1995. Т. 31, № 8. С. 1353 — 1360

УДК 517.977

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ В ФАКТОРИЗОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

А. В. Метельский

Основные факты теории разложения. Будем изучать линейную автономную дифференциально-разностную систему с соизмеримыми запаздываниями (назовем ее системой Σ)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - h_i), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in H^- = [-h, 0], \tag{2}$$

$$y(t) = Gx(t), \quad t \in T = [0, t_1]. \tag{3}$$

Здесь x — n-вектор-столбец решения уравнения (1) $(n \geq 2)$; y — l-вектор-столбец выходных величин (выход) системы $\Sigma(l \geq 1)$; $h_i = i\omega$, $\omega > 0$ $(i = \overline{1, m}$, $m \geq 1)$, $h = m\omega$ — постоянные запаздывания; $t_1 > 0$ — фиксированный момент времени; A, A_i, G — постоянные матрицы подходящих размеров, причем $A_m \neq 0$. Считаем, что начальная функция $\eta \in C$, где $C = C(H^-, R^n)$ — банахово пространство непрерывных функций с топологией равномерной сходимости. Следуя Н. Н. Красовскому [1], под состоянием $x_t \in C$ системы Σ в момент времени $t \geq 0$ будем понимать функцию $x_t = x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in H^-$. Чтобы отметить, что состояние x_t отвечает начальному состоянию η, будем писать $x_{t,\eta}$.

Уравнение (1) задает [1, 2] сильно непрерывную полугруппу ограниченных линейных преобразований $S(t) : C \to C$, действующих по формуле $x_{t,\eta} = S(t)\eta$, $t \geq 0$. Рассмотрим характеристическое уравнение системы Σ

$$\det W(\lambda) = 0, \quad W(\lambda) = \lambda E - A - \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-\lambda h_i}, \tag{4}$$

где E — единичная матрица; $\lambda \in K$, K — множество комплексных чисел. Множество корней уравнения (4), называемое спектром уравнения (1), обозначим Λ. Каждому $\lambda \in \Lambda$ соответствует [1, 2] обобщенное собственное пространство $P_\lambda \subset C$ системы Σ. P_λ — линейная оболочка функций

$$\varphi(\theta) = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{j+1} \frac{\theta^j}{j!} e^{\lambda\theta}, \quad \theta \in H^-, \quad k \geq 1, \tag{5}$$

где $\gamma = \operatorname{col}[\gamma_1, \ldots, \gamma_k]$ — nk-вектор-столбец, удовлетворяющий системе линейных алгебраических уравнений

$$M_k(\lambda)\gamma = 0. \tag{6}$$

Постоянная $(nk \times nk)$-матрица $M_k = M_k(\lambda)$ задается формулой

$$M_k = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \ldots & W_k \\ 0 & W_1 & \ldots & W_{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & W_1 \end{bmatrix}, \quad W_{j+1} = \frac{W^{(j)}(\lambda)}{j!}, \quad j = \overline{0, k-1},$$

причем $\dim P_\lambda$ равна [2] алгебраической кратности k_λ значения λ как нуля характеристического уравнения (4), поэтому в уравнении (6) достаточно взять $k = k_\lambda$.

Обозначим Λ_N множество из N характеристических значений $\lambda \in \Lambda$. Справедливо [2] разложение пространства C по Λ_N : $C = P \oplus Q$, где P — обобщенное собственное пространство уравнения (1), связанное с Λ_N, Q — дополнительное подпространство. Для произвольного действительного числа β обозначим $\Lambda(\beta) = \{\lambda \in \Lambda | \mathrm{Re}\lambda \geq \beta\}$. Установлено [3], что множество $\Lambda(\beta)$ всегда конечно (в частности, может быть пусто) и на дополнительном подпространстве $Q_{\Lambda(\beta)}$ справедлива [2] оценка

$$\|x_t^{Q_{\Lambda(\beta)}}\| \leq \|S(t)\eta^{Q_{\Lambda(\beta)}}\| \leq \theta e^{(\beta-\gamma)t}\|\eta^{Q_{\Lambda(\beta)}}\| \quad \forall t \geq 0, \tag{7}$$

где θ, γ — положительные константы.

