

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Минск 2014

29

ISSN 0134-9635

Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

**Международный
научно-технический сборник**

Основан в 1975 году

Выпуск 29

**Минск
БНТУ
2014**

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43
Т 33

Редакция сборника

Президиум редакции:

С.А. Чижик, П.А. Витязь, Л.Г. Красневский,
Ю.М. Плескачевский, Б.М. Хрусталеv,
Ф.И. Пантелеенко

Международный совет редакции:

Ј. Awrejcewicz (Польша), Г.Я. Беляев (Беларусь), Ј. Grabski (Польша),
G. Gudehus (Германия), В.В. Лобода (Украина), Н.Ф. Морозов (Россия),
Ж.А. Мрочек (Беларусь), Н.К. Мышкин (Беларусь), Ф.А. Романюк (Беларусь),
К. Циммерман (Германия), А.И. Шашкин (Россия), Г.П. Черепанов (США),
Ю.В. Немировский (Россия), А.М. Якимович (Беларусь)

Редакционная коллегия:

Ю.В. Василевич (зам. председателя), В.С. Вихренко,
И.С. Куликов, М.А. Журавков, М.Г. Ботогова, А.Т. Скойбеда,
А.В. Чигарев (председатель, главный редактор), А.М. Якимович,
П.И. Ширвель (уч. секретарь, технический редактор),
А.В. Глембоцкий (компьютерная верстка)

Теоретическая и прикладная механика: А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, М.А. Журавков
Механика материалов и структур: Ю.В. Василевич, М.И. Кулак, Н.В. Спиридонов
Мехатроника и интеллектуальные системы: В.М. Колешко, Л.Г. Красневский
Механика машин: Ю.М. Плескачевский, В.Б. Альгин, А.Т. Скойбеда, В.К. Шелег
Приборы точной механики: С.А. Чижик, И.Е. Зуйков, М.Г. Киселев, В.Л. Соломахо
Механика конструкций: А.Н. Борисевич, С.В. Босаков, Т.М. Пецольд, Э.И. Старовойтов

Адрес редакции:

220013 Минск, проспект Независимости, 65
БНТУ, кафедра «Теоретическая механика»
Тел.: (+375 17) 292 74 25, 292 22 63, 299 92 52
E-mail: seminar.mechatronics@gmail.com

В сборнике печатаются оригинальные научные результаты по механике, компьютерному моделированию, мехатронике и смежным вопросам, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. В сборнике содержатся научные и научно-методические работы преподавателей, научных сотрудников вузов и исследовательских учреждений. Включены также материалы, обсуждавшиеся на XLV международном семинаре-коллоквиуме «Моделирование и компьютеринг в механических и мехатронных системах» и на Республиканском научно-методическом семинаре «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании», которые прошли рецензирование редколлегией или были рекомендованы оргкомитетом семинара.

Тематика статей сборника охватывает широкий круг вопросов: общая механика, МДТТ, механика жидкости и газа, мехатроника, био- и наномеханика, математическое и компьютерное моделирование физических и технических процессов, дифференциальные уравнения и их приложения в механике, дизайн-конструирование мехатронных систем. Рассматриваются различные подходы к внедрению информационных технологий в преподавании курсов «Теоретическая механика», «Механика материалов», «Механика предельного состояния», «Механика деформируемых тел», «Теория механизмов и машин» и др. Излагаются новые точки зрения на преподавание этих курсов.

Сборник будет полезен для преподавателей высших учебных заведений, научно-инженерных работников, аспирантов, магистрантов и студентов старших курсов технических вузов.

УДК [531+621.01:531.8](082)
ББК 22.21я43
30.12я43
© БНТУ, 2014

Юрий Михайлович Плескачевский

(к 70-летию со дня рождения)

22 октября 2013г. исполнилось 70 лет известному ученому в области механики материалов и конструкций, члену-корреспонденту НАН Беларуси, заслуженному деятелю науки Беларуси, заве-

дующему кафедрой «Микро-наномеханика» БНТУ Юрию Михайловичу Плескачевскому. Его деятельность на постах: ученый секретарь Института металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси (с 1972г.), заместитель директора Института (1979-1989гг.), заведующий отделом (с 1989г.), директор Института (1991-2002гг.), вице-президент НАН Беларуси и одновременно академик-секретарь отделения физико-технических наук (2002-2003 гг.), председатель ГКНТ Республики Беларусь (2003-2005гг.), была продуктивной и снискала ему глубокое уважение.

Ю.М. Плескачевский родился в 1943г. в Казахстане (с. Садовое, Целиноградский р-н, Акмолинская обл.), высшее образование получил на Украине, с отличием окончив Киевский политехнический инсти-

тут, а его становление как ученого состоялось на белорусской земле, начавшись в 1966г. в гомельском институте механики металлополимерных систем под научным руководством академика В.А. Белого. В настоящее время Ю.М. Плескачевский является крупным ученым в области механики и технологии металлополимерных систем. Доктор технических наук (1984г.), профессор (1997г.), член-корреспондент НАН Беларуси (1991г.), Заслуженный деятель науки Республики Беларусь (2013г.).

Юрий Михайлович возглавляет научную школу, в которой под его непосредственным руководством подготовлено более 6 докторов и 12 кандидатов, 14 монографий, более 100 изобретений, автор около 500 научных трудов и др.

Он основатель и главный редактор журнала «Материалы. Технологии. Инструменты», заместитель главного редактора журнала «Механика машин, механизмов и материалов», член редколлегии журналов «Доклады НАН Беларуси», «Известия НАН Беларуси», «Механика композитных материалов», «Российский журнал биомеханика», «Теоретическая и прикладная механика» и др.

Научные и общественные заслуги Ю.М. Плескачевского отмечены премиями НАН Беларуси (2007г.), Ленинского комсомола (1973г.), ВЦСПС (1983г.), орденами «Знак почета» (1979г.), «Отечества III степени» (2002г.), нагрудным знаком «Заслуженный деятель науки» (2013 г.) и др.

Коллеги, друзья, ученики сердечно поздравляют Юрия Михайловича с юбилеем, искренне желают ему здоровья, новых идей и творческих достижений во всех областях его разносторонней деятельности.



Редакция ТПМ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МИКРОКОМПОЗИТНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ

Член-корр. НАН Беларуси ¹ Плескачевский Ю. М., асп. ² Чigareва Ю.А.

¹ Гомельский филиал НАН Беларуси

² Белорусский национальный технический университет, Минск

Проектирование и создание твэлов на основе керметов должно удовлетворять требованиям повышения ураноемкости (например, диоксида урана) без образования кластеров ураносодержащего компонента. Эффективная теплопроводность твэла влияет на степень выгорания урана, и зависит от характера его структуры и температуры. Как известно, с ростом температуры теплопроводность твэла уменьшается, что ведет к снижению коэффициента эффективного выгорания топлива. Повышение степени выгорания напрямую зависит от размера гранул топлива и с керметными нанокompозитами связывается будущее эффективное использование твэлов.

Как известно, аналитические методы, из которых наиболее точными являются варианты самосогласованного поля дают хорошее совпадение с экспериментом для композитов в случае, когда концентрация наполнителя меньше по величине концентрации порога перколяции [1, 2]. Модели перколяции по связям и узлам [1, 2] позволяют оценить зависимость эффективной проводимости (сопротивления) и вероятности протекания от концентрации вблизи порога перколяции [1, 2]. Интерес к развитию методов прогнозирования свойств микронанокерметов вблизи порога протекания для композитов разного функционального назначения обусловлен теоретическим и практическим значением применения более точных моделей в этой области [1, 2]. Расчет эффективной теплопроводности на основе самосогласованного метода дает оценку для концентрации порога перколяции порядка 63 %, требования же к современным твэлам, по ураносодержанию порядка 75% и более. Эффективным способом увеличения пороговой концентрации перколяции для ураносодержащего компонента является создание ячеистой структуры такой, что каждое зерно топлива заключено в тонкую оболочку второго компонента (например, силумина) [3, 4].

В работе предлагается новый подход к аналитическому моделированию вычисления эффективной теплопроводности на основе уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) в сочетании с методом самосогласованного поля.

Самосогласованный метод дает хорошее совпадение теоретически и экспериментальных данных для концентраций наполнителя не более 50%, далее зависимость эффективной теплопроводности от концентрации имеет нелинейный характер. Фактический разброс эффективных свойств компонентов от серии к серии реализации позволяет применить метод рандомизации эффективной теплопроводности как функции концентрации. Случайный характер изменения эффективной теплопроводности на множестве реализаций дает возможность использовать вероятностные методы [5–7]. Плотность вероятности эффективной теплопроводности удовлетворяет уравнению ФПК, в котором учитывается взаимодействие двух факторов, влияющих на формирование эффективных свойств композита.

На основе уравнения ФПК могут быть решены задачи о вычислении вероятности перколяции и оценки порога перколяции как средней концентрации наполнителя. Предлагаемый метод, для аморфных композитов, позволяет исследовать вопрос о поведении эффективной теплопроводности вблизи порога перколяции. В случае поликристаллической среды, образуемой кристаллитами с разной теплопроводностью граней, решена задача о вычислении эффективной теплопроводности поликристаллического композита. В этом случае эффективная теплопроводность зависит от параметра анизотропии [8]. Отметим также, что модель микронеоднородной среды, используемая в работе применима и для нанокompозитов, т.к. масштабный фактор необходимо учитывать только в задачах, с нелокальным взаимодействием.

1. Приближение эффективной среды.

Процессы распространения тепла в неоднородной анизотропной среде с регулируемыми свойствами описываются уравнением теплопроводности вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla_j (\lambda_{ij}(\bar{x}, t, T) \nabla_i T) \quad (1.1)$$

где $T = T(\bar{x}, t)$ – температура, $\lambda_{ij} = (\bar{x}, t, T)$ коэффициенты теплопроводности, зависящие от пространственных координат, времени, температуры.

Представим $T = (x, t)$ в виде суммы стационарного распределения температуры T_S и нестационарного T_{nS} ,

$$T = (x, t) = T_S(\bar{x}) + T_{nS}(\bar{x}, t)$$

Положим, что температура на интервале времени $0 \leq t \leq t_\lambda \in T_\lambda$ подчиняется стационарному распределению и удовлетворяет уравнению

$$\nabla_j (\lambda_{ij}(\bar{x}) \nabla_i T_S) = 0 \quad (1.2)$$

где λ_{ij} зависят только от пространственных координат.

Для уравнений (1.1), (1.2) как обычно, ставятся соответствующие начальные и граничные условия, которые конкретизируются при решении соответствующих задач. Тензор $\lambda_{ij}(\bar{x})$ характеризует среду со случайно или детерминировано распределенной микроструктурой. Естественными условиями применимости усредняющих процедур к уравнениям (1.1), (1.2) являются предположения о том, что масштабы временной и пространственной изменчивости полевых величин λ_{ij} меньше масштабов пространственно-временного объема задачи $V \times T$. Для уравнения (1.2) это означает, что масштаб микроструктуры значительно меньше масштаба объема тела V . Положим, что поле $\lambda_{ij}(x)$ статистически изотропно и однородно, его математическое ожидание $\langle \lambda_{ij} \rangle = \lambda_0 \delta_{ij}$ является шаровым тензором, что механически означает квазиизотропность и квазиоднородность рассматриваемой среды.

Для статистически изотропного однородного поля $\lambda_{ij}(x)$ имеют место соотношения

$$\langle \lambda_{ij}(\bar{r}) \rangle = const, \quad \langle \lambda'_{ij}(\bar{r}) \lambda'_{kl}(\bar{r} + \bar{\rho}) \rangle = R_{ijkl}(|\bar{\rho}|), \quad \lambda'_{ij} = \lambda_{ij} - \langle \lambda_{ij} \rangle$$

где $R_{ijkl}(|\bar{\rho}|)$ – корреляционный тензор, угловые скобки, как всегда, означают осреднение по вероятности.

Рассмотрим однородный изотропный вспомогательный объем, для которого $\lambda_{ij}^0 = \lambda_0 \delta_{ij}$ с той же геометрией и при тех же граничных условиях, что и данный неоднородный, и в частности, обеспечивающие постоянный градиент температуры $\nabla_j T$.

Записывая для вспомогательной среды с $\lambda_0 \delta_{ij}$ уравнение (1.2) и используя функцию Грина уравнения теплопроводности однородной изотропной среды $G_{ik}(\bar{r} - \bar{r}_1)$ перейдем от уравнения (1.2) к эквивалентному интегральному уравнению

$$T_{,k} = T_{,k}^0 + \int G_{,ik}(r - r_0) \lambda'_{ij} T_{,j}(r_1) dr_1, \quad \lambda'_{ij} = \lambda_{ij} - \lambda_0 \delta_{ij} \quad (1.3)$$

Переход от (1.2) к (1.3) позволяет расширить диапазон микро структур от непрерывно дифференцируемых в уравнении (1.2) до разрывных (свойства меняются скачком).

Решение уравнения (1.3) находится методом последовательных приближений и представляется в виде ряда по степеням λ'_{ij} , причем реально, как правило, приходится ограничиваться корреляционным приближением, обрывая ряд на втором члене, что накладывает ограничения на величину флуктуации тензора теплопроводности λ_{ij} , ограничивая класс рассматриваемых сред слабо-неоднородными.

Разработаны различные методы перенормировки, позволяющие проводить частичные суммирования ряда, являющегося решением (1.3) по типу фейнмановских диаграмм [1,2].

Рассмотрим метод, основанный на замене полевых величин и представлении тензора вторых производных тензора Грина в виде суммы сингулярной [3]

$$G_{,ik}^{(S)}(\bar{r} - \bar{r}_1) = -\frac{1}{3\lambda_0} \delta_{ik} \delta(\bar{r} - \bar{r}_1) \quad (1.4)$$

к регулярной частей

$$G_{,ik}^{(R)}(\bar{r} - \bar{r}_1) = G_{,ik} - G_{,ik}^{(S)}(\bar{r} - \bar{r}_1) \quad (1.5)$$

где $\delta(|\bar{r} - \bar{r}_1|)$ - функция Дирака.

Подставляя (1.5) в (1.3) и обозначая

$$\Theta_k = B_{k\ell} T_{,\ell}, \quad B_{k\ell} = \delta_{k\ell} + \frac{1}{3\lambda_0} \lambda'_{k\ell}, \quad \gamma_{ij} = \lambda'_{im} B_{mj}^{-1} \quad (1.6)$$

получим вместо уравнения (1.3) уравнение

$$\Theta_k = T_{,k}^0 + \int G_{,ik}^{(R)}(\bar{r} - \bar{r}_1) \gamma_{ij}(\bar{r}_1) \Theta_j(\bar{r}_1) d\bar{r}_1 \quad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) так же может быть найдено методом последовательных приближений и представлено в виде ряда по степеням γ_{ij} . Однако ограничиваясь и в этом случае корреляционным приближением по $\gamma_{ij}(\bar{r})$, т.е. двумя членами ряда получим приближение, содержащее статистическую информацию о структуре среды, заключенную во всех ее двухточечных моментах $\lambda_{ij}(\bar{r})$, так как на основании (1.6) одно, двухточечные моменты поля $\gamma_{ij}(x)$ выражаются через ряды всех двухточечных моментов поля λ_{ij} . Тем самым расширяется диапазон возможных флуктуаций неоднородности исходного поля λ_{ij} вплоть до сильно неоднородных сред.

Итерационный алгоритм решения уравнения (1.7) представим в виде

$$\Theta_k = (\delta_{k\ell} + A_{k\ell}) \Theta_\ell^0 \quad (1.8)$$

где $A_{k\ell}$ находится как решение интегрального уравнения методом итераций

$$A_{k\ell} = \int f_{,km}^{(R)}(\bar{r}_1) [\gamma_{mp}(\bar{r} + \bar{r}_1) A_{p\ell}(\bar{r} + \bar{r}_1) + \gamma_{m\ell}(\bar{r} + \bar{r}_1)] d\bar{r}_1 \quad (1.9)$$

Ряд по степеням γ_{ij} , получаемый на основе уравнений (1.8), (1.9) имеет наилучшую сходимость при условии центрированности поля $\gamma_{ij}(r)$

$$\langle \gamma_{ij} \rangle = 0 \quad (1.10)$$

условие (1.10) совместно с условиями (1.6) дают уравнение для нахождения коэффициента теплопроводности вспомогательной среды λ_0 через одноточечные моменты поля $\lambda_{ij}(\bar{r})$.

Рассмотрим вопрос об определении эффективного коэффициента теплопроводности λ_* , предполагая, что поле $\lambda_{ij}(\bar{r})$ является статистически однородным изотропным так, что

$$\langle \lambda_{ij}(\bar{r}) T_{,j} \rangle = \lambda_* \langle T_{,j} \rangle \quad (1.11)$$

где λ_* представляет собой в общем случае интегральный оператор.

Из (1.8), (1.6) следует

$$T_m = B_{mk}^{-1} (\delta_{k\ell} + A_{k\ell}) T_{,\ell}^0 \quad (1.12)$$

Умножая (1.6) на γ_{jk} и применяя операцию осреднения с учетом (1.10), получим

$$\langle \gamma_{jk} \Theta_k \rangle = \langle D_{j\ell} \rangle T_{,\ell}^0 \quad (1.13)$$

где оператор $D_{j\ell}$ находится по методу итераций как решение интегрального уравнения

$$D_{j\ell} = \gamma_{jk} \int G_{,km}^{(R)}(\bar{r}_1) [D_{m\ell}(\bar{r} + \bar{r}_1) + \gamma_{m\ell}(\bar{r} + \bar{r}_1)] d\bar{r}_1 \quad (1.14)$$

Из (1.14) следует, что $D_{j\ell}(\bar{r})$ представляется в виде ряда по степеням $\gamma_{ij}(r)$, причем уже осреднённый первый член зависит от корреляционного тензора $\langle \gamma_{jk}^{(\bar{r})} \gamma_{m\ell}(\bar{r} + \bar{r}_1) \rangle = \Gamma_{jkm\ell}(\bar{r}_1, \bar{r} + \bar{r}_1)$, который даже в изотропном случае зависит от δ_{ij} – Кронекера и единичного вектора \bar{n} , следствием чего является учет пространственной дисперсии (нелокальности) рассматриваемого неоднородного континуума. Аналогично из (1.9) следует, что его решение $A_{j\ell}(\bar{r})$ представляется также в виде ряда по степеням $\gamma_{ij}(\bar{r})$ и первый член ряда в силу условия (1.10) в свою очередь зависит от корреляционного тензора $\Gamma_{jkm\ell}(\bar{r}_1, \bar{r} + \bar{r}_1)$.

Вследствие вышеуказанного, λ_* будет представлять собой интегральный оператор с разностным ядром, зависящим от функции Грина и моментов поля $\lambda_{ij}(\bar{r})$ или выражающихся через них моментов поля $\gamma_{ij}(\bar{r})$.

Таким образом, эффективная среда представляет собой квазиконтинуум с пространственной дисперсией. Рассмотрим, приближение, не учитывающее нелокальность, полагая, что статистически среда является сильно изотропной и можно пренебречь зависимостью $\Gamma_{ijk\ell}(\vec{n})$ от единичного вектора \vec{n} . В результате находим, что

$$\langle A_{jk} \rangle = 0, \langle D_{jk} \rangle = 0 \quad (1.15)$$

Представляя (1.15) в соотношение

$$\langle D_{jk} \rangle = (\lambda_* - \lambda_0) \left(\delta_{jk} + \langle A_{jk} \rangle - \frac{1}{3\lambda_0} \langle D_{jk} \rangle \right) \quad (1.16)$$

получаемое на основе уравнений (1.9) – (1.14), найдем, что в случае сильной изотропии вспомогательная и эффективная среды идентичны, т.е.

$$\lambda_* = \lambda_0, T_{,j}^* = T_{,j}^0 \quad (1.17)$$

В случае, если среда не является сильно изотропной, то уравнение (1.16) позволяет построить итерационный алгоритм вычисления оператора λ_* из уравнения

$$\lambda_* = \lambda_0 + \langle D_{jk} \rangle (\delta_{jk} + \langle A_{jk} \rangle - \langle D_{jk} \rangle (3\lambda_0)^{-1}). \quad (1.18)$$

Отметим, что условие самосогласованного поля [] приводит к уравнению

$$\langle B_{jk}^{-1} \rangle = \delta_{jk} \quad (1.19)$$

Сравнение расчетов λ_* из условий (1.10), (1.19) показывает, что они эквивалентны. Таким образом, условие сильной изотропии, как и условие самосогласования, позволяют получать выражения для эффективной теплопроводности в пренебрежении учета пространственной дисперсией, которая как правило обуславливает тонкие эффекты более высоких порядков.

2. Перколяция в поликристаллических материалах.

Рассмотрим поликристалл кубической симметрии. В общем случае коэффициенты теплопроводности через грани кристаллита различные и равны μ_1, μ_2, μ_3 . Случайный характер распределения теплопроводности в поликристалле обусловлен разориентацией кристаллографических осей кристаллитов.

Представим в общем случае тензор теплопроводности λ_{jk} в виде

$$\lambda_{jk} = C_{j\alpha} C_{k\beta} \mu_{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

где $\mu_{\alpha\beta}$ – тензор коэффициентов теплопроводности в кристаллографических осях, $C_{j\alpha}$ – матрица направляющих косинусов кристаллографических осей, меняющаяся от кристаллита к кристаллиту случайным образом. В случае если углы кристаллографических осей имеют равномерное распределение в интервале $[0, 2\pi]$, то есть все кристаллографические направления статистически равновероятны и все кристаллиты имеют одинаковый химический состав, то получим

$$B_{jk} = \frac{1}{3\lambda_*} (2\lambda_* \delta_{jk} + C_{j\alpha} C_{k\beta} \mu_{\alpha\beta}) \quad (2.2)$$

Находя B_{jk}^{-1} и усредняя полученное выражение с учетом сделанных выше предположений, получим

$$4\lambda_*^3 - \lambda_* (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3) - \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0 \quad (2.3)$$

где μ_α ($\alpha = 1, 2, 3$) – главные значения тензора $\mu_{\alpha\beta}$, характеризующее коэффициенты теплопроводности кристаллита в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Для кристаллов с нормальной теплопроводностью кристаллитов – μ_1, μ_2, μ_3 неотрицательны.

Положим $\mu_1 = \mu_2$ и преобразуем (2.3) безразмерному виду

$$4\alpha^3 - \alpha(1 + 2v) - v = 0 \quad (2.4)$$

$$\alpha = \lambda_*/\mu_1, v = \mu_3/\mu_1$$

При $v = 0$, две грани кристаллита теплоизолированы, тогда из (2.4) получим

$$\alpha_1 = 0, \alpha_{2,3} = \pm \frac{1}{2} \quad (2.5)$$

Это означает, что в поликристалле возможны две ситуации: 1. теплоизолированные грани распределились так, что весь поликристалл является теплоизолятором. 2. случаю $\alpha_2 = 1/2$ соответствует такое распределение теплопроводящих и теплоизолирующих граней, что тепло распространяется через поликристалл как через кристалл в направлениях 1 и 2. Эффекты можно рассматривать как явления перколяции и заперания.

В случае плоских кристаллитов модель поликристалла можно представить как структуру, изображенную на рис. 1, $T_1 \rangle T_2$.

Теплоизоляция поликристалла может произойти, если возникнет ситуация, когда в каком-либо ряду параллельном оси y все кристаллиты контактируют теплопроводящими гранями параллельными оси x . Тогда теплоизолирующие грани образуют по крайней мере одну пару прямых линий $1-1'$. В случае $\alpha = 1/2$ ситуация противоположна и по крайней мере одна пара теплоизолированных линий $2-2'$ кристаллитов выстраивается параллельно оси x . Однако возможны и другие расположения, т.е. более сложные конфигурации граней кристаллитов.

При $\nu = 1$, когда все три грани имеют одинаковые коэффициенты теплопроводности $\alpha = 1$. Таким образом, в зависимости от того, каким образом, ориентировать кристаллиты (квадраты) на рис. 1 можно получить два возможных значения теплопроводности в зависимости от того, какое брать начальное распределение кристаллитов. Если начальное распределение соответствует теплоизолированному поликристаллу, то меняя затем случайным образом ориентацию поликристаллов так, чтобы с ростом ν росло α , получим при $\nu = 1$, $\alpha = 1$.

Если же исходить из схемы расположения кристаллитов $2-2'$, то соответствующая зависимость $\alpha(\nu)$, дает изменение теплопроводности, растущей с ростом ν и при $\nu = 1$, $\alpha = 1$. Соответствующие зависимости изображены на рис. 2, где представлена зависимость $\alpha(\nu)$: 1. При $\alpha = 0$, при $\nu = 0$; 2. При $\alpha = 1/2$ при $\nu = 0$.

3. Перколяция в микрокомпозитных материалах.

Пусть изменение теплопроводности определяется одной функцией $\lambda(\bar{r})$

$$\lambda_{ij}(\bar{r}) = \lambda(\bar{r})\delta_{ij} \quad (3.1)$$

Тогда имеем

$$B_{ij}^{-1} = 3\lambda_*(2\lambda_* + \lambda(\bar{r}))^{-1}\delta_{ij} \quad (3.2)$$

Усредняя (3.2), получим уравнение

$$\langle (\lambda(\bar{r}) - \lambda_*)(2\lambda_* + \lambda(\bar{r}))^{-1} \rangle = 0 \quad (3.3)$$

Для вычисления (3.3) необходимо задать некоторое распределение случайной функции $\lambda(\bar{r})$.

Рассмотрим сначала случай двухкомпонентной композитной среды, теплопроводными свойствами которой можем варьировать в пределах $0 \leq \lambda_i \leq \infty$. В предельных случаях компоненты являются либо идеальными изоляторами $\lambda = 0$, либо идеальными проводниками $\lambda = \infty$. Для двухкомпонентного композита со значениями $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ плотность вероятностей $f(\lambda)$ имеет вид

$$f(\lambda) = C_1\delta(\lambda - \lambda_1) + C_2\delta(\lambda - \lambda_2), \quad C_1 + C_2 = 1 \quad (3.4)$$

Здесь $\delta(\lambda - \lambda_i)$ – функция Дирака ($i=1, 2$).

Усредняя (3.3) с функцией (3.4), получим, что коэффициент теплопроводности λ_* удовлетворяет уравнению

$$2\lambda_*^2 - \lambda_*[2\langle \lambda \rangle - (C_1\lambda_2 + C_2\lambda_1)] - \lambda_1\lambda_2 = 0 \quad (3.5)$$

Запишем уравнение (3.5) в безразмерном виде

$$2\alpha^2 - \alpha[2\langle \alpha \rangle - (C_1\alpha_2 + C_2)] - \alpha_2 = 0$$

$$\alpha = \lambda_*/\lambda_1, \quad \alpha_2 = \lambda_2/\lambda_1, \quad \alpha_1 = 1$$

Реальные композитные материалы не являются идеальными проводниками или изоляторами. Однако в случае перколяции они становятся такими. На рис. 3 изображены зависимости α от концентрации C_2 .

Зависимости 1 и 2 на рис. 3 соответствуют значениям $\alpha_2=0,5$ и $0,2$. Зависимость 3 указывает, что при $\alpha_2=0$ композит становится идеальным теплоизолятором, что соответствует концентрации изолятора (компонента с номером 2, $\lambda_2=0$) равной $2/3$. В случае, если $\lambda_2 \neq 0$, но $\lambda_1 \rightarrow \infty$, то $\lambda_2 \rightarrow \infty$ и композит становится идеальным проводником, а зависимость α от $C_1=1-C_2$ изображена на фиг. 3 кривой 4.

Отметим, что зависимости аналогичные изображениям на фиг. 3 отмечаются для электропроводности [1.2] и соответствуют результатам, полученным моделированием перколяции по коррелированным связям.

В сравнении с результатами самосогласованного поля [1,2] отмечается нелинейный характер зависимости вблизи порогового перколяционного значения концентрации. Эти зависимости получаются на основе моделей перколяции по узлам, по связям и применении методов статистического моделирования. Вероятность перколяции определяется как отношение объема теплоизоляторов к общему объему композита, т.е. в рассматриваемом случае величины C_2 , входящей в выражение для плотности вероятностей (3.4).

Плотность вероятностей (3.4) соответствует идеальной модели двухкомпонентного композита. В реальности плотности распределения вероятностей имеют более сложный вид и в процессе формирования композита изменяются в зависимости от концентрации компонентов.

Как следует из (3.5) $\lambda_* = \lambda_*(c)$ является функцией концентрации, причем на множестве реализаций одного и того же типа композита при фиксированном c функция $\lambda_* = \lambda_*(c)$ будет обладать случайным разбросом свойств, поэтому рандомизируем $\lambda_*(c)$, положив, что $\lambda_*(c)$ представляет собой случайную функцию марковского типа, что ее плотность вероятностей $f(\lambda_*, c)$ удовлетворяет уравнению сохранения вида [4]

$$\frac{\partial f(\lambda_*, c)}{\partial c} + \frac{\partial G(\lambda_*, c)}{\partial \lambda_*} = 0 \quad (3.6)$$

где $G(\lambda_*, c)$ в общем виде записывается в виде

$$G(\lambda_*, c) = A_1(\lambda_*, c)f(\lambda_*, c) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda_*} [A_2(\lambda_*, c)f(\lambda_*, c)] \quad (3.7)$$

Выражения для коэффициентов $A_1(\lambda_*, c)$, $A_2(\lambda_*, c)$ зависят от выбора моделей кластеризации и диффузии, описывающих процессы, идущие при формировании композита, следствием чего является разброс значений $\lambda_*(c)$.

Уравнения (3.6), (3.7) рассматриваются в области $\Lambda \times C: 0 \leq c \leq 1, 0 \leq \lambda_* \leq \lambda_1$. В качестве начального условия берется [4]

$$f(\lambda_*, 0) = \delta(\lambda_* - \lambda_1) \quad (3.8)$$

При возрастании c траектория функции $\lambda_*(c)$ совершает случайное блуждание в области $\Lambda \times C$. Концентрация c_p , при которой наступает перколяция: $\lambda_* = 0$, соответствует достижению точкой $M(\lambda_*, c)$ границы $\lambda_* = 0$ при $c = c_p$. В каждой точке области $\Lambda \times C$ условие $d\lambda_*/dc < 0$ является условием, что увеличение концентрации ведет к росту только одного перколяционного кластера при условии, что $|d\lambda_*/dc| < a_c$. В случае, если $|d\lambda_*/dc| < a_c$ функция $\lambda_*(c)$ убывает медленнее, за счет роста кластеров более низкого иерархического уровня, чем основной. Если предположить, что движение точки $M(\lambda_*, c)$ в области $\Lambda \times C$ представляет собой броуновское блуждание, то перколяция соответствует достижению границы $\lambda_* = 0$ точкой $M(\lambda_*, c)$ которая начинает движение из точки границы ($c = 0, \lambda_* = \lambda_1$) и подвергается действию двух факторов, описываемых функциями $A_1(\lambda_*, c)f(\lambda_*, c)$ – характеризует систематический конвекционный поток вероятности, формирующий кластер и направленный вдоль оси λ_* , $\frac{A_2}{2} \frac{\partial f(\lambda_*, c)}{\partial \lambda_*}$ характеризует диффузионный поток который направлен от большей концентрации компонента изолятора к меньшей.

Таким образом, $G(\lambda_*, c)$ характеризует полный поток плотности вероятности эффективной среды через произвольное сечение λ_* .

Как известно, между уравнениями сохранения для плотности вероятности типа (3.5) и стохастическими дифференциальными уравнениями существует соответствие такое, что уравнению (3.5) можно поставить в соответствие стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\lambda_*}{dc} + \psi(\lambda_*) = v(c) \quad (3.9)$$

где $v(c)$ нормальный белый шум, $(\langle v \rangle = 0, \langle v(c)v(c_1) \rangle = N_0 \delta(c - c_1))$, $\psi(\lambda_*)$ – кусочно-линейная функция.

Функция $\lambda_*(c)$ в этом случае – марковская, а коэффициенты сноса и диффузии имеют вид [4]

$$A_1(\lambda_*) = -\psi(\lambda_*), \quad A_2(\lambda_*) = b = N_0 / 2 \quad (3.10)$$

С учетом (3.10) поток вероятности в плоскости $(\Lambda \times C)$ имеет вид

$$G(\lambda_*, c) = -\psi(\lambda_*)\varphi(\lambda_*, c | \lambda_1, 0) - (N_0 / 4) \frac{\partial \varphi(\lambda_*, c | \lambda_1, 0)}{\partial \lambda_*} \quad (3.11)$$

Известно, что линейная зависимость $\lambda_*(c)$, даваемая самосогласованным решением на рис. 3 (прямая 3) хорошо описывает зависимость эффективной теплопроводности от концентрации композита изолятора c вдали от $c = c_p$ однако результаты моделирования вблизи концентрации c_p показывают, что здесь зависимость $\lambda_*(c)$ имеет нелинейный характер [1,2].

Исходя из вышесказанного функцию $\psi(\lambda_*)$ зададим в виде

$$\psi(\lambda_*) = \begin{cases} k & \text{при } \lambda_k < \lambda_* \leq \lambda_1 \\ \frac{\Psi_K}{\lambda_K} \lambda_* & \text{при } 0 \leq \lambda_* \leq \lambda_k \end{cases} \quad (3.12)$$

График функции $\psi(\lambda_*)$ представлен на рис. 4

При $\lambda_* = \lambda_k$ процесс $\lambda_*(c)$ непрерывный, что выражается в непрерывности плотности вероятности перехода и потока вероятности.

Рассмотрим сначала чисто детерминированное изменение $\lambda_*(c)$ согласно уравнению (3.9), в котором $v(c) = 0$.

Перейдем к безразмерной величине $\mu_* = \lambda_* \lambda_1^{-1}$ в уравнениях (3.9) – (3.12) и запишем решение уравнения (3.9) с учетом (3.12) в виде

$$\mu_*(c) = \begin{cases} 1 - \psi_k^{(1)} c & c_k \leq c \leq 1 \\ \mu_k c - \frac{\psi_k^{(1)}}{\mu_k} (c - c_k) & 0 \leq c \leq c_k \end{cases} \quad (3.13)$$

где $\psi_k^{(1)} = \psi_k \lambda_1^{-1}$, $\mu_k = \lambda_k \lambda_1^{-1}$.

На рис. 5 изображена зависимость $\mu_*(c)$, из которой следует, что ни при какой $0 \leq c \leq 1$, $\mu_*(c) \neq 0$, т.е. не существует концентрации, при которой наступит перколяция, описываемая детерминированным законом изменения (3.13). Это соответствует тому, что формируется не макрокластер, а множество микрокластеров, причем при $c = 1$, идеальный изолятор обладает теплопроводностью, что физически нереально.

Проверим возможность существования перколяции в случае влияния случайных факторов с помощью уравнения диффузии (3.6), (3.7) и стохастического дифференциального уравнения (3.9).

4. Моделирование перколяции как процесса достижения границы области $\Lambda \times c$.

Формирование структуры двухкомпонентного композита описываем как случайное блуждание точки $M(\lambda_*, c)$ в области $\Lambda \times C$ при условии, что точка $M(\lambda_*, c)$ при $c = 0$ находится в точке $M_0(\lambda_1, 0)$. Граница $\lambda_* = 0$ является поглощающей, а граница $\lambda_* = \lambda_1$ при $c > 0$ является недостижимой. Рассмотрим случайные события: A – точка M не достигает границы $\mu_* = 0$ при $0 < c < 1$, что соответствует процессу формирования кластера за счет агрегации и одновременно его деструкции за счет диффузии, B – точка M достигает границы $\mu_* = 0$ при некотором $0 < c = c_p < 1$,

что соответствует преобладанию механизма агрегатирования над диффузией, т.е. образованию кластера, имеющему контакты с границами тела.

Обозначим вероятность события A через $P(A) = Q$, вероятность события B через $P(B) = 1 - Q$. Тогда в области $\mu \times c \setminus \mu_* = 1$ имеем $P + Q = 1$. Введем плотность вероятностей

$$w(1, \mu_*, c) = q(1, \mu_*, c) + P(0, c)\delta(\mu_*) \quad (4.1)$$

где $q(1, \mu_*, c)$ связана с $Q(1, c)$ соотношением

$$Q(1, c) = \int_1^0 q(1, \mu_*, c) d\mu_* \quad (4.2)$$

Очевидно, имеют место соотношения

$$P(1, c_i) \langle P(1, c_{i+1}), P(0, c_i) \rangle \langle P(0, c_{i+1}) \quad (4.3)$$

$$\int_1^0 q(1, \mu_*, c_i) d\mu_* \langle \int_1^0 q(1, \mu_*, c_{i+1}) d\mu_*, c_{i+1} \rangle c_i \quad (4.4)$$

Таким образом, $q(1, \mu_*, c)$ представляет собой плотность вероятности того, что точка $M(\mu_*, c)$ не достигнет границы. Эта функция не является нормированной, но удовлетворяет уравнению (3.6) с начальным условием $\delta(1, 0) = \delta(1)$. Так как при δ – образных условиях уравнение для одномерного распределения совпадает с уравнением для условной вероятности перехода, то вместо $q(1, \mu_*, c)$ можно рассматривать ненормированную плотность вероятности перехода $p(\mu_*, c|1, 0)$, которая удовлетворяет уравнению типа (3.6) с граничными условиями

$$p(1, c|1, 0) = \delta(c), p(0, c|1, 0) = 0, \quad (4.5)$$

$$p(\mu_*, c|0, 0) = p(\mu_*, c|1, 0) = 0. \quad (4.6)$$

которые означают то, что плотности вероятности $p(\mu_*, c|1, 0)$, $p(\mu_*, c|0, 0)$ описывает реализации, не достигнувшие границ [4].

В дальнейшем будем использовать не только прямое уравнение ФПК (Фокера-Планка-Колмогорова), но и обратное, поэтому вместо $c = 0$ введем $c = c_0$, а вместо $\mu_* = \mu_0$. Это означает, что формирование композита начинается из состояния, когда в нем уже содержится теплоизолирующий компонент $\mu_* = 0$ с концентрацией $c = c_0$. Тогда

$$Q(\mu_{0*}, c) = Q(\mu_{0*}, c_0, c) = \int_{\mu_{0*}}^0 p(\mu_*, c/\mu_{0*}, c_0) d\mu_* \quad (4.7)$$

и функция $p(\mu_*, c/\mu_0, c_0)$ удовлетворяет обратному уравнению ФПК вида

$$-\frac{\partial p}{\partial c_0} = A_1(\mu_0, c_0) \frac{\partial p}{\partial \mu_0} + \frac{A_2(\mu_0, c_0)}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial \mu_0^2} \quad (4.8)$$

Аналогично [4] на основе уравнения (4.8) можно получить уравнения для $Q(\mu_{0*}, c)$, и $P(\mu_{0*}, c) = 1 - Q(\mu_{0*}, c)$ удовлетворяющих (4.7). Выпишем уравнения для $Q(\mu_{0*}, c)$, $P(\mu_{0*}, c)$ в явном виде для однородных функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial c} &= A_1(\mu_{0*}) \frac{\partial Q}{\partial \mu_0} + \frac{1}{2} A_2(\mu_0) \frac{\partial^2 Q}{\partial \mu_0^2} \\ \frac{\partial P(\mu_{0*}, c)}{\partial c} &= A_1(\mu_{0*}) \frac{\partial P}{\partial \mu_0} + \frac{1}{2} A_2(\mu_{0*}) \frac{\partial^2 P}{\partial \mu_0^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\text{Начальное условие для } P(\mu_0, c) \text{ имеет вид } P(\mu_0, 0) = 0, \quad (4.10)$$

Граничные условия запишем в виде

$$P(0, c) = 1, P(1, c) = 0 \quad (4.11)$$

Должно выполняться условие формирования идеального изолятора $\lim_{c \rightarrow 1} P(0, c) = 1$

Аналитическое решение уравнения для произвольных A_1, A_2 пока не получено, поэтому рассмотрим определение величины средней концентрации, при которой происходит перколяция.

Концентрация изолятора, при которой происходит перколяция согласно теории эффективной среды равна $2/3$. Однако, в модели перколяции ФПК она является случайной величиной $C = C(0, \mu_{0*})$, плотность вероятностей которой можно найти по формуле [4]

$$w(t) = \frac{\partial P(\mu_0, c)}{\partial c} = -\frac{\partial Q(\mu_0, c)}{\partial c} \quad (4.12)$$

Тогда среднее значение концентрации перколяции вычисляется по формуле

$$\langle c \rangle = \int_0^1 c \frac{\partial P(\mu_{0*}, c)}{\partial c} dc = -\int_0^1 c \frac{\partial Q(\mu_{0*}, c)}{\partial c} dc = \int_0^1 Q(\mu_{0*}, c) dc \quad (4.13)$$

Формула (4.13) получена с помощью интегрирования по частям и условия $Q(\mu_{0*}, 1) = 0$.

Проинтегрировав первое уравнение для $Q(\mu_{0*}, c)$ (4.9) по c от 0 до 1, получим с учетом $Q(\mu_{0*}, c_0) = 1$, $Q(\mu_{0*}, 1) = 0$

$$\frac{1}{2} A_2(\mu_{0*}) \frac{d^2 \langle c \rangle}{d\mu_{0*}^2} + A_1(\mu_{0*}) \frac{d \langle c \rangle}{d\mu_{0*}} + 1 = 0 \quad (4.14)$$

$$\langle c \rangle = 0 \text{ при } \mu_{0*} = 1, \langle c \rangle = 3/2 \text{ при } \mu_{0*} = 0 \quad (4.15)$$

Вводя $\tau = d \langle c \rangle / d\mu_{0*}$ уравнение (4.14) преобразуем к уравнению первого порядка

$$\frac{1}{2} A_2(\mu_{0*}) \frac{d\tau}{d\mu_{0*}} + A_1(\mu_{0*}) \tau + 1 = 0 \quad (4.16)$$

решение которого запишем в виде $\tau = e^{-\Psi(\mu_{0*})}(-)$

Проектировав первое уравнение для $Q(\mu_{0*}, c)$ (4.9) по c от 0 до 1, получим с учетом $Q(\mu_{0*}, c_0) = 1$, $Q(\mu_{0*}, 1) = 0$

$$\frac{1}{2} A_2(\mu_{0*}) \frac{d^2 \langle c \rangle}{d\mu_{0*}^2} + A_1(\mu_{0*}) \frac{d \langle c \rangle}{d\mu_{0*}} + 1 = 0 \quad (4.14)$$

$$\langle c \rangle = 0 \text{ при } \mu_{0*} = 1, \langle c \rangle = 3/2 \text{ при } \mu_{0*} = 0 \quad (4.15)$$

Вводя замену $\tau = d \langle c \rangle / d\mu_{0*}$ уравнение (4.14) преобразуем к уравнению первого порядка

$$\frac{1}{2} A_2(\mu_{0*}) \frac{d\tau}{d\mu_{0*}} + A_1(\mu_{0*}) \tau + 1 = 0 \quad (4.16)$$

решение которого запишем в виде

$$\tau = e^{-\Psi(\mu_{0*})} \left(-\int_0^{\mu_{0*}} \frac{2}{A_2(\mu_{0*})} e^{\Psi(\mu_{0*})} d\mu_{0*} + c_1 \right) \Psi(\mu_{0*}) = 2 \int \frac{A_1(\mu_{0*})}{A_2(\mu_{0*})} d\mu_{0*} \quad (4.17)$$

Интегрируя (4.17), получим

$$\langle c \rangle = \int_0^{\mu_{0*}} \left[\int_0^{v_{0*}} \frac{2}{A_2(z_{0*})} e^{\Psi(z_{0*})} dz_{0*} \right] e^{-\Psi(v_{0*})} dv_{0*} + c_1 \int_0^{\mu_{0*}} e^{-\Psi(v_{0*})} dv_{0*} + c_2 \quad (4.18)$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2 определяются из условий $\langle c \rangle = 0$ при $\mu_0^* = 1$, $\langle c \rangle = \frac{3}{2}$ при $\mu_0^* = 0$

$$0 \int_0^1 \left[-\int_0^{v_{0*}} \frac{2}{A_2(z_{0*})} e^{\Psi(z_{0*})} dz_{0*} \right] e^{-\Psi(v_{0*})} dv_{0*} + c_1 \int_0^1 e^{-\Psi(v_{0*})} dv_{0*} + c_2 \quad (4.19)$$

$$c_1 = \frac{-\frac{3}{2} + 2 \int_0^1 e^{-\Psi(v_{0*})} \left[-\int_0^{v_{0*}} \frac{e^{\Psi(z_{0*})}}{A_2(z_{0*})} dz_{0*} \right] dv_{0*}}{\int_0^1 e^{-\Psi(z_{0*})} dv_{0*}}, \quad c_2 = 0 \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
\langle c \rangle &= -2 \int_0^{\mu_0^*} e^{-\Psi(v_0^*)} \left[\int_0^{v_0^*} \frac{v^{\Psi(z_0^*)}}{A_2(z_0^*)} dz_0^* \right] dv_0^* + \left\{ -\frac{3}{2} + 2 \int_0^1 e^{-\Psi(v_0^*)} \left[\int_0^{v_0^*} \frac{e^{\Psi(z_0^*)}}{A_2(z_0^*)} dz_0^* \right] dv_0^* \right\} \times \\
&\times \frac{\int_0^{\mu_0^*} e^{-\Psi(v_0^*)} dv_0^*}{\int_0^{v_0^*} e^{-\Psi(v_0^*)} dv_0^*} + \frac{3}{2} = \left\{ \frac{3}{2} - 2\Phi(\mu_0^*) \right\} + \left\{ -\frac{3}{2} + 2\Phi(1) \right\} \cdot T(\mu_0^*) \cdot T(1)^{-1} \Phi(\mu_0^*) = \\
&= \int_0^{\mu_0^*} e^{\Psi(v_0^*)} \left[\int_0^{v_0^*} \frac{e^{\Psi(z_0^*)}}{A_2(z_0^*)} dz_0^* \right] dv_0^* T(\mu_0^*) = \int_0^{\mu_0^*} e^{-\Psi(v_0^*)} dv_0^*
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Выражение 4.21 дает оценку для концентрации перколяции.

