$, $x_2=4$, $x_2=5$. Поэтому

$$F_2(5)=\max(g_2(0)+F_1(5),\ g_2(1)+F_1(4),\ g_2(2)+F_1(3),\ g_2(3)+F_1(2),$$
$$g_2(4)+F_1(1),\ g_2(5)+F_1(0))=$$
$$=\max(0+30,\ 20+29,\ 22+25,\ 26+23,\ 28+21,\ 29+0)=$$

$\max(30,49,47,49,49,28)=49$ при $x_2^*=1,3,4$.

6-я строка:

$x=6$, тогда $x_2=0$ $x_2=1$, $x_2=2$, $x_2=3$, $x_2=4$, $x_2=5$, $x_2=6$. Поэтому

$$F_2(6)=\max(g_2(0)+F_1(6),\ g_2(1)+F_1(5),\ g_2(2)+F_1(4),\ g_2(3)+F_1(3),$$
$$g_2(4)+F_1(2),\ g_2(5)+F_1(1),\ g_2(6)+F_1(0))=$$
$$=\max(0+31,\ 20+30,\ 22+29,\ 26+25,\ 28+23,\ 29+21,\ 32+0)=$$

$=\max(31,50,51,51,51,50,32)=51$ при $x_2^*=2,3,4$.

3 шаг. Пусть объем средств x $(0\le x\le 6)$ распределяется между тремя предприятиями. Если третьему предприятию выделяют x_3

средств, то оставшиеся $(x - x_3)$ распределяют между первым и вторым и максимальный объем выпускаемой продукции будет равен

$$F_3(x) = \max_{0 \le x_3 \le x} \left[g_3(x_3) + F_2(x - x_3) \right] \quad (3)$$

Запишем вычисления значений $F_3(x)$ в таблице, где первое слагаемое соответствует $g_3(x_3)$, а второе – $F_2(x - x_3)$, которое берем из таблицы 1.

Таблица 2

x \ x_3	0	1	2	3	4	5	6	F_3	x_3^*
1	0+21 =21	19+0 =19						21	0
2	0+41 =41	19+21 =40	21+0 =21					41	0
3	0+43 =43	19+41 =60	21+21 =42	24+0 =24				60	1
4	0+47 =47	19+43 =62	21+41 =62	24+21 =45	27+0 =27			62	1,2
5	0+49 =49	19+47 =66	21+43 =64	24+41 =65	27+21 =48	29+0 =29		66	1
6	0+51 =51	19+49 =68	21+47 =68	24+43 =67	27+41 =68	29+21 =50	33+0 =33	68	1,2 ,4

4 шаг. Пусть объем средств x $(0 \le x \le 6)$ распределяется между четырьмя предприятиями. Если четвертому предприятию выделяют x_4 средств, то оставшиеся $(x - x_4)$ распределяют между первыми тремя и максимальный объем выпускаемой продукции будет равен

$$F_4(x) = \max_{0 \le x_3 \le x} \left[g_4(x_4) + F_3(x - x_4) \right] \quad (4)$$

Запишем вычисления значений $F_4(x)$ в таблице, где первое слагаемое соответствует $g_4(x_4)$, а второе – $F_3(x - x_4)$, которое берем из таблицы 2.

Таблица 3

x_4 \ x	0	1	2	3	4	5	6	F_4	x_4
1	0+21 =21	20+0 =20						21	0
2	0+41 =41	20+21 =41	21+0 =21					41	0,1
3	0+60 =60	20+41 =61	21+21 =42	25+0 =25				61	1
4	0+62 =62	20+60 =80	21+41 =62	25+21 =46	27+0 =27			80	1
5	0+66 =66	20+62 =82	21+60 =81	25+41 =66	27+21 =48	29+0 =29		82	1
6	0+68 =68	20+66 =86	21+62 =83	25+60 =85	27+41 =68	29+21 =50	33+0 =33	86	1

Уравнения (1) – (4) являются *уравнениями Беллмана* для данной задачи. На этом этапе реализуется *принцип погружения* динамического программирования.

Чтобы получить максимальный объем выпускаемой продукции, необходимо в $F_4(x)$ подставить $x_0 = 6$. $F_4(6) = 86$ и $x_4^* = 1$. Следовательно, четвертому предприятию нужно выделить1 млн.усл.руб. Оставшиеся $x_0 - x_4^* = 6 - 1 = 5$ млн.усл.руб. распределяются между тремя предприятиями. $F_3(5) = 66$, а $x_3^* = 1$. Значит, третьему предприятию нужно выделить тоже 1 млн.усл.руб. Оставшиеся $x_0 - x_4^* - x_3^* = 6 - 1 - 1 = 4$ млн.усл.руб. распределяются между двумя предприятиями. $F_2(4) = 47$, а $x_2^* = 3$. Значит, второму предприятию выделяется 3 млн.усл.руб. Оставшийся $x_0 - x_4^* - x_3^* - x_2^* = 6 - 1 - 1 - 3 = 1$ млн.усл.руб. выделяется первому предприятию.