Постановка задачи идентификации. Различные постановки задачи идентификации для систем без запаздывания и методы их решения описаны в монографиях [3 — 5], там же имеется обширная библиография. Впервые задача идентификации для системы Σ рассматривалась Н. Н. Красовским и А. Б. Куржанским в [6]. Ими изучался вопрос о выделении неустойчивой компоненты текущего состояния x_{t_1} системы Σ $(m = 1,\ n = 2)$ по известному выходу $y = y(t)$, $t \in T$. Задача однозначного вычисления начального состояния η по выходу y — задача наблюдаемости системы Σ — при $m = 1$ исследовалась в [7, 8], где установлен спектральный критерий наблюдаемости. На систему Σ с любым числом запаздываний этот критерий обобщен в работе [9]. Различные аспекты задачи идентификации текущего состояния x_{t_1} системы Σ по выходу y изучались в [9 — 12]. Практически важными являются задачи управления и идентификации в условиях неопределенности. Общая теория таких задач изложена в монографии [13]. Асимптотический наблюдатель для оценки неизвестных возмущений в задаче робастной стабилизации функционально-дифференциальной системы построен в [14]. В настоящей работе под задачей идентификации понимается задача точного вычисления текущего состояния x_{t_1} системы Σ по известному выходу y посредством непрерывной операции.

Вообще говоря, один и тот же выход (3) может порождаться несколькими начальными функциями (2). Поэтому выходу y может соответствовать несколько текущих состояний x_{t_1}. Каждое такое состояние будем называть [13] совместимым с выходом y.

Пусть $Y = \{y | \eta \in C\}$ — совокупность всех выходов системы Σ, $\{x_{t_1}\}_y$ — класс текущих состояний, совместимых с выходом y. Множество Y будем рассматривать как многообразие в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2(T, R^l)$. Введем оператор L_{t_1} с областью определения Y : $L_{t_1}y = \{x_{t_1}\}_y$, который будем называть оператором восстановления класса $\{x_{t_1}\}_y$ текущих состояний, совместимых с измеренным выходом y.

Определение 1. Систему Σ назовем идентифицируемой, если оператор восстановления L_{t_1} : $L_2 \to C$ однозначен и непрерывен.

Известно [9, 10], что для однозначности оператора L_{t_1} при $t_1 \geq nh$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{rank} W_G(\lambda) = n \quad \forall \lambda \in K, \text{ где } W_G(\lambda) = \begin{bmatrix} G \\ \lambda E - A - \sum\limits_{i=1}^{m} A_i e^{-\lambda h_i} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Допустим, что условие (8) нарушается для конечного набора собственных значений λ : $\Lambda_G = \{\lambda_i \in \Lambda,\ i = \overline{1, N} \mid \mathrm{rank} W_G(\lambda_i) < n\}$. Тогда оператор L_{t_1} будет [8] многозначным. Обозначим через $P^0 = \{x_{t_1}\}_0 = \{x_{t_1} \in C \mid y = 0\}$ линейное многообразие текущих состояний, совместимых с нулевым выходом при $t_1 \geq nh$.

Потребуем, чтобы множество P^0 было замкнуто. Факторизуем [15] пространство C по P^0 и рассмотрим задачу идентификации для факторизованного пространства состояний.

Факторизация пространства состояний. Поскольку оператор сдвига системы Σ вполне непрерывен и при $t \geq nh$ имеет обратный [2], то замкнутость многообразия P^0 равносильна [15] его конечномерности.

Разложим пространство $C = P \oplus Q$ по спектральному набору Λ_G. Для дифференциально-разностного уравнения (1) с произвольными запаздываниями докажем лемму.

Лемма 1. *Если множество* Λ_G *конечно, то многообразие* P^0 *конечномерно* ($\dim P^0 < +\infty$) *и имеет вид* $P^0 = \{\varphi \in P \mid G\varphi = 0\}$. *Верно и обратное: из условия* $\dim P^0 < +\infty$ *следует конечность множества* Λ_G.

Доказательство. Необходимость. Каждому собственному значению $\lambda \in \Lambda_G$ соответствует подпространство $P_\lambda^0 = \{\varphi \in P_\lambda \mid G\varphi = 0\} \subseteq P^0$, где P_λ — обобщенное собственное пространство уравнения (1), связанное с λ. Если допустить, что множество Λ_G бесконечно, то условие $\dim P^0 < +\infty$ невозможно ввиду включения $P_\lambda^0 \subseteq P^0$.

Достаточность. Известно [3], что множество $\Lambda(\beta) = \{\lambda \in \Lambda \mid \mathrm{Re}\lambda \geq \beta\}$ при любом β конечно. Выберем действительное число β таким, чтобы множество $\Lambda(\beta)$ было непусто.