5. Вычисление вероятности перколяции.

Условная плотность вероятности $f(v_*, c/v_*, c_0)$ удовлетворяют прямому и обратному уравнениям ФПК, в частности, прямое имеет вид [4]

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial v_*} \left[\frac{\gamma v_*}{c - c_p} \right] + \frac{N}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v_*^2} = 0 \tag{5.1}$$

Начальное условие

$$f(v_*, c_0 | v_*^0, c_0) = \delta(v_* - v_*^0) \tag{5.2}$$

Граничные условия

$$f(v_*^0, c | v_*^0, c) = 0, \quad f(0, c | v_*^0, c_0) = \delta(c_p - c) \tag{5.3}$$

Непосредственное решение (5.1) осложняется зависимостью $A_1(v_*, c)$ от c , прием при приближении $c \rightarrow c_p$ скорость регулярного изменения (сноса) $A_1(v_*, c)$ стремится к бесконечности, что позволяет для $c \sim c_p$ пренебречь диффузионным членом в (5.1) и получить, что вероятность f удовлетворяет уравнению типа переноса

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\gamma v_*}{c - c_p} \frac{\partial f}{\partial v_*} + \frac{\gamma}{c - c_p} f \tag{5.4}$$

Уравнение (5.4) описывает перенос плотности вероятности в среде с поглощением, причем макроскопическое поперечное сечение δ зависит от v_*^{-1} . Это предельный случай, когда пренебрегаем диффузией и учитываем только перенос.

Решение уравнения (5.4) в этом случае имеет вид

$$f = f_0 \cdot \exp \left[-\gamma \int_{c_0}^c \frac{ds}{c - c_p} \right] = f_0 \cdot \exp \left[-\gamma \cdot \ln |c - c_p| \right]_{c_0}^c = f_0 \left(\frac{c - c_p}{c_0 - c_p} \right)^{-\gamma}$$

Вероятность вычисляется по формуле

$$P = f_0 \int_{c_0}^{c_p} \left(\frac{c_0 - c_p}{c - c_p} \right) dc = f_0 \frac{c_p - c_0}{1 - \gamma} \quad \text{при } \gamma < 1, \quad c_0 < c_p. \tag{5.5}$$

Вернемся к уравнению (5.1) и учтем диффузию.

Запишем прямое уравнение в виде

$$\frac{\partial f(v_*, c | v_*^0, c_0)}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial v_*} \left(\left[\frac{\gamma v_*}{c - c_p} \right] f(v_*, c | v_*^0, c_0) \right) + \frac{N_0}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_*^2} f(v_*, c | v_*^0, c_0) \tag{5.6}$$

«Начальное» условие имеет вид

$$f(v_*, c_0 | v_*^0, c_0) = \delta(v_* - v_*^0) \tag{5.7}$$

Граничные условия

$$f(v_*^0, c_0 | v_*^0, c_0) = 0, \quad f(v_*, c | v_*^0, c_0) = \delta(c_p - c) \tag{5.8}$$

$$\text{Сделаем в (5.6) замену переменных } s = \varphi(c), \quad v_*^{(1)} = \Psi(v_*, c) \tag{5.9}$$

где $\varphi(c)$ имеет вид

$$\varphi(c) = \frac{N}{2} \int_{c_0}^c \exp \left\{ -2\gamma \int_{c_0}^{c'} \frac{dc''}{c - c_p} \right\} dc'' = \frac{N}{2} \int_{c_0}^c \exp \left\{ \ln |c - c_p|^{-2\gamma} \right\} dc''$$

а $\psi(v_*, c)$ вычисляется по формуле

$$\psi(v_*, c) = v_* \exp \left[-\gamma \int_{c_0}^c \frac{dc'}{c - c_p} \right] = v_* \exp \left\{ \ln \left| \frac{c - c_p}{c_0 - c_p} \right|^{-\gamma} \right\}.$$

Окончательно имеем из (5.4)

$$\varphi(c) = \frac{N}{2} \left(\frac{c - c_p}{c_0 - c_p} \right)^{-2\gamma} = \frac{N}{2} \left(\frac{c_0 - c_p}{c - c_p} \right)^{2\gamma} = s \quad (5.10)$$

$$\psi(v_*, c) = v_* \left(\frac{c - c_p}{c_0 - c_p} \right)^{-\gamma} = v_* \left(\frac{c_0 - c_p}{c - c_p} \right)^{\gamma} = v_*^1.$$

Запишем уравнение (5.6) в новых переменных вводя замену плотности вероятностей обычным образом

$$f(v_*, c | v_*^0, c_0) = f_1(v_*(c) | s_0, v_{*0}^1) |\psi, v_*| \quad (5.11)$$

где учтено, что

$$s_0 = \varphi(c_0), \quad v_{*0}^1 = \psi(v_*^0, c_0) \quad (5.12)$$

Тогда получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial v_*^1} \left[A_1(v_*^1, s) f_1(v_*^1, s | v_{*0}^1, s_0) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_*^1{}^2} \left[A_2(v_*^1, s) f_1(v_*^1, s | v_{*0}^1, s_0) \right] \quad (5.13)$$

При «начальном» условии

$$f_1(v_*^1, s_0 | v_{*0}^1, s_0) = \delta(v_*^1 - v_{*0}^1) \quad (5.14)$$

также граничных, следующих из (5.8)

$$f_1(v_{*0}^1, s | v_{*0}^1, s_0) = 0, \quad f_1(0_0^* | v_{*0}^1, s_0) = \delta(s_p - s) \quad (5.15)$$

Коэффициенты A_1, A_2 в уравнении (5.13) подбираются таким образом, чтобы уравнение (5.13) имело заданный вид. Рассмотрим сначала случай

$$A_1(v_*^1, s) = \frac{1}{\varphi'_{,c}} \left\{ \psi'_{,c} + A_1 \left[\varphi_{(s)}^{-1}, \psi^{-1}(s, v_*^1) \right] \psi'_{,v_*} \right\} = 0 \quad (5.16)$$

$$A_2(v_*^1, s) = \frac{1}{\varphi'_{,c}} \frac{N}{2} \cdot (\psi'_{,v_*}) \quad (5.17)$$

Выражая в (5.10) c, v_* через s, v_*^1 и подставляя в (5.16) получим, что условие $A_1(v_*^1, s) = c$ приводит к выражению

$$\gamma \left[1 - \left(\frac{c_p - c}{c_p - c_0} \right)^{\gamma} \right] = 0 \quad (5.18)$$

откуда следует $\gamma = 0$. В этом случае стохастическое дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dv_*}{dc} = v(c), \quad \langle v(c) \rangle = 0, \quad \langle v(c) v(c') \rangle = \frac{N}{2} \delta(c - c') \quad (5.19)$$

Для уравнения (5.13) уравнение ФПК имеет канонический вид уравнения диффузии

$$\frac{\partial f(v_*, c | v_*^0, c_0)}{\partial c} = \frac{N}{2} \frac{\partial^2 f(v_*, c | v_*^0, c_0)}{\partial v_*^2}, \quad (5.20)$$

Решение которого записывается в виде

$$f(v_*, c | v_*^0, c_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(c-c_0)}} \exp\left\{-\frac{(v_* - v_*^0)^2}{2(c-c_0)}\right\}, v_* = \int v(c)dc \quad (5.21)$$

Условная плотность перколяции находится по формуле

$$f(0, c_p | v^0, c_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(c_p - c_0)}} \exp\left\{-\frac{v_*^0{}^2}{2(c_p - c_0)}\right\} \quad (5.22)$$

Вероятность перколяции

$$P = \int_{c_0}^{c_p} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(c-c_0)}} \int_{v_*^0}^0 \exp\left\{-\frac{(v_* - v_*^0)^2}{2(c-c_0)}\right\} dv_* \right] dc. \quad (5.23)$$

Рассмотренные случаи соответствуют моделям, описывающим крайние случаи: для вычисления вероятности перколяции в отсутствие диффузии – формула (5.5), чистая диффузия в отсутствие переноса – формула (5.23). Истинная вероятность находится между вычисленными границами определяемых формулами (5.2), (5.23).

Рассмотрим модель, в которой учитываются перенос и диффузия. Положим в (5.17) $A_1(v_*^1, s) = av_*$. Сравнение с экспериментальными данными для композитных материалов указывает на то, что для двухкомпонентного материала эффективные коэффициенты теплопроводности, рассчитанные по теории эффективной среды методом самосогласованного поля с погрешностью не более 3% совпадают с реальными для концентрации идеального изолятора порядка 0,5 рис.... Здесь зависимость $v_*(c)$ имеет линейный характер. В случае $\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{2}{3}$, как видно на рис.... Расхождение между экспериментальными и реальными коэффициентами теплопроводности достигают существенных различий, причем зависимость $\mu_*(c)$ должна иметь нелинейный характер, такой, что в точке $c_p^{(n)}$, соответствующей нелинейной перколяции кривая имеет в качестве касательной ось OC . Считается, что зависимость аппроксимируется степенной функцией $\mu_*(c) \sim (c - c_p)^\gamma$, где $\gamma = 1,5 - 1,7$ в трехмерном случае и $\gamma = 1,8 - 1,9$ для двумерного случая, а $0,5 \leq c \leq c_p$.

Эта область изменения концентрации соответствует физическим процессу синтеза, когда изолятор из наполнителя превращается в матрицу. Возникновение процесса перколяции (в данном случае, изоляции) может происходить структурно по разным сценариям. Это может быть формирование одного кластера, состоящего из одного компонента – изолятора и кластеров из материала проводника. В этом случае размеры кластеров становятся сопоставимыми с размером тела, что может макроскопически выражаться в том, что композит необходимо рассматривать как макронеоднородное или анизотропное тело.

Другой сценарий реализуется при формировании вытянутых цилиндрических кластеров в направлении распространения тепла. Возможен также сценарий формирования микрокластеров равномерно распределенных в объеме тела.

Таким образом, значение концентрации равное 0,5 является пороговым, что вытекает из рассмотрения двухкомпонентного композита как области, на которой случайная величина $v(x) = \mu(x)\mu_1^{-1}$ принимает два значения

$$v(x) = \begin{cases} 0 & c \text{ вероятностью } C \\ 1 & c \text{ вероятностью } 1-C \end{cases} \quad (5.24)$$

Тогда энтропия S величины $v(x)$ равна $S = c \ln c + (1-c) \ln(1-c)$ и имеет максимум при $c=0,5$.

Исходя из этого будем считать, что эффективный коэффициент теплопроводности v_* при $0 \leq c \leq 0,5$ зависит от c согласно линейному закону самосогласованного поля $v_* = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - c \right)$, а в области $0,5 < c$ характер зависимости нелинейный. Характерно, что если в области $0 \leq c \leq 0,5$ тип кристаллической структуры, не оказывает влияния на зависимость, то при $0,5 < c$ такое влияние имеет место. Так что для разных кристаллических структур имеет место разброс для концентрации перколяции и соответствующих зависимостей $v_*(c)$.

Рассмотрим аппроксимацию $v_*(c)$ степенной функцией вида [1, 2]

$$v_*^{(n)} = (c_p - c)^\gamma \quad (5.25)$$

где c_p , γ некоторые константы, которые определим из условий гладкого перехода линейной зависимости $v_*^{(\gamma)} = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} - c \right)$ в нелинейную зависимость $v_*^{(n)} = (c_p - c)^\gamma$ при $c = 0,5$. Для этого приравняем при $c = 0,5$ функции $v_*^{(e)}$, $v_*^{(n)}$ и $v_{*,c}^{(e)}$ с $v_{*,e}^{(n)}$ получим 2 уравнения относительно γ и c_p

$$\begin{aligned} (c_p - 0,5)^\gamma &= 0,25 \\ -\gamma(c_p - 0,5)^{\gamma-1} &= -\frac{3}{2} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Решая уравнения, получаем $\gamma \approx 1,6$, $c_p \approx 3/5$,

что совпадает с результатами экспериментов, моделирования и расчетов другими методами [1, 2].

6. Вычисление вероятности перколяции методом отражений

Рассмотрим модель перколяции как случайную функцию $v_*(c)$, которая под действием регулярных факторов при росте c стремится к значению $v_*(c_p) = 0$, подвергаясь при этом влиянию случайных факторов. Таким образом, траектория $v_*(c)$ в плоскости $v \times c$ представляют собой брауновскую кривую, которая при $c = c_p$ достигает значения нуль. Тогда можно наступление перколяции рассматривать, как выброс случайной функции $v_*(c)$ за нулевой уровень. Обозначим $P(v_*^0, c)$ – вероятность достижения функций $v_*(c)$ при концентрации равной с нулевого значения. Как и раньше, $Q(v_*^0, c)$ – противоположное событие, причем

$$P(v_*^0, c) = 1 - Q(v_*^0, c) = 1 - \int_{v_*^0}^0 q(v_*^0, v_*, c) dv_* \quad (6.1)$$

где плотность вероятностей $q(v_*^0, v_*, c)$ ненормированная и удовлетворяет уравнению типа диффузии.

Выполняя преобразование координат, получим уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial s} = a \frac{\partial}{\partial v_*^1} (v_*^1 q) + \frac{a^2 N}{4} \frac{\partial^2 q}{\partial v_*^1} \quad (6.2)$$

Начальное условие с учетом замены переменных имеет вид

$$q(v_{*0}^1, v_*^1, s_0) = \delta(v_*^1 - v_{*0}^1), \quad s_0 = \frac{N}{2}, \quad s_p = \infty \quad (6.3)$$

Граничное условие при $v_* = 0$ переходит в условие в $v_{*p}^1 = (c_p - c_0)^\gamma$

$$q(v_{*0}^1, v_{*p}^1, s) = 0, \quad (6.4)$$

Решение уравнения (6.2) представляет собой нормальную плотность вероятности, называемую фундаментальным решением $w(v_{*0}^1, v_*^1, s)$ уравнения (6.1) при условиях (6.2), (6.3) имеющего вид

$$w(v_{*0}^1, v_*^1, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_v(s)}} \exp\left\{-\frac{[v_*^1 - m_v(s)]^2}{2\delta_v^2(s)}\right\} \quad (6.4)$$

где математическое ожидание $m_v(s)$ и дисперсия $\delta_v^2(s)$ записываются в виде

$$m_v(s) = v_{*0}^1 e^{-a\left(\frac{s-N}{2}\right)}, \quad \sigma_v^2(s) = \frac{Na}{4} \left(1 - e^{-2a\left(\frac{s-N}{2}\right)}\right) \quad (6.5)$$

На рис.6 изображено, изменение $w(v_{*0}^1, v_{*p}^1, s)$, из которого видно, что на границе $v_{*0}^1 = (c_p - c_0)^\gamma$ плотность вероятности $w(v_{*0}^1, v_{*p}^1, s_1)$, не равна нулю. Чтобы получить решение $q(v_{*0}^1, v_*^1, s)$ уравнения (6.1), удовлетворяющее условию (6.3) используется известный метод отражений [4], согласно которому решение уравнения (6.1) представляется в виде

$$q(v_{*0}^1, v_*^1, s) = w(v_{*0}^1, v_*^1, s) - Kw(v_{*1}^1, v_*^1, s) \quad (6.5)$$

где $v_{*1}^* = -v_{*0}^*$, коэффициент K выбирается из условия, чтобы ненормированная плотность $q(v_{*0}^1, v_{*p}^1, s)$ удовлетворяла в среднем условию (6.4), которые запишем в виде

$$\int_0^s \left[W(v_{*0}^1, v_{*p}^1, s) - Kw(v_{*1}^1, v_{*p}^1, s) \right] ds = 0 \quad (6.6)$$

$$\frac{N}{2} \left(1 - \frac{c_0}{c_p} \right)^\gamma$$

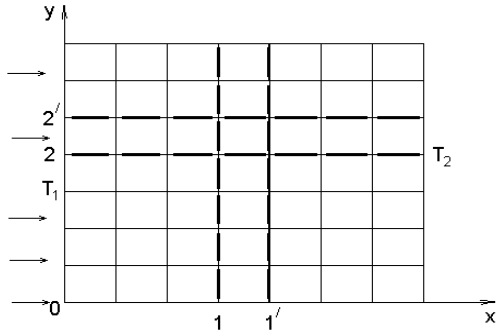


Рисунок 1

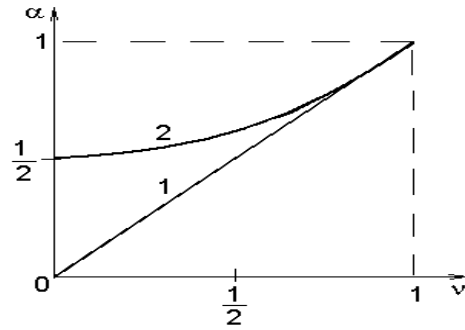


Рисунок 2

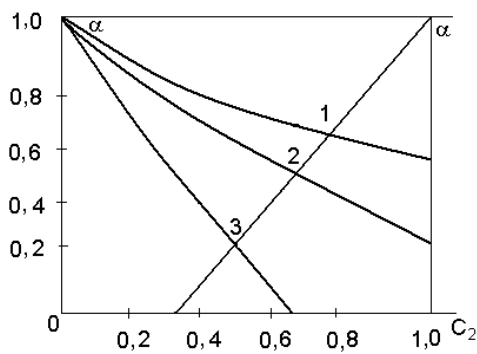


Рисунок 3.

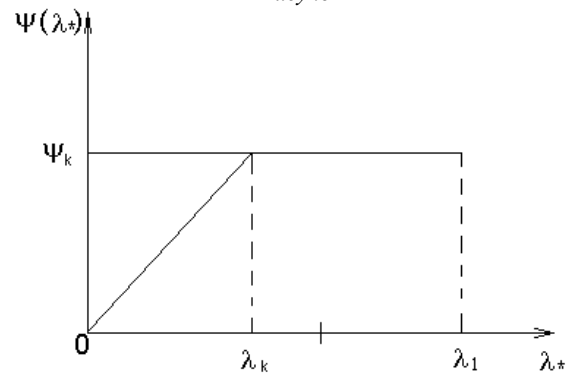


Рисунок 4.

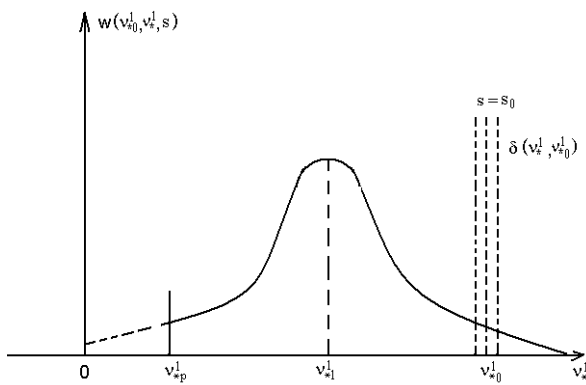


Рисунок 5.

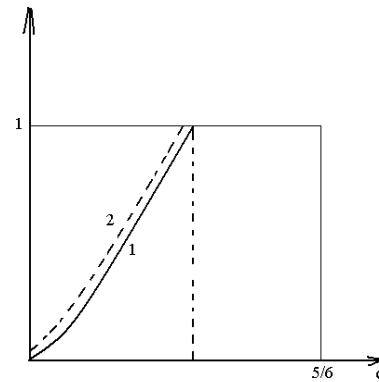


Рисунок 6.

Из (7.6) с учетом (7.4) получаем

$$K = \frac{\Psi_0}{\Psi_1}, \Psi_i = \int \frac{1}{\frac{N}{2} \left(1 - \frac{c_0}{c_p} \right)^\gamma \sigma(s')} \exp \left\{ -\frac{\left(v_{*p}^1 - v_{*i}^1 e^{-as} \right)^2}{2\sigma^2(s')} \right\} ds' \quad i=1,2 \quad (6.7)$$

Подставляя (6.7) в (6.5), а затем в (6.1) с учетом (6.4), получим

$$P(v_{*0}^1, s) \approx \Phi \left(\frac{v_{*p}^1 - v_{*0}^1 e^{-\left(\frac{s-N}{2} \right)}}{\sigma(s)} \right) - K \Phi \left(\frac{v_{*p}^1 - v_{*1}^1 e^{-\left(\frac{s-N}{2} \right)}}{\sigma(s)} \right) \quad (6.8)$$

Значение v_{*1}^1 выбирается как зеркальное отражение v_{*0}^1 : $(v_{*1}^1 - 2v_{*p}^1 - v_{*0}^1)$. Функция Φ представляет собой интеграл вероятности $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du$, $(-\infty < z < \infty)$

К старым переменным в (6.8) переход осуществляется по формулам

$$s = \frac{N}{2} R(c), v_*^1 = v_* R(c), R(c) = \left(\frac{c_p - c_0}{c_p - c} \right)^\gamma \quad (6.9)$$

$$\text{При } c \rightarrow 0, R(c) \rightarrow 1 - \frac{c_0}{c_p}, s \rightarrow \frac{N}{2} \left(1 - \frac{c_0}{c_p} \right), v_*^1 \rightarrow 1 - \frac{c_0}{c_p},$$

$$\text{При } c \rightarrow 0, R(c) \rightarrow 1 - \frac{c_0}{c_p}, s \rightarrow \frac{N}{2} \left(1 - \frac{c_0}{c_p} \right), v_{*0}^1 = v_{*0}$$

$$\text{При } c \rightarrow c_p, R(c) \rightarrow -\infty, s \rightarrow \infty, v_{*p}^1 - (c_p - c_0)^\gamma$$

На рис.6 изображена зависимость вероятности перколяции от концентрации теплоизолятора. Результаты экспериментов и статистического моделирования (кривая 2) [1, 2] для модели перколяции по связям в трехмерной кубической решетке согласуются с численными, полученными на основании аналитической модели (кривая 1), учитывающий регулярные факторы, направленные на формирование макрокластера, так и случайные факторы, моделируемые как чисто случайные влияния (белый шум) и обуславливающие диффузию. Дальнейшее приближение модели к реальности может быть достигнуто на пути учета факторов, нейтрализующих случайные воздействия. Для реальных материалов величины v_{*0} и v_{*p} могут быть случайными, что потребует введения вероятностей этих состояний. Представляет интерес задача об устойчивости процесса формирования кластера с помощью слежения за управляющим параметром и оценка вероятности срыва слежения.

РЕЗЮМЕ

Предложен метод вычисления эффективных свойств микрокомпозитных материалов, который позволяет вычислить эффективные коэффициенты вблизи порога перколяции. Вероятность перколяции определяется на основе уравнения ФПК (Фоккера-Планка-Колмогорова). В работе предлагается новый подход к аналитическому моделированию вычисления эффективной теплопроводности на основе уравнения ФПК в сочетании с методом самосогласованного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эллиот Р., Крамхансл Дж., Лис П. Теория и свойства случайно неупорядоченных кристаллов и связанных с ними физических систем. В кн. Теория и свойства неупорядоченных материалов, Москва, 1977, 11-248 с.
2. Киркпатрик С. Перколяция и проводимость. В кн. Теория и свойства неупорядоченных материалов, Москва, 1977, 249-294 с.
3. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М., Наука, 1971, 479 с.
4. Ван Кампен. Диффузионные процессы в науке и технике. М., Мир, 1972, 392 с.
5. Паньков А.А. Статистическая механика пьезокомпозитов, Пермь. Изд-во Пермского государственного технического университета, 2009, 479 с.
6. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов.- Л. Энергия, 1974,- 264 с.
7. Канаук С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов.- Петрозаводск: Изд-во Петрозаводского университета, 1993,- 600 с.
8. Перспективные материалы. Сборник статей. Витебск, 2006,- 650 с.

SUMMARY

The method of the calculation of effective properties for microcomposite materials is proposed. This method allows to determine effective nearly a percolation threshold coefficients. The FPK equation is used for calculation of the probability of percolation threshold.

Поступила в редакцию 21.05.2013

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МЯГКОГО РОБОТА АМЕБОПОДОБНОГО ТИПА

член-корр. НАН Беларуси ¹ Чижик С.А., д-р инж. ² К. Циммерманн, асп. ³ Чигарев В.А.

¹ Президиум национальной академии наук Беларуси, Минск

² Технический университет Ильменау, Германия

³ Белорусский национальный технический университет, Минск

Введение. Наблюдения за перемещением амёб показывает, что геометрия их внешней оболочки может изменяться существенным образом от почти эллипсоидальной до появления выростов, сопоставимых с характерным размером (рисунок 1).



Рисунок 1 – Одноклеточный организм – амёба, с хорошо выраженными ложноножками

Выросты напоминают по форме течения, по форме близкие к «жидким пальцам», характерным для структур появляющихся при вытеснении нефти водой [1]. При этом во внутренней жидкой среде наблюдаются хорошо выраженные течения, механизм которых до конца не выяснен. Характерно, что измененная форма фиксируется и сохраняется достаточно длительное время, что может свидетельствовать о том, что возникает некоторая внутренняя устойчивая структура трансформированного из начального эллипсоида. Большие деформации внешней оболочки наблюдаются также при поглощении других объектов.

Рассмотрим модель деформируемого тела с изменяемой геометрией, а также переменной массой и составом [2, 3]. Поступательное перемещение центра масс за счет внутренних течений можно создать, если изменяется масса. Обозначим \bar{V}_C скорость центра масс, тогда

$$M \frac{d\bar{V}_C}{dt} = (\bar{u} - \bar{V}_C) \frac{dM}{dt}, \quad (1)$$

где u – абсолютная средняя скорость переменной части системы, которая удовлетворяет уравнению

$$\bar{u} \Delta M = M^+ \bar{V}^+ - M^- \bar{V}^-, \quad (2)$$

где M^+ – масса, \bar{V}^+ – скорость центра масс притекающих в систему материальных точек, M^- – масса, \bar{V}^- – скорость центра масс точек вытекающих из системы.

Дополнительная сила, возникающая за счет изменения центра масс равна

$$\bar{F}^+ = \bar{u} \frac{dM}{dt}. \quad (3)$$

Таким образом, из уравнений (1), (2), (3) следует, что дополнительная сила может возникать только в случаях $\bar{u} \neq \bar{V}_C$, $\frac{dM}{dt} \neq 0$. Под действием силы F^+ тело может начать двигаться из состояния покоя.

В случае, если $\bar{u} - \bar{V}_C = const = \bar{V}$ направлена противоположно скорости движения центра масс, то

$$V_C = \ln \frac{M_0}{M} + V_{OC}, \quad (4)$$

где M_0 – начальное значение массы, V_{0c} – начальное значение модуля скорости центра масс.

Из (4) следует, что конечная скорость перемещения центра масс модели не зависит от режима изменения массы.

Модель тела с перфорированными псевдоподиями (ложноножками). Искусственная амeba перемещается в поле тяжести Земли в жидкости, оказывающей сопротивление перемещению, что в уравнении (1) должно учитываться с помощью дополнительных членов

$$M \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \bar{F} + (\bar{u} - \bar{V}_c) \frac{dM}{dt}, \quad (5)$$

$$\bar{F} = \bar{F}_g + \bar{F}_t,$$

где $F_g = ma$ – сила тяжести, $F_t = -\alpha \bar{V}_c$ – сила сопротивления среды.

Если движение происходит по поверхности, то необходимо учесть силу терния и наложить условия связи.

Рассмотрим механизм локальных изменений геометрии оболочки под воздействием внутренних течений. Наблюдения показывают, что поток внутренней жидкости направляется на мембрану, которая под его действием начинает деформироваться образуя вырост в виде трубки.

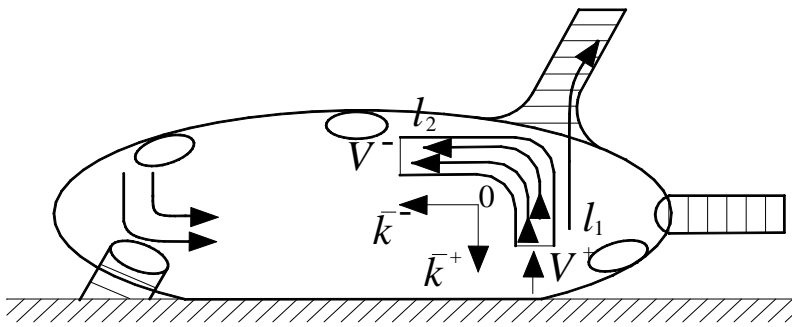


Рисунок 2 – Схема перетекания жидкости из нижней псевдоподии в верхнюю

Оценим усилие локального воздействия на стенку оболочки. Масса, заполняющая оболочку остается постоянной, но состав меняется. Выделим локальную трубку тока жидкости в виде прямого угла. Идет отток жидкости из нижней псевдоподии и частично в объем тела. Псевдоподии армированы пружинами с переменной жидкостью.

Обозначим \bar{k}^+ – направляющий вектор трубки тока, направленной к стенке, \bar{k}^- – направляющий вектор линий тока трубки жидкости оттока.

Обозначим через $\rho_{(i)}$ – плотность внутренней жидкости. Тогда имеем

$$\frac{dM^+}{dt} = \frac{dM^-}{dt} = S\rho_{(i)}\bar{u}. \quad (6)$$

$$\bar{V}^+ = -u\bar{k}^+ + V_c\bar{k}^-, \quad \bar{V}^- = u\bar{k}^- + V_c\bar{k}^-. \quad (7)$$

Здесь \bar{V}_c скорость смещения трубки тока вследствие деформируемости стенки, S – эффективное сечение трубки тока. Считаем, что стенка не оказывает сопротивление.

Сила действия потока жидкости на оболочку без учета сопротивления будет равна

$$\bar{F}_m = -S\rho u^2(\bar{k}^+ + \bar{k}^-). \quad (8)$$

Положим, что движение вдоль \bar{k}^+ не происходит вследствие силы тяжести, тогда смещение оболочки имеет место только вдоль \bar{k}^- , а уравнение движения центра масс трубки тока описывается уравнением

$$M_{mp} \frac{dV_c}{dt} = -S\rho_{(i)}u^2, \quad M_{mp} = \rho_{(i)}S \cdot 2l, \quad (9)$$

где $l = l_1 + l_2$ длина трубки тока.

Из (9) следует, что перемещение центра масс имеет равноускоренный характер. Если учитывать сопротивление стенки и внешней жидкости, в уравнение (9) добавляем члены силы сопротивления внешней среды

$$M_{mp} \frac{dV_c}{dt} = -S\rho u^2 + F_{comp}. \quad (10)$$

Таким образом, если внутренняя масса остается практически неизменной, то поступательное перемещение центра масс возможно осуществить за счет изменения геометрии масс. Изменение геометрии масс для фигуры в целом можно осуществить за счет региональных перемещений

центров масс, которые приведут к глобальному смещению центра масс системы. Если в некоторой части внутреннего объема создать локальное течение в направлении оболочки такое, что кинетический момент остается неизменным, тогда полагая в уравнении для кинематического момента \bar{K}

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{d\tilde{K}}{dt} + \bar{M}_{(i)}, \quad (11)$$

где \tilde{K} – кинетический момент в подвижной системе координат объема постоянного состава.

$$\bar{M}_{(i)} = \bar{M}^+ - \bar{M}^-, \quad \bar{M}^+ = \frac{dK^+}{dt}, \quad \bar{M}^- = \frac{dK^-}{dt}. \quad (12)$$

Полагая $d\bar{K}/dt = 0$ (движение без переползания), получим

$$\bar{M}_{об} = \bar{M}_{об} + \bar{M}_{(i)}, \quad (13)$$

где $\bar{M}_{об}$ – главный вектор гидродинамических сил действующих на оболочку, $\bar{M}_{об}$ – момент массовых сил, $\bar{M}_{(i)}$ – момент сил за счет изменения состава и массы.

Аппроксимируем жидкое тело, заключенное в оболочку системой материальных точек A_i (рисунок 3).

Рассмотрим плоское движение в плоскости Oxy , в которой перемещается центр масс C .

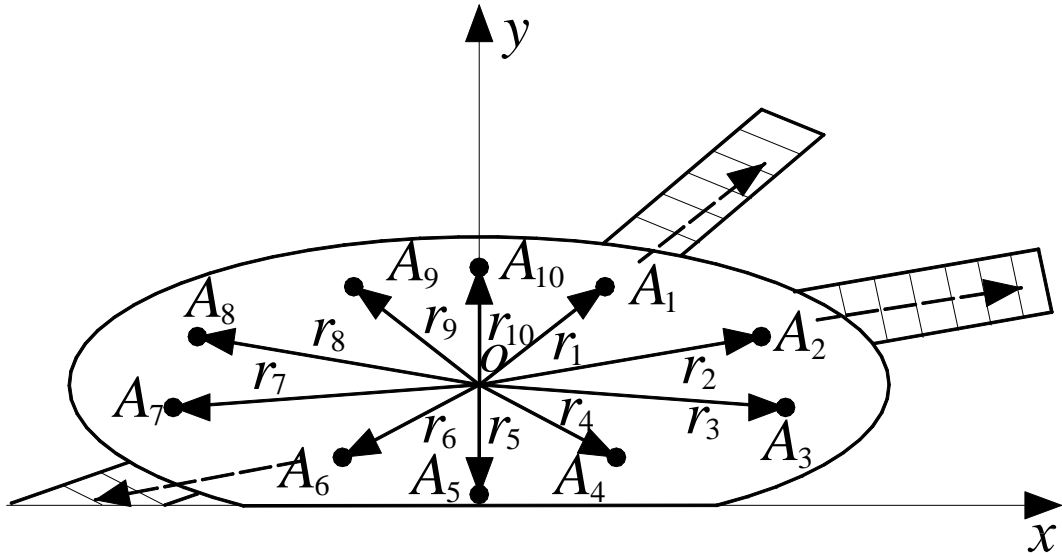


Рисунок 3 – Аппроксимируемое жидкое тело с внешней оболочкой

В начальный момент времени в точках A_i находятся массы m_i^0 , которые равны между собой. Движение, при котором кинетический момент не изменяется

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i r_i^2 m_i \right) = 0 \quad (14)$$

можно реализовать, если считать r_i и m_i функциями времени, тогда из (14) следует

$$\frac{dm_i}{dt} = -2m_i \bar{r}_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}. \quad (15)$$

Введем линию тока жидкости, вдоль которой перемещаются материальные точки, вместо параметра времени t будем использовать s -расстояние вдоль линии тока, тогда (15) можно записать в виде

$$\frac{dm_i}{ds} = -2m_i \bar{r}_i \frac{d\bar{r}_i}{ds}. \quad (16)$$



Рисунок 4 - «Soft Robot»-гофрированный мягкий робот

Пусть линия тока направлена вдоль \bar{r}_1 и точка A_1 перемещается вдоль луча. Так как $d\bar{r}_i/ds = \bar{\tau}_i$ – касательный вектор к i -той линии тока, то $\bar{r}_i \cdot \bar{\tau}_i = |\bar{r}_i| \cos \alpha_i$, где α_i угол между векторами \bar{r}_i и $\bar{\tau}_i$. Таким образом, рост длины луча скелета, связанных в точке A_i ведет к уменьшению массы (плотности) в этом направлении за счет распределения ее в выросте. Этим можно объяснить сходство выростов при движении амёбы в среде с течением типа жидких пальцев.

Практическая реализация предложенной модели может быть осуществлена с помощью мягкой оболочки с выростами, имеющими вид гофрированных шлангов, которые под действием гидродинамических сил и гибкого скелета могут вытягиваться и заполняться внутренней жидкостью или газом (рисунок 4).

Вывод. Полученная математическая модель движения амёбоподобного робота может быть применена к решению задач движения тел с изменяемой геометрией в различных средах, а так же при разработке мягкотелых роботов или механизмов основанных на принципах внутреннего движения масс.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрены основные гипотезы движения амёб, созданы математические модели расчёта жидкостных механизмов для осуществления двигательных функций гофрированных мягких роботов. Приведён механизм движения жидких масс в мягкой оболочке. Полученная математическая модель движения амёбоподобного робота может быть применена к решению задач движения тел с изменяемой геометрией в различных средах, а так же при разработке мягкотелых роботов или механизмов основанных на принципах внутреннего движения масс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нитман Н., Даккор Ж., Стенли Х. Когда вязкие «пальцы» имеют фрактальную размерность? «Фракталы в физике» Международный семинар по фракталам в физике (МЦТФ, Италия. 9-12.07.1985). М.: Мир, 1988. с. 266-281.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л. Курс теоретической механики. М.: Лань, 1988. 728 с.
3. Лайтхилл Дж. Гидромеханика движения водных животных. Сб. Механика. Новое в зарубежной науке, 1972, №1 (131). С. 80-109.

SUMMARY

Have carried out the analysis of mathematical models of amoebalike movings in heterogeneous environments by robots with a soft external cover. Have offered variants of parameters moving calculation of robots with a soft external cover. Models based on principle of Kenigov's system from two co-ordinate systems, and a method of small parameter at movement calculations. Some assumptions, allowing to simplify model of processes proceeding in a robot body are accepted. Processes of an overflowing of internal weights in a body of an amoeba for the purpose of the movement task are considered.

Поступила в редакцию 21.05.2013

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ФОРМЫ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ, СОДЕРЖАЩЕЙ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИЙ ЭЛАСТОМЕР

асп. ¹Маевская С.С., д. ф.-м. н. ²Михасев Г.И.

¹*Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск*

²*Белорусский государственный университет, Минск*

Тонкостенные слоистые элементы (оболочки, пластины, балки) имеют широкий спектр применения во многих инженерных сооружениях, таких как воздушные и космические транспортные средства, подводные объекты, автомобили и т.п. ([1], [2]). Виброзащита тонкостенных конструкций, испытывающих внешние колебательные нагрузки, является предметом большого практического интереса для механиков. Появление группы новых композитных материалов с активными и адаптивными свойствами, называемых «интеллектуальными» материалами, открывает новые возможности для решения многих проблем.

Магнитореологический эластомер (МРЭ) это «интеллектуальный» материал, упругие свойства которого изменяются в зависимости от величины приложенного магнитного поля ([3], [4]). Он состоит из магнитных частиц в деформированной полимерной матрице. Возможность управления вязкопластическими и вязкоупругими свойствами МРЭ в широком диапазоне позволяет использовать его в устройствах виброзащиты.

Одним из методов виброзащиты тонкостенных конструкций является использование в качестве промежуточного материала электро-реологических или магнитореологических сред. Расчет таких многослойных структур является сложной задачей для механиков, которые занимаются разработкой новых методов активного и полуактивного гашения строительных вибраций. Большинство работ по подавлению вибраций многослойных тонкостенных конструкций были сделаны для случая, когда прослойка «интеллектуальных» материалов являлась жидкостью ([5], [6], [7], [8]). Тем не менее, эластомеры обладают преимуществом по сравнению с жидкостями: при низком уровне поля они способны сохранять необходимую геометрическую форму.

Оптимальное отношение плотности магнитных частиц, модуль сдвига, вязкость и время отклика являются неотъемлемыми характеристиками «интеллектуального» материала [4]. Хотя достаточно много работ посвящено изучению свойств МРЭ и эластомеров (см., например, [4], [9], [10], [7]), есть всего несколько исследований с динамическим расчетом адаптивной сэндвич балки, пластин и оболочек, содержащих МРЭ в качестве наполнителя вязкоупругой прослойки. Это объясняется тем, что реакция композитной конструкции содержащей МРЭ существенно зависит от отношения масштаба времени управляющего сигнала ко времени реакции МРЭ и динамических характеристик контролируемой конструкции ([11], [12]). Именно поэтому большинство авторов изучали адаптивную структуру сэндвича, когда приложенное магнитное поле было стационарным относительно времени. Необходимо также указать отсутствие универсальной и удовлетворительной теории тонких слоистых оболочек, пластин и балок, собранных на основе МРЭ.

Комплексный модуль сдвига для МРЭ определяется экспериментально на различных уровнях индуцированного магнитного поля. Для упрощения основных уравнений приведенный комплексный модуль Юнга и модуль сдвига вводятся для целого сэндвича. Принцип затухания колебаний обсуждается в статье на примере трехслойной балки с адаптивным магнитореологическим материалом. Свободные и вынужденные колебания балки изучаются при стационарном магнитном поле.

Целью данной работы является исследование возможности эффективного воздействия постоянного магнитного поля на формы свободных и вынужденных колебаний трехслойной балки, содержащей магнитореологический эластомер.

Рассмотрим трехслойную балку, у которой внешние слои не восприимчивы к магнитному полю, а внутренний слой представляет собой МРЭ (см. рис. 1). Здесь w^* – нормальный прогиб балки, x – координата на срединной линии балки, L – длина балки, b – ширина балки, h_1, h_3 – толщины несущих слоев, h_2 – толщина МРЭ. Направления координатных осей указаны на рисунке 1

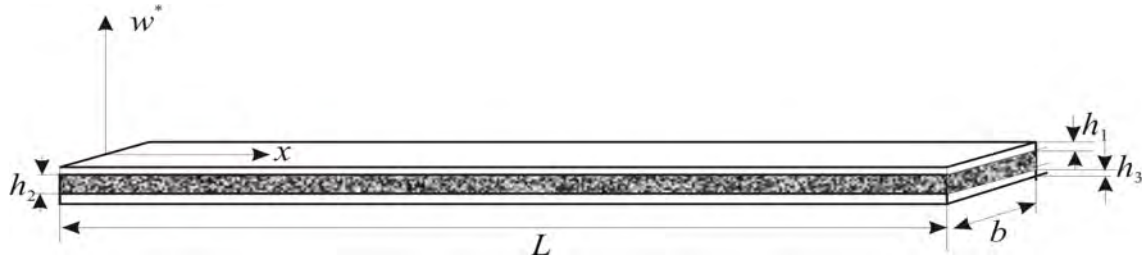


Рисунок 1. — Трехслойная балка, содержащая магнитореологический эластомер.