Таким образом, оптимальное решение задачи $\bar{x}^* = (1,3,1,1)$ и максимальный объем выпускаемой продукции $z_{max} = F_4(6) = 86$.

Задание 2а). В основе динамического программирования лежит *принцип оптимальности,* на основании которого построенная оптимальная стратегия является оптимальной для любого количества оставшихся шагов и любых начальных состояний. Поэтому можно записать оптимальную стратегию, если 6 млн.усл.руб. распределяются между тремя предприятиями. В этом случае $z_{\max} = F_3(6) = 68$ и $x^*_{3,1} = 1$ или $x^*_{3,2} = 2$ или $x^*_{3,3} = 4$.

Пусть $x^*_{3,1} = 1$, тогда $x_0 - x^*_{3,1} = 6 - 1 = 5$ млн.усл.руб. распределяются между двумя предприятиями и $F_2(5) = 49$ и $x^*_{2,1} = 1$, или $x^*_{2,2} = 3$, или $x^*_{2,3} = 4$. Тогда $x^*_{1,1} = x_0 - x^*_{3,1} - x^*_{2,1} = 6 - 1 - 1 = 4$, или $x^*_{1,2} = x_0 - x^*_{3,1} - x^*_{2,2} = 6 - 1 - 3 = 2$,или $x^*_{1,3} = x_0 - x^*_{3,1} - x^*_{2,3} = 6 - 1 - 4 = 1$

Оптимальными стратегиями будут $\bar{x}^*_1 = (4,1,1)$, или $\bar{x}^*_2 = (2,3,1)$, или $\bar{x}^*_3 = (1,4,1)$.

Пусть $x^*_{3,2} = 2$, тогда $x_0 - x^*_{3,2} = 6 - 2 = 4$ млн.усл.руб. распределяются между двумя предприятиями. $F_2(4) = 47$, а $x^*_2 = 3$, значит, $x^*_1 = x_0 - x^*_{3,2} - x^*_2 = 6 - 2 - 3 = 1$. Оптимальная стратегия имеет вид $\bar{x}^* = (1,3,2)$.

Если $x^*_{2,3} = 4$, то $x_0 - x^*_{3,3} = 6 - 4 = 2$ млн.усл.руб. распределяются между двумя предприятиями. $F_2(2) = 41$, а $x^*_2 = 1$, значит, $x^*_1 = x_0 - x^*_{3,3} - x^*_2 = 6 - 4 - 1 = 1$. Оптимальная стратегия имеет вид $\bar{x}^* = (1,1,4)$.

Задание 2б). Если $x_0 = 4$ млн.усл.руб. распределяются между четырьмя предприятиями, то $z_{\max} = F_4(4) = 80$ и $x^*_4 = 1$. Оставшиеся $x_0 - x^*_4 = 4 - 1 = 3$ млн.усл.руб. распределяются между тремя предприятиями, и $F_3(3) = 60$ и $x^*_3 = 1$. Следовательно, $x_0 - x^*_4 - x^*_3 = 4 - 1 - 1 = 2$ млн.усл.руб. распределяются между двумя предприятиями. Но $F_2(2)=41$ и $x_2^*=1$, значит, $x_1^*=x_0-x_3^*-x_2^*=4-1-1-1=1$. Оптимальная стратегия имеет вид $\bar{x}^*=(1,1,1,1)$.

Решение задания типа 81–90

Разработать оптимальную политику замены оборудования возраста пяти лет, исходя из условия максимизации ожидаемой прибыли за плановый период продолжительности десяти лет. Известны стоимость r (t) продукции в усл. ед., производимой в течение года с использованием данного оборудования возраста t лет; ежегодные расходы u (t) в усл. ед., связанные с эксплуатацией этого оборудования, которые приведены в таблице; ликвидационная стоимость оборудования s = 5 в усл. ед., независящая от его возраста; стоимость p = 20 в усл. ед. нового оборудования (сюда же включены расходы, связанные с установкой, наладкой и запуском оборудования).

	Возраст оборудования											s	p
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
r(t)	50	49	48	47	47	46	45	43	42	40	40	10	30
u(t)	25	25	27	28	29	30	30	31	33	35	38		

Сформулированная задача является *задачей о замене оборудования* и решается методом динамического программирования.

Обозначим через $f_n(t)$ максимально возможную прибыль за последние n лет планового периода при условии, что в начале периода мы имеем оборудование возраста t, и мы придерживаемся оптимальной политики.