Разложим пространство C по спектральному набору $\Lambda(\beta)$: $C = P^\beta \oplus Q^\beta$. Это разложение порождает представление текущего состояния

$$x_t = x_t^{P^\beta} + x_t^{Q^\beta}, \quad t \geq 0. \tag{9}$$

Для проекции $x_t^{Q^\beta}$ состояния x_t на дополнительное подпространство Q^β справедлива оценка (7)

$$\|x_t^{Q^\beta}\| \leq \theta e^{(\beta-\gamma)t}\|\eta^{Q^\beta}\|, \quad t \geq 0, \tag{10}$$

где θ, γ — положительные константы.

Пусть система Σ имеет нулевой выход $y = 0$. В силу разложения (9) $Gx_t^{P^\beta} = -Gx_t^{Q^\beta}$, $t \geq 0$. Покажем, что $Gx_t^{P^\beta} = 0$, если t достаточно велико. Для этого воспользуемся оценкой (10)

$$\|Gx_t^{P^\beta}\| = \|-Gx_t^{Q^\beta}\| \leq \|G\|\,\|x_t^{Q^\beta}\| \leq \theta\|G\|\,\|\eta^{Q^\beta}\|e^{(\beta-\gamma)t}, \quad t \geq 0.$$

Обе части данного неравенства умножим на $e^{-\beta t}$ и получим

$$\|e^{-\beta t}Gx_t^{P^\beta}\| \leq \theta\|G\|\,\|\eta^{Q^\beta}\|e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0. \tag{11}$$

Проекция $x_t^{P^\beta}$ есть сумма квазиполиномов (5) с экспонентами $e^{\lambda t}$, $\mathrm{Re}\lambda \geq \beta$. Если $Gx_t^{P^\beta} \not\equiv 0$ для достаточно больших t, то левая часть неравенства (11) либо константа, либо неограниченно возрастает при $t \to +\infty$. В то же время правая часть неравенства (11) — величина бесконечно малая при $t \to +\infty$. Полученное противоречие означает, что $Gx_t^{P^\beta} \equiv 0$, начиная с некоторого значения $t = t_2$.

Итак, для всех проекций состояния x_t на обобщенные собственные пространства P_λ, $\lambda \in \Lambda(\beta)$, справедливы тождества $Gx_t^{P_\lambda} \equiv 0$, $t \geq t_2$. Если число λ удовлетворяет условию $\mathrm{rank}\left[\begin{smallmatrix} G \\ W(\lambda)\end{smallmatrix}\right] = n$, то [8] отсюда следует тождество $x_t^{P_\lambda} \equiv 0, t \geq t_2$.

Ввиду продолжимости [2] проекции $x_t^{P_\lambda}$ решения уравнения (1) назад последнее тождество имеет место начиная с $t_2 = 0$. Число β можно взять как угодно малым ($\beta \to -\infty$), поэтому для всех текущих состояний $x_t \in \{x_t\}_0$ верно утверждение

$$x_t^{P_\lambda} \equiv 0, \quad t \geq 0, \quad \text{если} \quad \mathrm{rank}\begin{bmatrix} G \\ W(\lambda)\end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Поскольку множество Λ_G конечно, то из разложения [9, 16] произвольного решения $x(t)$, $t \geq (n-1)h$, уравнения (1) в ряд по обобщенным собственным функциям для $x_t \in \{x_t\}_0$ имеем $x_t = \sum\limits_{j=1}^{N} \varphi_\lambda$, $t \geq nh$, $\varphi_\lambda \in P_\lambda$, причем $G\varphi_\lambda = 0$, $\lambda \in \Lambda_G$. Лемма доказана.

Пусть множество Λ_G конечно, тогда (лемма 1) подпространство P^0 конечномерно ($P^0 \subseteq P$ при $\Lambda_N = \Lambda_G$). Можно рассмотреть [15] фактор-пространство $F = C/P^0$, состоящее из классов смежности $\varphi^0 = \{\varphi + z\}$, $\varphi \in C$, $z \in P^0$. Два класса равны: $\varphi^0 = \psi^0$, если $\varphi^0 - \psi^0 \in P^0$. Фактор-пространство F банахово [15] относительно нормы: $\|\varphi^0\|_F = \inf\limits_{z \in P^0}\|\varphi + z\|_C$.

Оператор L_{t_1} порождает линейный оператор $L_{t_1}^0 : L_2 \to F$, определенный на многообразии Y по формуле: $L_{t_1}^0 y = L_{t_1} y$.

Определение 2. Систему Σ назовем c-идентифицируемой ($class$-идентифицируемой), если многообразие P^0 конечномерно и оператор восстановления $L^0_{t_1} : L_2 \to F$ непрерывен.