Для исследования движения балки используем уравнения, которые как частный случай, получаются из уравнений движения многослойной цилиндрической оболочки приведенных в работе [13], с граничными условиями:

$$\left(1 - \frac{\theta h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \chi + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \chi = f, \quad w = \left(1 - \frac{h^2}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \chi. \quad (1)$$

Здесь D – приведенная цилиндрическая жесткость всего пакета, $h = h_1 + h_2 + h_3$ – суммарная толщина балки, h_1, h_3 – толщины несущих упругих слоев, h_2 – толщина внутреннего вязкоупругого слоя, изготовленного из МРЭ, ρ – приведенная плотность «сэндвича», χ – функция перемещений, w – нормальный прогиб балки, x – продольная координата, t – время, θ, β – параметры, зависящие от индукции магнитного поля и характеризующие приведенную жесткость балки (в частности параметр β характеризует жесткость балки на поперечные сдвиги), f – интенсивность внешней нагрузки (в общем случае зависящей от координаты x и времени t). В нашем случае D, θ, β – комплекснозначные параметры, зависящие от индукции B внешнего магнитного поля [14]. Если магнитное поле является нестационарным и неоднородным, то данные параметры – функции времени t и координаты x . В качестве граничных условий рассмотрим условия шарнирного опирания, которые в терминах функции перемещений имеют вид:

$$\chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} = 0 \text{ при } x = 0, L. \quad (2)$$

Рассмотрим свободные колебания, для которых в (1) положим $f=0$. С учетом граничных условий (2) собственные формы колебаний задаются функцией:

$$\chi_n^*(x, t^*) = \sin \lambda_n x e^{i \omega_n t^*}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \quad (3)$$

где ω_n искомая комплексная частота колебаний, а $\lambda_n = \pi n / L$. Подстановка (3) в уравнения (1) приводит к простому соотношению для комплексной частоты колебаний:

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \cdot \frac{\beta + \theta h^2 \lambda_n^2}{\beta + h^2 \lambda_n^2}}. \quad (4)$$

Пусть теперь на балку действует внешняя нагрузка интенсивности

$$f = \rho F_0(x) e^{i \Omega t^*}, \quad (5)$$

где Ω – частота вынужденных колебаний.

Здесь решение уравнения (1) с граничными условиями (2) находятся в виде:

$$\chi^*(x, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\lambda_n x) q_n(t^*) \quad (6)$$

где $q_n(t)$ – так называемые обобщенные координаты системы.

Подстановка (6) в уравнение (1) с последующим разложением функции (5) в ряд Фурье приводит к уравнению:

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{2\beta}{Lh(\beta + h^2 \lambda_n^2)} \int_0^L e^{i\Omega t^*} F_0(x) \sin \lambda_n x dx \quad (7)$$

Частное решение уравнения (7) имеет вид:

$$q_n(t) = \frac{2\beta}{Lh(\beta + h^2 \lambda_n^2)} N_n e^{i\Omega t^*} \left(\omega_n^2 - \Omega^2 \right)^{-1}, \quad (8)$$

где $N_n = \int_0^L e^{i\Omega t^*} F_0(x) \sin \lambda_n x dx$ - обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате $q_n(t)$.

Общее решение уравнений (1), соответствующее вынужденным изгибным колебаниям при силовом воздействии (5), имеет вид:

$$\chi^*(x, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n e^{i\omega_n t^*} + \frac{2\beta}{Lh(\beta + h^2 \lambda_n^2)} \cdot \frac{N_n}{\omega_n^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t^*} \right] \sin(\lambda_n x). \quad (9)$$

Здесь A_n – произвольные комплексные числа, которые находятся из начальных условий.

Показателем эффективности гашения вынужденных колебаний любой механической системы, подвергаемой действию внешней периодической силы, является амплитудно-частотная характеристика. Изучим зависимость максимальной амплитуды вынужденных колебаний балки

$$A = \sqrt{w_c^2 + w_s^2} \quad (10)$$

от частоты Ω внешней периодической силы при различной интенсивности магнитного поля. В (10) приняты следующие обозначения:

$$w_c = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n \left(\bar{\omega}_n^2 - \alpha_n^2 - \Omega^2 \right)}{\left(\bar{\omega}_n^2 - \alpha_n^2 - \Omega^2 \right)^2 + 4\bar{\omega}_n^2 \alpha_n^2}, \quad w_s = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n \bar{\omega}_n \alpha_n}{\left(\bar{\omega}_n^2 - \alpha_n^2 - \Omega^2 \right)^2 + 4\bar{\omega}_n^2 \alpha_n^2},$$

где $\bar{\omega}_n = \text{Re } \omega_n$, $\alpha_n = \text{Im } \omega_n$.

Пример. В качестве примера рассмотрим трехслойную балку с параметрами $h_1 = h_3 = 0,0005$ м; $h_2 = 0,01$ м; $L = 1$ м; $\nu_1 = \nu_3 = 0,4$; $\nu_2 = 0,42$; $E_1 = E_3 = 1,5 \cdot 10^9$ Па; $\rho_1 = \rho_3 = 1,4 \cdot 10^3$ кг/м³ в случае, когда внутренний слой изготовлен из МРЭ плотностью $\rho_2 = 2,650 \cdot 10^3$ кг/м³. Для определения E_2 и G_2 были использованы результаты экспериментально установленных зависимостей этих параметров от индукции магнитного поля [15].

На рис. 2 и 3 показаны зависимости собственной частоты и декремента колебаний, соответствующие различным модам, от интенсивности магнитного поля.

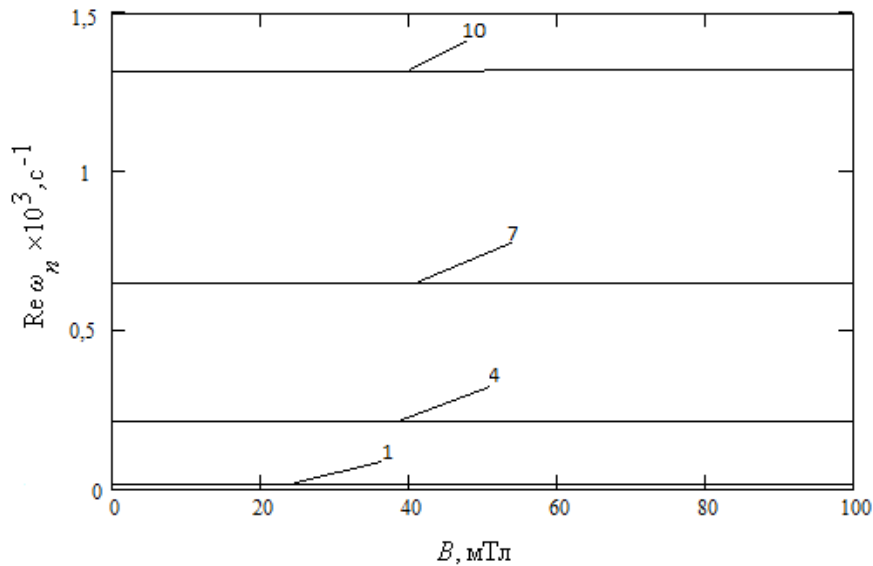


Рисунок 2. — Собственные частоты $Re \omega_n$ для мод с 1, 4, 7 и 10 числом волн в балке

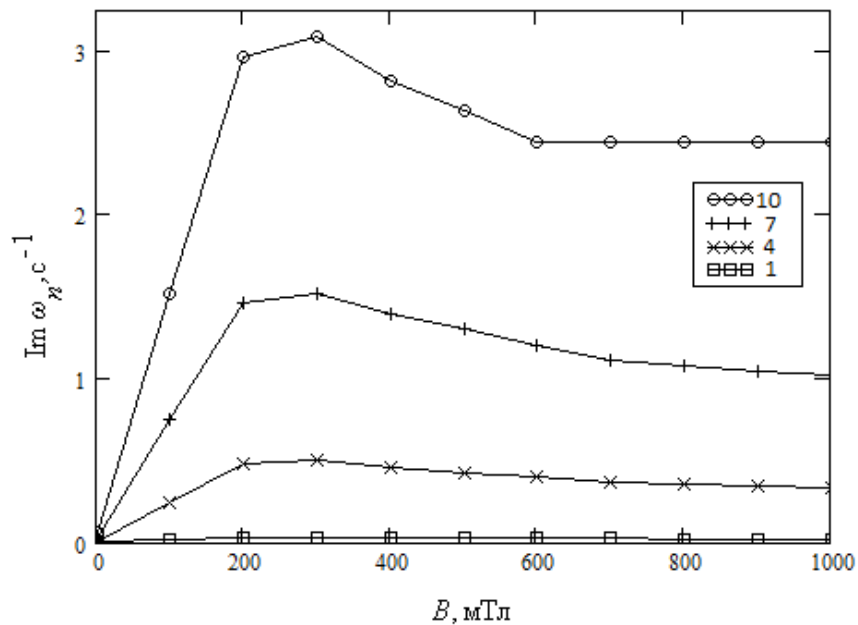


Рисунок 3. — Декремент $Im \omega_n$ для мод с 1, 4, 7 и 10 числом волн в балке

Из рис. 2 видно, что увеличение индукции магнитного поля приводит к едва заметному росту собственных частот колебаний, что объясняется слабой зависимостью действительной части приведенного модуля упругости «сэндвича» от магнитного поля. Как показано в работе [14], влияние магнитного поля становится заметным на высших модах, для которых возрастает вклад слагаемых в уравнении (1), учитывающих поперечные сдвиги, в общее решение (9). Анализ рис. 2 показывает, что для всех рассмотренных мод соответствующий декремент колебаний $Im \omega_n$ возрастает с увеличением индукции до $B = 350 mTl$, дальнейшее увеличение интенсивности магнитного поля приводит к некоторому уменьшению параметра $Im \omega_n$, что объясняется «насыщением» МРЭ [15].

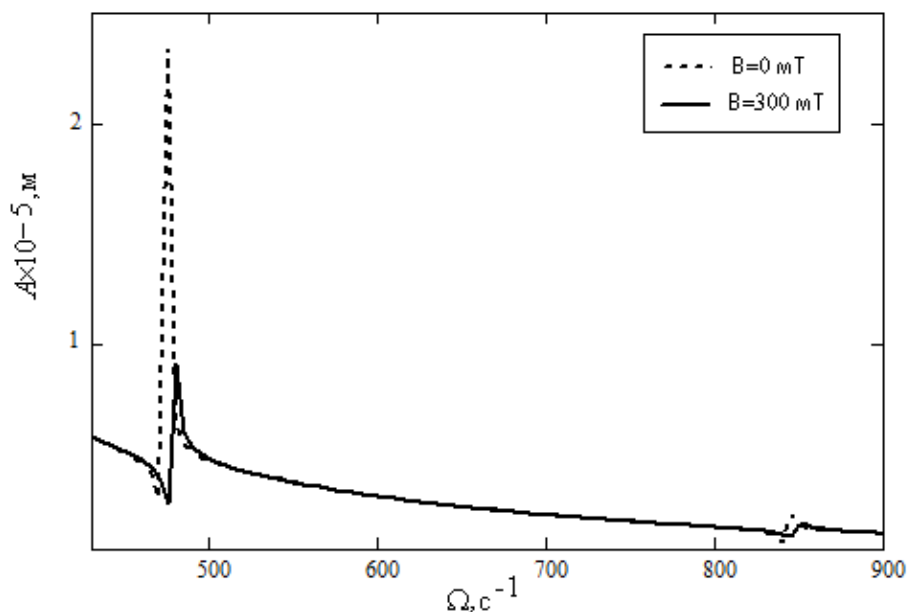


Рисунок 4. — Амплитудно-частотная характеристика при уровне магнитного поля $B = 0$ мТл и $B = 300$ мТл

На рис. 4 представлена амплитудно-частотная характеристика при нулевом уровне магнитного поля, а также при $B = 300$ мТл в случае, когда амплитуда внешней периодической силы (5) задается соотношением $F(x) = \frac{4x}{L}(1 - \frac{x}{L})$. Как видно ненулевой сигнал магнитного поля приводит к снижению амплитуд, соответствующих режиму резонансных колебаний балки.

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются свободные и вынужденные колебания трехслойной балки, содержащей магнитореологический эластомер. Анализируется влияние внешнего стационарного магнитного поля на собственные частоты и декремент колебаний, соответствующие различным модам балки. Исследуется амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний при различных уровнях приложенного магнитного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Analysis of free damped vibrations of laminated composite conical shells. / A. Korjakin [et al.] // Composite Structures. – 1998. – №41. – P. 39–47.
2. Qatu, M.S. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells / M.S. Qatu // Composite Structures. – 2010. – № 93(1). - P. 14–31.
3. Jolly, M.R. Properties and applications of commercial magnetorheological fluids / M.R. Jolly, J.W. Bender, D.J. Carlson // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1999. – №10. – P 5–13.
4. Ginder, G.M. Rheology controlled by magnetic fields / G.M. Ginder // Encyclopedia of Applied Physics. – 1996. – Vol.16. – P. 487–503.
5. Park, D.W. Shape control of an electrorheological fluid based smart plate / D.W. Park, S.B. Choi, S.B. Jung // Proc. SPIE. 3329. – 1998. – P. 824–835.
6. Shaw, J. Hybrid control of cantilevered ER sandwich beam for vibration suppression. / J. Shaw // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2000. – № 11. – P. 26–31.

7. Yalcintas, M. Magnetoreological and electrorheological materials in adaptive structures and their performance comparison / M. Yalcintas, H. Dai // *J. Smart Mater. Struct.* – 1999. - № 8. – P. 560–573.
8. Yeh, J.-Y. Vibration and damping analysis of orthotropic cylindrical shells with electrorheological core layer / J.-Y. Yeh // *Aerospace Science and Technology.* – 2008 doi:10.1016/j.jsv.2008.02.012.
9. Rheological properties of magnetoelectrorheological fluids with complex disperse phase / E. V. Korobko [et al.] // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2009. – № 149. – P. 12–65.
10. White, J.L. Polyolefins: Processing, Structure, Development, and Properties / J.L. White D.D. Choi. – Munich: Carl Hanser Verlag, 2005.
11. Choi, Y.T. Assessment of time response characteristics of electrorheological and magnetorheological dampers / Y.T. Choi, N.M. Werely // *Proc. SPIE.* 4331 – 2001. P. 92–102.
12. Mikhasev, G.I., On suppression of vibrations of three-layered beam containing magnetorheological composite / G.I. Mikhasev, E.V. Korobko, Z.A. Novikova // *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials.* – 2010 – № 4(13). – P. 49–53.
13. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. - 288с.
14. Mikhasev G. Theory of Thin Adaptive Laminated Shells Based on Magnetorheological Materials and its Application in Problems on Vibration Suppression. / G. Mikhasev, M. Botogova, E.Korobko // *Shelllike Structures / Advanced Structured Materials*; Eds. H. Altenbach and V. Eremeyev. – Springer, 2011. – Vol. 15, Chapter 48. – P. 727-750.
15. On Damping Vibrations of Three Layered Beam Containing Magnetorheological Elastomer / E. V. Korobko [et al.] // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures.* – 2012. – Vol. 23, №. 9. – P. 1019 – 1023.

SUMMARY

Free and forced vibrations of a three-layered beam containing magnetorheological elastomer are considered. Influence of the external stationary magnetic field on natural frequencies and damping ratios corresponding to the different modes of the beam is analyzed. The amplitude - frequency characteristic of forced vibrations at different levels of applied magnetic field is also studied.

Поступила в редакцию 21.10.2013

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНОТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ СРЕДЫ

к. ф.-м. н. ¹Щербаков С.С., д.т.н. ²Сосновский Л.А.,

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

1. Общие положения

В литературе изложены различные модели энергетических и энтропийных состояний механических, термодинамических и механотермодинамических систем. Ниже приведено построение обобщенной модели механотермодинамической среды. В основу анализа и синтеза положим:

- энергетическое описание сплошной среды;
- энтропийное описание той же среды;
- основные положения механотермодинамики;
- характерные экспериментальные данные.

2. Энергетическое и энтропийное описания состояний сплошной среды

Уравнения движения для элементарного объема dV сплошной среды имеют вид [1, 2]

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \dot{v}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где σ_{ij} – напряжения; ρ – плотность; f_i – объемные силы; v_i – скорости.

Закон сохранения механической энергии для объема сплошной среды V , с учетом суммирования по повторяющимся индексам, получается на основе скалярного умножения уравнения (1) на вектор скорости v_i :

$$\int_V v_i \sigma_{ij,j} dV + \int_V \rho v_i f_i dV = \int_V \rho v_i \dot{v}_i dV. \quad (2)$$

Правая часть уравнения (2) представляет собой изменение кинетической энергии K объема V сплошной среды:

$$\int_V \rho v_i \dot{v}_i dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v_i v_i}{2} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{v^2}{2} dV = \frac{dK}{dt}. \quad (3)$$

На основе известных преобразований с учетом теоремы Гаусса-Остроградского выводится уравнение механической энергии для сплошной среды [1]

$$\frac{dK}{dt} + \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{\Pi} \sigma_{ij} l_j d\Pi + \int_V \rho v_i f_i dV, \quad (4)$$

или

$$\frac{dK}{dt} + \frac{\delta U}{dt} = \frac{\delta A}{dt},$$

где ϵ_{ij} – скорость деформаций; Π – поверхность среды; l – направляющие косинусы на поверхности среды; $\delta U/dt$ – мощность внутренних усилий; $\delta A/dt$ – мощность внешних поверхностных и объемных сил.

Символ δ в выражении (4) используется, чтобы подчеркнуть, что приращение в общем случае может не быть точным дифференциалом.

В термомеханической постановке скорость изменения внутренней энергии U обычно [1] представляют интегралом

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \int_V \rho \dot{u} dV, \quad (5)$$

где $u = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{u(\Delta m)}{\Delta m}$ – удельная внутренняя энергия (плотность внутренней энергии) элементарного объема массы Δm .

Скорость притока тепла к среде выражается следующим образом:

$$\frac{\delta Q}{dt} = - \int_{\Pi} c_i l_i d\Pi + \int_V \rho z dV, \quad (6)$$

где c_i – характеристика потока тепла через единицу площади поверхности среды в единицу времени за счет теплопроводности; z – постоянная теплового излучения на единицу массы в единицу времени.

Тогда закон изменения энергии термомеханического континуума примет вид

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{\delta A}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}. \quad (7)$$

Преобразование в законе (7) интегралов по поверхности в интегралы по объему позволяет получить *локальную форму уравнения энергии*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) = \frac{1}{\rho} (\sigma_{ij} v_i)_{,j} + f_i v_i - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z. \quad (8)$$

Если из полученного выражения (8) вычесть скалярное произведение уравнения (1) на вектор скорости v_i , то будет получена следующая форма локального уравнения энергии:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{\rho} c_{i,i} + z = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{dq}{dt}, \quad (9)$$

где dq – приток тепла на единицу массы.

В соответствии с выражением (9) скорость изменения внутренней энергии равна сумме мощности напряжений и притока тепла к среде.

Применительно к *термодинамической системе* выделяют две характеристические функции ее состояния: абсолютную температуру T и энтропию S , которая может трактоваться как характеристика упорядоченности (или хаотичности) термодинамической системы. Обычным является предположение о том, что *энтропия обладает свойством аддитивности*, т.е.

$$S = \sum_i S_i. \quad (10)$$

В *механике сплошной среды* [1, 2] рассматривается *удельная на единицу массы энтропия* s , такая, что

$$S = \int_V \rho s dV. \quad (11)$$

Приращение удельной энтропии ds может происходить из-за взаимодействия с внешней средой (приращение $ds^{(e)}$) или внутри самой системы (приращение $ds^{(i)}$) [1, 2]:

$$ds = ds^{(e)} + ds^{(i)}. \quad (12)$$

Приращение $ds^{(i)}$ равно нулю при обратимых процессах и больше нуля – при необратимых. Если выразить приток тепла на единицу массы через dq , то для обратимых процессов приращение будет

$$T ds = dq. \quad (13)$$

В соответствии со вторым законом термодинамики, скорость изменения полной энтропии S сплошной среды объема V не может быть меньше суммы притока тепла через границу объема и энтропии, производимой внутри объема внешними источниками (*неравенство Клаузиуса-Дюгема*) [1, 2]:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho s dV \geq \int_V \rho e dV - \int_{\Pi} \frac{c_i l_i}{T} d\Pi, \quad (14)$$

где e – мощность локальных внешних источников энтропии, отнесенная к единице массы. Равенство в формуле (14) имеет место для обратимых процессов, а неравенство – для необратимых.

При преобразовании интеграла по поверхности в интеграл по объему в выражении (14) можно получить соотношение для *скорости внутреннего производства энтропии, отнесенной к единице массы*:

$$\gamma \equiv \frac{ds}{dt} - e - \frac{1}{\rho} \left(\frac{c_i}{T} \right)_{,j} \geq 0. \quad (15)$$

В механике сплошной среды предполагают, что тензор напряжений можно разложить на две части: *консервативную* $\sigma_{ij}^{(C)}$ для обратимых процессов (упругое деформирование, давление жидкости) и *диссипативную* $\sigma_{ij}^{(D)}$ для необратимых (пластическое деформирование, вязкие напряжения в жидкости):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(C)} + \sigma_{ij}^{(D)}. \quad (16)$$

Тогда выражение для скорости изменения энергии (9) можно представить в следующей форме:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(C)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{dq}{dt}. \quad (17)$$

Если предположить, что и при необратимых процессах выполняется соотношение (13), то скорость полного производства энтропии

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij}^{(C)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij}^{(D)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{T} \frac{dq}{dt}, \quad \text{или} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho T} \left(\frac{du_M}{dt} + \frac{du_T}{dt} \right) = \frac{1}{\rho T} \left(\frac{du_M^{(C)}}{dt} + \frac{du_M^{(D)}}{dt} + \frac{du_T}{dt} \right) \quad (18)$$

Выражение (18) для скорости полного изменения локальной энтропии в элементарном объеме среды может быть очень удобным в практическом отношении.

В силу предположения (10) об аддитивности энтропии к сумме в (18) могут быть добавлены другие члены, позволяющие учесть внутреннее производство энтропии в объеме жидкости (газа) за счет различных механизмов. Подобным образом для объема среды dV могут быть, например, учтены внутренние химические процессы [1].

Если рассматривать dV не как конечный, а как элементарный объем сплошной среды, то изменения его удельных энергии и энтропии на основе (17) могут быть записаны в следующей дифференциальной форме:

$$du = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + dq + \sum_k \mu_k dn_k; \quad (19)$$

$$ds = \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{1}{T} dq + \frac{1}{T} \sum_k \mu_k dn_k, \quad (20)$$

где n_k – число молей на единицу массы.

Для среды объема V выражения (19) и (20) на основе соотношений (5) и (11) примут вид

$$dU = \int_V \rho du dV = \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV + \int_V \rho dq dV + \int_V \rho \sum_k \mu_k dn_k dV; \quad (21)$$

$$dS = \int_V \rho ds dV = \frac{1}{T} \int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV + \frac{1}{T} \int_V \rho dq dV + \frac{1}{T} \int_V \rho \sum_k \mu_k dn_k dV. \quad (22)$$

Введение химической компоненты энтропии [последние слагаемые в (19)–(21)] позволило не только получить более полную картину состояния среды, но и описать процессы самоорганизации, приводящие к появлению устойчивых структур при увеличении притока энергии к среде.

Представленные выше известные модели энергетического и энтропийного состояний среды (17)–(22), являясь довольно общими, тем не менее, не позволяют дать удовлетворительного описания ряда процессов, происходящих в таком виде сплошной среды, как деформируемое твердое тело. Однако удобное представление об аддитивности компонент энергии и энтропии (11), применимое, например, для моделирования упругого деформирования, не подходит для описания нелинейных процессов. Имеющиеся модели не учитывают также рост энтропии за счет повреждаемости тел как особой характеристики изменения структурной организации. В соответствии с трибофатическими представлениями [3, 4], повреждаемость трактуется как любое необратимое изменение структуры, сплошности, формы и т.д. деформируемого твердого тела, приводящее к его предельному состоянию. Хотя, например, предел упругости неявным образом учитывается при моделировании пластичности, однако повреждаемость при реализации, например, механической или контрактной усталости происходит при линейном упругом деформировании и требует особого подхода при описании с учетом предельных усталостных характеристик материала. Указанные недостатки преодолеваются в подходе, который изложен ниже.

3. Механотермодинамические состояния среды

В рамках механотермодинамики развивается особый подход для оценки энтропии на основе обобщенного энергетического состояния. В соответствии с данным подходом, из общей энергии (удельной), обусловленной каким-либо конкретным видом нагружения (силовым, температурным

и др.), с помощью экспериментально определяемых коэффициентов a_l [3, 4] выделяется ее эффективная часть, непосредственно затрачиваемая на производство повреждений,

$$u_l^{eff} = a_l u_l, \quad (23)$$

где u_l – удельные внутренние энергии при отрыве (u_n), сдвиге (u_τ), тепловом воздействии (u_T).

Тогда полная удельная энергия элементарного объема и скорость ее изменения представимы в виде

$$u = \sum_l \left[(1 - a_l) u_l + u_l^{eff} \right]; \quad (24)$$

$$\frac{du}{dt} = \sum_l \left[(1 - a_l) \frac{du_l}{dt} + \frac{du_l^{eff}}{dt} \right]. \quad (25)$$

Кроме того, с помощью Λ -функций учитывается сложный (неаддитивный) характер взаимодействия между эффективными энергиями различной природы. Это позволяет оценить полную эффективную энергию системы:

$$u_\Sigma^{eff} = \Lambda_\alpha(u_l^{eff}) = \Lambda_{M \setminus T}(\Lambda_{\tau \setminus n}, a_l u_l) = \Lambda_{M \setminus T} \left\{ \Lambda_{\tau \setminus n} [a_n u_n + a_\tau u_\tau] + a_T u_T \right\}, \quad (26)$$

где Λ_α – возможные комбинации взаимодействия эффективных энергий (необратимых повреждений).

Особенность Λ -функций такова, что

$$u_\Sigma^{eff} \geq u_l^{eff}, \quad (27)$$

и, следовательно,

$$u_\Sigma^{eff} \geq \sum u. \quad (28)$$

Таким образом, с помощью коэффициентов a_l и Λ -функций появляется возможность оценки взаимодействия энергий, обусловленных нагрузками различной природы. Подобное взаимодействие может приводить как к резкому росту, так и значительному уменьшению эффективной – приводящей к повреждениям и предельным состояниям – энергии, по сравнению с рассчитанной по обычной аддитивной модели типа (17):

$$U_\Sigma = \sum a_l U_l. \quad (29)$$

Полная эффективная энергия объема V и ее накопление во времени с учетом формулы (26) имеют вид

$$U_\Sigma^{eff} = \int_V \rho u_\Sigma^{eff}(V) dV \quad (30)$$

и

$$U_\Sigma^{eff}(t) = \int_V \int_t \rho u_\Sigma^{eff}(V, t) dV dt. \quad (31)$$

Принципиальным моментом механотермодинамической модели является учет предельного состояния (пределы пластичности, прочности, усталости и др.):

$$u_\Sigma^{eff} = u_0, \quad (32)$$

где u_0 – предельная плотность внутренней энергии, трактуемая как начальная энергия активации процесса разрушения.

Эффективная энергия U_Σ^{eff} в случае объемного деформирования твердых тел может быть представлена функцией трех составляющих: тепловой U_T^{eff} , силовой U_n^{eff} и фрикционной U_τ^{eff} энергий:

$$U_\Sigma^{eff} = F_\Lambda(U_T^{eff}, U_n^{eff}, U_\tau^{eff}), \quad (33)$$

где F_Λ учитывает необратимое кинетическое взаимодействие частных повреждающих явлений. Составляющие $U_T^{eff}, U_n^{eff}, U_\tau^{eff}$ эффективной энергии U_Σ^{eff} не обладают, следовательно, свойством аддитивности.

Для механотермодинамической системы, представленной на рисунке 1, можно получить, с учетом (32) и (33) следующее условие предельного состояния [3, 4]

$$u_{\Sigma t}^{eff} = \int_0^t \left\{ \left[u_n^{eff}(\sigma_n^{(V,W)}, \varepsilon_n^{(V,W)}, t) + u_{\tau}^{eff}(\sigma_{\tau}^{(V,W)}, \varepsilon_{\tau}^{(V,W)}, t) \right] \Lambda_{n|\tau}(t) + u_T^{eff}(t) \right\} \Lambda_{T|M}(t) dt = u_0. \quad (34)$$

где σ_n, ε_n – отрывные и $\sigma_{\tau}, \varepsilon_{\tau}$ – сдвиговые части тензоров $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ напряжений σ и деформаций ε , представленные с учетом объемного и контактного (верхние индексы V и W) деформирования системы.

Критерий (34) гласит: когда сумма взаимодействующих эффективных составляющих (компонент) энергии, обусловленной действием комплекса силовых, фрикционной и тепловой (термодинамической) нагрузок, достигнет критической (предельной) величины u_0 , реализуется критическое (или предельное) состояние МТД-системы (как отдельных элементов, так и системы в целом). Физически оно определяется многими и разными повреждениями.

Соотношение между текущим состоянием (механическим, термомеханическим, энергетическим) элементарного объема тела (среды) и его предельным состоянием позволяет построить параметр локальной энергетической повреждаемости: безразмерный

$$\psi_u^{eff} = \frac{u_{\Sigma}^{eff}}{u_0} \quad (35)$$

или размерный

$$\psi_{u^*}^{eff} = u_{\Sigma}^{eff} - u_0. \quad (36)$$

Локальная энергетическая повреждаемость (35) или (36) является наиболее общей из параметров повреждаемости, построенных по различным механическим (термомеханическим) состояниям φ [3, 4]:

$$\psi_q = \varphi_q / \varphi_q^{(*lim)}, \quad (37)$$

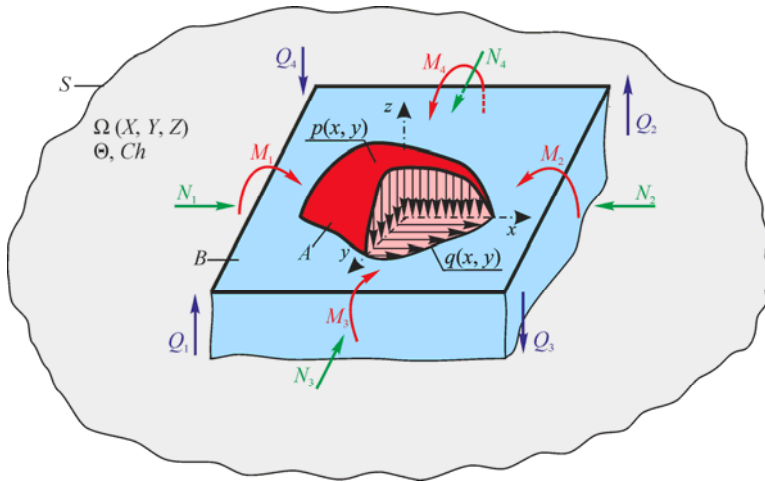


Рисунок 1 – Схема элементарной механотермодинамической (МТД) системы

где $\varphi = \sigma, \varepsilon, u$; σ – напряжения; ε – деформации; u – плотность внутренней энергии; $\varphi_q^{(*lim)}$ – предельные значения состояния φ $q \in \{eqv, ij, i, S, \frac{D}{ij}, n, \tau, int, u, u^n, u^{\tau}, u^{eff}\}$; eqv – эквивалентное механическое состояние; ij – компоненты тензора φ ; i – главные компоненты тензора φ ; S и $\frac{D}{ij}$ – шаровая и девиаторная части тензора φ ; n и τ – нормальные и касательные компоненты тензора φ ; int – интенсивность φ ;

u – удельная потенциальная энергия деформации (плотность внутренней энергии); индексы при u означают: u^n и u^{τ} – удельную потенциальную энергию деформации при растяжении-сжатии и сдвиге; u^{eff} – эффективную удельную потенциальную энергию деформации.

Интегральные меры повреждаемости могут быть построены на основе локальных мер (37) с помощью модели деформируемого твердого тела с опасным объемом [5].

Опасным объемом называется пространственная область нагруженного тела, в каждой точке которой значение локальной повреждаемости меньше предельного [3, 4]:

$$V_q = \left\{ dV / \varphi_q \geq \varphi_q^{(*lim)}, dV \subset V_k \right\}, \quad (38)$$

или

$$V_q = \left\{ dV / \psi_q \geq 1, dV \subset V_k \right\}.$$

Расчет опасных объемов ведется в соответствии со следующей общей формулой:

$$V_q = \iiint_{\Psi_q(V) \geq 1} dV. \quad (39)$$

Интегральное условие повреждаемости тела или системы может быть записано в виде

$$0 < \omega_q = \frac{V_q}{V_0} < 1, \quad (40)$$

где V_0 – рабочий объем тела.

При совместном анализе опасных объемов и распределения в них локальной повреждаемости вводится *функция повреждаемости единицы объема*

$$d\Psi_q = \psi_q(V)dV. \quad (41)$$

Тогда функцией повреждаемости всего объема V будет

$$\Psi_q = \int_{\Psi_q \geq 1} \psi_q(V)dV. \quad (42)$$

Простейшие функции *накопления повреждаемости во времени* для единицы объема и полного объема будут соответственно иметь вид

$$d\Psi_q^{(t)} = \int_t \psi_q(t)dt; \quad (43)$$

$$\Psi_q^{(t)} = \int_{\Psi_q \geq 1} \int_t \psi_q(V,t)dt dV. \quad (44)$$

Могут быть также использованы показатели средней по объему повреждаемости

$$\bar{\Psi}_q^{(V)} = \frac{1}{V_q} \int_{\Psi_q \geq 1} \psi_q(V)dV \quad (45)$$

и ее накопления во времени

$$\bar{\Psi}_q^{(V,t)} = \frac{1}{V_q} \int_{\Psi_q \geq 1} \int_t \psi_q(V,t)dV dt. \quad (46)$$

Анализ формул (35), (41), (43) приводит к выводу об их концептуальном родстве с понятием энтропии как разницы (или соотношения) между двумя состояниями (конфигурациями) системы, степени ее организации (хаотичности). Применительно к повреждаемости такими состояниями являются текущее и предельное.

Построим теперь на основании локальной энергетической повреждаемости (35) *удельную* (на единицу массы) *трибофатическую энтропию* (с точностью до постоянной):

$$s_{TF} = \Psi_u^{eff}(\Lambda_\alpha, a_l, \sigma_{ij}, T) = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} a_\Psi \frac{u_\Sigma^{eff}(\Delta m)}{u_0 \Delta m}, \quad (47)$$

$$\text{или} \\ s_{TF} = s_{TF*} = \frac{\Psi_{u*}^{eff}(\Lambda_\alpha, a_l, \sigma_{ij}, T)}{T} = \frac{u_\Sigma^{eff} - u_0}{T}. \quad (48)$$

где a_Ψ – размерный параметр (дж·моль⁻¹·К⁻¹).

Тогда на основании выражений для энтропии (18), а также формул (24), (25) *локальная энтропия и скорость ее изменения в элементарном объеме* будут

$$s = \frac{1}{T} \sum_l [(1 - a_l)u_l] + s_{TF} \quad (49)$$

и

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \sum_l \left[(1 - a_l) \frac{du_l}{dt} \right] + \frac{ds_{TF}}{dt}. \quad (50)$$

Из формул (49) и (50) видно, что, в отличие от термомеханической модели, *показатели состояния механотермодинамической системы и u и s не эквивалентны*. Это происходит вследствие введения в расчет трибофатической энтропии s_{TF} по формуле (47) предельного состояния в виде предельной плотности внутренней энергии u_0 .

Расчет трибофатической энтропии s_{TF} ведется не по всему объему V , а только по его повреждаемой части, т.е. по энергетическому эффективному опасному объему V_u^{eff} :

$$V_u^{eff} = \left\{ dV / u_{\Sigma}^{eff} \geq u_0, dV \subset V_k \right\}. \quad (51)$$

Тогда на основании формул (11), (47) и (51) *трибофатическая энтропия объема V*

$$S_{TF} = \int_{u_{\Sigma}^{eff}(V) \geq u_0} \rho s_{TF}(V) dV = \int_{u_{\Sigma}^{eff}(V) \geq u_0} \rho \psi_u^{eff}(V) dV, \quad (52)$$

где

$$\psi_u^{eff}(V) = \frac{u_{\Sigma}^{eff}(V)}{u_0} \quad \text{или} \quad \psi_u^{eff}(V) = \frac{\Psi_{u^*}^{eff}(V)}{T} = \frac{u_{\Sigma}^{eff}(V) - u_0}{T(V)}, \quad (53)$$

а ее накопление

$$S_{TF}(t) = \int_{t \ u_{\Sigma}^{eff}(V,t) \geq u_0} \int \rho s_{TF}(V,t) dV dt = \int_{t \ u_{\Sigma}^{eff}(V,t) \geq u_0} \int \rho \psi_u^{eff}(V,t) dV dt, \quad (54)$$

где

$$\psi_u^{eff}(V,t) = \frac{u_{\Sigma}^{eff}(V,t)}{u_0} \quad \text{или} \quad \psi_u^{eff}(V,t) = \frac{\Psi_{u^*}^{eff}(V,t)}{T(V,t)} = \frac{u_{\Sigma}^{eff}(V,t) - u_0}{T(V,t)}. \quad (55)$$

Следует отметить *принципиальную особенность* трибофатических полной S_{TF} и удельной s_{TF} энтропии. Они дают возможность оценить разность между двумя состояниями не только количественно (как и термомеханическая энтропия), но и качественно, благодаря явному введению в расчет удельной энтропии s_{TF} величины предельной плотности внутренней энергии u_0 . Таким образом, s_{TF} и S_{TF} позволяют ответить на вопрос, насколько опасно текущее состояние тела или системы в сравнении с предельными состояниями.

Полная энтропия и скорость ее изменения для твердого тела системы с учетом (52) и (54) примут вид

$$S = \int_V \frac{1}{T(V)} \sum_l \rho [(1 - a_l(V)) u_l(V)] dV + S_{TF} \quad (56)$$

и

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{1}{T(V)} \sum_l \rho \left[(1 - a_l(V)) \frac{du_l(V)}{dt} \right] dV + \frac{dS_{TF}}{dt}. \quad (57)$$

На основании формул (47)–(57) может быть построена *функция накопления полной энтропии во времени*:

$$\begin{aligned} S(t) &= \int \int_V \sum_l \rho s_l(V,t) dV dt + \int_{t \ u_{\Sigma}^{eff}(V,t) \geq u_0} \int \rho s_{TF}(V,t) dV dt = \\ &= \int \int_V \frac{1}{T(V,t)} \sum_l \rho \left[(1 - a_l(V,t)) \frac{du_l(V,t)}{dt} \right] dV dt + \int_{t \ u_{\Sigma}^{eff}(V,t) \geq u_0} \int \rho \psi_u^{eff}(V,t) dV dt. \end{aligned} \quad (58)$$

В практическом плане, имея представление о предельных состояниях тела или системы, модели (56)–(58) позволяют ответить на вопрос о том, является ли текущее состояние точкой качественного скачка в системе, т.е. является ли текущее состояние близким к предельному. Подобный (*диалектический по сути*) *качественный переход* отличается от, например, точки бифуркации, содержащей неопределенность относительно дальнейшего развития событий, возможностью прогнозировать поведение системы после перехода на основании анализа величин s_{TF} и S_{TF} . Прогнозировать ситуацию после прохождения данной точки позволяют также конкретные предельные состояния (предел прочности, механической или контактной усталости и др.): принципиальное изменение свойств и поведения системы либо формирование новой системы на основе предыдущей.

Примером могут служить нелинейное деформирование или формирование микротрещин в теле (или системе), приводящие к изменению его прочностных и усталостных свойств, а следовательно, и реакции на нагружение. Появление же макротрещин, в свою очередь, приводит к локальному нарушению сплошности среды – появлению новых свободных поверхностей (возможно, новых тел – продуктов разрушения), т.е. новой системы.

Заметим, что построение моделей (56)–(58) велось на основе традиционного представления об аддитивности энтропии (10), хотя и с учетом ряда существенных уточнений. Данные модели содержат в том числе и обратимые процессы, описываемые компонентами энтропии s_l , не приводящими к появлению первичных повреждений, а следовательно, и предельных состояний – точек качественного изменения системы.

Поэтому более целесообразной для качественного и количественного анализа эволюции систем (проходящих состояния, традиционно определяемые как бифуркационные вилки) может быть оценка энтропийного состояния на основе механотермодинамической модели твердого тела, использующей лишь трибофатическую энтропию. В этом случае формулы (52) и (54) для энтропии и ее накопления примут вид

$$S = S_{TF} = \int_{u_{\Sigma}^{eff}(V,t) \geq u_0} \rho s_{TF}(V) dV = \int_{u_{\Sigma}^{eff}(V,t) \geq u_0} \rho \Psi_u^{eff}(V) dV, \quad (59)$$

и

$$S(t) = S_{TF}(t) = \int_{t, u_{\Sigma}^{eff}(V,t) \geq u_0} \int \rho s_{TF}(V) dV dt = \int_{t, u_{\Sigma}^{eff}(V,t) \geq u_0} \int \rho \Psi_u^{eff}(V, t) dV dt. \quad (60)$$

Для идентификации точек качественного изменения – предельных состояний тел (систем) – могут быть использованы показатели относительной интегральной энтропии и ее накопления, построенные на основе представления об интегральном условии повреждения тела (40):

$$\omega_S = \frac{S_{TF}}{V_0} = \frac{1}{V_0} \int_{u_{\Sigma}^{eff}(V,t) \geq u_0} \rho s_{TF}(V) dV; \quad (61)$$

$$\omega_S(t) = \frac{S_{TF}(t)}{V_0} = \frac{1}{V_0} \int_{t, u_{\Sigma}^{eff}(V,t) \geq u_0} \int \rho s_{TF}(V) dV dt. \quad (62)$$

Показатели S_{TF} , $S_{TF}(t)$, ω_S , $\omega_S(t)$ могут неограниченно расти, позволяя описывать не только предельные состояния типа (32), но и различные запредельные состояния; по существу, они «обеспечивают» количественное описание закона возрастания энтропии.