Если на начало последнего планового года оборудования будет возраста t лет и его сохранить, то за последний год прибыль составит r(t)–u(t). Если оборудование продать по остаточной стоимости и купить новое, то прибыль составит s–p+r(0)–u(0), где r(0) – стоимость продукции, произведенной на новом оборудовании («нулевого возраста»), u(0) – расходы, связанные с эксплуатацией нового оборудования. Заменить оборудование выгодно, если s–p+r(0)–u(0) > r(t)–u(t). Таким образом,

$$f_1(t)=\max_t\begin{cases} r(t)-u(t)-\text{сохранение},\\ q=s-p+r(0)-u(0)-\text{замена}.\end{cases}$$

Вычисляем значения этой функции при различных значениях t.

Пусть t = 0 $f_1(0)=\max\begin{cases} 50-25=25-\text{сохранение}\\ q=10-30+50-25=5-\text{замена}\end{cases}$. Так как 25>5, то оптимальной политикой, соответствующей $f_1(0)$ является политика сохранения оборудования.

Пусть t = 1 $f_1(1)=\max\begin{cases} 49-25=24-\text{сохранение}\\ q=5-\text{замена}\end{cases}$. Так как 24>5, то оптимальной политикой, соответствующей $f_1(1)$ является политика сохранения оборудования. Выполняя аналогичные вычисления, результаты записываем в таблицу.

При t = 9 $f_1(9)=\max\begin{cases} 40-35=5-\text{сохранение}\\ q=5-\text{замена}\end{cases}$. Если при вычислении функции $f_n(t)$ получается равенство (5=5), оптимальную политику принимают первый раз в пользу сохранения оборудования, а последующие разы в пользу замены оборудования. Следовательно, в этом случае оптимальной является политика замены оборудования.

При t = 10 $f_1(10)=\begin{cases} 40-38=2-\text{сохранение}\\ q=5-\text{замена}\end{cases}$. Так как 2<5, то оптимальной политикой, соответствующей $f_1(10)$ является политика замены оборудования.

Вычисления заносим в таблицу. Значение q записываем на краю таблицы. Если функция $f_n(t)$ принимает значение меньшее q, то мы попадаем в область замены оборудования. Чтобы в таблице различать, в результате какой политики получается то или иное значение максимальной прибыли, разграничим жирной чертой элементы таблицы, соответствующие различным политикам. Слева от жирной черты стоят значения, соответствующие политике «сохранения оборудования», а справа – политике «замены оборудования».

Рассмотрим два последних плановых периода.

$$f_2(t)=\max_t\begin{cases} r(t)-u(t)+f_1(t+1)-\textit{сохранение},\\ q=s-p+r(0)-u(0)+f_1(1)-\textit{замена}.\\ . \end{cases}$$

Вычисляем значения этой функции при различных значениях t.

Пусть t = 0 $f_2(0)=\max\begin{cases}50-25+24=49-\textit{сохранение}\\ q=5+24=29-\textit{замена}\end{cases}$. Так как 49>29, то оптимальной политикой, соответствующей $f_2(0)$ является политика сохранения оборудования.

Пусть t = 1 $f_2(1)=\max\begin{cases}49-25+21=45-\textit{сохранение}\\ q=29-\textit{замена}\end{cases}$. Так как 45>29, то оптимальной политикой, соответствующей $f_2(1)$ является политика сохранения оборудования. …

При t = 6 $f_2(6)=\max\begin{cases}45-30+12=27-\textit{сохранение}\\ q=29-\textit{замена}\end{cases}$. Так как 27<29, то оптимальной политикой, соответствующей $f_2(6)$ является политика замены оборудования. …

Рассмотрим три последних плановых периода.

$$f_3(t)=\max_t\begin{cases} r(t)-u(t)+f_2(t+1)-\textit{сохранение},\\ q=s-p+r(0)-u(0)+f_2(1)-\textit{замена}.\\ . \end{cases}$$

Вычисляем значения этой функции при различных значениях t.

Пусть t = 0 $f_3(0)=\max\begin{cases}50-25+45=70-\textit{сохранение}\\ q=5+45=50-\textit{замена}\end{cases}$. Так как 70>50, то оптимальной политикой, соответствующей $f_3(0)$ является политика сохранения оборудования. …

При t = 4 $f_3(4)=\max\begin{cases}47-29+31=49-\textit{сохранение}\\ q=50-\textit{замена}\end{cases}$.

Так как 49<50, то оптимальной политикой, соответствующей $f_3(4)$ является политика замены оборудования. …

Рассмотрим четыре последних плановых периода.

$$f_4(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - u(t) + f_3(t+1) - сохранение, \\ q = s - p + r(0) - u(0) + f_3(1) - замена. \\ . \end{cases}$$

Вычисляем значения этой функции при различных значениях t.