Цель дальнейших рассуждений — доказать параметрический критерий c-идентификации и описать оператор восстановления $L^0_{t_1}$.

Вспомогательное дифференциальное соотношение. Получим дифференциальное соотношение, связывающее состояние $x(t)$, $t \in [t_0 - h, t_0]$, $t_0 \geq 0$, системы Σ с "будущим" выходом $y(t)$, $t \in [t_0 - h, t_0 + (n-1)h]$.

Рассмотрим матрицу $\lambda E - A$ и присоединенную к ней матрицу $D(\lambda)$: $D(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - A)D(\lambda) = \Delta(\lambda)E$, где $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$, $\lambda \in K$. Из теории матриц известно, что $D(\lambda) = D_0\lambda^{n-1} + D_1\lambda^{n-2} + \ldots + D_{n-1}$, $D_0 = E$, $D_k = A^k - r_1A^{k-1} - \ldots - r_kE$, $k = \overline{1, n-1}$, $r_k = k^{-1}\mathrm{Sp}(AD_{k-1})$, где $\mathrm{Sp}(AD_{k-1})$ — след матрицы M.

Перепишем уравнение (1) в виде $(p = d/dt)$ $(pE - A)x(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} A_ix(t - i\omega)$, $t \geq 0$. Считая функцию η в начальном условии (2) достаточно гладкой, применим к обеим частям последнего равенства оператор $D(p)$. Получим

$$\Delta(p)x(t) = D(p)\sum_{i=1}^{m} A_ix(t - i\omega), \quad t \geq 0. \tag{12}$$

Дополним это соотношение очевидными равенствами

$$\Delta(p)x(t - i\omega) = \Delta(p)x(t - i\omega), \quad i = \overline{1, m-1}, \quad t \geq 0, \tag{13}$$

и запишем систему (12) — (13) в матричном виде

$$r(p)X(t) = k(p)X(t - \omega), \quad t \geq 0. \tag{14}$$

Здесь $r(p) = \mathrm{diag}[\Delta(p), \ldots, \Delta(p)]$ — $(\alpha \times \alpha)$-матрица, $\alpha = nm$, $X(t) = \mathrm{col}[x(t), x(t - \omega), \ldots$ $\ldots, x(t - (m-1)\omega)]$, $t \geq -\omega$,

$$k(p) = \begin{bmatrix} D(p)A_1 & D(p)A_2 & \ldots & D(p)A_{m-1} & D(p)A_m \\ \Delta(p)E & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(p)E & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta(p)E & 0 \end{bmatrix}.$$

Применим оператор $r(p)$ к уравнению (14) $m-1$ раз. В силу его структуры оператор $r(p)$ перестановочен с оператором $k(p)$, поэтому $r^m(p)X(t) = k^m(p)X(t - m\omega) = k^m(p)X(t - h)$, $t \geq (m-1)\omega$. Обозначая $R(p) = r^m(p)$, $K(p) = k^m(p)$, получим $R(p)X(t) = K(p)X(t - h)$, $t \geq (m-1)\omega = h - \omega$. Отсюда

$$R^i(p)X(t) = K^i(p)X(t - ih), \quad t \geq ih - \omega, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Заменяя здесь переменную $t - ih = s$, имеем формулу

$$R^i(p)X(s + ih) = K^i(p)X(s), \quad s \in [t_0 - \omega, t_0], \quad t_0 \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Введем обозначения: $Y(t) = \mathrm{col}[Gx(t), Gx(t - \omega), \ldots, Gx(t - (m-1)\omega)]$, $t \geq -\omega$, $\bar{G} = \mathrm{diag}[G, \ldots, G]$ — $(lm \times \alpha)$-матрица.

Умножая обе части формулы (16) на матрицу $\bar{G}$, получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Если функция η в начальном условии (2) $\nu = \alpha(n-1)$ раз непрерывно дифференцируема, то справедливы дифференциальные соотношения*

$$R^i(p)Y(s + ih) = \Delta^{mi}(p)Y(s + ih) = \bar{G}K^i(p)X(s), \quad s \in [t_0 - \omega, t_0], \quad t_0 \geq 0, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{17}$$

Для дифференциально-разностного уравнения (1) с произвольными запаздываниями докажем утверждение, необходимое для дальнейших рассуждений.

Лемма 3. *Если начальная функция $\eta \in C^k = C^k(H^-, R^n)$ $k \geq 1$ раз непрерывно дифференцируема и удовлетворяет граничным условиям*

$$\eta^{(j+1)}(0) = A\eta^{(j)}(0) + \sum_{i=1}^{m} A_i\eta^{(j)}(-h_i), \quad j = \overline{0, k-1}, \tag{18}$$

то решение уравнения (1) также k раз непрерывно дифференцируемо при $t = 0$.