Построим теперь на основании формул (22), (56), (58) и (60) *обобщенные выражения для энтропии, скорости ее изменения, а также и накопления в механотермодинамической системе, состоящей из жидкой (газообразной) среды объема V и твердого тела объема V_{Ψ}* :

$$\begin{aligned} S &= \int_V \rho s_T dV + \int_{V_{\Psi}} \sum_l \rho s_l dV_{\Psi} + \int_{u_{\Sigma}^{eff} \geq u_0} \rho s_{TF} dV_{\Psi} = \\ &= \int_V \frac{1}{T} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \int_V \frac{1}{T} \rho q dV + \int_V \frac{1}{T} \rho \sum_k \mu_k n_k dV + \\ &+ \int_{V_{\Psi}} \frac{1}{T} \sum_k \rho [(1 - a_k) u_k] dV_{\Psi} + \int_{u_{\Sigma}^{eff} \geq u_0} \rho \Psi_u^{eff} dV_{\Psi}; \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \int_V \rho \frac{ds_T}{dt} dV + \int_{V_{\Psi}} \sum_l \rho \frac{ds_l}{dt} dV_{\Psi} + \int_{V_{\Psi}} \rho \frac{ds_{TF}}{dt} dV_{\Psi} = \\ &= \int_V \frac{1}{T} \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} dV + \int_V \frac{1}{T} \rho \frac{dq}{dt} dV + \int_V \frac{1}{T} \rho \sum_k \mu_k \frac{dn_k}{dt} dV + \\ &+ \int_{V_{\Psi}} \frac{1}{T} \sum_k \rho \left[(1 - a_k) \frac{du_k}{dt} \right] dV_{\Psi} + \int_{u_{\Sigma}^{eff} \geq u_0} \rho \frac{d\Psi_u^{eff}}{dt} dV_{\Psi}; \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t \int_V \rho s_T dV dt + \int_t \int_{V_{\Psi}} \sum_l \rho s_l dV_{\Psi} dt + \int_t \int_{u_{\Sigma}^{eff} \geq u_0} \rho s_{TF} dV_{\Psi} dt = \\ &= \int_t \int_V \frac{1}{T} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV dt + \int_t \int_V \frac{1}{T} \rho q dV dt + \int_t \int_V \frac{1}{T} \rho \sum_k \mu_k n_k dV dt + \\ &+ \int_t \int_{V_{\Psi}} \frac{1}{T} \sum_l \rho [(1 - a_l) u_l] dV_{\Psi} dt + \int_t \int_{u_{\Sigma}^{eff} \geq u_0} \rho \Psi_u^{eff} dV_{\Psi} dt. \end{aligned} \quad (65)$$

Аналогичным образом можно построить показатели энтропийного состояния для системы из многих сред.

Отметим, что взаимодействие (контактное) двух сред в формулах (63)–(66), которое может иметь сложный характер, учтено лишь неявно через параметры состояния сред (напряжения, де-

формации, температуру). Очевидно, что это лишь первый шаг к полному (обобщенному) решению поставленной задачи.

Упрощенный вариант записи выражения (64) для приращения энтропии механотермодинамической системы, состоящей из конечных объемов dV и dV_ψ , был представлен в работе [6] на основании которых имеем:

$$dS = (dS)_T + (d_i S)_{TF} = \frac{dU + \Delta p dV}{T} - \frac{1}{T} \sum_k \mu_k dN_k + \Psi_u^{eff} dV_\psi. \quad (66)$$

Выражение (66) может быть также представлено в терминах удельных величин следующим образом:

$$dS = \int_V \frac{\rho du + \rho dp}{T} dV - \int_V \frac{1}{T} \rho \sum_k \mu_k dn_k dV + \int_{u_\Sigma^{eff} \geq u_0} \rho d\Psi_u^{eff} dV_\psi \quad (67)$$

или на основе (64) –

$$\frac{dS}{dt} = \int_V \frac{\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \rho dq}{T dt} dV - \int_V \frac{1}{T} \rho \sum_k \mu_k \frac{dn_k}{dt} dV + \int_{u_\Sigma^{eff} \geq u_0} \rho \frac{d\Psi_u^{eff}}{dt} dV_\psi. \quad (68)$$

В формулах для расчета трибофатической энтропии S_{TF} и ее накопления $S_{TF}(t)$ (52) и (54) принимается, что интегрирование удельной энтропии s_{TF} проводится только по повреждаемой части тела – опасному объему. Однако может быть учтено и влияние неповреждаемых областей путем интегрирования S_{TF} по всему объему:

$$S_{TF} = \int_V \rho s_{TF}(V) dV = \int_V \rho \Psi_u^{eff}(V) dV; \quad (69)$$

$$S_{TF}(t) = \int_V \int_t \rho s_{TF}(V, t) dV dt = \int_V \int_t \rho \Psi_u^{eff}(V, t) dV dt, \quad (70)$$

где

$$\Psi_u^{eff} = \begin{cases} a_\psi \frac{u_\Sigma^{eff}(V, t)}{u_0} \geq 1, & \text{при } u_\Sigma^{eff} \geq u_0; \\ a_\psi \frac{u_\Sigma^{eff}(V, t)}{u_0} < 1, & \text{при } u_\Sigma^{eff} < u_0, \end{cases} \quad (71)$$

или

$$\Psi_u^{eff} = \frac{\Psi_{u^*}^{eff}(V, t)}{T(V, t)} = \begin{cases} \frac{u_\Sigma^{eff}(V, t) - u_0}{T(V, t)} \geq 0, & \text{при } u_\Sigma^{eff} \geq u_0; \\ \frac{u_\Sigma^{eff}(V, t) - u_0}{T(V, t)} < 0, & \text{при } u_\Sigma^{eff} < u_0. \end{cases} \quad (72)$$

Из выражения (72) видно, что вне опасного объема (при $u_\Sigma^{eff} < u_0$) обнаруживается $\Psi_u^{eff} < 0$. Это означает, что и удельная трибофатическая энтропия s_{TF} оказывается отрицательной (или меньше единицы для альтернативного ее определения) вне опасного объема, где предельное состояние не достигается. Отрицательные значения Ψ_u^{eff} и S_{TF} могут трактоваться, следовательно, как отсутствие повреждаемости или, иными словами, как сохранение структуры и/или свойств тела.

Как следует из изложенного, предположение об аддитивности энтропии в общем случае для системы, содержащей как твердое тело, так и жидкость (газ), в которой могут происходить химические реакции, является неправомерным. Тогда необходимо, по аналогии с Λ -функциями взаимодействия энергий различной природы (26), ввести функции взаимодействия энтропий различной природы, дополнив ими выражение (66) с целью определения полной эффективной энтропии:

$$\begin{aligned} dS_{total}^{eff} &= \Lambda_{T\backslash TF}^{(s)} (dS_T + d_i S_{TF}) = \Lambda_{T\backslash TF}^{(s)} \left[\Lambda_{Q\backslash Ch}^{(s)} (dS_T^Q + dS_{Ch}^Q) + d_i S_{TF} \right] = \\ &= \Lambda_{T\backslash TF}^{(s)} \left[\Lambda_{Q\backslash Ch}^{(s)} \left(\frac{dU + \Delta p dV}{T} - \frac{1}{T} \sum_k \mu_k dN_k \right) + \Psi_u^{eff} dV_\psi \right], \end{aligned} \quad (73)$$

или

$$dS_{total}^{eff} = \Lambda_{T\backslash TF\backslash Ch}^{(s)}(dS_T + d_i S_{TF}) = \Lambda_{T\backslash TF\backslash Ch}^{(s)} \left[\frac{dU + \Delta p dV}{T} - \frac{1}{T} \sum_k \mu_k dN_k + \Psi_u^{eff} dV_\Psi \right], \quad (74)$$

где индексы Q и Ch обозначает термодинамическую и химическую компоненты энтропии.

В формулах (73), (74) введены обобщенные функции взаимодействий $\Lambda_{T\backslash TF}^{(s)}$, $\Lambda_{Q\backslash Ch}^{(s)}$, $\Lambda_{T\backslash TF\backslash Ch}^{(s)}$ в механотермодинамических системах. Это означает, что гипотеза аддитивности термодинамической и трибофатической энтропии не принимается.

Таким образом, выше представлены модели энергетического, энтропийного и информационного состояний механотермодинамических систем, а также их эволюции.

Центральным понятием для всех моделей является повреждение – всякое необратимое изменение размеров, свойств и состояния тела или среды. Особенность представленной модели заключается в том, что из полной подведенной к системе энергии выделяется поглощенная часть, затрачиваемая на производство повреждений. Кроме того, учитывается, что энергии различной природы (силовые, температурные и др.) не суммируются, а взаимодействуют сложным образом. Генерирование и движение повреждений характерно для любого вида нагружения; их нелинейное взаимодействие и накопление ведет к достижению эффективной энергией соответствующего предельного значения. Отказ от гипотезы аддитивности эффективных энергий и, следовательно, энтропии, обусловленных нагрузками разной природы, открывает путь к уточненному и верному описанию многообразных состояний МТД-системы, которые характеризуются соответствующими параметрами (повреждаемость, энтропия, информация и т. д.).

Модель трибофатической энтропии как функция повреждаемости тела или системы может быть весьма полезна для описания точек качественных диалектических преобразований системы, т.е. ее эволюции. *Величина и характер повреждаемости позволяет прогнозировать не только момент наступления данных преобразований, но и их направленность.* Это дает возможность снять неопределенность относительно дальнейшей судьбы системы при обычной трактовке данных точек как точек бифуркации. Важным является и то, что информация, связанная с повреждаемостью, имеет качественную трактовку: *положительная информация обусловлена самопроизвольным упрочнением, а отрицательная – самопроизвольным разупрочнением.*

Подобная связь повреждений (энтропии) и информации позволяет по-новому взглянуть на эволюцию живых и неживых систем и жизни в целом как особого способа накопления необратимых повреждений.

4. Экспериментальная апробация

Экспериментальный анализ обобщенного критерия (34) предельного состояния МТД-системы крайне затруднен из-за отсутствия соответствующих опытных данных. Их получение является хотя и очень актуальной, но весьма трудной и дорогостоящей проблемой.

Поэтому ниже дается анализ одного из его частных случаев (34) – критерия предельного состояния при изотермической усталости [3]

$$\Lambda_{M\backslash T} (a_T T_\Sigma + a_n \sigma^2) = u_0, \quad (75)$$

который представляется в виде

$$\lg \sigma_{-IT} = \frac{1}{2} \lg C_T; \quad C_T = [u_0 / \Lambda_{M\backslash T} - a_T T_\Sigma] \cdot \frac{1}{a_n}. \quad (76)$$

где a_n и a_T – параметры, выделяющие из полной энергии ее эффективные части.

Согласно (76), зависимость предельных напряжений от параметра термомеханического сопротивления C_T в двойных логарифмических координатах должна быть прямой линией с угловым коэффициентом (1/2). Общая закономерность такова: *чем выше значение параметра C_T , тем больше величина σ_{-IT} .* На рисунке 2 дано убедительное подтверждение этой зависимости для многочисленных марок стали, испытанных на усталость в различных условиях. Видно, что значение C_T изменялось более чем на два порядка, т. е. в 100 и более раз, а величины предела выносливости σ_{-IT} – более чем на порядок, т. е. в 10 и более раз, при этом температура испытаний варьировалась в диапазоне от гелиевой до $0,8T_s$. Как следует из рисунка 2, уравнение (76) адекватно описывает результаты более 130 экспериментов.

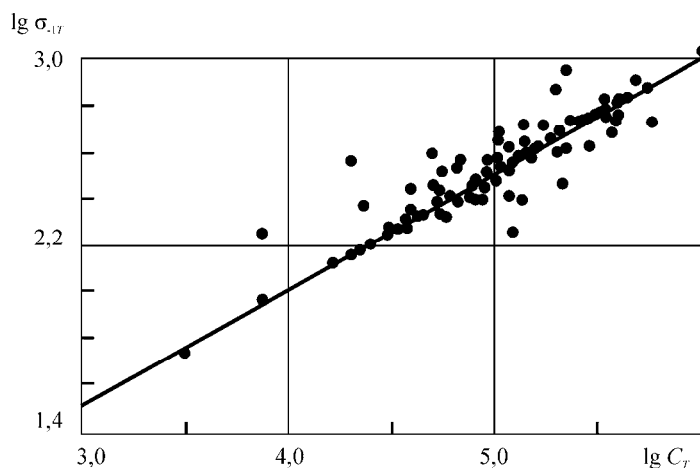


Рисунок 2 – Зависимость пределов выносливости конструкционных сталей от параметра C_T (А. В. Богданович, Л. А. Сосновский)

Эффективность нашего анализа влияния температуры на сопротивление усталости конструкционных сталей становится зримой, если те же экспериментальные данные представить в виде графиков в традиционных координатах $\sigma_{-1}(T)$

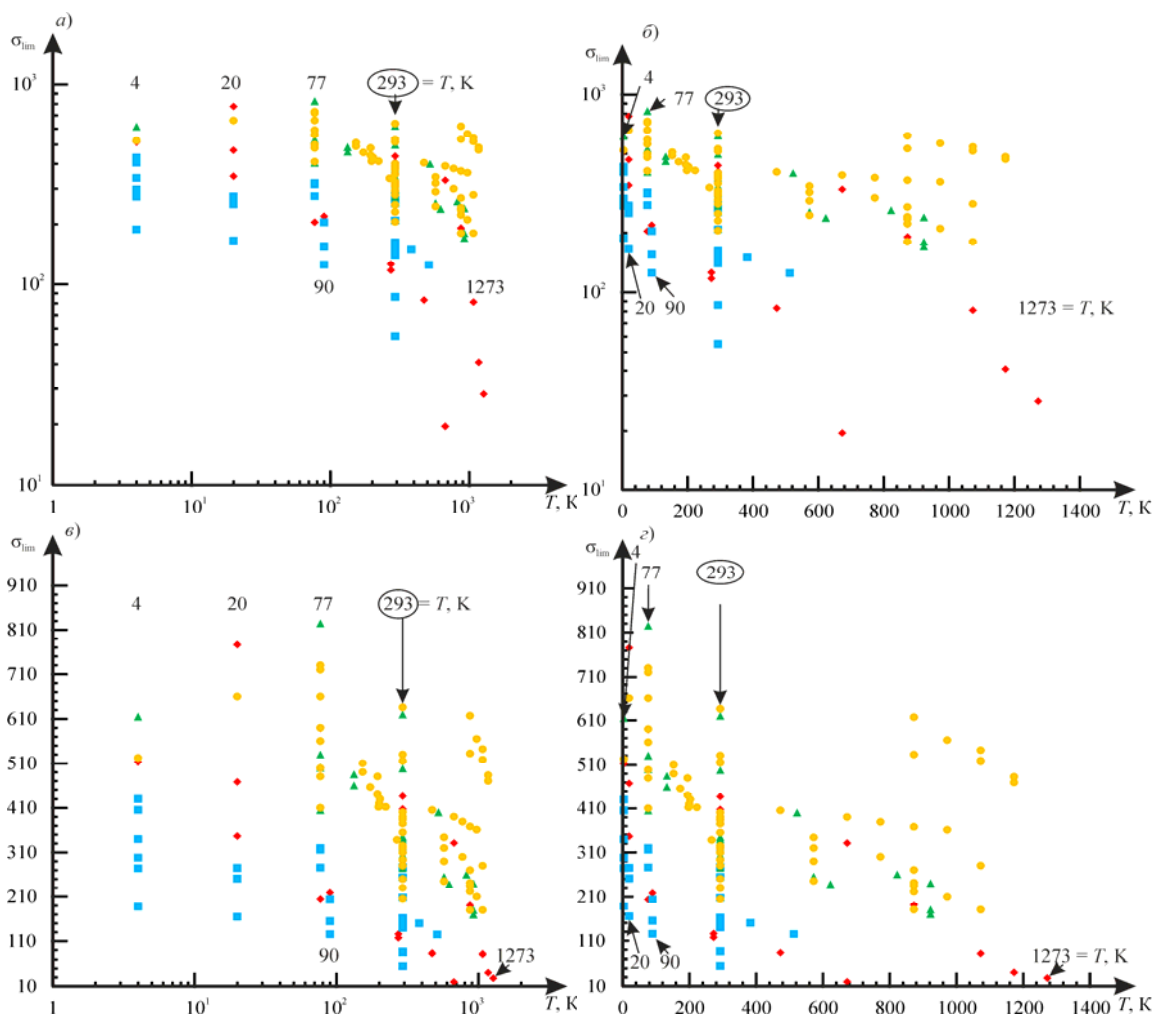


Рисунок 3 – Явные зависимости предела выносливости от температуры для металлических материалов в логарифмических (а), полулогарифмических (б, в) и равномерных (г) координатах

Таким образом, экспериментально подтверждена эффективность полученной модели.

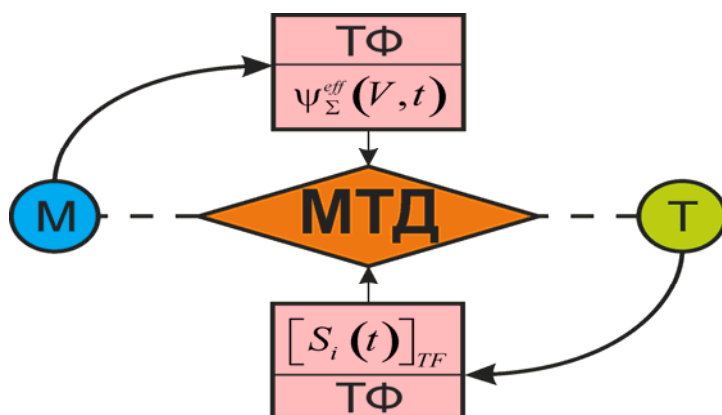


Рисунок 4 – Трибофатические мосты от механики (М) и термодинамики (Т) к механотермодинамике (МТД) [сплошные линии со стрелками; пунктирами показаны нереализованные (в течение более 150 лет) прямые пути от М или Т к МТД]

Заключение

В данной работе, по существу, построен переход от механики и термодинамики к механотермодинамике, исходя из анализа энергетических и энтропийных состояний сложной системы. Для простейших условий испытания (или эксплуатации) дана экспериментальная его апробация.

РЕЗЮМЕ

В литературе изложены различные модели энергетических и энтропийных состояний механических, термодинамических и механотермодинамических систем. В статье дано построение обобщенной модели механотермодинамической среды. В основу анализа и синтеза положены: энергетическое описание сплошной среды; энтропийное описание той же среды; основные положения механотермодинамики; характерные экспериментальные данные.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Мейз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М. : Мир, 1974. – 318 с.
- 2 Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1973. – Т. 2. – 420 с.
- 3 Сосновский, Л. А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. – Гомель : БелГУТ, 2007. – 434 с.
- 4 Щербаков, С. С. Механика трибофатических систем / С. С. Щербаков, Л. А. Сосновский. – Минск : БГУ, 2010. – 407 с.
- 5 Сосновский, Л. А. Статистическая механика усталостного разрушения / Л. А. Сосновский. – Минск : Наука и техника, 1987. – 288 с.
- 6 Sosnovskiy, L. A. Mechanothermodynamical system and its behavior / L. A. Sosnovskiy, S. S. Sherbakov // Continuum Mech. Thermodyn. – 2012, – Vol. 24, Issue 3, – P. 239–256.
- 7 Прочность материалов и конструкций / ред. В. Т. Троценко [и др.]. – Киев : Академперіодика, 2005. – 1088 с.
- 8 Форрест, П. Усталость металлов : пер. с англ. / П. Форрест ; ред. С. В. Серенсен. – М. : Машиностроение, 1968. – 352 с.
- 9 Богданович, А. В. Прогнозирование предельных состояний силовых систем / А. В. Богданович. – Гродно : ГрГУ, 2008. – 372 с.
- 10 Журков, С. Н. Дилатонный механизм прочности твердых тел / С. Н. Журков // Физика прочности и пластичности. – Л. : Наука, 1986. – С. 5–11.
- 11 Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев [и др.]. – М. : Гос. науч.-техн. изд. машиностроительной лит., 1958. – 1118 с.
- 12 Регель, В. Р. Кинетическая природа прочности твердых тел / В. Р. Регель, А. И. Слуцкер, Э. Е. Томашевский. – М. : Наука, 1974. – 560 с.

SUMMARY

Literature contains various models of energy and entropy states of mechanical, thermodynamic and mechanothermodynamic systems. Construction of the generalized model of mechanothermodynamic continuum is given in the paper. The analysis and synthesis are based on energy description of a continuum, entropy description of the same continuum, the main provisions of mechanothermodynamics; typical experimental data.

Поступила в редакцию 10.10.2013

КРИТИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА ДЛЯ СЖАТЫХ СТОЕК ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

к. т. н. Косых Э. Г., Сейфер Д. В.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Рассмотрим защемленную внизу упругую стойку (рисунок 1), нагруженную на торце сжимающей силой P и равномерно распределенной вдоль оси продольной нагрузкой интенсивности p . Примером такой нагрузки может служить вес стойки постоянного сечения и жесткости $EI = \text{const}$. При продольном изгибе стойки произвольное сечение с координатой x отклоняется на величину $y(x)$.

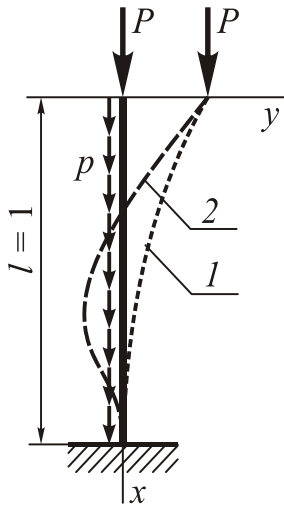


Рисунок 1

Дифференциальное уравнение продольного изгиба стойки имеет вид

$$(EIy'')'' + [(P + px)y']' = 0. \quad (1)$$

Краевую задачу для определения критического значения нагрузки получим, подчиняя решение уравнения (1) граничным условиям

$$M(0) = 0; \quad y(l) = 0; \quad y'(l) = 0; \quad Q(l) = 0, \quad (2)$$

где $M(x)$ – изгибающий момент, $Q(x)$ – поперечная сила.

Положим $P = 0$, $p \neq 0$ и введем безразмерный параметр интенсивности веса $\beta = pl^3/EI$. В настоящее время общепризнано, что критическое значение данного параметра $\beta_{kr} = 7,84$. Однако в предлагаемой работе показано, что это значение неверно и существенно завышено. Следуя предложенному автором в [1] методу интегрирования систем уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, выполним преобразование: $y \equiv y_1$; $y_1'' = y_2$. Далее, вводя аналогично β безразмерную силу $\alpha = Pl^2/EI$, вместо (1) получим матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \alpha + \beta x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (3)$$

Известно [2], что любая система линейных дифференциальных уравнений второго порядка может быть приведена к виду:

$$\{y\}'' + In(x)\{y\} = 0, \quad (4)$$

где вектор $\{y\}^T = (y_1, y_2)$, а матрица $In(x)$ определена как инвариант линейной системы (3).

С помощью матрицы преобразования переменных V и ей обратной \bar{V}

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta x & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\beta x & 1 \end{pmatrix}$$

получим для инварианта $In(x)$ следующее выражение:

$$In(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5\beta & 0 \\ -0,5\alpha\beta & 0,5\beta \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,5\beta^2 & 0 \end{pmatrix} x^2. \quad (5)$$

Если стойка нагружена только весом, то в (3), (5) надо положить $\alpha = 0$.

Решение системы (1), приведенной к форме (4), получено в замкнутом виде помощью матричных функций [1], представленных сходящимися рядами

$$y = Com(In, x) \cdot \{C\} + Sim(In, x) \cdot \{D\}, \quad (6)$$

где

$$Com(In, x) = I + \sum_1^n (-1)^n x^{2n} \sum_{m=0}^{n-mp} x^m \sum_{\sum k_i=m}^n \prod In_{k_i} a_{n_i}; \quad \{C\} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix};$$

$$Sim(In, x) = xI + \sum_1^n (-1)^n x^{2n+1} \sum_{m=0}^{n-mp} x^m \sum_{\sum k_i=m}^n \prod In_{k_i} b_{n_i}; \quad \{D\} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix};$$

$$a_{n_i} = \frac{1}{k_i!(2n-1+\sum k_j)(2n+\sum k_j)}; \quad b_{n_i} = \frac{1}{k_i!(2n+1+\sum k_j)(2n+\sum k_j)}.$$

Входящие в (6) векторы $\{C\}$, $\{D\}$ – постоянные интегрирования, которые должны быть

подчинены граничным условиям (2). Целочисленные коэффициенты $a_{n_i}^{-1}$, $b_{n_i}^{-1}$, $k_i = i$ соответствуют номерам производных, определяющих матрицы-коэффициенты разложения инварианта в ряд. Индекс «тр» над знаком суммы определяет порядок старшей производной.

В соответствии с граничными условиями получим определитель третьего порядка $\text{Det}_0(\beta)$, из равенства нулю которого найдем критические значения силовых параметров. Каждому значению параметра соответствует своё решение, определяющее форму потери устойчивости.

Из графика на рисунке 2 следует, что в области $0 \leq \beta \leq 1,1\pi^2$ существует два корня: $\beta_{kr1} = 6,406$ и $\beta_{kr2} = 10,264$, которые соответствуют первой и второй формам потери устойчивости по Эйлеру, отмеченным на рисунке 1 цифрами «1» и «2».

Таким образом, потеря устойчивости происходит при более низком значении критического параметра ($\beta_{kr1} = 6,406$), чем утверждается в учебной и научной литературе [2], [4], [5]. Наше исследование показало, что приведенное там значение ($\beta_{kr1} = 7,84$) завышено и неверно по существу.

Вернемся к уравнению (1), в котором примем $P = 0$. Очевидно существование первого интеграла, что позволяет понизить порядок уравнения

$$(EI \cdot y'')' + px \cdot y' = C.$$

Легкость дальнейшего понижения порядка уравнения при $EI = \text{const}$, возможно, спровоцировало ошибку в решении краевой задачи. Поперечная сила $Q = (EI \cdot y'')' = C - px \cdot y'$, откуда с учетом граничных условий $y'(l) = 0$; $Q(l) = 0$ получим, что $C = 0$. Однако значение поперечной силы $Q(0)$ нельзя принять равным нулю, так как, удовлетворяя условию на границе при $x \rightarrow 0$, имеем при потере устойчивости $y' \rightarrow \infty$, и, следовательно, неопределенность. Поэтому принятие условия $Q(0) = 0$ и сведение задачи к уравнению Бесселя второго порядка приводит к линейной зависимости одного из решений системы уравнений и, как следствие, к неверному результату.

Учитывая, что $C = 0$, выполним замену переменных $y \equiv y_1$; $y_1' = y_2$, что соответствует классическому решению. Тогда инвариант системы уравнений примет вид:

$$\text{In}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0.5\alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x^2 \quad (7)$$

Сравнивая (7) с (5), видим принципиальное различие математических моделей. Соответственно, получатся разные значения собственных чисел.

На рисунке 3 показано изменение определителя третьего порядка, соответствующего граничным условиям (2) (кривая 1) и определителя второго порядка классического решения [3] (кривая 2). Кривая 1 определяет в интервале $(0 - 71,0)$ три корня: $\beta_{kr1}^{(1)} = 6,40$; $\beta_{kr2}^{(1)} = 10,26$; $\beta_{kr3}^{(1)} = 58,03$, а кривая 2 – единственный корень $\beta_{kr}^{(2)} = 7,84$, что делает классическое решение сомнительным, точнее – неверным.

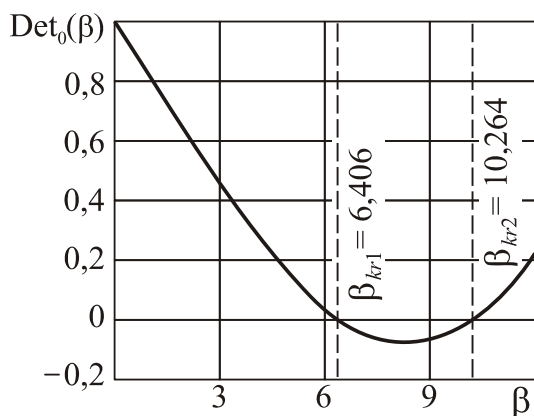


Рисунок 2

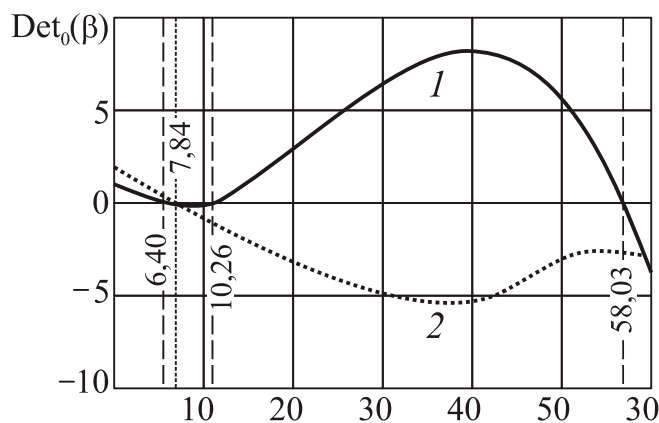


Рисунок 3

Выше было принято, что жесткость стойки EI не зависит от продольной координаты x . Откажемся от этого ограничения, однако здесь необходимо заметить, что геометрия поперечного сечения стойки зависит от многих факторов, например – конструктивных, а потому говорить об аналитичности функции жесткости по продольной координате достаточно проблематично. Поэтому далее будем даже полагать, что исследуется модель конструкции, выполненная в соответствии с

заданной функцией жесткости, такой, чтобы выполнить условия аналитичности, необходимые для получения точного решения уравнений типа (1).

Обозначим $D(x) = EI(x)$ и выберем функцию жесткости, например, в виде

$$D(x) = D(0) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda \gamma [\delta(x-1) + (1-\delta)(x^2-1)] + \lambda(1-\gamma)(x-1)^2}.$$

Дробный множитель будем понимать как относительную жесткость D .

Очевидно, полагая $\lambda = 0$, получим $D(x) = \text{const} = D(0)$. Если $\lambda \neq 0$, то для $x = 0$ получим значение жесткости $D(0)$, а при $x = 1$ жесткость равна

$$D(1) = (1 + \lambda)D(0).$$

То есть, в принятой модели параметр λ показывает, на сколько в долях $D(0)$ увеличена жесткость в конечном сечении по отношению к начальному сечению. В формуле имеется несколько параметров, позволяющих варьировать жесткость по длине стержня. Для примера запишем систему для конкретного случая выбранных параметров. Например, при любом λ и $\gamma = 1$; $\delta = 1$ система уравнений (3) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1-\lambda(x-1)}{1+\lambda} \\ r + \vartheta x & \frac{\alpha + \beta x}{1+\lambda} (1-\lambda(x-1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0,$$

где r и ϑ – параметры, учитывающие наличие упругого основания переменной жесткости по Винклеру.

Рассмотрим теперь модель более общего типа при произвольных значениях всех введенных параметров. Обобщим уравнение (1) с учетом упругого основания:

$$(D(x)y''(x))'' + ((P + px)y')' + (r + \vartheta x)y = 0.$$

Выполнив соответствующие преобразования (см. выше), получим выражение для инварианта $In(x)$:

$$\begin{aligned} In(x) = & \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_0 \\ r & \alpha\lambda_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_0\beta & -\lambda_1 \\ \vartheta - \frac{1}{2}\lambda_0\alpha\beta & \alpha\lambda_1 + \frac{1}{2}\beta\lambda_0 \end{pmatrix} x + \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_1\beta & -\lambda_2 \\ -\frac{1}{2}(\alpha\lambda_1 + \frac{1}{2}\beta\lambda_0)\beta & \alpha\lambda_2 + \frac{1}{2}\beta\lambda_1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_2\beta & 0 \\ -\frac{1}{2}(\alpha\lambda_2 + \frac{1}{2}\beta\lambda_1)\beta & \frac{1}{2}\lambda_2\beta \end{pmatrix} x^3 + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\lambda_2\beta^2 & 0 \end{pmatrix} x^4. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены обозначения $\lambda_0 = \frac{1 + \lambda(1 - 2\chi(1 - \gamma))}{1 + \lambda}$;

$$\lambda_1 = \frac{\lambda[(1 - \gamma)(3\chi - 2) - \delta\gamma]}{1 + \lambda}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda[(1 - \gamma)(1 - \chi) - \gamma(1 - \delta)]}{1 + \lambda}.$$

Представление инварианта (8) помощью величин (6) позволяет получить точные решения для критических параметров нагрузки и, более того, исследовать влияние на эти параметры характера распределения жесткости по длине стойки.

На рисунке 4 приведен пример подбора модели жесткости в зависимости от значений параметров δ, γ . Кривые показывают приращение жесткости по длине стержня: 1 – «вогнутая» ($\delta = 0, \gamma = 1$); 2 – «выпуклая» ($\delta = 0, \gamma = 0$); 3 – «почти линейная» ($\delta = 0,5, \gamma = 0,5$), суть комбинация предыдущих. При этом принято $\lambda = 0,5; \chi = 0$.

Принятая модель работает и при $-1 < \lambda < 0$, что позволяет сравнить решения с «тупым» и «острым» концами в сечении $x = 1$. Важно отметить, что собственным значениям в каждой из пар $(\alpha_{k1}, \beta_{k1})$ и $(\alpha_{k2}, \beta_{k2})$ соответствуют «похожие» в некотором смысле собственные формы. Это позволяет сформулировать мысль, что при наличии распределенной нагрузки форму потери статической устойчивости, соответствующую критическому параметру $\beta_{k2} = 10,26$, можно назвать «промежуточной».

Итак, варьируя параметр жесткости λ , можно вычислить соответствующие значения критического веса. На рисунке 5 показана зависимость критических параметров первых двух форм. С уменьшением жесткости стержня к нижнему торцу ($\lambda < 0$) критическая нагрузка первой собственной формы уменьшается вплоть до нуля. При постоянной жесткости ($\lambda = 0$) имеем отмеченное ранее значение ($\beta_{kr} = 6,406$), а при дальнейшем увеличении жесткости стержня у нижнего торца кри-

тическое значение возрастает, однако до определенного предела. То есть, начиная с определенного значения параметра жесткости, стойка не теряет устойчивости по первой собственной форме в рассматриваемом диапазоне нагрузки. С другой стороны, в диапазоне $-0,3 < \lambda < 0,3$ существует названная нами «промежуточная» собственная форма.

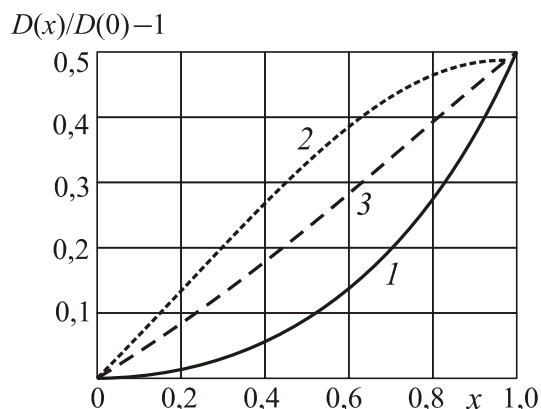


Рисунок 4

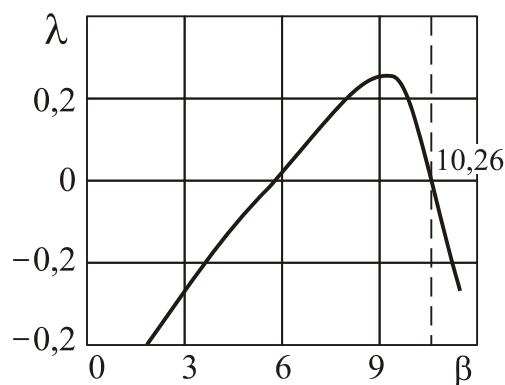


Рисунок 5

В частности, при нулевом значении параметра жесткости λ соответствующее значение критического параметра будет равно 10,26, как это отмечено выше. Важно также заметить, что ветви равновесия первой и второй форм «близки» – при определенной нагрузке переходят одна в другую, то есть возможен переход с ветви неустойчивых равновесий на ветвь устойчивых равновесий с сохранением потенциальной энергии деформирования, соответствующей второй собственной форме равновесия в начальный момент перехода на первую.

РЕЗЮМЕ

В задаче продольного изгиба сжатой консольной стойки уточнены граничные условия. Получены новые результаты для критической нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Косых, Э. Г. Продольно-поперечный изгиб трехслойных стержней / Э. Г. Косых – Вестник СамГУ. Естественная серия. 2008. №8/1(67). С. 390-399.
- 2 Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем. / А. С. Вольмир / М. Физматгиз. 1967. 984с./
- 3 Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов / М.: Физматгиз, 1959. 328 с./
- 4 Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко / М.: Наука, 1971. 808 с.
- 5 Краткий справочник машиностроителя. Машиностроение, 1966. 797 с.

SUMMARY

Stable compression strut s variable stiffness with variable load . In the problem of the buckling of compressed cantilever rackspecified boundary conditions. Learn new results for the critical load. The problem is generalized to the rack variable

Поступила в редакцию 15.01.2013

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ БИОТКАНЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ АТОМНО-СИЛОВОЙ МИКРОСКОПИИ И НАНОИНДЕНТИРОВАНИЯ

д. ф.м.-н. ¹Журавков М.А., ¹Романова Н.С., ¹Прохоров Н.А., ²Дрозд Е.С.

¹ Белорусский государственный университет, Минск

² Институт тепло- и массообмена имени А.В.Лыкова, Минск

Физико-механические свойства биоматериалов являются их важными фундаментальными характеристиками и определяют целый ряд цитофизиологических и цитопатологических процессов. Изучение механических эффективных свойств биоматериалов не только позволяет получать новые знания об их функционировании и жизнедеятельности, но и представляет несомненный клинический интерес.

У биологических материалов, в частности, биоклеток в процессе жизнедеятельности может изменяться структура и, соответственно, механические свойства. Вследствие этого биообъекты одного и того же типа имеют различные механические свойства в зависимости от фазы клеточного цикла, уровня клеточной активности и окружающей среды, а также целого ряда физико-химических факторов [1]. Такая особенность клеток затрудняет количественную оценку этих свойств, а также объясняет разброс значений их физико-механических параметров.

Поэтому *проблема разработки корректных математических моделей и аналитико-экспериментальных методов для оценки механических свойств биоматериалов является крайне актуальной*. На сегодня существует целый ряд подходов и технологий для изучения и оценки механических, в частности, упругих свойств биоматериалов, каждый из которых имеет определенные ограничения и недостатки.

Можно говорить о том, что сегодня уже сформировалась новая область исследований – **нанобиомеханика**, которая включает в себя изучение механики живых клеток и биомолекул и их связи с заболеваниями человека [2]. Среди недавно созданных приборов и экспериментальных методов измерения особое место занимает **атомно-силовая микроскопия (АСМ)** и разработанные на ее основе методы **клеточной эластографии**. В настоящее время, благодаря уникальным возможностям АСМ, стала доступна эластография отдельных клеток, представляющая несомненный интерес для понимания клеточной патологии, поскольку патогенные факторы, влияющие на метаболизм и структуру клеток, в целом ряде случаев изменяют и их цитомеханические свойства. Кроме того, определение локальных модулей упругости в биосредах открывает возможности для изучения экспериментальных воздействий на клетку, причем не только патогенных факторов, но и различных фармакологических препаратов.

1. О механических свойствах биологических клеток. Технологии и подходы к оценке механических свойств биологических клеток.

Оценочные значения для механических параметров биологической клетки лежат в очень широком диапазоне [3]. Очевидно, что эти значения помимо зависимости от типа клеток, их состояния и экспериментальных условий зависят от экспериментальных методов и/или от используемых теоретических моделей [4].

Механические свойства отдельной клетки определяются взаимосвязанными механическими свойствами клеточных компонент [5]. Но, все же механические свойства клетки главным образом определяются механическими свойствами клеточных оболочек, интегральных структур цитоскелета и ядра. Для оценки механических свойств клеток важно знать как интегральные (приведенные, эффективные) модули упругости, так и пространственное распределение по поверхности клетки локальных упругих модулей.

Современные *технологии определения механических характеристик* гетерогенных структур основываются на базовых подходах механики, физики, биологии, химии и других естественнонаучных дисциплин. Следует отметить, что, несмотря на существование большого числа методов оценки механических свойств клеток *универсального метода исследования деформируемости биоматериалов пока не существует*. При этом серьезной проблемой является несогласованность различных методов между собой, что объясняется различным вкладом клеточных компонентов в регистрируемый параметр.

В последние годы активно развиваются подходы, базирующиеся на использовании *методов атомно-силовой микроскопии*, интенсивное развитие которой позволило достичь уникальных научных результатов в различных областях физики и биологии, благодаря новым экспериментальным возможностям: нанометровое пространственное разрешение при анализе поверхности, неразрушающий характер исследований для широкого класса образцов и сред, возможность локальной оценки физико-механических свойств микро- и нанообъектов. Данные преимущества АСМ делают перспективным ее применение для изучения структуры и физико-механических свойств биоматериалов, например, клеток.

Цитомеханические свойства клеточных структур могут быть оценены как в статическом, так и динамическом режимах АСМ с использованием различных подходов. Методики, базирующиеся на использовании силовой спектроскопии атомно-силового микроскопа, позволяют определять значения локального модуля упругости исследуемого объекта в результате воздействия индентора (острия АСМ-зонда) на исследуемый материал в пределах площадки с минимальным размером вплоть до нескольких нанометров.

В то же время следует подчеркнуть, что изучение биологических объектов остается более сложной задачей по сравнению с аналогичными исследованиями поверхностных слоев твердых тел. Это связано с необходимостью специальной подготовки образцов клеток, оптимизации параметров измерений, а также достоверного интерпретирования экспериментальных результатов. Имеющиеся литературные данные о механических свойствах биологических клеток значительно различаются между собой, что вызвано отсутствием единообразия измерений, и, следовательно, затрудняет количественный анализ и сравнение результатов исследований. *Важнейшим условием установления однозначной связи между измеряемыми характеристиками деформирования исследуемых объектов и искомыми механическими свойствами является использование адекватных механико-математических моделей.*

Технологии определения механических характеристик различных наноструктур зачастую связаны с решением обратных задач механики. Вследствие характерных особенностей таких технологий, в частности механизма взаимодействия инденторов/штампов/зондов с изучаемыми материалами и структурами, построение механико-математических моделей для исследования соответствующих процессов базируется на использовании фундаментальных решений и/или решении контактных задач.

Очевидно, что если имеем дело с такими структурами, как биоматериалы, то рассмотрение их в приближении однородного изотропного деформируемого упругого тела в общем случае не является корректным. Таким образом, использование «классических» решений уже изначально вносит существенные погрешности в процедуру получения конечного результата. Вследствие этого *актуальным представляется выбор базовой теоретической модели поведения биоматериала, как можно более адекватно описывающей его реальное состояние.*

2. О механико-математических моделях как базисе при интерпретации экспериментальных исследований изучения деформационных свойств биологических клеток

Как отмечалось в предыдущих разделах, для успешного развития биомеханики клетки и эффективного прикладного использования этих знаний необходимо развивать и теоретические механико-математические модели для расширения и углубления знаний о процессах, происходящих на клеточном уровне.

Для описания механического состояния и поведения биоматериалов и биоструктур в первую очередь следует записать систему разрешающих уравнений, описывающих их состояние как объекта биомеханики. Одним из определяющих факторов данной системы являются уравнения механического поведения биоматериалов. В качестве моделей, описывающих состояние клетки, могут быть выбраны различные модели поведения среды.

На сегодняшний день наиболее активно в качестве моделей, описывающих механическое поведение биоматериалов (клеток), используются модели вязкоупругого поведения деформируемой среды. Так, например, в качестве теоретического базиса в технологиях определения физико-механических свойств биоструктур достаточно часто в качестве основополагающих соотношений для вязкоупругой ткани используются различные модификации модели Фойгта (Voigt). Вместе с тем, как отмечается в [6], выполненные рядом ученых исследования показали, что такие вязкоупругие модели имеют пределы применимости с точки зрения адекватности и точности описания динамических явлений при различных временных масштабах и/или в случае широкого спектрального интервала. Достаточно четко это проявляется в случае с биологическими тканями и клетками.

Одним из направлений «обхода» упомянутых здесь ограничений и погрешностей, касающихся «стандартных» механико-математических моделей, является *использование моделей дробного порядка в качестве базовых моделей поведения среды*. В общем случае процессы ползучести и релаксации для реальных неоднородных сред являются нелинейными как в пространстве, так и во времени. Поэтому, использование производных дробного порядка в уравнениях состояния вязкоупругих сред позволяет отобразить и учесть неоднородную структуру вязкого и упругого элементов и неоднородность механических процессов по времени.