Пусть t = 0 $f_4(0) = \max\begin{cases} 50 - 25 + 64 = 89 - сохранение \\ q = 5 + 64 = 69 - замена \end{cases}$. Так как 70>50, то оптимальной политикой, соответствующей $f_3(0)$ является политика сохранения оборудования. …

При t = 4 $f_4(4) = \max\begin{cases} 47 - 29 + 50 = 68 - сохранение \\ q = 69 - замена \end{cases}$. Так как 68<69, то оптимальной политикой, соответствующей $f_4(4)$ является политика замены оборудования.

Продолжая вычисления описанным способом, все результаты заносим в таблицу (см. с. 95).

Данные этой таблицы можно использовать для выбора оптимальной политики замены оборудования.

В начале планового десятилетнего периода имеется оборудование пяти лет. В таблице на пересечении строки $f_{10}(t)$ и столбца t = 5 находим значение максимальной прибыли, равное 174 (усл.ед.). Это значение записано справа от жирной линии, в области политики «замены оборудования». Это означает, что для достижения в плановом периоде из десяти лет максимальной прибыли равной 174 (усл.ед.) надо в первом году планового периода оборудование заменить.

t / $f_n(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	q
$f_1(t)$	25	24	21	19	18	16	15	12	9	5	5	5
$f_2(t)$	49	45	40	37	34	31	29	29	29	29	29	29
$f_3(t)$	70	64	58	53	50	50	50	50	50	50	50	50
$f_4(t)$	89	82	74	69	69	69	69	69	69	69	69	69
$f_5(t)$	107	98	90	88	87	87	87	87	87	87	87	87
$f_6(t)$	123	114	109	106	105	103	103	103	103	103	103	103
$f_7(t)$	139	133	127	124	121	119	119	119	119	119	119	119
$f_8(t)$	158	151	145	140	138	138	138	138	138	138	138	138
$f_9(t)$	176	169	161	157	156	156	156	156	156	156	156	156
$f_{10}(t)$	194	185	178	175	174	174	174	174	174	174	174	174

К концу первого года возраст оборудования будет равен одному году и за последующие 9 лет планового периода значение максимальной прибыли стоит на пересечении строки $f_9(t)$ и столбца t = 1, которое равно 169 (усл.ед.). Это значение записано слева от жирной линии, в области политики «сохранения оборудования», поэтому на втором году планового десятилетнего периода оборудование надо сохранить.

К концу второго года возраст оборудования будет равен двум годам и за последующие 8 лет значение максимальной прибыли стоит на пересечении строки $f_8(t)$ и столбца t = 2, которое равно 145 (усл.ед.). Это значение записано слева от жирной линии, в области политики «сохранения оборудования», поэтому на третьем году планового десятилетнего периода оборудование надо сохранить.

Рассуждая аналогично, результат формирования оптимальной политики можно символически записать следующим образом:

$$f_{10}(5) \xrightarrow[\text{замена}]{1\,год} f_9(1) \xrightarrow[\text{сохранение}]{2\,год} f_8(2) \xrightarrow[\text{сохранение}]{3\,год} f_7(3) \xrightarrow[\text{сохранение}]{4\,год}$$

$$f_6(4) \xrightarrow[\text{сохранение}]{5\,год} f_5(5) \xrightarrow[\text{замена}]{6\,год} f_4(1) \xrightarrow[\text{сохранение}]{7\,год} f_3(2) \xrightarrow[\text{сохранение}]{8\,год}$$

$$f_2(3) \xrightarrow[\text{сохранение}]{9\,год} f_1(4) \xrightarrow[\text{сохранение}]{10\,год}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Программа курса 4

Литература 6

Контольные задания 7
Задания 1–10 7
Задания 11–20 8
Задания 21–30 11
Задания 31–40 15
Задания 41–50 16
Задания 51–60 17
Задания 61–70 21
Задания 71–80 26
Задания 81–90 28

Методические указания к контрольной работе 31
Решение задания типа 1–10 31
Решение задания типа 11–20 34
Решение задания типа 21–30 44
Решение задания типа 31–40 58
Решение задания типа 41–50 66
Решение задания типа 51–60 72
Решение задания типа 61–70 77
Решение задания типа 71–80 84
Решение задания типа 81–90 91

Учебное издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Программные вопросы, контрольные задания
и методические указания для студентов-заочников
строительных специальностей экономического профиля

Составители:
ГУРИНА Татьяна Николаевна
МОРОЗ Ольга Александровна

Подписано в печать 08.02.2013. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 5,70. Уч.-изд. л. 4,45. Тираж 100. Заказ 1301.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический
университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.