Доказательство. Из уравнения (1) при $t = +0$ имеем $\dot{x}(+0) = Ax(+0) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(+0-h_i)$. В силу начального условия (2) $x(+0) = \eta(0)$ и $x(+0-h_i) = \eta(-h_i)$, $i = \overline{1,m}$, поэтому $\dot{x}(+0) = A\eta(0) + \sum_{i=1}^{m} A_i\eta(-h_i)$. Отсюда с учетом граничного условия (18) при $j = 0$ получаем равенство $\dot{x}(+0) = \dot{\eta}(0)$.

Считаем доказанными равенства

$$x^{(i)}(+0) = \eta^{(i)}(0), \quad i = \overline{1,j}, \quad 1 \leq j \leq k-1. \tag{19}$$

Установим, что $x^{(j+1)}(+0) = \eta^{(j+1)}(0)$, если $k \geq 2$. Дифференцируя уравнение (1) j раз, при $t = +0$ получим $x^{(j+1)}(+0) = Ax^{(j)}(+0) + \sum_{i=1}^{m} A_i x^{(j)}(+0-h_i)$. Ввиду равенств (19), начального условия (2) и граничных условий (18) заключаем, что $x^{(j+1)}(+0) = \eta^{(j+1)}(0)$. Лемма доказана.

Условие c-идентифицируемости системы с соизмеримыми запаздываниями. Докажем критерий c-идентифицируемости системы Σ. Для более глубокой трактовки понятия c-идентифицируемости дадим доказательство этого критерия, основанное на свойствах решений системы Σ.

Введем дифференциальный оператор $K_n(p) = \mathrm{col}[\bar{G}, \bar{G}K(p), \ldots, \bar{G}K^{n-1}(p)]$ и докажем теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы система Σ, $t_1 \geq 2n(\alpha+1)h$, была c-идентифицируема, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} K_n(\lambda) \\ K^n(\lambda) \end{bmatrix} = \mathrm{rank}K_n(\lambda) \quad \textit{для почти всех} \quad \lambda \in K. \tag{20}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система Σ c-идентифицируема, тогда множество Λ_G конечно. Для любой начальной функции $\eta \in C^\nu$, $\nu = \alpha(n-1)$, дающей нулевой выход $y(t) = 0$, $t \geq 0$, в силу леммы 1 и формулы (16) при некотором полиноме $\Delta_0(p) \neq 0$ будет справедливо

$$\Delta_0(p)R^k(p)X(s+nh) = \Delta_0(p)K^n(p)X(s) = 0, \quad s \in [-\omega, 0]. \tag{21}$$

Операторы $R(p)$ и $K(p)$ введены в предыдущем пункте.

Предположим, что условие (20) нарушается: $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} K_n(\lambda) \\ K^n(\lambda) \end{bmatrix} > \mathrm{rank}K_n(\lambda)$ для почти всех $\lambda \in K$, тогда $\mathrm{rank}K_n(\lambda) < n$ при любом $\lambda \in K$. Общее решение уравнения

$$K_n(p)X(s) = 0, \quad s \in [-\omega, 0], \tag{22}$$

будет [17] содержать произвольные функции, и не всякое решение уравнения (22) будет удовлетворять уравнению (21).

Возьмем в качестве начального состояния системы Σ достаточно гладкую функцию $\eta \in C^\nu$:

$$\eta^{(j+1)}(-i\omega) = 0, \quad j = \overline{0, \mu-1}, \quad \mu = (n-1)(m-1), \quad i = \overline{1,m}, \quad \eta(\tau) \not\equiv 0, \quad \tau \in H^-, \tag{23}$$

удовлетворяющую уравнению (22), но не удовлетворяющую уравнению (21). Эта функция отвечает условиям леммы 3, поэтому решение $x(t,\eta)$ μ раз непрерывно дифференцируемо при $t = 0$. Для состояний $x_{t,\eta}$ в смысле гладкости имеют место [16] включения

$$x_{t,\eta} \in C^{\mu+i}(H^-, R^n), \quad t \geq ih, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{24}$$

Рассмотрим функцию $y(t) = Gx(t,\eta)$, $t \geq -h$. Ввиду уравнения (22) и формулы (17) функция $y(t)$, $t \geq -h$, удовлетворяет уравнениям

$$\Delta^{m^i}(p)y(t) = 0, \quad t \in [(i-1)h, ih], \quad i = 0, 1, \ldots \tag{25}$$

В силу (24) начальные условия для уравнений (25) берутся по непрерывности, т. е. нулевыми, поэтому $y(t) = 0$, $t \in [-h, (n-1)h]$.