Следует отметить, что основное уравнение поведения вязкоупругих материалов представляет собой, по-видимому, наиболее раннюю сферу приложений дробного исчисления в механике и на сегодня в этом направлении получено более всего достижений [7]. Во многих случаях вязкоупругое поведение естественных природных структур и современных гетерогенных материалов хорошо описывается моделями с производными порядка « α », значение которого находится в интервале между «0» и «1».

Уравнения движения для изотропной однородной вязкоупругой деформируемой среды в случае малых перемещений могут быть записаны в следующем виде:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} + \mu \Delta \bar{u} + \bar{F} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Для линейной вязкоупругой модели Фойгта временно-зависимые коэффициенты Ламе выражаются как

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mu(t) = \mu_0 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t}, \quad (2)$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1$ – соответственно, коэффициенты объемного сжатия, объемной вязкости, сдвиговой упругости и сдвиговой вязкости. В случае использования других вязкоупругих моделей выражение для коэффициентов Ламе имеют вид, отличный от приведенного.

Использование для многих материалов стандартной двухэлементной модели Фойгта сдвиговой вязкоупругости (μ_0, μ_1) не в полной мере позволяет выполнить модельное описание сдвигового динамического поведения материалов, соответствующее экспериментальным измерениям. Среди последних, например, разнообразные элементарные возбужденные волны от периодического или случайного источника, с частотой, значение которой находятся в широком диапазоне.

Вязкоупругость дробного порядка для механических характеристик материалов представляется единым структурным элементом «пружина в поршне» (springpot) и может быть определена следующим образом [8]:

$$\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3)$$

Уравнение (3) называют *моделью Фойгта дробного порядка* для $\alpha < 1$ [8].

Как отмечалось ранее, сегодня, для измерения локальной упругости на микронных и субмикронных масштабах наибольшее распространение получили две технологии: *атомно-силовая микроскопия* с использованием процедуры «силовой спектроскопии» и *наноиндентирование* с помощью специализированных приборов-наноинденторов.

Замечание. В отличие от наноиндентирования возможности АСМ позволяют не только оценить механические свойства образцов, но и одновременно получить изображения исследуемого объекта. При этом можно обеспечить контроль положения соприкасающегося с материалом зонда с нанометровой точностью.

Хотя технологическая реализация этих двух подходов значительно различается, но механические процессы и теоретический базис построения механико-математических моделей для описания процессов, являющихся основой данных технологий, один и тот же. С точки зрения механической интерпретации этих процессов – это задачи о контактном взаимодействии двух объектов и решение обратных задач механики по определению механических характеристик одного из взаимодействующих объектов. При моделировании процесса индентирования для описания механического поведения биологических тканей используются различные модели контактной механики, но наиболее часто все же применяются модели теории упругости при малых и конечных деформациях. Однако, несмотря на достижения в области приборостроения и развитие методов анализа, применение их для исследования мягких материалов по-прежнему затруднено в связи с весьма ограниченным количеством адаптированных для широкого практического использования нели-

нейных моделей контактной механики. Поэтому значимой проблемой, которую приходится решать при использовании как силовой спектроскопии, так и наноиндентирования, является выбор адекватной теоретической модели.

Следует отметить, что помимо использования фундаментальных решений существуют и другие методы для решения рассматриваемого класса задач.

Несмотря на существования различных подходов, до сих пор не существует теоретической модели, которая бы позволяла наиболее точно проводить расчет локального модуля упругости на основании данных силовой спектроскопии/наноиндентирования. Кроме того, использование различных расчетных моделей приводит к существенной вариабельности абсолютных значений модулей упругости клеток. Так, значения для одинаковых клеток, полученные в схожих экспериментах, но рассчитанные с использованием разных моделей, могут отличаться друг от друга более чем на порядок. Поэтому, вследствие того, что в случае малых деформаций большинство биоматериалов можно считать подчиняющимися закону линейной упругости, модели контактного деформирования и, в частности, модель Герца, по-прежнему чаще всего используются при анализе данных статической силовой спектроскопии и наноиндентирования, поскольку при этом не требуется подбора эмпирических параметров и для определения модуля упругости получаются простые выражения в явном виде.

При построении математической модели важным представляется введение начальных допущений о взаимодействии индентора с исследуемым объектом (основанием). При этом индентор рассматривается как внешнее силовое воздействие на основание. В этом случае математическое решение эффективно строить, используя фундаментальные решения. Существенными обстоятельствами, которые влияют на выбор/построение механико-математической модели, являются введение допущений о деформировании собственно индентора и принятие определенного закона поведения изучаемого материала [9].

Как известно, для неупругого тела принцип суперпозиции является неприемлемым. Следовательно, интегрирование распределенной нагрузки является в таком случае некорректным. Данное обстоятельство существенным образом влияет на правомерность использования фундаментальных решений однородной линейной теории упругости при рассмотрении контактных задач в биомеханике, вследствие явно неупругого и нелинейного поведения биоматериалов. Поэтому, *необходимы специальные технологии решения задач для материалов с неупругим или нелинейным поведением*. В качестве таковых могут быть использованы, например, следующие:

- построение решения, используя в качестве исходных определяющие уравнения для неоднородной теории упругости;
- построение специальных классов фундаментальных решений, отличных от классических;
- модификация определенным образом решений, построенных на основе подходов классической линейной теории упругости однородных тел.

В качестве примера рассмотрим один из возможных подходов к *модификации классического решения контактной задачи Герца*.

Как указывалось ранее, при описании контактного взаимодействия «индентор/зонд–образец» на сегодняшний день чаще всего используют модели, основанные на *классической теории Герца*, которая описывает взаимодействие контактирующих тел в рамках линейной упругости и в случае малых деформации [10]. Модель Герца описывает контакт сферических тел и предполагает, что материалы соприкасающихся тел однородны и изотропны, нагрузка вызывает в зоне контакта только упругие деформации, площадка контакта мала по сравнению с размерами контактирующих тел, а силы давления нормальны к поверхности соприкосновения (силами трения пренебрегают).

Учет реологических эффектов можно выполнить, воспользовавшись принципов Вольтерра [11, 12]. При этом изучаемый процесс рассматривается как подчиняющийся законам линейной вязкоупругости. В соответствии с принципом Вольтерра решение задач вязкоупругости можно построить, введя понятие «фиктивного» упругого решения и воспользовавшись затем решением задачи теории упругости, но уже для фиктивного упругого решения [11, 12].

На основании этого рассматриваем биоматериал как усредненная однородная структура с постоянным коэффициентом Пуассона ν , начальным модулем сдвига μ_0 , функцией сдвиговой релаксации $\mu(t)$, функцией сдвиговой ползучести $I(t)$. Между функцией релаксации $G(t)$ и функцией ползучести $I(t)$ существует функциональная связь, представляемая однородным интегральным уравнением

$$I(t) = G(0) + \int_0^t I(t-\tau) \dot{G}(\tau) d\tau = 1 (t \geq 0). \quad (4)$$

Фиктивные упругие перемещения u_i^y и деформации ε_{ij}^y вводятся следующим образом:

$$u_i^y(x, t) = u_i(x, t) + \frac{1}{G_0} \int_0^t \dot{G}(t-\tau) u_i(x, \tau) d\tau, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij}^y(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^y}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^y}{\partial x_i} \right). \quad (6)$$

Аналогичным образом определяется величина $g_i^y(x, t)$, представляющая собой фиктивные граничные перемещения от истинных граничных перемещений $g_i(x, t)$ исследуемого тела:

$$g_i^y(x, t) = g_i(x, t) + \frac{1}{G_0} \int_0^t \dot{G}(t-\tau) g_i(x, \tau) d\tau. \quad (7)$$

Тогда функциональную связь между истинными напряжениями и фиктивными перемещениями принимает вид закона Гука для изотропного однородного тела:

$$\sigma_{ij} = 2G_0 \varepsilon_{ij}^y + \frac{2\nu}{1-2\nu} G_0 \sum_{k=1}^m \varepsilon_{kk}^y \delta_{ij}. \quad (8)$$

В итоге для фиктивных перемещений u_i^y , фиктивных деформаций ε_{ij}^y и истинных напряжений σ_{ij} имеет место квазистатическая упругая задача, причем уравнения Ламе относительно u_i^y принимают вид

$$\Delta u_i^y + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta^y}{\partial x_i} + \frac{X_i}{G_0} = 0, \quad (i = 1, \dots, m). \quad (9)$$

К уравнениям (9) можно применить процедуру построения разрешающих уравнений для задач теории упругости, учитывая, что под $\vec{u}(x)$ здесь подразумеваются фиктивные функции $\vec{u}^y(x)$, определяемые (5).

После решения вспомогательной упругой задачи и определения фиктивных перемещений $u_i^y(x, t)$ истинные перемещения находятся по формуле

$$u_i(x, t) = u_i^y(x, t) + \frac{1}{I_0} \int_0^t \dot{I}(t-\tau) u_i^y(x, \tau) d\tau. \quad (10)$$

Следует подчеркнуть, что получаемые в процессе решения вспомогательной упругой задачи напряжения являются истинными напряжениями исходной вязкоупругой задачи.

В соответствии с этим подходом **рассмотрим процедуру испытаний биоструктур в опытах с АСМ**. Пусть в моменты времени $t_i, i = \overline{1, N}$ выполнены измерения перемещений граничной поверхности биоструктуры $\delta_i(x, t), i = \overline{1, N}$ в зависимости от прикладываемого усилия $P_i, i = \overline{1, N}$.

Согласно (7) можно определить величину δ_i^y :

$$\delta_i^y(x, t) = \delta_i(x, t) + \frac{1}{G_0} \int_0^t \dot{G}(t-\tau) \delta_i(x, \tau) d\tau. \quad (11)$$

Используем решение Герца, учитывая, что в данном случае оно строится для фиктивных перемещений, т.е.

$$w^y(r=0) = \delta^y = \frac{P(1-\nu)}{4G_0 a}. \quad (12)$$

Так как в опытах с АСМ определяются истинные перемещения $\delta_i(x, t), i = \overline{1, N}$, тогда, согласно (11) и (12) имеем

$$\delta(t_i) + \frac{1}{G_0} \int_0^t \dot{G}(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = \frac{P_i(1-\nu)}{4G_0 a}$$

В качестве функции релаксации в выполненных экспериментах были взяты следующие функции:

1. дробно-экспоненциальное ядро Работнова вида $\mu_\alpha(-1, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma_*(n+1)(1+\alpha)}$, являющееся

резольвентой ядра ползучести типа Абеля $I_\alpha(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma_*(1+\alpha)}$, ($-1 < \alpha < 0$);

2. экспоненциальное ядро релаксации вида $R(t) = Be^{-qt}$, являющееся резольвентой ядра ползучести $\Gamma(t) = Ae^{-pt}$, ($A > 0, p > 0$).

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена комплексная задача восстановления механических свойств биологических структур как решение задачи обработки результатов экспериментальных данных при использовании технологий, основанных на контакте и внедрении индентора в образцы биотканей. Выполнен анализ механико-математических моделей, описывающих механические процессы, сопровождающие данные технологии. Показано, что повышение адекватности моделей реальным физическим процессам может быть обеспечено путем модификации моделей, в том числе на основе использования аппарата дробного исчисления.

Использование моделей поведения среды дробного порядка имеет большие практические применения в области медицинской диагностики состояния биотканей. Повышение точности модели может быть достигнуто путем уточнения моделей дробного порядка, например введением добавочных дробных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аскадский, А.А. Деформация полимеров / А.А. Аскадский – М.: Химия, 1973. – 448с.
2. Свербиль, В.П. Эритроциты в сдвиговом потоке: механизмы деформируемости, методы измерений, медицинские применения / В.П. Свербиль, С.Д. Захаров // Сб. тр. XV Межд. конф., Пуцзино, 28 янв. – 2 февр. 2008 г. – М.: Ижевск, 2008. – Т.3 – С.123–130.
3. Measuring cell viscoelastic properties using a force-spectrometer: influence of protein-cytoplasm interactions / E. Canetta [et. al.] // Biorheology. – 2005. – Vol.42, C 5. – 321–333.
4. Atomic force microscopy probing of cell elasticity / T.G. Kuznetsova [et al.] // Micron. – 2007. – Vol. 38, C 8. – 824–833.
5. Starodubtseva, M.N. Mechanical properties of cells and ageing / M.N. Starodubtseva // Ageing Res. Rev. [Electronic resource]. – 2011. – Vol. 10, C. 1.
6. Bagley, R.L. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior / R.L. Bagley, P.J. Torvik // Journal of Rheology. – 1986. – V.30. – PP.133–155.
7. Журавков, М.А. О перспективах использования теории дробного исчисления в механике / М.А. Журавков, Н.С. Романова // Минск: БГУ, 2013. – 53 с. 8. Schiessel, H. Generalized viscoelastic models: Their fractional equations with solutions / H. Schiessel et al. // J. of Ph. A: Math. and Gen. – 1995. – V.28. – PP.6567–6584.
9. Журавков, М.А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований. Курс лекций / М.А. Журавков // Минск: БГУ, 2008 – 247 с.
10. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: [учеб. пособие: в 10 т.] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973 – 1989. – Т.7 : Теория упругости. – 4-е изд., испр. и доп. – 1987 – 246 с.
11. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности: учеб./ М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2011 – 543 с.
12. Журавков, М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах / М.А. Журавков // Мн.: БГУ, 2002 – 456с.

SUMMARY

Number of cytophysiological and cytopathological processes is defined by physical and mechanical properties of biomaterials (cells, tissue, bones and etc.). Fractional models of medium behaviour have a wide application in medical diagnostics of biotissue state. Complex recovery problem of mechanical properties of biological structures, which solution is based on Atomic Force Microscopy results are considered in this paper. One of the ways to improve an adequacy of mathematical models is their modification, including the use of fractional calculus, is presented.

Поступила в редакцию 25.09.2013

**ТЕРМОСИЛОВОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ**

д. ф.-м. н. Старовойтов Э. И., соиск. Савицкий Д. М.

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Слоистые элементы конструкций, нашли широкое применение в авиа-, ракето-, приборостроении и строительстве, поэтому разработка методик и решения соответствующих краевых задач актуальны. Исследованию напряженно-деформированного состояния неоднородных элементов конструкций посвящены многие публикации, в том числе [1–6]. В рамках теории малых упругопластических деформаций [7] в работах [2, 3] приведены результаты по изотермическому квазистатическому и динамическому деформированию трехслойных элементов конструкций, связанных и несвязанных с винклеровым основанием. Здесь, в рамках теории простых переменных нагружений [8, 9], рассмотрено однократное и переменное термосиловое нагружение несимметричного по толщине трехслойного стержня с упругопластическими несущими слоями и физически нелинейно-упругим наполнителем.

Термоупругий изгиб. Рассмотрим трехслойный стержень с жестким наполнителем (рисунк 1). Систему координат x, y, z свяжем со срединной плоскостью наполнителя. Принимаем, что в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в жестком несжимаемом по толщине сравнительно толстом наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Температурное поле T_k в k -м слое рассматриваемого стержня считаем известным.

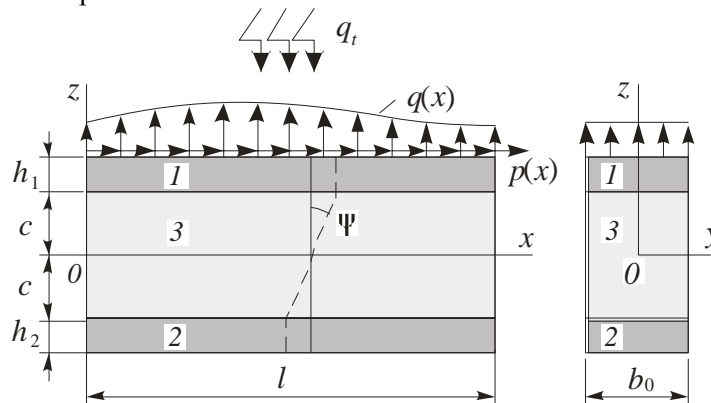


Рисунок 1 – Расчетная схема при термосиловом нагружении трехслойного стержня

На внешний слой стержня действует поверхностная силовая нагрузка $p(x), q(x)$, через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости наполнителя. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, на границах слоев – склейки. С помощью введенных гипотез, продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ выражаются через три искомые функции $u(x), \psi(x)$ и $w(x)$:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u^{(3)} = u + z\psi - zw_{,x} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, верхний индекс k – номер слоя.

Компоненты тензора деформаций следуют из соотношений Коши и выражений (1), напряжения – из закона Гука. Внутренние силы и моменты вводятся соотношениями

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)}, \quad M = \sum_{k=1}^3 M^{(k)}, \quad H = c(N^{(1)} - N^{(2)}) + M^{(3)}, \quad Q = Q^{(3)}, \\ N^{(k)} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{xz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений, b_0 – ширина сечения стержня, интегралы берутся по толщине h_k каждого из слоев.

Для связи напряжений и деформаций в слоях используются соотношения термоупругости в девиаторно-сферической форме [7]:

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3\varepsilon_{xz}^{(3)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T_k), \quad (3)$$

где $s_{xx}^{(k)}, \varepsilon_{xx}^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций, G_k, K_k – термозависимые модули сдвига и объемного деформирования [2, 3], α_k – коэффициент линейного температурного расширения.

С помощью соотношений (1), (3) внутренние усилия и моменты (2) выражаются через три искомые функции $u(x), \psi(x), w(x)$:

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= b_0 \int_c^{c+h_1} \sigma_{xx}^{(1)} dz = b_0 K_1^+ \left[h_1 (u_{,x} + c\psi_{,x}) - (c + \frac{1}{2}h_1) h_1 w_{,xx} \right] - 3b_0 K_1 \alpha_1 \int_c^{c+h_1} T_1 dz, \\ N^{(2)} &= b_0 \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_{xx}^{(2)} dz = b_0 K_2^+ \left[h_2 (u_{,x} - c\psi_{,x}) + (c + \frac{1}{2}h_2) h_2 w_{,xx} \right] - 3b_0 K_2 \alpha_2 \int_{-c-h_2}^{-c} T_2 dz, \\ N^{(3)} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xx}^{(3)} dz = 2b_0 K_3^+ c u_{,x} - 3b_0 K_3 \alpha_3 \int_{-c}^c T_3 dz, \\ M^{(1)} &= b_0 \int_c^{c+h_1} \sigma_{xx}^{(1)} z dz = b_0 K_1^+ \left[h_1 (c + \frac{1}{2}h_1) (u_{,x} + c\psi_{,x}) - (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2) h_1 w_{,xx} \right] - 3K_1 \alpha_1 \int_c^{c+h_1} T_1 z dz, \\ M^{(2)} &= b_0 \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_{xx}^{(2)} z dz = b_0 K_2^+ \left[-h_2 (c + \frac{1}{2}h_2) (u_{,x} - c\psi_{,x}) - (c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2) h_2 w_{,xx} \right] + 3K_2 \alpha_2 h_2 \int_{-c-h_2}^{-c} T_2 z dz, \\ M^{(3)} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xx}^{(3)} z dz = \frac{2}{3} b_0 K_3^+ c^3 (\psi_{,x} - w_{,xx}) - 3K_3 \alpha_3 \int_{-c}^c T_3 z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)} dz = 2b_0 G^{(3)} c \psi. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения равновесия трехслойного стержня получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа. При определении виртуальной работы внешних сил считаем, что к срединной поверхности заполнителя приложены произвольные распределенные нагрузки $p(x), q(x)$ (см. рисунок 1), а к торцам стержня – сосредоточенные силы и моменты. Вариация работы сил упругости учитывает работу касательных напряжений в заполнителе.

В результате, используя соотношения (4), получим систему дифференциальных уравнений равновесия трехслойного стержня в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} &= -p, \\ a_6 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \psi &= 0, \\ a_7 u_{,xxx} + a_3 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} &= -q. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты a_i , входящие в систему (5), зависят от упругих характеристик материалов слоев и через них от температуры:

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c, \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right], \\ a_3 &= c \left[K_1^+ h_1 (c + \frac{1}{2}h_1) + K_2^+ h_2 (c + \frac{1}{2}h_2) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right], \\ a_4 &= K_1^+ h_1 (c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2) + K_2^+ h_2 (c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3, \quad a_5 = 2G_3 c, \\ a_6 &= c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2 \right], \quad a_7 = K_1^+ h_1 (c + \frac{1}{2}h_1) - K_2^+ h_2 (c + \frac{1}{2}h_2), \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Температура в уравнения равновесия (5) не входит, поэтому для ее решения можно воспользоваться известным решением, полученным в [2] при изотермическом нагружении:

$$\begin{aligned} u(x) &= \gamma_3 \psi + \frac{1}{\alpha_2} \left[-a_4 L_2^{-1}(p) + a_7 L_3^{-1}(q) + \frac{a_7}{2} C_1 x^2 \right] + C_7 x + C_8, \\ \psi(x) &= C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int g(x) \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ w(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi dx - a_7 L_3^{-1}(p) + a_1 L_4^{-1}(q) + \frac{a_1 C_1}{6} x^3 \right] + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x + C_6. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь C_1, \dots, C_8 – константы интегрирования; $L_1^{-1}, L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$ – интегральные операторы

$$L_1^{-1}(g) \equiv \int g dx, \quad L_2^{-1}(g) \equiv \iint g dx dx, \quad L_3^{-1}(g) \equiv \iiint g dx dx dx,$$

$$L_4^{-1}(g) \equiv \iiint g \, dx \, dx \, dx \, dx ; \quad g(x) = \gamma_2 p + \gamma_1 \left(\int q \, dx + C_1 \right),$$

$$\beta^2 = \frac{a_1 a_5 \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2} > 0, \quad \gamma_1 = \frac{a_1 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_2 = \frac{a_6 \alpha_2 - a_7 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_3 = \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\alpha_2}, \quad (8)$$

$$\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2 \neq 0, \quad \alpha_1 = a_1 a_3 - a_6 a_7, \quad \alpha_2 = a_1 a_4 - a_7^2, \quad \alpha_3 = a_1 a_2 - a_6^2.$$

Используя соотношения (4), выпишем конечные выражения обобщенной внутренней продольной силы и изгибающего момента (2) через перемещения (7) и температуру:

$$N = b_0 \left(a_1 u_{,x} + a_6 \psi_{,x} - a_7 w_{,xx} - 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz \right),$$

$$M = b_0 \left(a_7 u_{,x} + a_3 \psi_{,x} - a_4 w_{,xx} - 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right). \quad (9)$$

Рассмотрим два вида закрепления торцов стержня. В случае жесткой заделки левого конца стержня при свободном правом торце граничные условия следующие:

$$x=0: \quad w = w_{,x} = u = \psi = 0,$$

$$x=l: \quad M = M_{,x} = N = \psi = 0. \quad (10)$$

Подставив решение (7) в условия (10), учитывая (9), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант C_1, \dots, C_8 . После ее решения имеем:

$$C_1 = -L_1^{-1}(q)|_{x=l}, \quad C_3 = \frac{1}{\beta} \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=0},$$

$$C_2 = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\operatorname{ch}(\beta l)}{\operatorname{sh}(\beta l)} \left(\int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=l} - \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=0} \right) - \int g(x) \operatorname{ch}(\beta x) dx|_{x=l} \right],$$

$$C_4 = \frac{a_7}{\alpha_2} \left(L_1^{-1}(p)|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz \right) - \frac{a_1}{\alpha_2} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right) - \frac{a_1}{\alpha_2} C_1 l,$$

$$C_5 = \frac{a_7}{\alpha_2} L_2^{-1}(p)|_{x=0} - \frac{a_1}{\alpha_2} L_3^{-1}(q)|_{x=0}, \quad C_6 = \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(p)|_{x=0} - \frac{a_1}{\alpha_2} L_4^{-1}(q)|_{x=0} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int \psi dx|_{x=0},$$

$$C_7 = \frac{a_4}{\alpha_2} \left(L_1^{-1}(p)|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz \right) - \frac{a_7}{\alpha_2} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right) - \frac{a_7}{\alpha_2} C_1 l,$$

$$C_8 = \frac{a_4}{\alpha_2} L_2^{-1}(p)|_{x=0} - \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(q)|_{x=0}. \quad (11)$$

Для шарнирно опертого по обоим торцам стержня граничные условия принимают вид:

$$x=0; l: \quad w = M = u = \psi = 0.$$

Им удовлетворяют следующие константы интегрирования:

$$C_1 = \frac{1}{l} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=0} - L_2^{-1}(q)|_{x=l} \right), \quad C_4 = \frac{a_7}{a_4} \left(D_1|_{x=0} - D_1|_{x=l} \right) - \frac{1}{a_4} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=0} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right),$$

$$C_5 = D_2|_{x=0} - D_2|_{x=l} - \frac{a_7 l}{2a_4} \left(D_1|_{x=0} - D_1|_{x=l} \right) - \frac{l}{2a_4} \left(L_2^{-1}(q)|_{x=0} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right),$$

$$C_7 = D_1|_{x=0} - D_1|_{x=l}, \quad D_1 = \frac{a_7}{l \alpha_2} L_3^{-1}(q) - \frac{a_7 l}{2 \alpha_2} \left(L_2^{-1}(q) + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right) - \frac{a_4}{l \alpha_2} L_2^{-1}(p),$$

$$D_2 = \frac{a_1}{l \alpha_2} \left(\int \psi dx + L_4^{-1}(q) \right) - \frac{a_1 l}{6 \alpha_2} \left(L_2^{-1}(q) + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right) - \frac{a_7}{l \alpha_2} L_3^{-1}(p). \quad (12)$$

Константы C_2, C_3, C_6, C_8 сохраняют свой предыдущий вид (11).

Упругопластический стержень. Пусть у рассматриваемого стержня, наружные несущие слои выполнены из упругопластического материала, а несжимаемый по толщине наполнитель – нелинейно-упругий. Стержень находится в температурном поле, на его внешний слой действует распределенная силовая нагрузка $p'(x), q'(x)$, при этом соответствующие траектории

нагружения относятся к классу *простых* [7] (один штрих сверху здесь и в дальнейшем обозначает нагружение из естественного состояния). В несущих слоях используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [7]:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k(T_k) f'^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k) \varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T_k) \quad (k=1, 2; \quad i, j=x, y, z), \end{aligned} \quad (13)$$

где $f'^{(k)}$ – функция пластичности Ильюшина при нагружении из естественного состояния

$$f'^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}(T_k), \\ 1 - \omega'_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k), & \varepsilon_u^{(k)} > \varepsilon_y^{(k)}(T_k), \end{cases}$$

$\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций, $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести материала.

Для физически нелинейного заполнителя вводятся подобные уравнения состояния:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(3)} &= 2G_k(T_k) f'^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}) \varepsilon_{ij}^{(3)}, \\ \sigma^{(3)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(3)} - \alpha_k T_k) \quad (i, j=x, y, z), \\ f'^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}) &= \begin{cases} 1, & \varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}(T_k), \\ 1 - \omega'_3(\varepsilon_u^{(3)}), & \varepsilon_u^{(3)} > \varepsilon_s^{(3)}(T_k), \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

$\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя, $\omega'_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – универсальная функция физической нелинейности материала k -го слоя.

Выделим в тензорах напряжений (13), (14) упругие (индекс « e ») и неупругие (« ω ») слагаемые:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)e} - \sigma_{xx}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)e} &= 2G_k \varepsilon'_{xx}{}^{(k)} + 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T_k), \quad \sigma_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k \varepsilon'_{xx}{}^{(k)} \omega'_k, \\ \sigma_{xz}^{(3)e} &= 2G_3 \varepsilon'_{xz}{}^{(3)}, \quad \sigma_{xz}^{(3)\omega} = 2G_3 \varepsilon'_{xz}{}^{(3)} \omega'_3. \end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (2), получим:

$$N^{(k)} = N^{(k)e} - N^{(k)\omega}, \quad M^{(k)} = M^{(k)e} - M^{(k)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \quad (16)$$

Упругие (индекс « e ») и неупругие (индекс « ω ») составляющие в (16) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} N^{(k)e} &= b_0 \int \sigma_{xx}^{(k)e} dz, \quad N^{(k)\omega} = b_0 \int \sigma_{xx}^{(k)\omega} dz, \quad M^{(k)e} = b_0 \int \sigma_{xx}^{(k)e} z dz, \quad M^{(k)\omega} = b_0 \int \sigma_{xx}^{(k)\omega} z dz, \\ Q^{(3)e} &= b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)e} dz, \quad Q^{(3)\omega} = b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz. \end{aligned} \quad (17)$$

Система уравнений равновесия (5) в этом случае принимает вид:

$$\begin{aligned} a_1 u'_{,xx} + a_6 \psi'_{,xx} - a_7 w'_{,xxx} &= -p' + p'_\omega, \quad a_6 u'_{,xx} + a_2 \psi'_{,xx} - a_3 w'_{,xxx} - a_5 \psi' = h'_\omega, \\ a_7 u'_{,xxx} + a_3 \psi'_{,xxx} - a_4 w'_{,xxxx} &= -q' + q'_\omega. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь коэффициенты a_1, \dots, a_7 определены соотношениями (6); величины $p'_\omega, h'_\omega, q'_\omega$ учитывают физическую нелинейность материалов слоев и вычисляются по формулам, следующим из (15) и (17)

$$p'_\omega = \frac{1}{b_0} N'^\omega, \quad h'_\omega = \frac{1}{b_0} (H'^\omega - Q'^\omega), \quad q'_\omega = \frac{1}{b_0} M'^\omega. \quad (19)$$

$$N'^\omega = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega'_k \varepsilon'_{xx}{}^{(k)} dz, \quad M'^\omega = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega'_k \varepsilon'_{xx}{}^{(k)} z dz, \quad Q'^\omega = 2b_0 G_3 \int_{-c}^c \omega'_3 \psi' dz.$$

Система дифференциальных уравнений (18) существенно нелинейна. О точном ее решении в данном случае говорить не приходится, поэтому для ее решения необходимо использовать приближенные методы, типа метода «упругих» решений Ильюшина.

Предположим, что в (18), (19) содержится малый параметр, например, все $\omega_k < 1$. Тогда возможен метод итераций, при котором для любого n -го приближения система уравнений (18) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} a_1 u'^{(n)}_{,xx} + a_6 \psi'^{(n)}_{,xx} - a_7 w'^{(n)}_{,xxx} &= -p' + p'^{(n-1)}_\omega, \\ a_6 u'^{(n)}_{,xx} + a_2 \psi'^{(n)}_{,xx} - a_3 w'^{(n)}_{,xxx} - a_5 \psi'^{(n)} &= h'^{(n-1)}_\omega, \end{aligned}$$

$$a_7 u'_{,xxx} + a_3 \psi'_{,xxx} - a_4 w'_{,xxxx} = -q' + q_{\omega}^{(n-1)}. \quad (20)$$

Величины $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$, соответствующие неупругим составляющим, на первом шаге ($n = 1$) полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название дополнительных «внешних» нагрузок. Они служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев:

$$p_{\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} N'_{,x}{}^{\omega(n-1)}, \quad h_{\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} (H'_{,x}{}^{\omega(n-1)} - Q'^{\omega(n-1)}), \quad q_{\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} M'_{,xx}{}^{\omega(n-1)},$$

$$N'^{\omega(n-1)} = \sum_{k=1}^3 N'^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega'_k(\varepsilon'_u{}^{(k)(n-1)}) \varepsilon'_{xx}{}^{(k)(n-1)} dz,$$

$$M'^{\omega(n-1)} = \sum_{k=1}^3 M'^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega'_k(\varepsilon'_u{}^{(k)(n-1)}) \varepsilon'_{xx}{}^{(k)(n-1)} z dz,$$

$$H'^{\omega(n-1)} = c(N'^{(1)\omega(n-1)} - N'^{(2)\omega(n-1)}) + M'^{(3)\omega(n-1)}, \quad Q'^{\omega(n-1)} = 2b_0 \int_{-c}^c G_3 \omega'_3(\varepsilon'_u{}^{(3)(n-1)}) \psi'^{(n-1)} dz.$$

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче термоупругости с дополнительными «внешними» нагрузками. При этом система уравнений (20) на каждом шаге отличается от соответствующей системы (5) в задаче термоупругости только наличием этих известных «внешних» нагрузок. Поэтому решение задачи термоупругопластичности можно записать в следующем рекуррентном виде:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) &= C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int g'^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g'^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u^{(n)}(x) &= \gamma_3 \psi^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} \left[-a_4 L_2^{-1} (p' - p_{\omega}^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)} x^2 \right] + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}, \\ w^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1} (p' - p_{\omega}^{(n-1)}) + a_1 L_4^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь введена функция

$$g'^{(n)}(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_{\omega}^{(n-1)} + \gamma_2 (p' - p_{\omega}^{(n-1)}) + \gamma_1 \left(\int (q' - q_{\omega}^{(n-1)}) dx + C_1^{(n)} \right);$$

коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta^2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и линейные интегральные операторы $L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$ определены формулами (8). Константы интегрирования $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$ на каждом шаге приближения следуют из условий закрепления стержня. Удовлетворяя решением (21) граничные условия для консоли (10), получим:

$$\begin{aligned} C_1^{(n)} &= -L_1^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)})|_{x=l}, \quad C_3^{(n)} = \frac{1}{\beta} \int g'^{(n)}(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=0}, \\ C_2^{(n)} &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\operatorname{ch}(\beta l)}{\operatorname{sh}(\beta l)} \left(\int g'^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=l} - \int g'^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx|_{x=0} \right) - \int g'^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx|_{x=l} \right], \\ C_4^{(n)} &= \frac{a_7}{\alpha_2} \left(L_1^{-1} (p' - p_{\omega}^{(n-1)}) + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz \right)|_{x=l} - \\ &\quad - \frac{a_1}{\alpha_2} \left(L_2^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)}) + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right)|_{x=l} - \frac{a_1}{\alpha_2} C_1^{(n)} l, \\ C_5^{(n)} &= \frac{a_7}{\alpha_2} L_2^{-1} (p' - p_{\omega}^{(n-1)})|_{x=0} - \frac{a_1}{\alpha_2} L_3^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)})|_{x=0}, \\ C_6^{(n)} &= \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1} (p' - p_{\omega}^{(n-1)})|_{x=0} - \frac{a_1}{\alpha_2} L_4^{-1} (q' - q_{\omega}^{(n-1)})|_{x=0} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int \psi^{(n)} dx|_{x=0}, \end{aligned}$$

$$C_7^{(n)} = \frac{a_4}{\alpha_2} \left(L_1^{-1}(p' - p'_\omega)^{(n-1)} \Big|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz \right) - \frac{a_7}{\alpha_2} \left(L_2^{-1}(q' - p'_\omega)^{(n-1)} \Big|_{x=l} + 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right) - \frac{a_7}{\alpha_2} C_1^{(n)} l,$$

$$C_8^{(n)} = \frac{a_4}{\alpha_2} L_2^{-1}(p' - p'_\omega)^{(n-1)} \Big|_{x=0} - \frac{a_7}{\alpha_2} L_3^{-1}(q' - q'_\omega)^{(n-1)} \Big|_{x=0} . \quad (22)$$

Для шарнирно опертого стержня константы интегрирования (12) модифицируются подобным образом, при этом $C_2^{(n)}$, $C_3^{(n)}$, $C_6^{(n)}$, $C_8^{(n)}$ сохраняют вид (22).

Численные результаты получены для трехслойного стержня, слои которого выполнены из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Термомеханические характеристики этих материалов приведены в [3–4]. Параметры слоев: $h_1 = h_2 = 0,03$, $c = 0,09$; интенсивность распределенной нагрузки $q = -0,75$ МПа, $p = 0$. Температуру принимаем однородной во всех слоях стержня. Функции физической нелинейности приняты в виде, предложенном в [2].

Численный счет продемонстрировал практическую сходимость метода упругих решений. За искомое решение принято 8-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %.

На рисунке 2 показаны перемещения в трехслойном упругопластическом стержне (a – прогиб, b – относительный сдвиг в заполнителе): 1 – упругие изотермические ($T_1 = 293$ К), 2 – упругие термосиловые ($T_2 = 343$ К), 3 – упругопластические изотермические ($T_1 = 293$ К), 4 – упругопластические термосиловые ($T_3 = 343$ К). Здесь учет физической нелинейности материалов слоев повышает упругие расчетные перемещения на 20 %, при нагревании на 50 К – на 22 %.

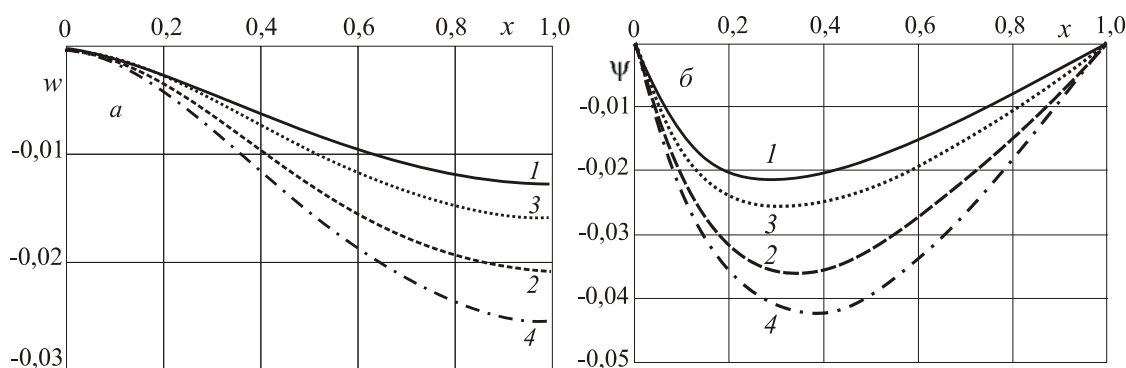


Рисунок 2. – Изменение прогиба w и относительного сдвига ψ вдоль оси стержня

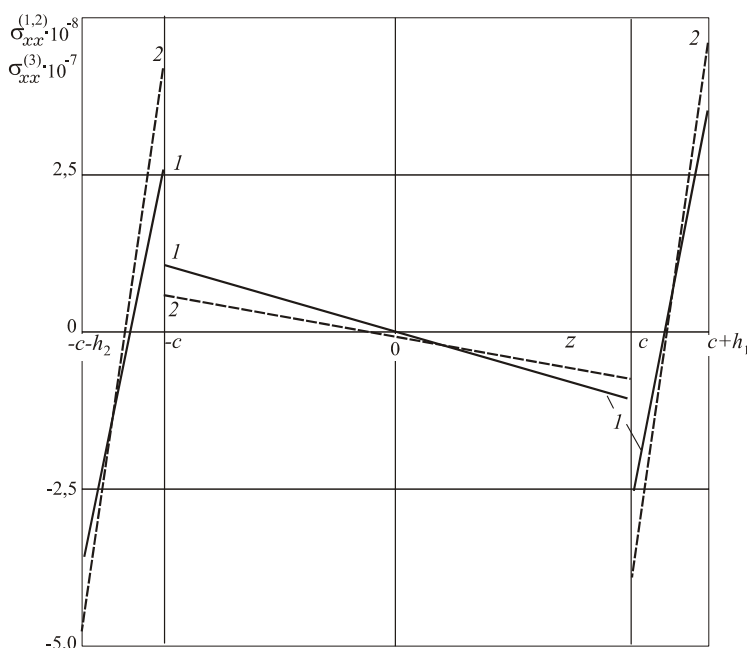


Рисунок 3. – Изменение нормальных напряжений по толщине стержня

Рисунок 3 иллюстрирует распределение по поперечному сечению ($x = 0$) нормальных напряжений σ_{xx} : 1 – упругие изотермические ($T_1 = 293$ К), 2 – упругопластические термосиловые ($T_3 = 343$ К). Воздействие температуры и учет нелинейности приводят к увеличению экстремумов напряжений во внешних слоях на 30 %, в заполнителе – на 50 %.

РЕЗЮМЕ

Предложенная методика позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойного физически нелинейного стержня в температурном поле. Следует подчеркнуть, что приведенные решения справедливы только в области малых упругопластических деформаций при простых нагружениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cheng Z., Jemah A. K., Williams F. W. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1996. 63, N 4. P. 1019–1026.
2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
3. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
4. Starovoitov, E. I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F.B. Nagiyev – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
5. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation // Mechanics of Solids. – Vol. 46, № 2. – 2011. – P. 291–298.
6. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation International // International Applied Mechanics. – 2011 – Vol. 47, N 5. – P. 580–589.
7. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
8. Москвитин, В. В. Циклическое нагружение элементов конструкций. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
9. Москвитин В.В., Старовойтов Э. И. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – № 1. – С. 116–121.

SUMMARY

The proposed method allows us to investigate the stress-strain state of the physical non-linear three-layer beam in the temperature field. It should be emphasized that these solutions are valid only in the field of small elastic deformations under simple loadings.

Поступила в редакцию 27.09.2013

ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПЕРЕКРЕСТНО-АРМИРОВАННОГО МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНОГО СЛОЯ В РАМКАХ МОДЕЛИ ПРАНДТЛЯ – РЕЙССА – ХИЛЛА ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

к. ф.-м. н. Романова Т.П., д.ф.-м. н. Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск*

В последние десятилетия в инженерной практике все более активное применение находят армированные металлокомпозиты. Известно, что при интенсивном термосиловом нагружении металлоконструкции могут работать в условиях неупругого деформирования [1], поэтому актуальной является проблема математического моделирования процессов пластичности в армированных металлокомпозитах. На сегодняшний день эта проблема находится, по сути, в зачаточном состоянии. Так, в [2] рассмотрено упругопластическое деформирование однонаправленно-армированных композитов; модели упругопластического поведения (в рамках деформационной теории) перекрестно армированных в плоскости металлокомпозитов предложены в [3, 4], а в [5 и др.] была построена структурная модель армированного слоя на базе определяющих соотношений для идеально-жесткопластических сред. (Целесообразность использования последней модели ограничивается изучением предельных нагрузок и динамическим поведением жесткопластических тонкостенных элементов композитных конструкций.)

Однако при исследовании, например, вязкоупругопластического поведения металлокомпозитов недопустимо использовать соотношения деформационной теории пластичности, так как вязкие свойства (в рамках технических теорий ползучести) описываются уравнениями типа теории течения [1]. Следовательно, в этом случае и пластические свойства металлокомпозита должны быть описаны в рамках теории течения [1]. В случае плоской деформации такая модель была построена в [6]. В инженерной же практике, как правило, встречаются конструкции, в которых реализуются условия не плоской деформации, а плоского напряженного состояния (ПНС) – тонкостенные элементы конструкций типа пластин и оболочек. В отличие от линейной теории упругости, в рамках теории пластического течения эти два состояния не идентичны, поэтому требуют самостоятельного рассмотрения. В связи с этим настоящее исследование посвящено построению численно-аналитической модели упругопластического поведения перекрестно-армированного металлокомпозитного слоя на основе теории течения типа Прандтля – Рейсса – Хилла в случае его ПНС.

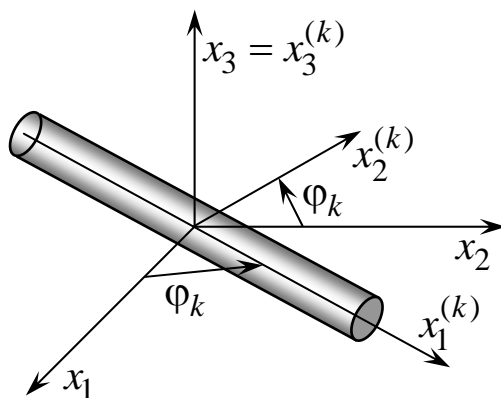


Рисунок 1. – Система координат, связанная с арматурой k -го семейства

В декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим металлокомпозитный слой, ориентированный перпендикулярно оси x_3 , армированный K семействами металлических проволок (волокон) в плоскостях, параллельных плоскости (x_1, x_2) , нагруженный и закрепленный так, что в нем реализуется случай обобщенного ПНС. Параметры армирования k -м семейством волокон определяются плотностью ω_k и углом φ_k ($k = 1, 2, \dots, K$), отсчитываемым от направления x_1 (рисунок 1).

Используя структурную модель композитного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах, впервые предложенную в [3], получим следующие выражения для ненулевых компонентов осредненных напряжений в композиции:

$$\bar{\sigma}_{ij} = (1 - \delta\Omega)\sigma_{ij} + \sum_{k=1}^K [\sigma_k - (1 - \delta)\sigma_{0k}] \omega_k l_{ki} l_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где

$$\Omega \equiv \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad l_{k1} \equiv \cos \varphi_k, \quad l_{k2} \equiv \sin \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq K; \quad (2)$$

δ – функция переключения, позволяющая выбрать вариант модели [7] (жесткий при $\delta=0$ и мягкий при $\delta=1$); σ_{ij} – напряжения в связующей матрице; σ_k – продольное напряжение в арматуре k -го семейства; σ_{0k} – одномерное напряженное состояние в фиктивных волокнах из материала связующей матрицы, направленных по траекториям армирования k -го семейства [7].

Так как в волокнах k -го семейства реализуется одномерное напряженное состояние σ_k , то в рамках модели типа Прандтля – Рёйсса – Хилла для фазовых материалов в случае ПНС можем записать следующие определяющие соотношения [1, 3, 8]:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \dot{\varepsilon}_{ll} - 9\alpha \mu^2 \frac{s_{ij}}{\sigma_*^2 (3\mu + H)} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 s_{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} + 3\alpha \mu^2 \frac{s_{ij} (\sigma_{11} + \sigma_{22})}{\sigma_*^2 (3\mu + H)} \dot{\varepsilon}_{33} \quad (i, j = 1, 2), \\ 2\mu \dot{\varepsilon}_{33} + \lambda \sum_{l=1}^3 \dot{\varepsilon}_{ll} + 3\alpha \mu^2 \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{\sigma_*^2 (3\mu + H)} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 s_{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} - \alpha \mu^2 \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2}{\sigma_*^2 (3\mu + H)} \dot{\varepsilon}_{33} &= 0, \\ \sigma_k &= f_k(\varepsilon_k), \quad \sigma_{0k} = f_0(\varepsilon_k), \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \sigma_*^2 \equiv \frac{3}{2} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 s_{lm}^2 = \Phi^2(q), \quad q \equiv \int d\varepsilon_*^p, \quad (d\varepsilon_*^p)^2 \equiv \frac{2}{3} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 (d\varepsilon_{lm}^p)^2, \\ H &\equiv \frac{d\sigma_*}{d\varepsilon_*^p}, \quad s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \sigma_0 \equiv \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \sigma_{i3} = s_{j3} \equiv 0, \quad \varepsilon_{j3} \equiv 0 \quad (i = \overline{1, 3}, \quad j = 1, 2); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_* = \Phi(q) \text{ и } \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 s_{lm} d\varepsilon_{lm} \geq 0, \\ 0, & \text{если } \sigma_* < \Phi(q) \text{ или } \sigma_* = \Phi(q) \text{ и } \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 s_{lm} d\varepsilon_{lm} < 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\varepsilon_k = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{ij} l_{ki} l_{kj}, \quad 1 \leq k \leq K; \quad (6)$$

E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала связующей матрицы; λ , μ – постоянные Ламе этого же материала; s_{ij} – компоненты тензора-девиатора напряжений в связующем; σ_* – интенсивность напряжений в связующем; H – модуль упрочнения связующего; $d\varepsilon_*^p$ – интенсивность приращений пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$; ε_{ij} – деформации армированного слоя, в котором реализуются условия ПНС (в рамках используемой структурной модели эти деформации совпадают с деформациями в связующем); ε_k – осевые деформации в арматуре k -го семейства; q – параметр упрочнения материала связующей матрицы (параметр Одквиста); Φ – известная функция изотропного упрочнения связующего, зависящая от параметра Одквиста; f_0 , f_k – известные функции, определяющие диаграмму растяжения – сжатия материалов связующей матрицы и арматуры k -го семейства (как при активном нагружении, так и при разгрузке); δ_{ij} – символ Кронекера; α – функция переключения, позволяющая учитывать процесс активного нагружения связующего (первая строка в (5)) или его разгрузку (вторая строка в (5)); точка означает производную по времени t (причем время может быть реальным или условным, например под условным временем может пониматься параметр нагружения).

Так как даже простейшие упругопластические задачи для изотропных элементов конструкций в рамках теории течения требуют привлечения численных методов интегрирования по времени [8, 9], то тем более это касается сложно армированных композитных сред. Поэтому в настоящем исследовании на основе метода шагов по времени разработаем численно-аналитическую модель упругопластического деформирования перекрестно-армированного металлокомпозитного слоя. С этой целью дискретизируем задачу по времени t , т. е. будем рассматривать ее решения в моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0$). Предполагаем, что в момент времени t_n решение ин-

тересующей нас задачи уже известно. Используя (3) с учетом (4), (5), построим определяющие соотношения для фазовых материалов в следующий момент времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где τ_n – шаг по времени (возможно, переменный), содержащие только деформации и напряжения (а не их скорости, как в первых двух соотношениях (3)). Для этого введем в рассмотрение дискретные по времени функции пространственных переменных $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{0k}^n(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{0k}(t_n, \mathbf{x}), \quad \sigma_k^n(\mathbf{x}) \equiv \sigma_k(t_n, \mathbf{x}), \quad \varepsilon_k^n(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon_k(t_n, \mathbf{x}), \quad \varepsilon_{ij}^n(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon_{ij}(t_n, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{ij}(t_n, \mathbf{x}), \\ \sigma_*^n(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_*(t_n, \mathbf{x}), \quad H^n(\mathbf{x}) \equiv H(t_n, \mathbf{x}), \quad s_{ij}^n(\mathbf{x}) \equiv s_{ij}(t_n, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (8)$$

которые по предположению в момент времени t_n уже известны.

Проинтегрируем первые два соотношения (3) численно на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, используя абсолютно устойчивый двустадийный метод Лобатто ША (метод трапеций), имеющий второй порядок точности по τ_n [10], тогда получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{n+1} - \sigma_{ij}^n &= 2\mu \left(\varepsilon_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{ij}^n \right) + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^3 \left(\varepsilon_{ll}^{n+1} - \varepsilon_{ll}^n \right) - \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left(\varepsilon_{lm}^{n+1} - \varepsilon_{lm}^n \right) \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \right. \\ &+ \left. \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left(\varepsilon_{33}^{n+1} - \varepsilon_{33}^n \right) \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} \left(\sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \right. \\ &+ \left. \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^n \left(\sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right], \quad 2\mu \left(\varepsilon_{33}^{n+1} - \varepsilon_{33}^n \right) + \lambda \sum_{l=1}^3 \left(\varepsilon_{ll}^{n+1} - \varepsilon_{ll}^n \right) + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left(\varepsilon_{lm}^{n+1} - \varepsilon_{lm}^n \right) \times \\ &\times \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{lm}^{n+1} \left(\sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{lm}^n \left(\sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] - \frac{1}{2} \alpha \mu^2 \left(\varepsilon_{33}^{n+1} - \varepsilon_{33}^n \right) \times \\ &\times \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} \left(\sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right)^2 + \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} \left(\sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right)^2 \right] = 0, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{n+1} &= 2\mu \varepsilon_{ij}^{n+1} + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll}^{n+1} - \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] \varepsilon_{lm}^{n+1} + \\ &+ \left\{ \lambda \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} \left(\sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^n \left(\sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] \right\} \left(\varepsilon_{33}^{n+1} - \varepsilon_{33}^n \right) + \quad (9) \\ &+ \sigma_{ij}^n - 2\mu \varepsilon_{ij}^n - \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll}^n + \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{ij}^n s_{lm}^n \right] \varepsilon_{lm}^n, \\ &\left\{ 2\mu + \lambda - \frac{1}{2} \alpha \mu^2 \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} \left(\sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right)^2 + \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} \left(\sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right)^2 \right] \right\} \left(\varepsilon_{33}^{n+1} - \varepsilon_{33}^n \right) + \\ &+ \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left\{ \lambda \delta_{lm} + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left[\left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{lm}^{n+1} \left(\sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \left(\sigma_*^n \right)^{-2} \left(3\mu + H^n \right)^{-1} s_{lm}^n \left(\sigma_{11}^n + \sigma_{22}^n \right) \right] \right\} \times \\ &\times \left(\varepsilon_{lm}^{n+1} - \varepsilon_{lm}^n \right) = 0, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Соотношения (9) с учетом (4) по форме совпадают с законом нелинейно-упругого деформирования материала связующей матрицы с «начальными напряжениями» при ПНС.

Линеаризуем соотношения (9), используя метод простой итерации (метод переменных параметров упругости [9]). Пусть в момент времени t_{n+1} на некоторой r -й итерации известны приближения напряжений в связующем $\sigma_{ij}^{(r)}$ (согласно (4), известными будут r -е приближения функций $\sigma_*^{(r)}$, $s_{ij}^{(r)}$, $H^{(r)}$), для следующего же $(r+1)$ -го приближения деформаций $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ и напряжений $\sigma_{ij}^{(p)}$ будут справедливы линейные соотношения (см. (9)):

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(p)} &= 2\mu \varepsilon_{ij}^{(p)} + \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll}^{(p)} - \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} \right] \varepsilon_{lm}^{(p)} + \\
&+ \left\{ \lambda \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} \left(\sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right) + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} \left(\sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right) \right] \right\} \times \\
&\times \left(\varepsilon_{33}^{(p)} - \varepsilon_{33}^{(r)} \right) + \sigma_{0ij}^{(r)}, \quad i, j = 1, 2; \\
&\left\{ 2\mu + \lambda - \frac{1}{2} \alpha \mu^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} \left(\sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right)^2 + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} \left(\sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right)^2 \right] \right\} \left(\varepsilon_{33}^{(p)} - \varepsilon_{33}^{(r)} \right) = \\
&= - \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left\{ \lambda \delta_{lm} + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{lm}^{(r)} \left(\sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right) + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{lm}^{(r)} \left(\sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right) \right] \right\} \times \\
&\times \varepsilon_{lm}^{(p)} + \sigma_{033}^{(r)}, \quad p = r + 1, \quad r = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned} \tag{10}$$

(11)

где

$$\begin{aligned}
\sigma_{0ij}^{(r)} &\equiv \sigma_{ij}^{(r)} - 2\mu \varepsilon_{ij}^{(r)} - \lambda \delta_{ij} \sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll}^{(r)} + \frac{9}{2} \alpha \mu^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(r)} s_{lm}^{(r)} \right] \varepsilon_{lm}^{(r)}, \\
\sigma_{033}^{(r)} &\equiv \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left\{ \lambda \delta_{lm} + \frac{3}{2} \alpha \mu^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{lm}^{(r)} \left(\sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right) + \right. \\
&\left. + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{lm}^{(r)} \left(\sigma_{11}^{(r)} + \sigma_{22}^{(r)} \right) \right] \right\} \varepsilon_{lm}^{(r)}, \quad i, j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Выразим из (11) $\varepsilon_{33}^{(p)} - \varepsilon_{33}^{(r)}$ и исключим эту разность из (10), тогда получим линейные равенства

$$\sigma_{ij}^{(p)} = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 C_{ijlm}^{(r)} \varepsilon_{lm}^{(p)} + \sigma_{*ij}^{(r)}, \quad i, j = 1, 2, \quad p = r + 1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
C_{ijlm}^{n+1} &\equiv 2\mu\delta_{il}\delta_{jm} + \lambda\delta_{ij}\delta_{lm} - \frac{9}{2}\alpha\mu^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} s_{lm}^{n+1} + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(n)} s_{lm}^{(n)} \right] - \\
&- \left\{ 2\mu + \lambda - \frac{1}{2}\alpha\mu^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} \left(\sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right)^2 + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} \left(\sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \times \\
&\times \left\{ \lambda\delta_{lm} + \frac{3}{2}\alpha\mu^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{lm}^{n+1} \left(\sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{lm}^{(n)} \left(\sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} \right) \right] \right\} \times \\
&\times \left\{ \lambda\delta_{ij} + \frac{3}{2}\alpha\mu^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{n+1} \left(\sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right) + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} s_{ij}^{(n)} \left(\sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} \right) \right] \right\}, \\
\sigma_{*ij}^{n+1} &\equiv \left\{ 2\mu + \lambda - \frac{1}{2}\alpha\mu^2 \left[\left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} \left(\sigma_{11}^{n+1} + \sigma_{22}^{n+1} \right)^2 + \left(\sigma_*^{(r)} \right)^{-2} \left(3\mu + H^{(r)} \right)^{-1} \left(\sigma_{11}^{(n)} + \sigma_{22}^{(n)} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \times \\
&\times \sigma_{033}^{n+1} + \sigma_{0ij}^{n+1}, \quad i, j, l, m = 1, 2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Равенства (13) с учетом (12), (14) формально совпадают с определяющими соотношениями плоской задачи линейной теории упругости с предварительным напряженным состоянием, задаваемым функциями σ_{*ij}^{n+1} .

Используя метод секущего модуля [8], линеаризуем и два последних соотношения в (3), которые справедливы в любой момент времени t :

$$\sigma_k^{(p)} = g_k \left(\varepsilon_k^{(r)} \right) \varepsilon_k^{(p)}, \quad \sigma_{0k}^{n+1} = g_0 \left(\varepsilon_k^{(r)} \right) \varepsilon_k^{(p)}, \quad 1 \leq k \leq K, \quad p = r+1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \tag{15}$$

где

$$g_k(\varepsilon_k) \equiv f_k(\varepsilon_k)/\varepsilon_k, \quad g_0(\varepsilon_k) \equiv f_0(\varepsilon_k)/\varepsilon_k, \quad 1 \leq k \leq K. \tag{16}$$

В рамках используемой структурной модели p -ые приближения для деформаций в арматуре k -го семейства $\varepsilon_k^{(p)}$ и в связующем ε_{ij}^{n+1} в момент времени t_{n+1} удовлетворяют равенствам, аналогичным (6).

Подставим (13), (15) в соотношения (1) и учтем равенства типа (6), тогда после приведения подобных слагаемых получим выражения для p -ых приближений осредненных напряжений в композиции в момент времени t_{n+1} :

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(p)} = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \bar{C}_{ijlm}^{(r)} \varepsilon_{lm}^{(p)} + \bar{\sigma}_{0ij}^{(r)}, \quad i, j = 1, 2, \quad p = r+1, \quad r = 0, 1, 2, \dots, \tag{17}$$

где

$$\bar{C}_{ijlm}^{n+1} \equiv (1 - \delta\Omega) C_{ijlm}^{(r)} + \sum_{k=1}^K \left[g_k \left(\varepsilon_k^{(r)} \right) - (1 - \delta) g_0 \left(\varepsilon_k^{(r)} \right) \right] \omega_k l_{ki} l_{kj} l_{kl} l_{km}, \quad \bar{\sigma}_{0ij}^{n+1} \equiv (1 - \delta\Omega) \sigma_{*ij}^{n+1}, \quad i, j, l, m = 1, 2. \tag{18}$$

Напряжения $\bar{\sigma}_{0ij}^{(r)}$ ($i, j = 1, 2$), согласно (18), (14), (12) известны на $(r+1)$ -й итерации при $t = t_{n+1}$, поэтому их можно трактовать как «начальные напряжения» в композитном слое на этой итерации в рассматриваемый момент времени t_{n+1} .

Определяющие соотношения (17) линейны и формально совпадают с обобщенным законом Гука для анизотропного неоднородного слоя (в случае плоской задачи теории упругости) с начальным напряженным состоянием, характеризуемым функциями $\bar{\sigma}_{0ij}^{n+1}$.

Решив соответствующую граничную задачу [1, 8, 9] в момент времени t_{n+1} с использованием соотношений (17), (18), (2), определим p -ые приближения для осредненных напряжений $\bar{\sigma}_{ij}^{(p)}$ и деформаций $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ в металлокомпозитном слое. Затем на основании (6) сможем вычислить новые приближения деформаций вдоль траекторий армирования k -го семейства $\varepsilon_k^{(p)}$. Зная же $\varepsilon_{ij}^{(p)}$, $\varepsilon_k^{(p)}$, по формулам (13), (15) с учетом (14), (12), (16) определим p -ые приближения напряжений в компонентах композиции $\sigma_{ij}^{(p)}$, $\sigma_k^{(p)}$, $\sigma_{0k}^{(p)}$. По известным приближениям напряжений в связующем $\sigma_{ij}^{(p)}$ и деформаций $\varepsilon_{ij}^{(p)}$ из (11) можем вычислить $\varepsilon_{33}^{(p)}$, а затем на основании соотношений (4), (5) можем определить p -ые приближения функций $\sigma_*^{(p)}$, $s_{ij}^{(p)}$, $H^{(p)}$, $\alpha^{(p)}$ (причем в (5) $d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \varepsilon_{ij}^{(p)} - \varepsilon_{ij}^{(n)}$). Далее, по формулам (18), (2), (14), (16) можем вычислить следующие приближения для коэффициентов $\bar{C}_{ijlm}^{(p)}$ и $\bar{\sigma}_{0ij}^{(p)}$ в соотношениях (17), где нужно индекс « r » заменить на « p », а « p » – на « $p+1$ » ($p = r+1$). Далее описанный итерационный процесс повторяется для следующего значения r до тех пор, пока не сойдется с требуемой точностью.

Если в момент времени t_{n+1} итерационный процесс сошелся с требуемой точностью, т. е. в каждой точке армированного металлокомпозитного слоя определены функции (8) при замене индекса « n » на « $n+1$ », то далее по описанной выше схеме можно получить решение рассматриваемой задачи об упругопластическом деформировании композитного слоя в следующий момент времени t_{n+2} и т. д. (Вопрос о сходимости этого итерационного процесса пока остается открытым. Известно лишь, что в случае изотропных материалов такая итерационная процедура сходится [8, 9]. Последнее позволяет надеяться на сходимость процесса и в более общем случае металлокомпозитного слоя.)

В настоящем исследовании для численного интегрирования по времени первых двух определяющих соотношений (3) использовался абсолютно устойчивый двустадийный метод Лобатто ША (метод трапеций), имеющий второй порядок точности по τ_n (см. (7)) и являющийся одним из неявных методов Рунге – Кутты [10]. В силу нелинейности уравнений (3) последнее обстоятельство (неявность схемы) приводит к необходимости применения итерационной процедуры для линеаризации двух последних равенств (3) и соотношений (9).

Традиционно же для численного интегрирования первых двух соотношений (3) используют явный метод Эйлера [1, 8, 9 и др.], который вместо (9) приводит к равенствам, не требующим в каждый момент времени t_{n+1} применять итерационную процедуру типа (10)–(12).

Однако известно, что явный метод Эйлера является условно устойчивым методом Рунге – Кутты первого порядка по τ_n [10]. В силу его условной устойчивости и существенной нелинейности равенств (3) невозможно в общем случае заранее предсказать величину шага по времени τ_n , при которой этот метод гарантирует устойчивость численных расчетов.

В силу этих обстоятельств, по-видимому, более целесообразно использовать хотя и неявную, но абсолютно устойчивую схему Лобатто ША (имеющую при этом точность на порядок большую, чем явный метод Эйлера), несмотря на то, что она приводит к необходимости применения итерационной процедуры (10)–(15) на каждом шаге по времени.

Согласно разработанной численно-аналитической модели, для начала расчета упругопластического поведения армированного металлокомпозитного слоя в начальный момент времени t_0 необходимо знать значения всех функций, указанных в (8) при $n = 0$. Эти функции определяются из общеизвестных начальных условий [8, 9], в качестве которых, как правило, используют условия естественного состояния композитной конструкции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

РЕЗЮМЕ

На основе метода шагов по времени разработана численно-аналитическая методика моделирования упругопластического деформирования армированного металлокомпозитного слоя с изотропно упрочняющимися фазовыми материалами, позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать компоненты композиции как нелинейно-упругие с начальным напряженным состоянием. Линеаризация этих определяющих соотношений позволяет свести на каждой итерации задачу моделирования к соотношениям типа обобщенного закона Гука для анизотропного неоднородного слоя с предварительным напряженным состоянием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Физматгиз, 1966. – 752 с.
2. Каримбаев, Т.Д. Математические модели нелинейного деформирования однонаправленно-армированных композиционных материалов / Т.Д. Каримбаев, Б.М. Мыктыбеков, И.М. Панова // Труды ЦИАМ. – М.: Изд-во ЦИАМ, 2005. – № 1334. – 160 с.
3. Немировский, Ю.В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя / Ю.В. Немировский // ПМТФ. – 1969. – № 6. – С. 81–89.
4. Немировский, Ю.В. Структурная модель механики металлокомпозитов / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию академика В. М. Фомина: сб. науч. тр. – Новосибирск: Параллель, 2010. – С. 98–103.
5. Nemirovsky, Yu.V. Yield surfaces for reinforced concrete Axis-symmetrical plates and shells / Yu.V. Nemirovsky // Archiwum inżynierii ladowej. – 1974. – Т. XX, No 4. – P. 575–590.
6. Янковский, А.П. Построение определяющих уравнений упругопластического поведения перекрестно-армированного металлокомпозита в рамках модели Прандтля – Рейсса при плоской деформации / А.П. Янковский // Наука. Промышленность. Оборона: Труды XIII Всероссийской научно-технической конференции (Новосибирск, 18-20 апреля 2012 г.) – Новосибирск: НГТУ, 2012. – С. 677–685.
7. Немировский, Ю.В. Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязкоупругого материала / Ю.В. Немировский // Динамика сплошной среды (Институт гидродинамики СО РАН СССР). – 1970. – Вып. 4. – С. 50–63.
8. Прикладная теория пластичности: учебное пособие / К.М. Иванов [и др.]; под ред. К.М. Иванова. – СПб.: Политехника, 2009. – 375 с.
9. Хажинский, Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов / Г.М. Хажинский. – М: Научный мир, 2011. – 231 с.
10. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – М.: Мир, 1988. – 334 с.

SUMMARY

On the basis of the method of steps in time, numerical-analytical method of modeling of elastic-plastic deformation is developed for armored metal-composite layer with isotropic hardening phase materials, allowing at discrete moments of time to consider the components of the composition as nonlinear-elastic with the initial strained state. At each iteration, linearization of these determining ratios allows the task of modeling to reduce to the relations of the type of the generalized Hooke law for anisotropic heterogeneous layer with preliminary strained state.

Поступила в редакцию 23.08.2013

ВЛИЯНИЕ ФОРМ И РАЗМЕРОВ МЕСТНЫХ ДЕФЕКТОВ НА КАРТИНУ ВЫПУЧИВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

Мухутдинов Р.Ф., к.ф.-м. н. Шигабутдинов А.Ф., к.ф.-м. н. Шигабутдинов Ф.Г.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань

Введение. Ударные воздействия испытывают оболочки, используемые как в машиностроении, так и в строительстве. Например, удары возникают при посадке различных летательных аппаратов, удары испытывают и различные строительные конструкции при нештатных режимах эксплуатации. На несанкционированный удар рассчитываются защитные оболочки атомных реакторов, контейнеров для перевозки отходов атомной энергетики и т.д.

Обзор работ в области динамического поведения тонкостенных конструкций до 1972 года можно найти в монографии [1]. обстоятельный обзор более поздних работ с оценкой эффективности и рекомендациями по применению численных методов приведен в работе [2]. Из работ, имеющих непосредственное отношение к теме данной статьи, отметим исследования [3]-[6], в которых с использованием методом конечных разностей рассматривалось динамическое выпучивание изотропных тонких гладких цилиндрических оболочек в геометрически нелинейной постановке. Интерес к исследованию оболочек, изготовленных из ортотропных материалов, обусловлен широким применением в современных строительных конструкциях и в машиностроении композиционных материалов. В этом направлении выполнены работы [7] - [12]. В работах [3]-[9] рассматривались только оболочки постоянной толщины, без «дефектов» в форме поперечного сечения. Поведение ортотропных оболочек с подкрепляющими ребрами жесткости рассматривались в [10]-[11] и в других работах авторов.

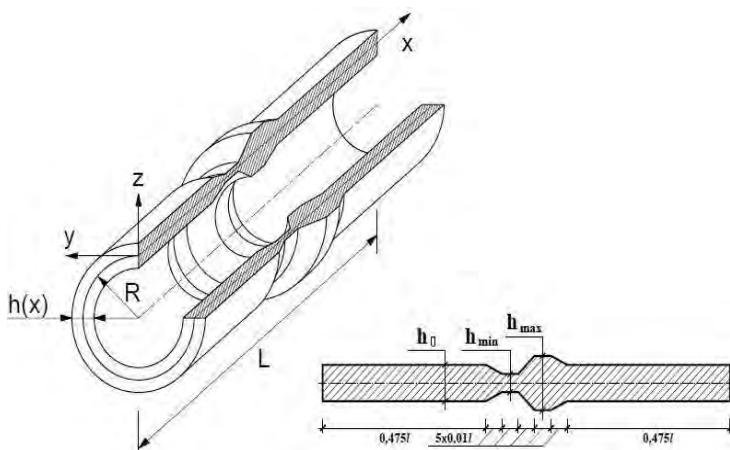


Рисунок 1.— Общий вид оболочки и продольное сечение

Постановка задачи. Объектом исследования в данной работе являются круговые ортотропные цилиндрические оболочки переменной толщины, по одному из торцов которых в начальный момент времени производится удар телом, движущимся вдоль продольной оси оболочки. Исследуется влияние геометрических размеров и месторасположения по длине оболочки локальных изменений толщины оболочки на формы волнообразования при продольном ударе абсолютно твердым телом. Появление таких «нерегулярностей» в геометрии

оболочки может быть вызвано, как дефектами изготовления, так и техническими требованиями. Уравнения движения оболочки и метод решения не накладывает никаких ограничений на размеры участков с измененной толщиной. В данной статье приведены результаты для случая, когда размеры длины участка с измененной толщиной составляют 5% от длины оболочки, что позволяет говорить о локальности отклонений формы оболочки от идеальной.

Для определенности будем предполагать, что удар наносится по левому торцу оболочки. Правая система координат $Oxuz$, изображенная на рисунке 1, имеет начало на торце, по которому наносится удар. Ось Ox направлена вправо, параллельно оси оболочки в направлении удара. Положительное направление оси Oz совпадает с направлением внешней нормали к поверхности оболочки. Кроме того, на рисунке 1 показан один из вариантов расположения «дефекта» толщины оболочки вдоль длины, его размеры и форма.

В работе рассматриваются только начальные стадии поперечных движений оболочки, когда движения оболочки можно считать осе симметричными [1], [4], [6], [7]. Главные оси ортотропии совпадают с направлением главных кривизн оболочки. Скорость удара по оболочке выбирается из условия не превышения упругих деформаций. В тех случаях, когда необходимо иметь возможность провести исследование при значительных скоростях нагружения, материал оболочки будем предполагать неограниченно упругим.

Волновые дифференциальные уравнения движения тонкой оболочки типа Тимошенко, получены из уравнений К.З. Галимова [13].

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} &= \rho \cdot h(x) \cdot \ddot{u} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(N + T_{11} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{T_{22}}{R} &= \rho \cdot h(x) \cdot \ddot{w} \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - N &= \frac{\rho \cdot (h(x))^3}{12} \cdot \ddot{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Как видно, уравнения (1) являются геометрически нелинейными уравнениями, учитывающими переменность толщины по длине оболочки, сдвиг и инерцию вращения элемента оболочки. Описывают осесимметричные движения. Соотношения физического закона упругости для материала оболочки приняты в виде:

$$T_{11} = K_1 \cdot h(x) \cdot (\varepsilon_1 + \nu_2 \cdot \varepsilon_2); \quad T_{22} = K_2 \cdot h(x) \cdot (\varepsilon_2 + \nu_1 \cdot \varepsilon_1) \quad (2)$$

$$M_{11} = \frac{K_1 \cdot (h(x))^3}{12} \cdot \chi_1; \quad N = k^2 \cdot G_{13} \cdot h(x) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \gamma \right) \quad (3)$$

$$K_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2}; \quad K_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2} \quad (4)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R}; \quad \chi_1 = \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \quad \chi_2 = 0. \quad (5)$$

В системе уравнений движения (1), физических и геометрических соотношений (2) – (5) все обозначения общепринятые. T_{11} , T_{22} – усилия в срединной поверхности оболочки, M_{11} – изгибающий момент в сечении, перпендикулярном продольной оси оболочки, N – перерезывающая сила в том же сечении, k^2 – коэффициент сдвига в теории оболочек типа Тимошенко, G_{13} – модуль сдвига, γ – угол поворота нормали к срединной поверхности, вокруг касательной к окружности, u , v , w – компоненты перемещения точек срединной поверхности приведения оболочки, ε_1 , ε_2 – относительные деформации, соответствующие введенной системе координат. Рассматривались цилиндрические оболочки, левый ударяемый край которых опирается на шарнирно подвижную опору, а правый край жестко заделан. В начальный момент оболочка считается недеформированной.

Решение задачи и обсуждение результатов. Изменение толщины оболочки в зоне «дефектов» происходит без скачков, геометрия «дефектов» описывается линейными функциями. В итоге, в каждом рассмотренном варианте решения задачи оболочка имеет семь участков с постоянной или линейно изменяющейся толщиной. Всего изучается девять положений «дефекта» с шагом $0,1l$ вдоль длины оболочки и четыре варианта изменения толщины. Другими словами, анализ поведения оболочки при ударе основывался на рассмотрении движения 36 оболочек. Уравнения (1) и соотношения (2)–(5) записывались в виде явной конечно-разностной схемы типа «крест». Значения безразмерных шагов сетки: $\Delta \bar{d} = 0,005$ – по пространственной координате и $\Delta t = 0,0025$ – по временной координате были выбраны по результатам анализа числовых экспериментов с нелинейной разностной схемой задачи и соответствуют рекомендациям работы [14] – найденный шаг по продольной координате не превышает трети минимальной толщины оболочки. В численных экспериментах для оценки устойчивости разностной схемы проводились расчеты при различных шагах по временной координате: $0,005$; $0,0025$; $0,00125$ и фиксированном шаге $0,005$ – по пространственной координате. Оптимальным с точки зрения устойчивости счета, сходимости счета и времени вычислений оказалось указанное соотношение $\mu = \Delta t / \Delta x = 0,5$.

С целью исследования области применимости метода решения и программы, при тестировании разностной схемы и метода решения счет для определения прогибов оболочки проводился до значений времени, соответствующего времени 24 пробегов продольной волны вдоль оболочки. Устойчивость счета присутствовала во всех случаях. Были проделаны расчеты с увеличением скорости удара в предположении о бесконечной упругости материала, при этом получены прогибы равные $1,5 - 2$ толщинам оболочки. И при изменении скорости удара счет так же оставался устойчивым. Некоторая часть результатов вычислений приведена на рисунках 2-4. На рисунках 2-3, для

большой наглядности, показано расположение «дефекта» на поверхности оболочки (посередине длины).

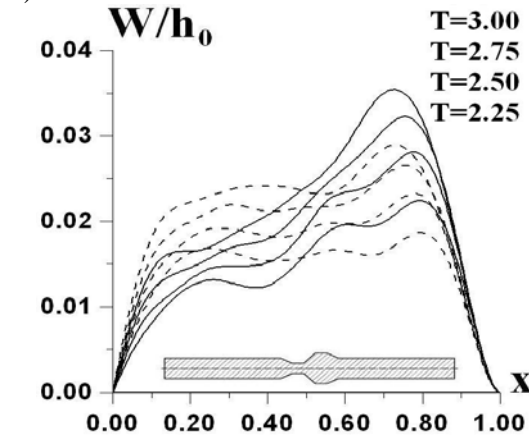


Рисунок 2. Прогибы оболочки к моменту $T = 3$

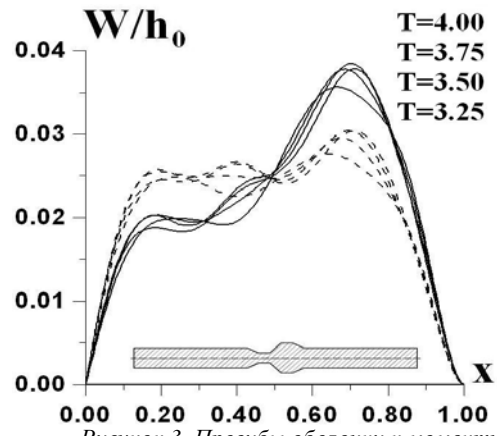


Рисунок 3. Прогибы оболочки к моменту $T = 4$

Размеры рассматриваемых оболочек: длина равна 2м, радиус срединной поверхности оболочки равен 1м. Толщина оболочек $h_0 = 0,04$ м, характеристики «дефекта» h_{\min} и h_{\max} варьировались пропорционально с шагом $\Delta h = 0,005$ м, соблюдая условия тонкости оболочки. Указанное изменение толщины позволяет сохранять массу оболочки постоянной и рассматривать изменения в форме поперечного сечения, как перераспределение материала в теле оболочки. Скорость удара во всех приведенных вариантах счета принималась равной 5м/с. Отношение модулей упругости $E_2 / E_1 = 0,5$; отношение модуля сдвига к большему из модулей упругости было равно $G_{13} / E_1 = 0,4$. Отношение массы оболочки к массе ударяющего тела принималось равным 0,1.

На рисунках 2 и 3 показаны формы движения оболочки на третьем и четвертом пробеге волны. Безразмерное время $T = t / t_0$ получено делением реального времени t , истекшего с момента удара, на время t_0 , соответствующее времени однократного пробега продольной волны вдоль длины оболочки. На рисунке 2 показаны прогибы оболочки в четыре момента времени (четыре кривые на рисунке) при движении продольной волн от ударяемого торца (слева на право). При этом меньшему моменту времени соответствует ниже лежащий график. Нижняя кривая соответствует моменту времени, когда продольная волна прошла четверть длины оболочки (безразмерное время, истекшее от момента удара $T = 2,25$), верхняя кривая соответствует безразмерному моменту времени $T = 3,00$ (продольная волна второй раз за все время движения достигла заданного торца). На рисунке 3 в четыре момента времени показаны формы движения оболочки при движении отраженной от заданного торца продольной волны. На графиках прогибы отнесены к толщине оболочки вне зоны «дефекта» $h_0 = 0,04$ м. Штрихпунктирными линиями для сравнений на рисунках показаны формы движения той же оболочки без «дефектов», в те же указанные на рисунках моменты времени. «Дефект» располагается в среднем сечении оболочки, минимальная толщина оболочки в этом месте составляет 0,025 м, максимальная – 0,045 м.

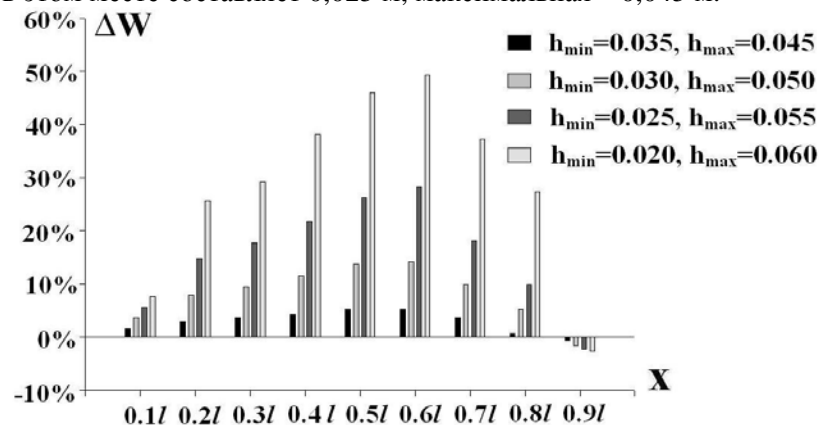


Рисунок 4. – Влияние расположения и размеров «дефекта» на значение прогиба

На рисунке 4 представлены процентное изменение максимального значения прогиба оболочки с переменной толщиной на четвертом пробеге волны вдоль оболочки в зависимости от места поло-

жения и толщин оболочки в зоне «дефекта» для 36 вариантов вычислений. Здесь $\Delta w = ((w_{\bar{a}} - w) / w) \cdot 100\%$, $w_{\bar{a}}$ - максимальный прогиб в оболочке с переменной толщиной, w - максимальный прогиб в оболочке с постоянной толщиной в тот же момент времени. Отметим, что в данном варианте решения счет проводился до времени шести пробегов продольной волны вдоль оболочки. Максимальные значения прогибов и для оболочки переменной толщины и для оболочки постоянной толщины наблюдались при четвертом пробеге волны вдоль оболочки. Вдоль горизонтальной оси показаны точки, в которых находится область локального изменения толщины.

РЕЗЮМЕ

Результаты решения показывают, что волновой характер продольного нагружения существенным образом, и качественно, и количественно, влияет на формы изгибания цилиндрических оболочек. При этом прогибы оболочек чувствительны к изменению толщины оболочки. При малых размерах дефектов максимальный прогиб не концентрируется в области дефекта. Изменение геометрии распределения толщины по длине оболочки требует нового расчета в каждом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек // М., Наука, 1972, 432с.
2. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций // Изв. РАН, МГТ, 2001, №5, с. 156-173.
3. Борисенко В.И., Клокова А.И. Закритическая деформация цилиндрической оболочки при ударе // АН УССР, Прикладная механика, 1966 г. том II, в.10, с.29 – 35.
4. Гордиенко Б.А. Экспериментальное исследование поведения стержней и цилиндрических оболочек при ударе // Материалы к VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Днепропетровск, 1969/ М.: Наука, 1969, с. 190-193.
5. Гордиенко Б.А. О машинном решении задач ударного выпучивания упругих систем методом конечных разностей // Изв. АН СССР, МГТ, 1970, №3, с. 143-148.
6. Кийко И.А. Продольный удар по тонкой цилиндрической оболочке // Вестник МГУ, Математика и механика, 1972, № 3, с. 118-121.
7. Гордиенко Б.А. Динамика ортотропных цилиндрических оболочек при осевом ударе // Доклад на III Всесоюзной конференции по механике полимеров. Рига, 1976г. /Механика полимеров, 1977г., № 5, с. 892 – 895.
8. Gordienko B.A. Analysis of impact deformation of corrugated and anisotropic shells // ROSPRAWY INZYNIERSKIE (Engineering Transactions), T.24, zeszyt 4./ Warszawa, Panstowe Wydawnictwo Naukowe, 1976, s. 809-818.
9. Шигабутдинов Ф.Г., Хамитов Т.К. Определение критических усилий потери устойчивости упругих цилиндрических оболочек при продольном сжатии силами ударного типа // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева, 2011, №2, с.85-92.
10. Шигабутдинов Ф.Г., Мухутдинов Р.Ф. Распространение упругих волн от продольного удара по оболочкам переменной толщины с нулевой гауссовой кривизной срединной поверхности // Вестник Нижегородского университета им. Н. И.Лобачевского, 2011г., том IV, Часть 5, с. 2374 – 2376.
11. Шигабутдинов Ф.Г., Мухутдинов Р.Ф. Влияние несимметрично расположенных шпангоутов на поперечное волнообразование ортотропных цилиндрических оболочек конечной длины при продольном ударе // «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Труды X международной Четаевской конференции, Казань, 12-16 июня 2012г. Том 1. Аналитическая механика. / Казань: КНИТУ-КАИ им.А.Н. Туполева. - 2012 г. – с. 521-528.
12. Мухутдинов Р.Ф., Шигабутдинов Ф.Г. Влияние местных дефектов на волнообразование в ортотропных цилиндрических оболочках конечной длины при продольном ударе // Вестник МГСУ №10 2013г., с. 60-67.
13. Галимов К.З. и др. // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Казань: Изд-во КГУ, 1977, с. 3-132.
14. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. // Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек: монография / Нижний Новгород: Издательство Нижегородского университета, 1992, с. 3-159.

SUMMARY

Results of the solution shows that the wave nature of the longitudinal loading significantly, both qualitatively and quantitatively affect the shape deformation of cylindrical shells. This deflection sensitive to changes in membrane thickness of the shell. For small defects of the maximum deflection is not concentrated in the area of the defect. Changing the geometry of the thickness distribution along the length of the shell requires a new calculation in each case.

Поступила в редакцию 10.11.2013

К СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ

д. ф.-м. н. ¹ Чигарев Ю.В., асп. ² Чигарев В.А.

¹ Западнo-Поморский технологический университет, Щецин, Польша

² Белорусский национальный технический университет, Минск

Как показывают некоторые исследования в нелинейных динамических системах возникновение хаоса связано с появлением определенного типа локальной неустойчивости в некоторых областях фазового пространства. Впервые эта проблема применительно к волновым процессам была поднята в работах Ферми, Паста, Улама [1]. Дальнейшее развитие получила в других физических задачах в работах Заславского Г.М., Чирикова Б.В. [2,3] и др. Впервые стохастизация лучей в неоднородных средах была изучена в работе [4]. Существенным свойством данного хаоса является его неустранимость и оказывание большого влияния на физический процесс, например, потерю устойчивости. Поэтому во многих нелинейных динамических задачах к статистическому описанию надо переходить не только в случае присутствия случайных параметров в уравнении движения или граничных условиях, но и в случае возникновения стохастических законов в системе. Переход от регулярного или условно периодического движения к движению, которое становится сильно сложным, нерегулярным, похожим на случайное определяется границей стохастичности. Вопросы устойчивости пространственных колебаний нитей и стержней с геометрической нелинейностью исследованы в работах [5,6]. Показано, что решение пространственной задачи в первом приближении дает устойчивое движение.

Методика исследований. Рассмотрим колебания стержня длиной l при условии отсутствия кручения и относительного смещения опор. Считаем, что центральная ось стержня в недеформированном состоянии совпадает с осью x прямоугольной системы координат, а главные оси инерции поперечного сечения параллельны осям y и z . Пусть стержень подвергается нагрузкам $G_v(x,t)$ и $G_w(x,t)$ в двух взаимно перпендикулярных направлениях параллельно осям y и z вдоль которых перемещения точек средней линии стержня обозначим через v и w . На концах стержня $x=0, x=l$. Согласно работе [4] пространственные нелинейные колебания стержня можно записать в виде

$$\frac{l^4 \omega_0^2 \rho F}{E J_z} \ddot{v} + v^{IV} - 4\eta v'' \lambda_0 = G_v(x,t) \quad (1)$$

$$\frac{l^4 \omega_0^2 \rho F}{E J_z} \ddot{w} + w^{IV} - 4\eta w'' \lambda_0 = G_w(x,t) \quad (2)$$

Здесь λ_0 деформация средней линии

$$\lambda_0 = 0,5 \int_0^l (v'^2 + w'^2) dx \quad (3)$$

Параметр $\eta = Fl^2 / 4J$, ($J = J_y = J_z$) - характеризует геометрическую нелинейность

E - модуль упругости, ρ - плотность материала, F - площадь поперечного сечения стержня, J - момент инерции сечения. Штрихами обозначены производные по переменной (x/l) , а точками по переменной $t_0 = \omega_0 t$, t - время, ω_0 - первая собственная частота в плоскости Oxz

$$\text{Граничные условия: } v=0, \quad w=0, \quad v''=w''=0 \quad (4)$$

Решение (1)-(2) будем искать в виде

$$\begin{cases} v(x,t) = f_1(t)\varphi_1(x, y, z) \\ \hline w(x,t) = f_2(t)\varphi_2(x, y, z) \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $f_i(t)$ - функции времени, φ_i - собственные векторы, образующие полную систему функций удовлетворяющих условию ортогональности. С помощью метода Бубнова-Галеркина и ряда преобразований придем к уравнениям

$$\ddot{f}_1 + f_1 + \eta(f_1^2 + f_2^2)f_1 = \varepsilon Q_1 \quad (6)$$

$$\ddot{f}_2 + f_2 + \eta(f_1^2 + f_2^2)f_2 = \varepsilon Q_2 \quad (7)$$

Где

$$Q_1 = \omega_1 \varphi_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) + h_1 \sin p_1 t \quad (8)$$

$$Q_2 = \omega_2 \varphi_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) + h_2 \sin p_2 t \quad (9)$$

δ – функции характеризуют внешнее возмущение в виде толчков, $T = 2\pi / \theta$ – период возмущающей силы, ω – частота собственных колебаний в направлении y, z , θ – частота возмущающей силы.