При $t > (n-1)h$ ввиду результатов [5] будем иметь $\det(pE - A - \sum\limits_{i=1}^{m} A_i e^{-ph_i})y(t) = 0$, тогда выход системы Σ, порождаемый начальной функцией (23), будет нулевым при всех $t \geq 0$. Однако данная функция выбрана так, что уравнению (21) она не удовлетворяет, что противоречит c-идентифицируемости системы Σ. Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем конечномерность подпространства P^0.

Если выполнено условие (20), то найдется полином $\Delta_0(p) \neq 0$ такой, что при достаточно большом t_0 всякое решение уравнения $K_n(p)X(s) = 0$, $s \in [t_0 - \omega, t_0]$, будет удовлетворять уравнению $\Delta_0(p)K^n(p)X(s) = 0$, $s \in [t_0 - \omega, t_0]$. В силу формулы (16) $(i = n)$ это будет означать, что $y = 0 \Rightarrow \Delta_0(p)\Delta^{\alpha}(p)x_t(\tau) = 0$, $t \geq t_1 = t_0 + nh$, $\tau \in H$. Отсюда следует, что $\dim P^0 < +\infty$.

Непрерывность оператора $L^0_{t_1}$: $\exists k_1 > 0 \Rightarrow \|L^0_{t_1}y\|_F = \|x^0_{t_1}\|_F \leq k_1\|y\|_{L_2}$ $\forall y \in Y$ при достаточно большом t_1 $(t_1 \geq 2n(\alpha+1)h)$ установлена в работах [11, 12]. Теорема доказана.

Сопровождающий дифференциальный оператор. Идентификация текущих состояний. Считаем, что система c-идентифицируема, в этом случае выполнено условие (20). Значит, найдутся скалярный полином $\Delta_0(\lambda)$ степени α_0 и матричные полиномы $G_i(\lambda)$, $i = \overline{0, n-1}$, такие, что

$$\Delta_0(\lambda)K^n(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} G_i(\lambda)\bar{G}K^i(\lambda). \tag{26}$$

В качестве полинома $\Delta_0(\lambda)$ можно взять базисный минор матрицы $K_n(\lambda)$, его степень $\alpha_0 \leq \alpha(n-1)$.

В силу формулы (16) $(i = n)$ будем иметь $\Delta_0(p)R^n(p)X(s+nh) = \Delta_0(p)K^n(p)X(s)$, $s \in [t_0 - \omega, t_0]$. С учетом равенства (26) получим $\Delta_0(p)R^n(p)X(s+nh) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} G_i(p)\bar{G}K^i(p)X(s)$, $s \in [t_0 - \omega, t_0]$. Заменяя $\bar{G}K^i(p)X(s)$ по формуле (17), приходим к соотношению

$$\Delta_0(p)R^n(p)X(s+nh) = \sum_{i=0}^{n-1} G_i(p)R^i(p)Y(s+ih), s \in [t_0 - \omega, t_0], \tag{27}$$

где момент t_0 предполагается достаточно большим, обеспечивающим наличие требуемых производных: $t_0 \geq (\alpha_0 + (\alpha - 1)n)h$.

Равенство (27) связывает текущее состояние x_{t_1}, $t_1 = t_0 + nh$, с прошлым выходом $y(t)$, $t \in [t_0 - h, t_0 + (n-1)h]$, посредством скалярного дифференциального оператора $d(p) = \Delta_0(p)\Delta^{\alpha}(p)$, поскольку $R^n(p)X(s+nh) = \Delta^{\alpha}(p)X(s+nh)$.

Определение 3. Оператор $d(p)$ назовем сопровождающим дифференциальным оператором системы Σ. Часть спектра Λ системы Σ: $\tilde{\Lambda} = \{\lambda \in \Lambda \mid \Delta_0(\lambda)\Delta(\lambda) = 0\}$ назовем основным спектральным набором.