Будем считать в формулах (6), (7) отклонения f_2 малыми по сравнению с f_1 , тогда можно пренебречь второй степенью свободы и уравнение (6) примет вид уравнения Дуффинга

$$\ddot{f}_1 + f_1 + \eta f_1^3 = \varepsilon Q_1 = \varepsilon \omega_1 \varphi_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) + h_1 \sin p_1 t \quad (10)$$

Между δ – толчками колебания описываются уравнением

$$\ddot{f}_1 + f_1 + \eta f_1^3 = h_1 \sin p_1 t \quad (11)$$

Полагая $\eta = 0$ в первом приближении решение (11) будет

$$f_1^1 = a_1 \sin p_1 t \quad (12)$$

Второе приближение получим из уравнения

$$\ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 = (p_1^2 - k^2) f_1 - \eta f_1^3 + h_1 \sin p_1 t \quad (13)$$

здесь $k^2 = 1$. Данное уравнение преобразуем к виду

$$\ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 = a_2 \sin p_1 t + \frac{1}{4} a_1^3 \sin 3p_1 t \quad (14)$$

(14) получено с учетом (12) и соотношений

$$\sin^3 p_1 t = \frac{1}{4} (3 \sin p_1 t - \sin 3p_1 t); \quad a_2 = a_1 (p_1^2 - k^2) - \frac{3}{4} \eta a_1^3 + h_1 \quad (15)$$

В (14) положим $a_2 = 0$, тогда из второго уравнения (15) можно найти связь между амплитудой a_1 и частотой p_1

$$\ddot{f}_1 + p_1^2 f_1 = \frac{1}{4} a_1^3 \sin 3p_1 t \quad (16)$$

Решение (16) ищем в виде общего и частного

$$f_1 = f_1^{(1)} + f_1^{(2)} \quad (17)$$

Для однородного уравнения имеем

$$f_1^{(1)} = b_1 \sin p_1 t \quad (18)$$

Для частного

$$f_1^{(2)} = d \sin 3p_1 t \quad (19)$$

После подстановки (19) в (16) найдем

$$d = -\frac{\eta a_1^3}{32 p_1^2} \quad (20)$$

Решение (17) запишем

$$f_1 = b_1 \sin p_1 t - \frac{\eta a_1^3}{32 p_1^2} \sin 3p_1 t \quad (21)$$

Согласно метода последовательных приближений Дуффинга: $a_1 = b_1$. Представим уравнение (16) в виде системы двух уравнений

$$\frac{d\psi}{dt} = -p_1 t; \quad \frac{df_1}{dt} = -\frac{1}{12 p_1} a_1 \cos 3p_1 t + \psi \quad (22)$$

Решение которых ищем в виде

$$\psi = C_1 e^{\lambda t} \quad f_1 = C_2 e^{\lambda t} \quad (23)$$

Далее применяя обычную процедуру, приходим к характеристическому уравнению, корни которого характеризуют устойчивое (неустойчивое) состояние стержня между δ – толчками

Теперь рассмотрим колебания стержня под действием δ – толчков. В этом случае уравнение колебаний будет

$$\ddot{f}_1 + f_1 + \eta f_1^3 = \varepsilon f_1 \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (24)$$

Решение представим в виде [2]

$$f_1 = A \cos[(\omega_1 + \Delta\omega_1) + \beta] \quad (25)$$

Здесь A - амплитуда, β – фаза, $\Delta\omega_1 = 0,37\eta\omega_1 A^2$

Колебания стержня можно описать разностными уравнениями

$$A_{n+1} - A_n = \varepsilon \sin 2\beta \quad (26)$$

$$\beta_{n+1} = \{ \beta_n + k_n \sin 2\beta + \omega_{1n} \varpi^{-1} + \varepsilon \cos^2 \beta_n \} \quad (27)$$

Где ϖ - частота возмущающей силы

$$k_n = 0,37\varepsilon\eta\omega_1 T A_n^2 \quad (28)$$

Фигурные скобки в (27) означают дробную часть аргумента. Вычисление корреляционной функции для фазы β дает выражение

$$R_n = k_n^{-1} = (0,37\varepsilon\eta\omega_1 T A_n^2)^{-1} \quad (30)$$

При $k_n \gg 1$ происходит затухание фазовых корреляций, что соответствует выполнению критерия стохастичности [2-4] и исследование устойчивости нелинейных колебаний нужно проводить вероятностными методами. Уравнение (24) перепишем в стандартной форме для функций $q(t) = \dot{f}_1(t)$; $f_1(t)$

$$\dot{f}_1 = \frac{\partial H(f_1, q, t)}{\partial q}; \quad \dot{q} = \frac{\partial H(f_1, q, t)}{\partial f} \quad (31)$$

где Гамильтониан

$$H = H_0 + \varepsilon H_1; \quad H_0 = \frac{1}{2}[q^2 + (\omega_{10} f_1)^2 - \frac{1}{2}(\eta\omega_{10}^2 + f_1^4)]; \quad H_1 = 0,5\omega_{10} f_1^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Перейдем к переменным «действие-угол», тогда уравнение колебаний

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = \omega_1(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} \quad (32)$$

Членом $\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}$ пренебрежем, так как он дает поправку к частоте, которая для достаточно малых ε по сравнению с нелинейностью в $\omega(I)$ имеет меньший порядок. Введем функцию плотности вероятности $W(I, \alpha, t)$ и запишем уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (L_0 + \varepsilon \delta L)W. \quad (33)$$

Где $L_0 = -\omega_1 \frac{\partial}{\partial \alpha}$; $\delta L = \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial I} - \frac{\partial H_1}{\partial I} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right)$

После несложных преобразований для начального распределения $W_0(I, 0)$, $W_n = W_0(I, 0) \delta_{n,0}$

получим диффузионное уравнение типа Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для функции распределения от переменных действия

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} (8\varepsilon^2 \pi \varpi I W_0) + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial I^2} (4\varepsilon^2 \pi \varpi I^2 W_0) \quad (34)$$

По уравнению (34) можно составить единственным образом дифференциальное уравнение, описывающее случайный процесс, особенностью которого является наличие внешней возмущающей силы в виде «белого шума» $v(t)$ [7]: $\langle v(t) \rangle = 0$, $\langle v(t)v(t+\tau) \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$,

$\frac{N_0}{2}$ – есть постоянная спектральная плотность белого шума.

Стохастическое дифференциальное уравнение соответствующее (34) имеет вид $\dot{I} = 2I \sqrt{\frac{8\varepsilon^2 \pi \omega}{N_0}} v(t)$

В предположении, что белый шум имеет единичную спектральную плотность $N_0 = 2$ в старых переменных случайные колебания будут описываться уравнением ФПК в виде

$$\dot{f}_1 = 2f_1 \sqrt{\varepsilon^2 \pi \omega} v_0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (2\varepsilon^2 \pi \omega f_1 W_0) + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial f_1^2} (8\pi \omega \varepsilon^2 f_1^2 W_0).$$

Положим $\dot{W}_0 = 0$, тогда стационарное решение будет $W_{0c}(f_1) = \frac{M}{8\pi \omega \varepsilon^2 f_1^2} \exp \ln \sqrt{f_1}$

Где M определяется из условия нормировки $M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8\pi \omega \varepsilon^2 f_1^2} \exp \ln \sqrt{f_1} df_1$

Среднеквадратическое отклонение стержня от положения равновесия определяется равенством

$$E[f_1^2] = \int_{-\infty}^{\infty} f_1^2 W_{0c} df_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{8\pi \omega \varepsilon^2 f_1^2} \exp \ln \sqrt{f_1} df_1.$$

Таким образом, об устойчивости стержня в области стохастического движения будем судить по следующей теореме: решение уравнения (24) $f_1^* = 0$ назовем устойчивым в среднем квадратическом, если для любого $\xi > 0$ найдется такое $\mu(\xi) > 0$, что при выполнении условия $|f_{10}| < \mu(\xi)$ для любого $t > t_0$ справедливо неравенство $E[f_1^2] < \xi$.

РЕЗЮМЕ

Пространственные нелинейные колебания стержня под действием двух взаимно перпендикулярных сил приводятся к уравнению Дуффинга, где возмущающая сила представляет сумму двух составляющих: δ - функцию и гармоническую функцию. Рассмотрено решение между δ -толчками, которое для исследования устойчивости сводится к обычной процедуре определения корней характеристического уравнения. В области δ -возмущений получено выражение, определяющее границу стохастичности. Получено уравнение, описывающее стохастические колебания стержня. Приводится критерий стохастической устойчивости (неустойчивости) колебаний стержня в среднем квадратическом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonlinear problems. Los Alamos Scientific Report La-1940 (1955).
2. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М., Наука, 1970, 234с.
3. Заславская Г. М., Чириков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. Успехи физических наук. Том 105, вып. 3, 1971, с 37-40.
4. Чигарев А.В., Чигарев Ю.В. О возможности возникновения стохастической неустойчивости лучей в неоднородных средах. Акустический журнал. Том 24, вып. 5, 1978, с. 765-771.
5. Муницин А.И., Крайнова Л.Н. Аналитическое решение задачи о колебаниях стержня с геометрической нелинейностью. «Вестник ИГЭУ», вып.3, 2007. с. 1-3.
6. Муницин А.И., Крайнова Л.Н. Нелинейные колебания элемента трубопровода малой кривизны. «Вестник ИГЭУ», вып.2, 2009. с. 1-5
7. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А.В. Чигарев; Под. ред. Е.И. – Мн: УП «Технопринт», – 2000. – 426 с. – ISBN 985-6373-69-7.

SUMMARY

The conditions of possibility emergence of deterministic chaos in rods under effect of oscillator forces are considered. The quantities parameters which characterize a state of deterministic chaos depend on a nonhomogeneity and nonlinearly of a rod material.

Поступила в редакцию 22.08.2013

О ДИНАМИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ НАСЫЩЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ УПРУГИХ ПОРИСТЫХ СРЕД

с. н. с. ¹Кукарских Л.А., д. ф.-м. н. ²Поленов В.С

¹ Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж

² Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
(Воронежский филиал)

Изучается распространение звуковых волн в неограниченной упругой, насыщенной жидкостью пористой среде, физико-механические свойства которой характеризуются комплексными параметрами. Показано, что в такой среде существует два типа звуковых продольных и одна поперечная волны, скорости и коэффициенты затухания которых существенно зависят от отношения мнимой и действительной частей модулей пористой среды. Получены формулы для определения скорости, коэффициента затухания волны и логарифмического декремента затухания колебаний звуковых волн. Построены графики зависимости скорости и коэффициента затухания продольной звуковой волны.

Приводится сравнение скоростей и коэффициентов затухания волн, в случае, когда модули упругости являются действительными числами.

Ранее в [1-4] изучались стационарные упругие волны в насыщенной жидкостью пористой среде при низкочастотных и высокочастотных амплитудах. В [5,6] рассматривались нестационарные упругие волны в насыщенной жидкостью однородной пористой среде, когда коэффициенты, характеризующие свойства пористой среды, являются действительными числами., а в [7] - когда коэффициенты среды являются функциями пространственных координат. В работах [5-7] для определения скорости и интенсивности распространения волн, применялся метод математической теории разрывов [8].

1. Взаимопроникающее движение упругой фазы и жидкости будем рассматривать как движение жидкости в деформируемой двухфазной пористой среде. Предполагается, что размеры пор намного меньше расстояний, на которых существенно изменяются макроскопические или осредненные параметры среды. В этом случае можно считать, что упругая фаза и жидкость являются сплошными средами и в каждой точке пространства существует два вектора смещения: вектор смещения упругой фазы (скелета пористой среды) и вектор смещения жидкости.

Динамическое деформирование такой пористой среды описывается системой уравнений [1,2]

$$\begin{aligned} (\lambda^* + \mu^*) \frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} + \mu^* \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_j^2} + A^* \frac{\partial^2 u_j^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j} - \rho_{11} \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial t^2} - \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial t^2} = 0 \\ A^* \frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} + B^* \frac{\partial^2 u_j^{(2)}}{\partial x_i \partial x_j} - \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial t^2} - \rho_{22} \frac{\partial^2 u_i^{(2)}}{\partial t^2} = 0, \rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}, \rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u_i^{(\chi)}$ ($\chi = 1, 2$) – компоненты вектора перемещений фаз; $\lambda^*, \mu^*, A^*, B^*$ – комплексные модули упругости пористой среды: $\lambda^* = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\mu^* = \mu_1 + i\mu_2$, $A^* = A_1 + iA_2$, $B^* = B_1 + iB_2$;

ρ_{12} – интенсивность перехода массы из второй фазы в первую; $\rho_{11} = \frac{\rho_1}{\alpha_1}$ и $\rho_{22} = \frac{\rho_2}{\alpha_2}$ – истинные

плотности твердой фазы и жидкости в порах; ρ_1 – масса первой фазы в единице объема среды; ρ_2 – масса второй фазы в единице объема среды; α_1 и α_2 – величины, характеризующие доли объема смеси, занимаемые каждой фазой ($\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$),

Индексы, стоящие вверху в круглых скобках относятся соответственно, 1 – к твердой фазе, 2 – к жидкости.

Поскольку при движении жидкости в твердой фазе ее «эффективная масса» больше истинной ($\rho_{22} > \rho_2$), коэффициент ρ_{12} должен быть отрицательным.

Решение системы (1) будем искать в виде затухающей волны [9]

$$u_j^{(\chi)} = C_j^{(\chi)} \exp(i\omega t - \theta x_k v_k), \quad \theta = \alpha + i\beta, \quad \beta = \frac{\omega}{c}, \quad \chi = 1, 2 \quad (2)$$

где $C_j^{(\chi)}$ – амплитуды колебания; v_i – координаты единичного вектора в направлении скорости распространения волны; $c > 0$ – скорость волны; $\alpha > 0$ – коэффициент затухания волны; ω – круговая частота; β – фазовая постоянная.

Подставим (2) в систему (1). После преобразований, получим

$$[(\lambda^* + \mu^*)C_j^{(1)}v_i v_j + \mu^* C_i^{(1)}](\alpha + i\beta)^2 + A^*(\alpha + i\beta)^2 C_j^{(2)}v_i v_j + \rho_{11}\omega^2 C_i^{(1)} + \rho_{12}\omega^2 C_i^{(2)} = 0 \quad (3)$$

$$A^*(\alpha + i\beta)^2 C_j^{(1)}v_i v_j + B^*(\alpha + i\beta)^2 C_j^{(2)}v_i v_j + \rho_{12}\omega^2 C_i^{(1)} + \rho_{22}\omega^2 C_i^{(2)} = 0$$

2. Продольные звуковые волны. Характеристики продольных волн определим из (3), если положить, что в (3) $C_i^{(\chi)}v_i = D_\chi \neq 0$ ($\chi = 1, 2$), $\alpha = \alpha_l$, $\beta = \beta_l$. Для этого умножим оба уравнения (3) на v_i и просуммируем по повторяющемуся индексу i . В результате получим однородную систему уравнений с комплексными коэффициентами относительно D_1 и D_2

$$[\rho_{11}\omega^2 + \Lambda^*(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_1 + [\rho_{12}\omega^2 + A^*(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_2 = 0 \quad (4)$$

$$[\rho_{12}\omega^2 + A^*(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_1 + [\rho_{22}\omega^2 + B^*(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_2 = 0, \quad \Lambda^* = \lambda^* + 2\mu^*$$

Введем безразмерные комплексные коэффициенты следующим образом

$$\sigma_{11}^* = \frac{\Lambda^*}{H}, \quad \sigma_{12}^* = \frac{A^*}{H}, \quad \sigma_{22}^* = \frac{B^*}{H}, \quad H = \Lambda_1 + B_1 + 2A_1, \quad \Lambda^* = \Lambda_1 + i\Lambda_2 \quad (5)$$

$$\gamma_{11} = \frac{\rho_{11}}{\rho}, \quad \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho}, \quad \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho}, \quad \rho = \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}$$

При этом должно выполняться условие

$$\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* + 2\sigma_{12}^* = \gamma_{11} + \gamma_{22} + 2\gamma_{12} = 1 \quad (6)$$

Разделим (4) на ρH и, используя обозначения (5) и условие (6), получим

$$[\delta_l^2 \gamma_{11} + \sigma_{11}^*(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_1 + [\delta_l^2 \gamma_{12} + \sigma_{12}^*(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_2 = 0 \quad (7)$$

$$[\delta_l^2 \gamma_{12} + \sigma_{12}^*(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_1 + [\delta_l^2 \gamma_{22} + \sigma_{22}^*(\alpha_l + i\beta_l)^2]D_2 = 0, \quad \delta_l = \frac{\omega}{G_l}, \quad G_l = \sqrt{\frac{H}{\rho}}$$

где G_l, δ_l – скорость продольной волны и фазовая постоянная, в случае, когда коэффициенты пористой среды являются действительными числами.

Для того, чтобы однородная система (7) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Раскрывая определитель системы (7), получим биквадратное уравнение относительно $\alpha_l + i\beta_l$

$$(\sigma_{11}^* \sigma_{22}^* + \sigma_{12}^{*2})(\alpha_l + i\beta_l)^4 + (\gamma_{11} \sigma_{22}^* + \gamma_{22} \sigma_{11}^* - 2\gamma_{12} \sigma_{12}^*) \delta_l^2 (\alpha_l + i\beta_l)^2 + (\gamma_{11} \gamma_{12} - \gamma_{12}^2) \delta_l^4 = 0 \quad (8)$$

Разделим (8) на $(\alpha_l + i\beta_l)^4$ и введем обозначение

$$z^* = \frac{1}{(\alpha_l + i\beta_l)^2} \quad (9)$$

Тогда уравнение (8) с учетом того, что $\sigma_{11}^* = \sigma'_{11} + i\sigma''_{11}$, $\sigma_{12}^* = \sigma'_{12} + i\sigma''_{12}$, $\sigma_{22}^* = \sigma'_{22} + i\sigma''_{22}$, запишем в виде

$$k \delta_l^4 z^{*2} + (\Gamma_1 + i\Gamma_2) \delta_l^2 z^* + E_1 + iE_2 = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \gamma_{11} \sigma'_{22} + \gamma_{22} \sigma'_{11} - 2\gamma_{12} \sigma'_{12}, \quad \Gamma_2 = \gamma_{11} \sigma''_{22} + \gamma_{22} \sigma''_{11} - 2\gamma_{12} \sigma''_{12} \\ E_1 &= \sigma'_{11} \sigma'_{22} - \sigma''_{11} \sigma''_{22} - \sigma_{12}'^2 + \sigma_{12}''^2, \quad E_2 = \sigma'_{11} \sigma''_{22} + \sigma''_{11} \sigma'_{22} - 2\sigma_{12}' \sigma_{12}'' \\ k &= \gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2 \end{aligned}$$

Уравнение (10) разрешим относительно действительной ($\alpha_l^2 - \beta_l^2$) и мнимой ($\alpha_l \beta_l$) частей

$$\alpha_l^2 - \beta_l^2 = -\frac{2kb_1\delta_l^2}{b_1^2 + b_2^2}, \quad \alpha_l \beta_l = \frac{kb_2\delta_l^2}{b_1^2 + b_2^2} \quad (11)$$

где

$$b_1 = \Gamma_1 \pm \sqrt{r} \cos \frac{\varphi_1}{2}, \quad b_2 = \Gamma_2 \pm \sqrt{r} \sin \frac{\varphi_1}{2}, \quad r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad (12)$$

$$a_1 = \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 - 4kE_1, \quad a_2 = 2(\Gamma_1\Gamma_2 - 2kE_2), \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

Из соотношений (11) после преобразований, получим коэффициент затухания α_l продольной волны и фазовую постоянную β_l

$$\alpha_l = \sqrt{\frac{kb_2\delta_l^2}{(b_1^2 + b_2^2)(b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})}} \quad (13)$$

$$\beta_l = \sqrt{\frac{k\delta_l^2(b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})}{b_1^2 + b_2^2}} \quad (14)$$

Учитывая, что $\beta_l = \frac{\omega}{c_l}$, где c_l – скорость распространения продольной волны, когда коэффициенты, характеризующие пористую среду являются комплексными числами, из (14) получим

$$c_l = \sqrt{\frac{G_l^2(b_1^2 + b_2^2)}{k(b_1 + \sqrt{b_1^2 + b_2^2})}} \quad (15)$$

Так как величины b_1 и b_2 в (12) имеют знаки « \pm », то в упругой насыщенной жидкостью пористой среде существует два типа продольных волн c_{l1} и c_{l2} , скорости распространения которых определяются по формуле (15) и два типа коэффициентов затухания α_{l1} и α_{l2} , которые находятся по формуле (13).

Если ввести обозначение

$$\eta_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2} \quad (16)$$

То формулы(13) – (15) можно записать в виде

$$\alpha_{l_{1,2}} = \sqrt{\frac{k\omega^2(\eta_1 - 1)}{b_1 G_l^2 \eta_1^2}}, \quad \beta_{l_{1,2}} = \sqrt{\frac{k\omega^2(\eta_1 + 1)}{b_1 G_l^2 \eta_1^2}}, \quad c_{l_{1,2}} = \sqrt{\frac{b_1 G_l^2 \eta_1^2}{k(\eta_1 + 1)}} \quad (17)$$

Таким образом, зная комплексные коэффициенты упругой, насыщенной жидкостью пористой среды, по формулам (13), (15) или (17) можно определить скорости распространения и коэффициенты затухания продольных волн.

На рис. 1,2 приведены зависимости скорости C_l/G_l и коэффициента затухания α_l продольной звуковой волны от отношения b_2/b_1 при заданных значениях:

σ'_{11}	σ'_{22}	σ'_{12}	σ''_{11}	σ''_{22}	σ''_{12}	γ_{11}	γ_{22}	γ_{12}
0.700	0.250	0.025	0.700	0.240	0.030	0.600	0.600	-0.100
0.800	0.160	0.020	0.600	0.400	0.000	0.600	0.400	0.000
0.850	0.250	0.050	0.750	0.150	0.050	0.950	0.050	0.000
0.750	0.150	0.050	0.800	0.150	0.025	0.850	0.015	0.000

Номера у кривых указывают при каких значениях b_1 и k , рассчитанных по формулам (10) и (12) построены данные линии.

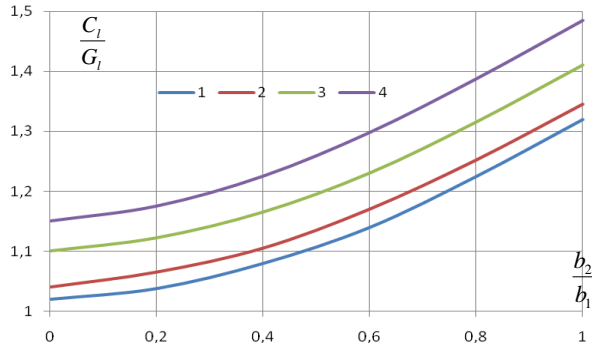


Рисунок 1-Зависимость скорости продольной звуковой волны от $\frac{b_2}{b_1}$

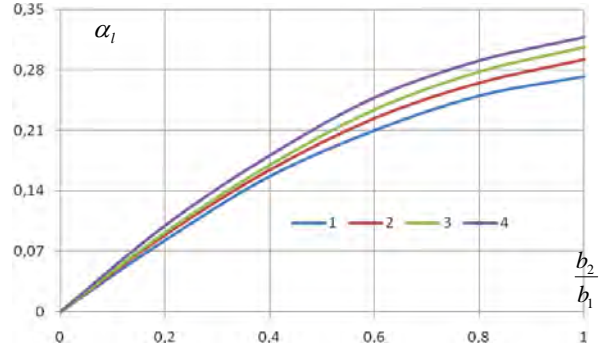


Рисунок 2-Зависимость коэффициента затухания скорости продольной волны от $\frac{b_2}{b_1}$

Если связь между фазами отсутствует ($\rho_{12} = 0, A_1 = A_2 = 0$) и мнимые части коэффициентов пористой среды равны нулю, то из (17) следует, что скорости распространения продольных волн в пористой среде равны скоростям волн, распространяющихся отдельно в сплошной упругой среде и жидкости [3]

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_{11}}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_{l_2} = \sqrt{\frac{B_1}{\rho_{22}}} = \sqrt{\frac{B}{\rho_2}} \quad (18)$$

3. Поперечные звуковые волны. Характеристики поперечной волны определим из (3), если в них положить $C_j^{(\chi)} \nu_j = 0$ ($\chi = 1, 2$) и перейти к безразмерным коэффициентам. В результате получим

$$\begin{aligned} [\gamma_{11}\delta_t^2 + M^*(\alpha_t + i\beta_t)^2]C_i^{(1)} + \gamma_{12}\delta_t^2 C_i^{(2)} &= 0 \\ \gamma_{12}C_i^{(1)} + \gamma_{22}C_i^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

где $\delta_t = \frac{\omega}{G_t}$, а G_t – скорость поперечной волн при $M_2 = 0$.

Из соотношений (19) следует

$$(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)\delta_t^2 + \gamma_{22}(M_1 + iM_2)(\alpha_t + i\beta_t)^2 = 0 \quad (20)$$

Разделим в (20) действительную и мнимую части, получим

$$\alpha_t^2 - \beta_t^2 = -\frac{k\delta_t^2 M_1}{\gamma_{22}(M_1^2 + M_2^2)}, \quad 2\alpha_t\beta_t = \frac{k\delta_t^2 M_2}{\gamma_{22}(M_1^2 + M_2^2)}, \quad k = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 \quad (21)$$

Соотношения (21) можно разрешить относительно любой пары величин α_t и β_t или M_1 и M_2

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{k\delta_t^2(-M_1 + \sqrt{M_1^2 + M_2^2})}{2\gamma_{22}(M_1^2 + M_2^2)}}, \quad \beta_t = \sqrt{\frac{k\delta_t^2 M_2^2}{2\gamma_{22}(M_1^2 + M_2^2)(-M_1 + \sqrt{M_1^2 + M_2^2})}} \quad (22)$$

или

$$M_1 = \frac{(\beta_t^2 - \alpha_t^2)k\delta_t^2}{(\alpha_t^2 + \beta_t^2)^2 \gamma_{22}}, \quad M_2 = \frac{2\alpha_t\beta_t k\delta_t^2}{(\alpha_t^2 + \beta_t^2)^2 \gamma_{22}} \quad (23)$$

Обозначим через η_2

$$\eta_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^2} \quad (24)$$

Тогда (22) и (23) запишем в виде

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{k\delta_t^2(\eta_2 - 1)}{2\gamma_{22}\eta_2^2 M_1}}, \quad \beta_t = \sqrt{\frac{k\delta_t^2(\eta_2 + 1)}{2\gamma_{22}\eta_2^2 M_1}} \quad (25)$$

Из формул (25) можно сделать вывод: зная комплексный модуль упругости пористой среды $M^* = M_1 + iM_2$, можно определить коэффициент затухания α_t и фазовую постоянную β_t . Скорость поперечной волны определим из равенства $\beta_t = \frac{\omega}{G_t}$, где G_t – скорость поперечной волны в пористой среде при $M_2 = 0$.

$$c_t = \sqrt{\frac{2\gamma_{22}G_t^2 M_1}{k(\eta_2 + 1)}} \quad (26)$$

При малом затухании ($\alpha_t \rightarrow 0$) из формулы (23) получим

$$\gamma_{22}\beta_t^2 M_1 = (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)\delta_t^2 \quad (27)$$

или в развернутой форме

$$\rho_{22}\mu_1 = (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)c_t^2 \quad (28)$$

Формула (28) совпадает с формулой работы [6].

В случае, если связь между фазами слабая ($\gamma_{12} \rightarrow 0$), то из (27) или (28) следует

$$\mu_1 = \rho_{11}c_t^2 = \rho_1 c_t^2 \quad (29)$$

Зная скорость распространения звуковой волны, по формуле (29) приближенно можно вычислить модуль упругости μ_1 . При наличии в пористой среде затухания, вычисления действительной части модуля упругости следует проводить по формуле (23).

Пользуясь формулами (23), определим связь между $tg\varphi_2$, коэффициентом затухания α_t и фазовой постоянной $\beta_t = \frac{\omega}{c_t}$ [10]

$$tg\varphi_2 = \frac{ImM^*}{ReM^*} = \frac{2\alpha_t\beta_t}{\beta_t^2 - \alpha_t^2} \quad (30)$$

Логарифмический декремент затухания колебаний волны δ связан с $tg\varphi_2$ соотношением [10]

$$\delta = \pi tg\varphi_2 = 2\pi \frac{2\alpha_t\beta_t}{\beta_t^2 - \alpha_t^2} \quad (31)$$

Из (31) следует, что логарифмический декремент затухания колебаний поперечной волны в пористой среде зависит от коэффициента затухания волны и фазовой постоянной, а, следовательно, и от скорости поперечной волны.

РЕЗЮМЕ

В статье показано, что в насыщенной жидкостью упругой пористой среде, физико-механические свойства которой характеризуются комплексными коэффициентами, существует два типа продольных и одна поперечная звуковые волны. Получены формулы для определения скоростей и коэффициентов затухания волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid /M.A.Biot //J. of Applied Phisic.-1955.-v. 26.- № 2.-P. 182-185.
2. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range /M.A. Biot //J. Acoust. Soc. America.- 1956. -v. 28.- № 2. -P. 168-178.
3. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред/Р.И. Нигматулин. –М.: Наука, -1978.-336 с.
4. Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах /Л.Я. Косачевский // ПММ.-1959. -Т. 23. Вып. 6.- С. 1115-1123.

5. Масликова Т.И. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах /Т.И. Масликова, В.С. Поленов//Изв. РАН. МТТ. – 2005.- № 1.- С. 104-108.
6. Масликова Т.И. О нестационарных упругих волнах в пористых материалах /Т.И. Масликова, В.С. Поленов //Изв. РАН. МТТ. - 2001. - № 6.- С. 103-107.
7. Поленов В.С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде/В.С. Поленов, А.В. Чигарев //Изв РАН. ПММ.- 2010. - Т 74, вып. 2. -С. 276-284.
8. Thomas T. Y. Plastic Flow and the Fracture in Solids. N.y.; L.: Acad. Press, 1961.=Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах/Т. Томас. М.: Мир,-1964.-308 с.
9. Мешков С.И. О распространении звуковых волн в наследственно упругой среде/С.И. Мешков, Ю.А. Россихин//ПМТФ. -1968. - № 5.- С. 89-93.
10. Постников В.С. Внутреннее трение в металлах /В.С. Постников - М.: Metallurgy, - 1974.- 351 с.

SUMMARY

The paper shows that in a saturated liquid elastic porous medium, the physical and mechanical properties of which are characterized by complex coefficients, there are two types of longitudinal and one transverse sound waves. The formulas for the determination of velocity and attenuation coefficient of waves.

Поступила в редакцию 23.12.2012

НЕОСЕССИМЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДЛИННОГО ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕГО ЦИЛИНДРА В УСЛОВИЯХ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ТЕРМОРАДИАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

к. ф.-м. н. ¹Ширвель П.И., д. ф.-м. н. Куликов И.С., д. ф.-м. н. ¹Чигарев А.В.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

Общеизвестно, что под действием интенсивного облучения высокоэнергетическими частицами (нейтроны, протоны, электроны или ионы) происходит изменение структуры материала, что отражается как на его кратковременных и длительных механических свойствах, так и на общих закономерностях процесса деформирования в целом [1–8]. Различные дефекты радиационного или металлургического характера, неравномерный теплосъем с поверхности тепловыделяющего тела могут вызывать также неоднородное температурное распределение по периметру тела. Отметим, что воздействие неравномерного в окружном направлении температурного поля в условиях радиационного облучения приводит не только к появлению неоднородных объемных окружных деформаций термического расширения, но и к возникновению значительных по величине необратимых деформаций радиационного распухания в кольцевых направлениях [2]. Это неизбежно влечет за собой появление дополнительных напряжений в твердом теле. В случае проявления эффектов вязкости модельной среды, действующие напряжения должны также вызывать дополнительные неоднородные деформации ползучести по периметру сечения, скорость которых будет изменяться с дозой облучения и градиентом неосесимметричного нагрева. При этом наряду с высокотемпературной тепловой ползучестью, возникает и радиационная ползучесть, которая совместно с радиационным распуханием (свеллинг), может привести к существенному формоизменению тел. В результате, компоненты тензора деформаций, тензора напряжений и вектора перемещений будут зависеть не только от радиальной, но и от окружной координат деформируемого тела. В таком случае, необходимо рассматривать неосесимметричное НДС, под которым подразумевается зависимость его характеристик как от радиуса, так и от меридионального угла (т.е. в плоскостях, проходящих через ось вращения, не возникают одинаковое напряженное и деформированное состояния для текущей радиальной координаты). Очевидно, что данный вопрос в настоящее время требует дополнительного исследования, так как в различных областях современной техники (энергетическое и атомное машиностроение, аэрокосмическая отрасль, транспорт и т.д.) находят широкое применение конструкционные элементы и компоненты оборудования, имеющие цилиндрическую форму. Повышенные требования, предъявляемые к прочности и надежности таких элементов, могут быть обеспечены лишь при наличии достоверной информации об их НДС.

В предыдущих работах [9–13] проведена общая постановка задачи об упруговязком деформировании длинных цилиндрических тел при квазистатическом терморadiационном нагружении. Получены разрешающие выражения для неосесимметричного НДС цилиндра в перемещениях. Дальнейшая цель состоит в проверке механико-математической модели на соответствие заявленным свойствам, в первую очередь, неосесимметричному деформированию в условиях ползучести и облучения. Используя численную методику, приведенную в [13], выполним виртуальное моделирование $2D(r, \theta)$ деформирования односвязного цилиндрического тела в условиях терморadiационных воздействий и рассмотрим влияние окружной температурной неравномерности на неосесимметричное НДС для различных значений амплитуд температур. Также приведем результаты сравнения с осесимметричной моделью. В качестве модельного тела, будем рассматривать сплошной цилиндр, выполненный из материала с внутренними источниками тепла (ядерное топливо).

Неосесимметричное температурное поле задается с учетом равномерного внутреннего тепловыделения в следующем виде

$$T(r, \theta) = (\bar{Q} / 4\lambda)(R^2 - r^2) + A(r/R)^4 \sin(4\theta) + T_s. \quad (1)$$

Здесь R – радиус цилиндра ($R = 0,003$ м); A – амплитудное значение окружной неравномерности; \bar{Q} – средняя объемная плотность тепловыделения, которая постоянна. Считается, что тепловыделяющий материал ($40\%UO_2+60\%Cr$) обладает следующими осредненными по сечению физико-механическими характеристиками: $E=1,85 \cdot 10^5$ МПа; $\mu=0,29$; $\alpha=11,3 \cdot 10^{-6}$ 1/К; $\lambda=18$ Вт/(м · К); $Q=2,234 \cdot 10^9$ Вт/м³, $T_s=873$ К, а скорость распухания материала модельного тела задается на основании модели сферических газовых пор. Согласно [1–4], предполагаем, что влияние напряжения

на скорость ползучести можно представить в виде суммы двух членов: линейного радиационного и нелинейного термического. Закон ползучести тепловыделяющего материала на установившейся стадии принят в виде [4], и включают как термическую, так и радиационную составляющую

$$\dot{\varepsilon}_u^c = C\sigma_u^m + D\sigma_u, \quad (2)$$

где C, D – модули тепловой и радиационной ползучести; m – показатель тепловой ползучести ($5 < m < 6$). Также при моделировании терморadiационного НДС можно использовать результаты экспериментальных исследований [7, 8], полученные для керамического топлива.

Принимаем, что для определения распухания топливных композиций делящихся материалов можно использовать модель квазистатических газовых пор [3] в предположении, что поры в топливном материале малоподвижны и в среднем имеют одинаковый размер. Таким образом, распухание материала (керметного топлива) подчиняется основным эмпирическим зависимостям, рекомендуемым в [2, 5], в соответствии с решениями интегро-дифференциальных уравнений распухания [4], которые были получены на основе модели сферических ячеек. Альтернативой, заданному распределению распухания керметного топлива, могут служить корреляционные уравнения [3], описывающие распухание карбидов и нитридов урана в зависимости от рабочих параметров и химического состава.

В соответствии с указанными решениями интегро-дифференциальных уравнений распухания [4], при неоднородном по периметру нагреве (1) радиационное распухание цилиндра с внутренними источниками тепловыделения (топливный материал) примет с учетом различных амплитудных значений температур ($2A=40$ и $2A=80$) вид (рисунок 1)

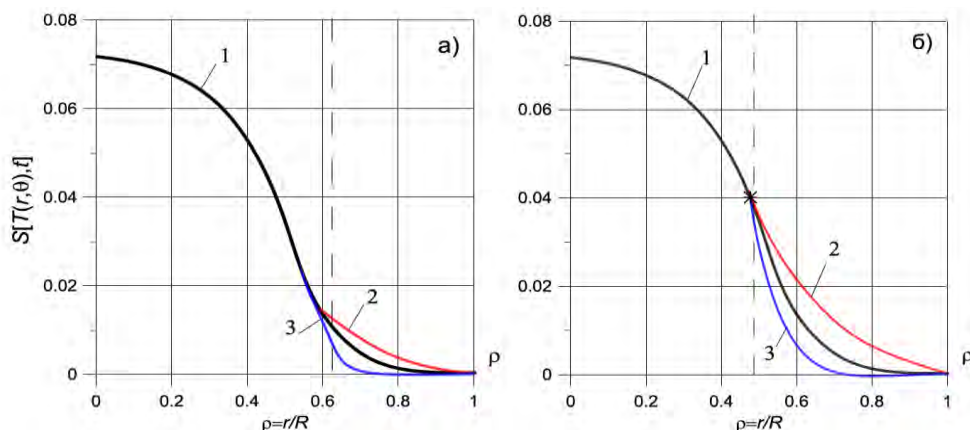


Рисунок 1 – Распределение радиационного распухания за 5000ч в зависимости от окружной координаты ($1-\theta=0$; $2-\theta=\pi/8$; $3-\theta=3\pi/8$) и амплитудного значения неравномерности температур: а) $A=20$; б) $A=40$

Для удобства анализа получаемых результатов условно разделим сечение модельного тела на три участка: внутренний $0 \leq \rho \leq 1/3$; средний $1/3 \leq \rho \leq 2/3$ и внешний $2/3 \leq \rho \leq 1$. В дальнейшем, в зависимости от распределения неосесимметричного температурного поля, для внутреннего (I), среднего (II) и внешнего (III) участка условно выделим две зоны – горячих ($\theta=[0; \pi/4]$) и холодных ($\theta=[\pi/4; \pi/2]$) сечений согласно схеме, представленной на рисунке 1 ($P_{ext} = 8$ МПа).

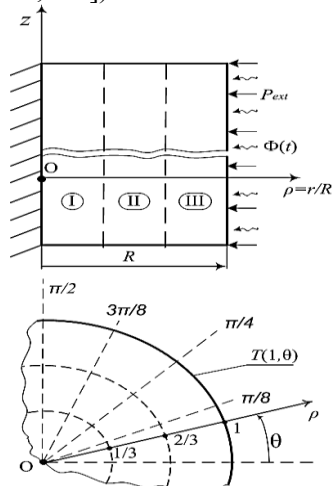


Рисунок 2. – Схема анализа неосесимметричного НДС

Замечание. Считается, что модельное тело не выгибается и потеря устойчивости не происходит. Заметим, что значения нагрузки и размеров модельного тела исключают возможность потери устойчивости цилиндра на основе данных по устойчивости цилиндров в условиях ползучести и облучения, полученных в [4], а также Ю. И. Лихачевым в [2].

Далее, используя методику, изложенную в [5, 7–9], получим картину изменения характеристик напряженного состояния тепловыделяющего цилиндрического тела в условиях обобщенной плоской деформации. Отметим, что все решения были получены с использованием лицензионной программной среды Visual Studio 2010 Express, которая была бесплатно предоставлена компанией Microsoft. Программная модель позволяет обрабатывать и визуализировать результаты расчетов кинетики неосесимметричного НДС цилиндрических тел.

Напряженное состояние длинного сплошного цилиндра с внутренними источниками тепловыделения за 1000ч нагружения для различных амплитудных значений окружной температурной неравномерности представлено на эпюрах рисунков 3–4.

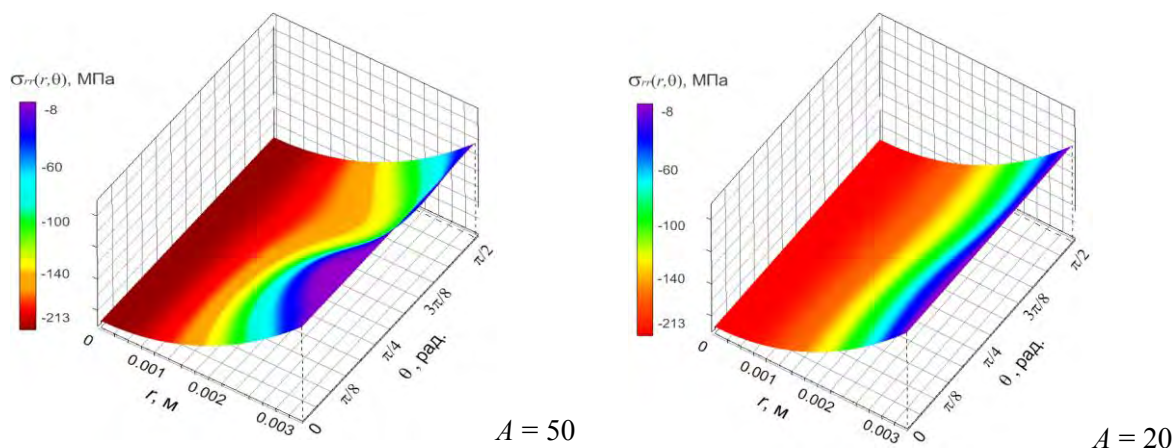


Рисунок 3. – Поверхности радиальных напряжений за 1000 ч нагружения

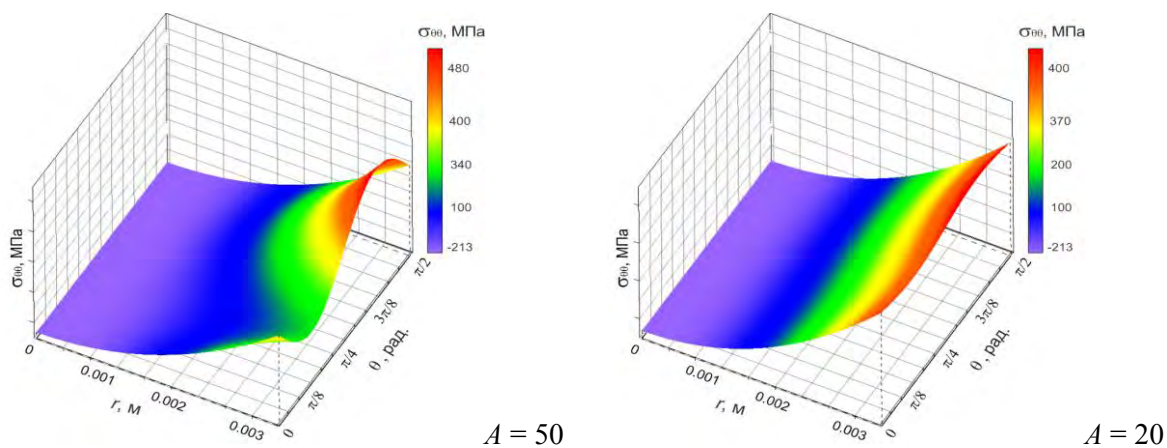


Рисунок 4. – Поверхности окружных напряжений за 1000 ч деформирования

Изменение со временем напряженного состояния в зависимости от амплитудного значения температур в точках экстремума окружных координат средних сечений (при $\rho=2/3$) представлено ниже в таблицах 1 и 2, в которых сведены обработанные числовые значения серии расчетов для максимальных и минимальных величин радиального напряжения и интенсивности напряжений, соответственно, за $t=0; 500; 1000; 2000; 3000$ часов деформирования.