Теорема 2. *Если система Σ c-идентифицируема, то класс текущих состояний $\{x_{t_1}\}_{y^1}$, $t_1 = t_0 + nh$, совместимых с выходом $y^1 = (y(t),\ t \in [t_0 - h, t_1])$, при достаточно большом t_0 совпадает со множеством решений граничной задачи*

1) $\bar{G}X(s+nh) = Y(s+nh)$, $\Delta_0(p)R^n(p)X(s+nh) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} G_i(p)R^i(p)Y(s+ih)$, $s \in [t_0 - \omega, t_0]$; (28)

2) $\delta x^{(j)}_{t_1}(-i\omega) = 0$, $j = \overline{0,\nu}$, $i = \overline{1, m-1}$, $x^{(j+1)}_{t_1}(0) = Ax^{(j)}_{t_1}(0) + \sum\limits_{i=1}^{m} A_i x^{(j)}_{t_1}(-i\omega)$, $j = \overline{0, \nu-1}$, $\nu = \alpha_0 + \alpha n$. (29)

Доказательство. Необходимость. Докажем, что каждое состояние x_{t_1}, совместимое с выходом y^1, удовлетворяет задаче (28), (29).

Равенства (28) обоснованы в данном пункте, а граничные условия (29) следуют из того, что гладкость решения уравнения (1) с возрастанием t повышается [16].

Достаточность. Покажем, что общее решение однородной задачи (28), (29) $(Y=0)$

$$\bar{G}X(s+nh)=0, \quad \Delta_0(p)R^n(p)X(s+nh)=0, \quad s\in[t_0-\omega,t_0]; \quad \delta x_{t_1}^{(j)}(-i\omega)=0, \quad j=\overline{0,\nu},$$

$$i=\overline{1,m-1}, \quad x_{t_1}^{(j+1)}(0)=Ax_{t_1}^{(j)}(0)+\sum_{i=1}^{m}A_ix_{t_1}^{(j)}(-i\omega), \quad j=\overline{0,\nu-1}, \quad \nu=\alpha_0+\alpha n, \tag{30}$$

совпадает с подпространством неидентифицируемых состояний P^0.

Действительно, в силу леммы 3 решение граничной задачи (30) x_{t_1} принадлежит обобщенному собственному пространству уравнения (1), связанному с основным спектральным набором $\tilde{\Lambda}$. Из условия $\bar{G}X(s+nh)=0$, $s\in[t_0-\omega,t_0]$, получаем, что функция $x_{t_1}\in P^0$.

С другой стороны, любая функция $\varphi\in P^0$ достижима системой Σ из начальной функции $S^{-1}(t_1)\varphi$, где $S(t)$ — оператор сдвига уравнения (1), обратимый [2] на подпространстве P^0, и совместима с нулевым выходом. Поэтому функция $\varphi\in P^0$ удовлетворяет однородной задаче (30) (см. доказательство необходимости).

Каждое решение граничной задачи (28), (29) представимо [15] в виде суммы какого-либо частного решения неоднородной задачи (28), (29) и общего решения однородной задачи (30). В качестве первого слагаемого возьмем одно из текущих состояний $x_{t_1,\eta}$, совместимых с выходом y^1, порождаемое начальной функцией η. Тогда произвольное решение x_{t_1} задачи (28), (29) будет иметь вид $x_{t_1}=x_{t_1,\eta}+\varphi$, $\varphi\in P^0$. Состояние x_{t_1} достижимо системой Σ из начальной функции $\chi=\eta+\psi$, $\psi=S^{-1}(t_1)\varphi$, и порождает нулевой выход $Gx_{t_1}=Gx_{t_1,\eta}+Gx_{t_1,\psi}=0$, $t\geq 0$. Теорема доказана.

Пример. Запишем в явном виде восстанавливающую операцию для системы Σ с матрицами

$$A=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}, \quad A_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\end{bmatrix}, \quad G=[1,0,0]. \tag{31}$$

Прежде всего убедимся в выполнении критерия (20). Находим, что

$$D(\lambda)=D_0\lambda^2+D_1\lambda+D_2=E\lambda^2+A\lambda+A^2=\begin{bmatrix}\lambda^2&2\lambda&-2\\0&\lambda^2&-\lambda\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix},$$

$$K(\lambda)=D(\lambda)A_1=\begin{bmatrix}2\lambda&-4&0\\\lambda^2&-2\lambda&0\\0&2\lambda^2&0\end{bmatrix}, \quad K_n(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0&0\\2\lambda&-4&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \quad K^n(\lambda)=0.$$

Условие (20) имеет место, следовательно, система (31) c-идентифицируема.

Чтобы получить оператор $L_{t_1}^0:y\to\{x_{t_1}\}_y$, воспользуемся граничной задачей (28), (29). Дифференциальное соотношение (28) дает

$$\Delta^3(p)x_{t_1}(\tau)=0, \quad Gx_{t_1}(\tau)=y_{t_1}(\tau), \quad \tau\in H^-, \quad t_1\geq 9h. \tag{32}$$

Условия (29) должны выполняться при $\nu=9$. Решив эту граничную задачу, найдем явный вид оператора восстановления $L_{t_1}^0$.

Из первого уравнения системы (32) и граничных условий (29) следует, что $x(t)$, $t\geq(n-1)h$, — квазиполином. Это результат того, что система (31) имеет конечный спектр Λ:

$$\det W(\lambda)=\lambda^3-2\lambda\mu+2\lambda\mu=\lambda^3=0. \tag{33}$$

Отсюда $\lambda = 0$ — единственный корень характеристического уравнения (33) кратности 3. Поэтому $\tilde{\Lambda} = \{0\}$ и

$$x_{t_1}(\tau) = v(\tau) = v_2\tau^2 + v_1\tau + v_0, \quad \tau \in H^-, \quad t_1 \geq 2h. \tag{34}$$

Пусть $v_0 = \mathrm{col}[v_0^1, v_0^2, v_0^3]$, $v_1 = \mathrm{col}[v_1^1, v_1^2, v_1^3]$, $v_2 = \mathrm{col}[v_2^1, v_2^2, v_2^3]$. Выразим векторы v_0, v_1, v_2 через $y(t)$, $t \in T$, используя (34) и граничные условия (29).

Из системы (31) имеем

$$v^1(0) = v_0^1 = y(t_1), \quad \dot{v}^1(0) = v_1^1 = \dot{y}(t_1), \quad \ddot{v}^1(0) = 2v_2^1 = \ddot{y}(t_1). \tag{35}$$

Поскольку $v^{(3)}(0) = Av^{(2)}(0) + A_1v^{(2)}(-h)$, то $(A + A_1)v_2 = 0$. Отсюда

$$v_2 = \mathrm{col}[\ddot{y}(t_1)/2, 0, \ddot{y}(t_1)/2].$$

Аналогично из равенств и граничных условий (29) при $i = 1$, $i = 0$ находим $v_1 = \mathrm{col}[\dot{y}(t_1), \ddot{y}(t_1)/2, \dot{y}(t_1) - h\ddot{y}(t_1)]$, $v_0 = \mathrm{col}[y(t_1), \dot{y}(t_1)/2, y(t_1) - h\dot{y}(t_1) + (h^2 - 1)\ddot{y}(t_1)/2]$.

В данном случае оператор $L_{t_1}^0$ оказался однозначным и в нефакторизованном пространстве состояний C. Это результат того, что выполнено условие идентифицируемости (8)

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} G \\ W(\lambda) \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & -2 & 0 \\ -\mu & \lambda & 1 \\ 0 & -2\mu & \lambda \end{bmatrix} = 3 \quad \forall\lambda \in K, \quad \mu = e^{-\lambda h}.$$

Замечание 1. Отметим, что, несмотря на наличие условия (8), $\mathrm{rank}K_n(\lambda) < 3$ $\forall\lambda \in K$.

Замечание 2. Ввиду формулы (34) выход $y(t)$, $t > 2h$, — полином ($\deg y \leq 2$), поэтому вычисление производных $\dot{y}(t_1)$, $\ddot{y}(t_1)$ для идентификации текущего состояния x_{t_1}, $t_1 \geq 3h$, не вызывает проблем.

Литература

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
3. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., 1975.
4. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., 1971.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.
6. *Красовский Н. Н., Куржанский А. Б.* // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 3. С. 299 — 308.
7. *Метельский А. В.* // IV Республиканская конференция математиков Белоруссии "Проблемы развития прикладных математических исследований": Тез. докл. Ч. 1. Минск, 1975. С. 48.
8. *Метельский А. В., Минюк С. А.* // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 4. С. 624 — 633.
9. *Шкляр Б. Ш.* //Problems of Control and Information Theory. 1980. Vol. 9, N 6. P. 417 — 428.
10. *Марченко В. М.* // Проблемы оптимального управления. Минск, 1981. С. 124 — 147.
11. *Водичев А. В.* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 2. С. 217 — 227.
12. *Метельский А. В.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 11. С. 1962 — 1969.
13. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М., 1977.
14. *Емельянов С. В., Коровин С. К., Мамедов И. Г., Носов А. П.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 3. С. 415 — 427.
15. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М., 1971.
16. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
17. *Лузин Н. Н.* // Автоматика и телемеханика. 1940. № 5. С. 3 — 66.

Белорусская государственная политехническая академия

Поступила в редакцию 12 мая 1993 г.