Таблица 1 – Изменение радиальных напряжений со временем в зависимости от амплитудного значения температур для $r/R=2/3$ в горячих и холодных сечениях

$A, ^\circ C$	$\theta, \text{рад.}$	$\sigma_{rr}, \text{ МПа}$				
		$t, \text{ ч}$				
		0	500	1000	2000	3000
0	$\pi/8$	-110	-122	-156	-195	-214
	$3\pi/8$	-110	-122	-156	-195	-214
10	$\pi/8$	-109	-121	-156	-195	-214
	$3\pi/8$	-113	-123	-158	-195	-214
20	$\pi/8$	-103	-115	-150	-190	-220
	$3\pi/8$	-116	-130	-162	-202	-227
40	$\pi/8$	-89	-103	-138	-175	-224
	$3\pi/8$	-131	-142	-175	-205	-241
50	$\pi/8$	-70	-100	-125	-160	-235
	$3\pi/8$	-140	-150	-160	-200	-260

Таблица 2 – Изменение интенсивности напряжений со временем в зависимости от амплитудного значения температур для $r/R=2/3$ в горячих и холодных сечениях

$A, ^\circ\text{C}$	$\theta, \text{рад.}$	$\sigma_{\theta}, \text{МПа}$				
		$t, \text{ч}$				
		0	500	1000	2000	3000
0	$\pi/8$	136	150	200	246	306
	$3\pi/8$	136	150	200	246	306
10	$\pi/8$	135	150	200	246	306
	$3\pi/8$	138	151	200	246	306
20	$\pi/8$	130	144	195	243	304
	$3\pi/8$	144	158	207	252	310
40	$\pi/8$	100	115	180	240	301
	$3\pi/8$	150	165	225	270	321

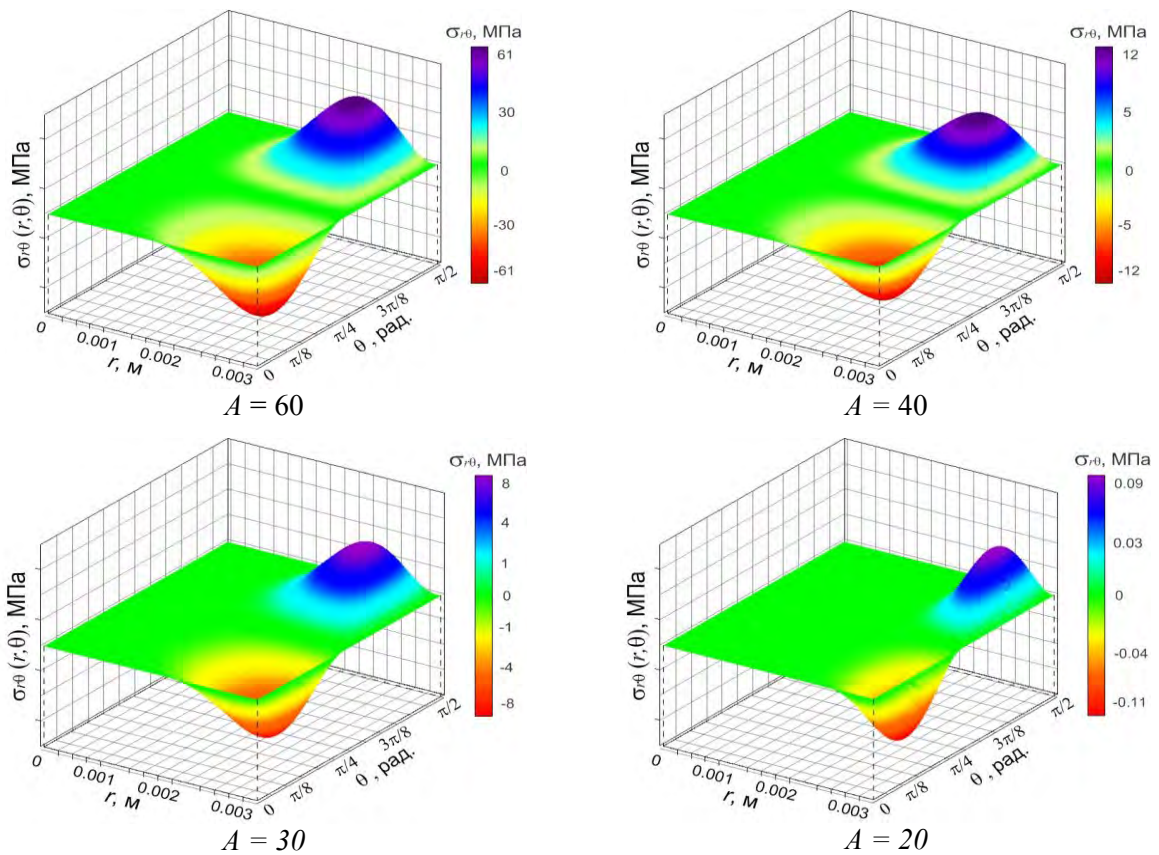


Рисунок 5. – Поверхности распределения касательных напряжений за 1000 ч при различных значениях окружной температурной неравномерности

Исходя из представленной выше кинетики напряженного состояния, можно предположить, что вместе с постоянным ростом напряжений со временем терморadiационного нагружения прослеживается общее снижение неоднородности напряженного состояния по периметру. Как видно из таблицы 1, уровень неравномерности разболтки напряжений прямо пропорционален изменению параметра неосесимметричности A в законе распределения температуры (1). Неоднородность интенсивности напряжений по периметру также возрастает с увеличением окружной неравномерности (таблица 2). Таким образом, чем больше первоначальная окружная развертка температур ($2A$), тем больше остаточная амплитуда изменения неоднородности напряженного состояния по периметру модельного тела. Вместе с тем, следует отметить, что даже при высоком уровне окружной амплитуды температур (например, $2A = 80$) за 3000 часов деформирования неравномерность напряженного состояния в кольцевом направлении значительно снижается, причем в холодных сечениях уровень напряжений остается несколько выше, чем в горячих.

Закономерность изменения поверхности распределения радиальных напряжений за 500, 2000 и 3000 часов нагружения при значении окружной неравномерности $A=50$ представлена на рисунке 6 (поверхность радиальных напряжений за 1000 часов показана на рисунке 6).

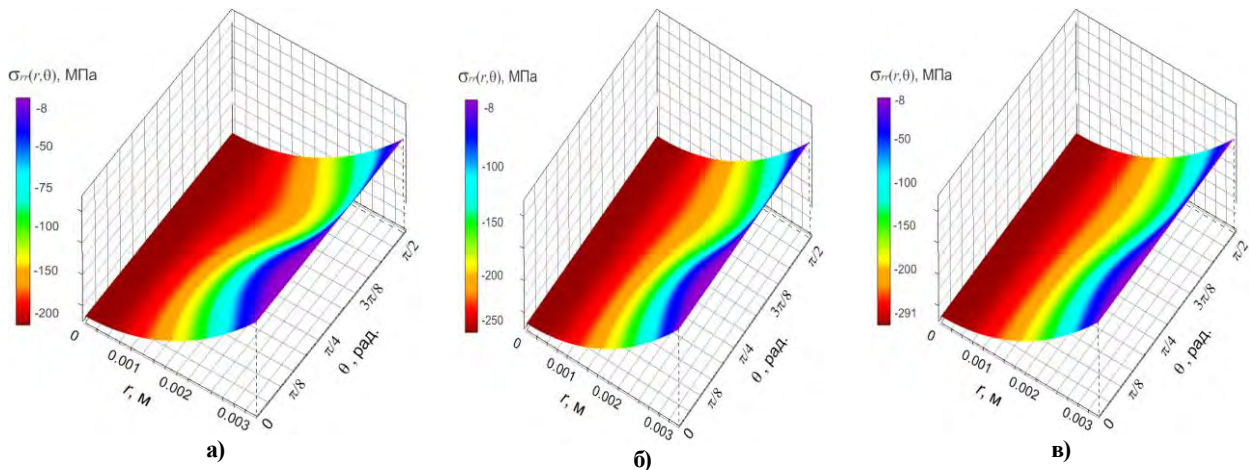


Рисунок 6 – Общий вид изменения поверхности распределения радиальных напряжений за 500ч (а), 2000ч (б) и 3000ч (в) часов нагружения при значении окружной неравномерности $A=50$

На основании проведенной серии расчетов видно, значительная неоднородность напряжений на начальных этапах нагружения ($t = 0 \dots 500$ ч) обусловлена в первую очередь неосесимметричностью температурного поля $T(r, \theta)$ по периметру модельного тела с внутренними источниками тепловыделения. Причем максимум и минимум окружной неоднородности в соответствии с неосесимметричным температурным полем достигается для сечений $\theta = \pi/8$ и $\theta = 3\pi/8$ радиальной плоскости. Особенно сильно неравномерность напряжений проявляется на среднем ($1/3 \leq \rho \leq 2/3$) и внешнем ($2/3 \leq \rho \leq 1$) участках. В тоже время, на внутреннем интервале ($0 \leq \rho \leq 1/3$) распределение напряжений близко к осесимметричному. С течением времени ($0 \dots 3000$ ч) окружная неравномерность полей напряжений для II и III участков сглаживается, что связано, в первую очередь, с большой термической ползучестью материала. Заметим, что величина сжимающих радиальных напряжений, также как и абсолютная величина напряжений (таблица 2), снижается в сечениях, где предполагаются большие радиационные деформации (в соответствии с принятым распределением распухания). Так, в горячих сечениях на внешнем (III) и среднем (II) участках наблюдается общее снижение максимальных сжимающих напряжений на 25–30%, что наиболее четко видно на графиках изменения радиальных напряжений. Это говорит о том, что в данном случае возникающие радиационные напряжения (растягивающие) со временем способны несколько снизить общий уровень первоначальных термоупругих напряжений. Таким образом, совместный учет необратимых деформаций ползучести и распухания приводит к значительному уменьшению неоднородности напряжений, а также к их изменению примерно на 5–25%: увеличению растягивающих и уменьшению по модулю сжимающих напряжений по периметру II и III участков модельного тела. Вместе с тем, расчеты показали, что на II и III участках неравномерность распределения деформаций остается значительной, кроме того, с течением времени, такая неоднородность стремительно увеличивается, причем меняется качественный характер ее распределения по периметру.

Эпюры изменения полной окружной деформации по периметру сплошного цилиндра при $A=50$ для 3000ч и 5000ч терморadiационного нагружения представлены на рисунке 7.

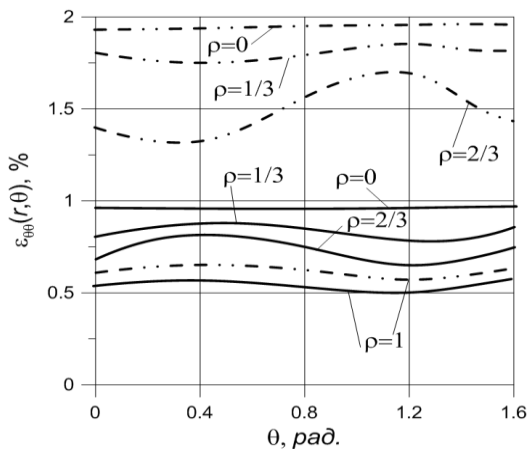


Рисунок 7 – Изменение окружных деформаций по периметру сечения со временем: _____ – 3000ч; ---- - 5000ч

Можно предположить, что при $t=1000 \dots 3000$ ч неравномерность деформаций обусловлена действием неоднородного радиационного распухания в различных точках сечения по окружному направлению, которое на рисунке 1 особенно заметно на центральном ($1/3 \leq \rho \leq 2/3$) и внешнем ($2/3 \leq \rho \leq 1$) участках. В дальнейшем ($t=3000 \dots 5000$ ч), действующие напряжения вызывают значительные дополнительные деформации терморadiационной ползучести по периметру сечения, скорость которых изменяться в первую очередь с градиентом неосесимметричности нагрева (1). Совместное действие радиационного распухания и ползучести приводит к необратимому формоизменению, которое при $t=5000$ ч достигает максимальных величин.

В этой связи окружное изменение температур только способствует усилению неравномерности распределения деформаций по периметру сечения тепловыделяющего цилиндра со временем. В первую очередь такое усиление осуществляется за счет влияния на механизмы набухания и термической ползучести, причем амплитуда неоднородности деформаций в кольцевом направлении наибольшая для III участка ($2/3 \leq \rho \leq 1$). В целом, оценочные результаты виртуальных экспериментов дают основания полагать, что разрушение цилиндра произойдет при длительном нагружении в области упругих напряжений. Вопрос состоит в определении времени, когда остаточные механические деформации модельных тел станут недопустимо большими, превышая предел ползучести. Действующие напряжения в общем случае вызывают дополнительные неоднородные деформации ползучести по периметру сечения, скорость которых будет изменяться с дозой облучения и градиентом неосесимметричного нагрева. Результаты виртуальных испытаний, показали, что при расчете тепловыделяющего цилиндра целесообразно учитывать в основном только термическую ползучесть. Влияние неравномерности температурного поля на НДС в условиях ползучести и облучения показало, что неоднородность напряженного состояния со временем снижается.

Таким образом, в результате проведения серии вычислительных экспериментов установлено, что наименьшее амплитудное значение неравномерности температур, при котором необходимо использовать теорию неосесимметричного НДС, составляет 40 градусов ($A = 20$). При значениях равной или меньших указанной величины относительное изменение напряжений по периметру не превышает 5% (амплитуда изменения радиальных напряжений 3.8%, окружных 4.7%, осевых 4.2%, касательных 2.5%). Учитывая, что погрешность проводимых численных экспериментов составила 4–5% (при числе разбиения $k = 1000$, $m = 100$, $n = 100$), для данных условий нагружения и свойств тепловыделяющего цилиндра наименьшее значение амплитудное значение неравномерности температур при котором необходимо использовать теорию неосесимметричного НДС составляет $2A = 40$. При $2A > 40$ осесимметричная модель в целом дает неудовлетворительные результаты: характерно увеличение сжимающих напряжений в горячих сечениях, а также уменьшение растягивающих в холодных сечениях на внешнем участке. В то время как по неосесимметричной модели происходит некоторое снижение терморadiационных напряжений по абсолютной величине в горячих сечениях, в тоже время в холодных сечениях наблюдается их рост. Следует, однако, отметить, что со временем деформирования неоднородность напряженного состояния по кольцевой координате значительно сглаживается и уже при $t = 3000$ ч не превышает 10% (для $A < 50$). Вместе с тем, в обоих случаях неравномерность по периметру, сильно сказывающаяся на поверхности модельного цилиндрического тела, заметно сглаживается по мере приближения к продольной оси. Так, сравнение с осесимметричной моделью показало, что в результате обоих расчетов наблюдалось качественное и количественное совпадение решений при $\theta = 0$ и $\rho < 1/3$ ($\rho = r/R$, $R = 0.003$ м). Следует отметить, однако, что при $\rho > 1/3$ количественно может быть довольно большое различие (до 70 %) в зависимости от принятой амплитуды окружной неравномерности. В тоже время, напряжения, получаемые по $2D(r, \theta)$ модели в среднем сечении $\theta = 0$ цилиндра близки по своему характеру с напряжениями по осесимметричной модели при той же нагрузке по всей толщине тела.

Анализ влияния неравномерности температурного поля на НДС цилиндрических тел в условиях ползучести и облучения показал, что неравномерность температуры вызывает дополнительные к номинальным температурные напряжения, превышающие напряжения от внешнего механического нагружения, что существенно влияет на работоспособность модельного тела в экстремальных условиях нагружения, особенно при значительных дозах облучения, вызывающих неравномерное набухание. Учет этой неоднородности, появляющейся в увеличении объемной деформации, и снижает максимальные сжимающие напряжения до 30%. С одной стороны такое снижение максимальных напряжений при неупругой работе материала, позволяет повысить допустимую величину терморadiационной нагрузки, но с другой стороны необходимо следить, чтобы растягивающие напряжения, возникающие при данном значении флюенса и температуры, не приводили бы к разрушению тела в зоне растяжения. Следует отметить, учет переменности НДС по $2D(r, \theta)$ модели дает достаточно существенные отклонения от осесимметричной модели. Однако, погрешность такого расчета по осесимметричной модели по сравнению с неосесимметричной, зависит от многих параметров сложного нагружения: величины неравномерности температур, уровня температур в целом, т.к. последние определяют набухание материала, а также выгорания и пористости топливного (тепловыделяющего) материала и других факторов: флюенс нейтронов, механическое давление, физико-механические свойства. Поэтому для конкретного случая нужно вести конкретный расчет. Для окончательных рекомендаций требуется детальное численное исследование в более широких диапазонах изменения неравномерного поля температур и радиационных нагрузок,

которое не подвергалось подробному исследованию. Однако даже несколько примеров расчетов показали, что это влияние значительно и требует отдельного изучения.

РЕЗЮМЕ

Общий случай неосесимметричного терморadiационного НДС значительно отличается от осесимметричного, а решение неосесимметричной задачи деформирования не может быть заменено решением ряда осесимметричных задач в соответствующих меридиональных сечениях. Если рассмотренные в [2, 4, 5, 14] модели НДС дают представление об интегральных изменениях в цилиндрическом теле, то неосесимметричная $2D(r,\theta)$ модель позволяет провести анализ его состояния в любой материальной точке как по радиусу, так и по периметру сечения с возможностью дальнейшей оценки прочности на основе того или иного критерия. Построенная механико-математическая модель неосесимметричного НДС вполне точно описывает объект исследований, приводя к допустимым значениям ошибки. Достоверность результатов решения тестовых и модельных задач подтверждена совпадением их с известным аналитическим решением [15], частично с результатами натуральных экспериментов и данными, полученными с помощью других пакетов прикладных программ, корректность которых доказана многолетней практикой их использования: отклонение составляет от 4% до 9%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселевский, В. Н. Изменение механических свойств сталей и сплавов при радиационном облучении / В. Н. Киселевский. - Киев: Ин-т пробл. прочности, 1977. - 103 с.
2. Лихачев, Ю. И. Прочность тепловыделяющих элементов ядерных реакторов / Ю. И. Лихачев, В. Я. Пупко. - М.: Атомиздат, 1975. - 280 с.
3. Тутнов, А. А. Расчетное моделирование распухания топливных материалов по модели квазистатических пор/ А. А. Тутнов, А. И. Ульянов, К. К. Желтухин. - М., 1984. - 25 с. - (Ин-т атом. энергии им. И. В. Курчатова; ИАЭ-3999/4)
4. Куликов, И.С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлаждаемых реакторов / И.С.Куликов, Б.Е. Тверковкин.- Минск: Наука и техника,1984. – 104с.
5. Olander, D. R. Fundamental Aspects of Nuclear Reactor Fuel Elements/ D.R. Olander. – USA: Technical Information Center Energy Research and Development Administration, 1976. – 720p.
6. Тутнов, А. А. Математическое моделирование поведения теплофизических, прочностных и надежностных характеристик твэлов энергетических реакторов : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.14.03 / А.А. Тутнов, Рос. науч. центр "Курчат. Ин-т", Ин-т реактор. технологий и материалов. - М., 1998. - 54 с.
7. Мальгин, В. Б. Разработка модели радиационной ползучести керамического топлива на основе расчетно-экспериментальных исследований: дис. ... канд. техн. наук: 01.04.07 / В.Б. Мальгин. - М., 1979. – 142 л.
8. Павлий, К. В. Радиационная ползучесть диоксида урана применительно к переходным и базовым режимам эксплуатации ТВЭЛА ВВЭР: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.07/ К.В. Павлий. - Ташкент, 1989. – 152 л.
9. Ширвель, П.И. О неосесимметричном НДС неравномерно нагретого длинного сплошного цилиндра, подверженного нейтронному облучению/П.И. Ширвель, И.С. Куликов // Республиканский межведомственный сборник «Машиностроение», Минск, 2008. Вып.24. Том 1. С.185-191.
10. Ширвель, П.И. Решение неосесимметричной задачи термоупругости для неравномерно нагретого длинного цилиндра в условиях ползучести /П.И. Ширвель, И.С. Куликов// Научно-технический журнал «Вестник Белорусского национального технического университета», Минск, 2009 – №4. – С.75-80.
11. Ширвель, П.И. Неосесимметричное термоупругопластическое деформирование цилиндрических тел в условиях облучения / П.И. Ширвель, А.В. Чигарев // Механика 2011: сб. науч. тр. V Белорусского конгресса по теорет. и прикладной механике, Минск, 26—28 окт. 2011 г.: в 2 т. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; редкол.: М.С. Высоцкий [и др.]. — Минск, 2011. — Т. II. С.404-411.— 300 с. — ISBN 978-985-6637-21-9.
12. Ширвель, П.И. Модель расчета неосесимметричного напряженно-деформированного состояния облучаемых тел цилиндрической геометрии в условиях пластичности и ползучести /П.И. Ширвель, И.С. Куликов// Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-тэхн. навук, Минск, 2012 –№4. – С.51-62.
13. Ширвель, П.И. Определение неосесимметричного НДС длинного сплошного цилиндра в условиях ползучести и облучения / П.И. Ширвель // «Математическое моделирование и краевые задачи»: тр. VII Всероссийской науч. конф. с междунар. участием, Самара, 3–6 июля 2010 г.: в 2 ч. – Самара: СамГТУ, 2010. – Ч. 1. – С. 395–398.
14. Ширвель, П.И. Решение радиационно-термоупругой задачи для сплошного цилиндра / П.И. Ширвель // Республиканский межведомственный сборник научно-технических статей «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2008. – Вып.23. – С.55-63.
15. Гейтвуд, Б. Е. Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам / Пер. с англ. М. Ф. Диментберга [и др.]. – М.: Изд. иностр. лит., 1959. – 349 с.

SUMMARY

A mathematical model for the determination of temperatures, strains and stresses in a rod fuel element at stationary conditions has been tested. The simulation of $2D(r,\theta)$ deformation asymmetric task have been construction. The mechanical models for describe asymmetric steady stress-strain state of the nuclear reactor's fuel pin ($40\%UO_2+60\%Cr$) are calculated. The analysis of the mechanisms of nonlinear asymmetric deformation for cylindrical bodies was produced. Optimization performance characteristics of quasistatic loading of fast neutron flux and establish the optimal properties of the irreversible deformation processes for asymmetric stress/strain state have been done. The computer program for decision this task has been programmed. Graphic distributions of stress and strain surfaces have been received. The obtained results can be used in the design and development of a wide class of problem for power engineering and nuclear power.

Поступила в редакцию 06.08.2013

МОДЕЛИ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ ПРИ ХОДЬБЕ¹

к.т.н. Борисов А.В.

Филиал ФГБОУ ВПО «НИУ Московский энергетический институт (ТУ)» в г. Смоленске

При ходьбе сустав циклически нагружается-разгружается. При проектировании механической стержневой системы с деформируемыми звеньями, возникает вопрос о соединении отдельных звеньев между собой. Соединения стержней будем моделировать шарнирами. Предполагаем, что основной износ происходит в подвижных шарнирах [1-3]. Поэтому необходимо провести исследование шарниров на выносливость при циклическом переменном нагружении (рис. 1).

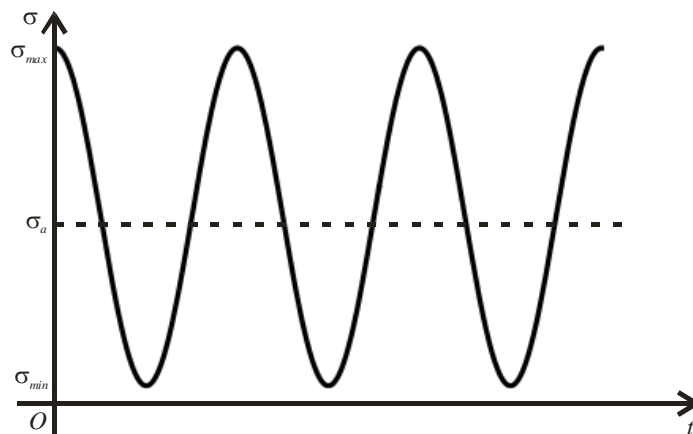


Рисунок 1. – Циклические нагрузки в суставе

На рисунке σ_{max} – максимальные напряжения, σ_{min} – минимальные напряжения, σ_a – средние напряжения.

Введем:

$$\sigma_e = \sigma_{max} - \sigma_a \quad (1)$$

где: σ_e – флуктуационная нагрузка (амплитуда колебаний).

Ось в шарнире испытывает деформации кручения. Необходим расчет среднего напряжения и амплитуды напряжения для осевых нагрузок. Используем критерии Содерберга, Гудмана и Герберга. Получается схема расчета для переменной нагрузки в терминах амплитуды напряжения и среднего напряжения (рис. 2).

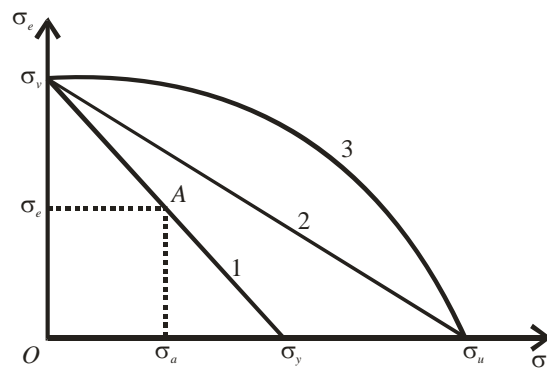


Рисунок 2. – Диаграмма для расчета прочности оси при переменной циклической нагрузке

На рисунке:

σ_a – среднее напряжение, σ_e – амплитуда напряжения, σ_y – предел выносливости в обратном изгибе, σ_y – предел текучести, σ_u – предел прочности, A – расчетная точка, 1 – линия, соответствующая критерию Содерберга, 2 – линия, соответствующая критерию Гудмана, 3 – линия, соответствующая критерию Герберга.

Соответствующие уравнения для всех трех вышеуказанных критериев записываются:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-97512 p_центр_a)

критерий Содерберга: $\frac{\sigma_e}{\sigma_v} + \frac{\sigma_a}{\sigma_y} = \frac{1}{\zeta}$

критерий Гудмана: $\frac{\sigma_e}{\sigma_v} + \frac{\sigma_a}{\sigma_u} = \frac{1}{\zeta}$ (2)

критерий Гербера: $\left(\frac{\zeta \times \sigma_a}{\sigma_u}\right)^2 + \frac{\zeta \times \sigma_e}{\sigma_v} = 1$

где, ζ – коэффициент запаса прочности.

В критерии Гербера – это уравнение параболы, проходящей через точку. Пока напряжения таковы, что они оказываются под параболой, время износа будет бесконечно большое, следовательно, сколь угодно долго можно нагружать шарнир, он при этом не разрушается. Как только выходим на кривую, начинается хрупкое разрушение.

Возможны случаи, когда средняя нагрузка большая – флуктуации маленькие или наоборот, нагрузка маленькая – флуктуации большие.

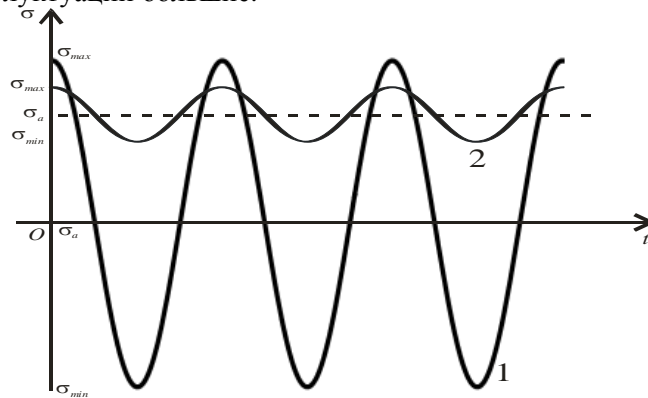


Рисунок 3. – Различные виды нагрузки

Возникает вопрос, что вызовет меньший износ: большие флуктуации при малом или нулевом уровне нагрузки, кривая 1 на рисунке 3. небольшие флуктуации при большом среднем нагружении, кривая 2 на рисунке 3. Первый случай, например, может соответствовать спокойной, размеренной походке человека с большой массой тела, второй – прыгающей походке человека с небольшой массой тела. В каком случае износ элементов опорно-двигательного аппарата будет меньше.

Проведем численные оценки для биологических тканей человека. Предел упругой деформации кости: 135 МПа, деформация при этом 0,4 мм. Пусть $\sigma_u = 135$ МПа. Так как материал кости практически не обладает свойством текучести, т.е. предел текучести кости больше предела ее упругости, предположим, что $\sigma_y = 5\sigma_u$. Предел выносливости в обратном изгибе, т.е. предельные нагрузки разрушения $\sigma_v = 250$ МПа. [4]. Коэффициент запаса прочности примем равным: 1.

Построим график соответствующей зависимости трех критериев для кости человека.

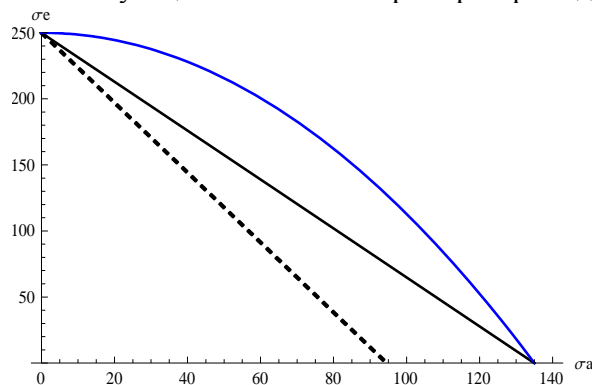


Рисунок 4. – Зависимость амплитуды напряжения от среднего напряжения для костных тканей человека при коэффициенте запаса $\zeta = 1$

Как видно из полученных графиков, область устойчивой, долговременной эксплуатации уменьшается.

Рассмотрим влияние времени на процесс (рис. 5)

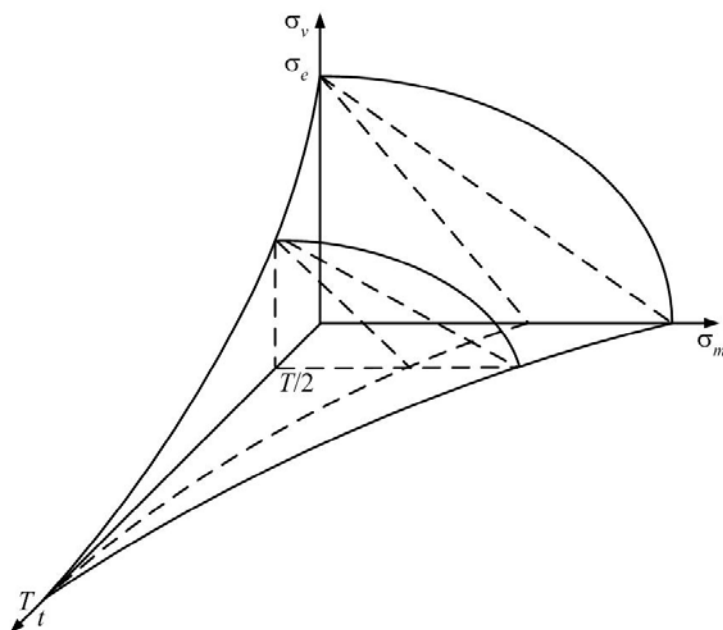


Рисунок 5. – Изменение области устойчивости к нагрузкам с течением времени

Время достижения разрушения T . С течением времени область устойчивости к нагрузкам уменьшается вследствие деградации материала. Как только кривая достигает нуля, происходит выход из строя шарнира. Если кривая изменения σ_u пересечет кривую σ_y , то после пересечения появится трещина. Если при сжатии образуется трещина, то надо изменить знаки. При растяжении нет повреждений.

Вместо времени t можно поставить n – количество циклов нагружения, то есть число шагов если рассматривать задачу моделирования механических свойств опорно-двигательного аппарата человека.

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрена модель циклического нагружения шарниров-суставов человека при ходьбе. Опорно-двигательный аппарат человека моделируется стержневой механической системой. Стержни соединены между собой шарнирами. Проводятся оценки среднего напряжения и амплитуды напряжений для осевых нагрузок с использованием критериев Содерберга, Гудмана, Гербера. Проведены численные оценки для биологических тканей человека. Рассмотрено протекание во времени процесса деградации материала и изменения области устойчивости к нагрузкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев А.В. Диффузионная модель разрушения элементов опорно-двигательного аппарата человека / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 1 (55). – С. 22-37.
2. Чигарев А.В. Использование СКМ «Mathematica» для численного исследования стохастических моделей накопления повреждений в биоматериалах / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Теоретическая и прикладная механика. – Минск : БНТУ, 2013. – Вып. 28. – С. 27-30.
3. Чигарев А. В. Математическая модель износа и разрушения в суставах человека / А. В. Чигарев, А. В. Борисов // Современные проблемы математики, механики, информатики : материалы междунар. науч. конф. –Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. – С. 93-97.
4. Гаврюшенко Н.С. Материаловедческие аспекты создания эрозионностойких узлов трения искусственных суставов человека :дис. ... докт. техн. наук / Н. С. Гаврюшенко. – М., 2000. – 234 с.

SUMMARY

The article deals with the model of cyclic stressing of human hinge joints when walking. A human locomotorium system is modeled by a framed mechanical system. The rods of the system are connected by hinges. Evaluation of medium stress and of the range of stress of axial loads, using Soderbergh, Goodman, Gerbert criteria is carried out. Numerical assessment for human biological tissues is performed. The course of the process of material degradation and change of load resistance domain are considered in the given work.

Поступила в редакцию 02.10.2013

УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

д. ф.-м. н. Вихренко В.С., Ласовский Р.Н., студ. Тишевич А.Ю.

Белорусский государственный технологический университет, Минск

Во многих случаях при расчете механизмов и машин используются модели абсолютно твердых тел и, в частности, недеформируемых стержней [1–3]. Однако при наличии значительных продольных усилий в стержнях возникает необходимость учета их продольных деформаций [4]. В общей постановке задача движения упругого стержня сводится к уравнениям в частных производных [5, 6], решение которых сопряжено со значительными математическими трудностями. В ряде случаев интерес представляет изменение длины стержней [7], и для упрощения задачи можно использовать различные приближенные модели стержней, в частности, в духе метода Релея модель с постоянной по длине стержня относительной деформацией.

Поскольку относительная деформация определяется действующей в сечении продольной силой, предположение о ее постоянстве является достаточно грубым приближением, но можно надеяться, что при медленно изменяющихся внешних воздействиях, не носящих ударный характер, эта модель будет давать приемлемые по точности результаты. Преимущества модели по сравнению с формулировкой задачи в терминах дифференциальных уравнений в частных производных состоит в ее простоте, позволяющей описать продольные упругие деформации в рамках одной степени свободы.

Рассмотрим вращательное, плоскопараллельное и сферическое движения продольно упругого стержня исходной длины l_0 и массы m , имеющего малые поперечные размеры. Удлинение стержня предполагается однородным, характеризуемым постоянной по длине стержня относительной деформацией ε , являющейся функцией времени.

Для составления уравнений Лагранжа второго рода определим кинетическую энергию стержня для упомянутых выше движений.

При вращении относительно неподвижной оси (рис. 1) рассмотрим элементарный участок стержня длиной dx и массой dm .



Рисунок 1. – Кинематика стержня, участвующего во вращательном (а) и сферическом (б) движении

Кинетическая энергия этого участка определяется выражением;

$$dK = \frac{dm \cdot v^2}{2}, \quad (1)$$

где v – абсолютная линейная скорость выделенного участка стержня.

В силу того, что стержень может продольно деформироваться, выделенный участок участвует в сложном движении. Связав подвижную систему отсчета со стержнем и представив координату x выделенного участка через координату x_0 недеформированного стержня и зависящую от времени относительную деформацию ε

$$x = x_0(1 + \varepsilon), \quad (2)$$

выражение (1) представим в виде:

$$dK = \frac{1}{2} dm \cdot (\dot{\psi}^2 x_0^2 (1 + \varepsilon)^2 + \dot{\varepsilon}^2 x_0^2). \quad (3)$$

Кинетическая энергия всего стержня определяется интегрированием записанного выражения:

$$K = \frac{1}{2} I_{0A} (1 + \varepsilon)^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_{0A} \dot{\varepsilon}^2 \quad (4)$$

где I_{0A} – осевой момент инерции недеформированного стержня относительно оси вращения.

В это выражение входят две независимые переменные ψ и ε , которые примем в качестве обобщенных координат при составлении уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^2 I_{0A} \ddot{\psi} + 2(1 + \varepsilon) I_{0A} \dot{\psi} \dot{\varepsilon} &= Q_\psi, \\ I_{0A} \ddot{\varepsilon} - (1 + \varepsilon) I_{0A} \dot{\psi}^2 &= Q_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично можно получить выражение для кинетической энергии стержня при его плоскопараллельном движении:

$$K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_{0C} (1 + \varepsilon)^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_{0C} \dot{\varepsilon}^2. \quad (6)$$

Основными отличиями этого уравнения от уравнения (4) является дополнительное слагаемое, учитывающее кинетическую энергию поступательного движения стержня вместе с его центром масс, и то, что в последние два слагаемые входит осевой момент инерции недеформированного стержня относительно оси, проходящей через его центр масс.

При плоскопараллельном движении стержня для получения уравнения движения его центра масс удобно воспользоваться теоремой о движении центра масс, а эволюция вращательной и деформационной обобщенных координат может быть описана уравнениями (5) с переопределенным моментом инерции.

При сферическом движении стержня (рис. 1) переносная скорость состоит из двух слагаемых

$$v_{e1} = \dot{\psi} x \text{ и } v_{e2} = \dot{\phi} x \cos \psi. \quad (7)$$

В этом случае для кинетической энергии получим выражение

$$K = \frac{1}{2} I_{0A} \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} I_{0A} (1 + \varepsilon)^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_{0A} (1 + \varepsilon)^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \psi, \quad (8)$$

и уравнения Лагранжа второго рода принимают вид:

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^2 I_{0A} \ddot{\psi} + 2(1 + \varepsilon) I_{0A} \dot{\psi} \dot{\varepsilon} + (1 + \varepsilon)^2 I_{0A} \cos \psi \sin \psi \dot{\phi}^2 &= Q_\psi, \\ (1 + \varepsilon)^2 I_{0A} \cos^2 \psi \ddot{\phi} + 2(1 + \varepsilon) I_{0A} \cos^2 \psi \dot{\phi} \dot{\varepsilon} - 2(1 + \varepsilon) I_{0A} \cos \psi \sin \psi \dot{\phi} \dot{\psi} &= Q_\phi, \\ I_{0A} \ddot{\varepsilon} - (1 + \varepsilon) I_{0A} \dot{\psi}^2 - (1 + \varepsilon) I_{0A} \cos^2 \psi \dot{\phi}^2 &= Q_\varepsilon. \end{aligned} \quad (9)$$

Необходимо отметить, что вычисление обобщенных сил, входящих в уравнения (5) и (9) удобнее всего производить путем разделения их на потенциальную и непотенциальную составляющие. Кроме того, несмотря на нелинейность отмеченных уравнений, их численное решение с помощью компьютера не вызывает особых затруднений.

Рассмотрим движение стержня в поле сил тяжести. Для определения обобщенных сил Q_ε и Q_ϕ необходимо вычислить потенциальную энергию стержня с учетом энергии упругой деформации. Длину элементарного участка dx представим в следующем виде:

$$dx = dx_0 (1 + \varepsilon) = dx_0 \left(1 + \frac{F}{A(x_0)E} \right) \quad (10)$$

где F – сила, растягивающая стержень (в рамках принятых приближений вычислим приведенный коэффициент жесткости, соответствующий изменению длины стержня); $A(x)$ – площадь поперечного сечения стержня в сечении x ; E – модуль упругости первого рода.

Для определения удлинения стержня проинтегрируем выражение (10)

$$\Delta l = \int_0^l \left(1 + \frac{F}{A(x)E}\right) dx - l_0 = \frac{F}{E} \int_0^{l_0} \frac{dx}{A(x)} \quad (11)$$

Тогда выражение для приведенного коэффициента жесткости стержня будет иметь вид

$$c = \frac{F}{\Delta l} = E \int_0^{l_0} \frac{dx}{A(x)} \quad (12)$$

В качестве примера рассмотрим стержень в форме усеченного конуса. В этом случае площадь поперечного сечения определяется выражением:

$$A(x) = \pi r(x)^2, \quad r(x) = r + \alpha x, \quad \alpha = (R - r) / l_0 \quad (13)$$

где r и R – радиусы концов стержня; α – константа.

При учете (13) выражение (12) принимает вид:

$$c = \frac{\pi r(r + \alpha l_0)}{l_0} E. \quad (14)$$

Учитывая также потенциальную энергию в поле сил тяжести, для обобщенных сил получим выражения

$$Q_\varepsilon = -\frac{\partial \dot{I}}{\partial \varepsilon} = -c l_0^2 \varepsilon - \frac{1}{2} m g l_0 \sin \psi,$$

$$Q_\psi = -\frac{\partial \dot{I}}{\partial \psi} = -\frac{1}{2} (1 + \varepsilon) l_0 m g \cos \psi. \quad (15)$$

Считая поперечные размеры стержня малыми, для осевого момента инерции получим

$$I_{OA} = \frac{m l_0^2}{10} \frac{6R^2 + 3Rr + r^2}{R^2 + Rr + r^2} \quad (16)$$

На рисунке 2 показаны зависимости от времени угловой скорости ω и относительной деформации ε резинового ($E = 10^7$ МПа, $\rho = 1200$ кг/м³) стержня с радиусами $r = 2$ см, $R = 3$ см, и длиной $l_0 = 1$ м, вращающегося относительно горизонтальной оси, при начальной угловой скорости $\omega_0 = 15$ рад/с, полученные численным интегрированием уравнений (5). Контроль правильности решения производился подсчетом механической энергии стержня, которая оставалась постоянной во времени.

Как и следовало ожидать, деформационная степень свободы стержня имеет колебательный характер. Кроме того, изменение длины стержня приводит к изменению его момента инерции, что влечет за собой изменение в противофазе угловой скорости, что видно из рисунка. Большой период изменения угловой скорости около 0,4 с обусловлен действием силы тяжести, которая также влияет на продольные деформации стержня.

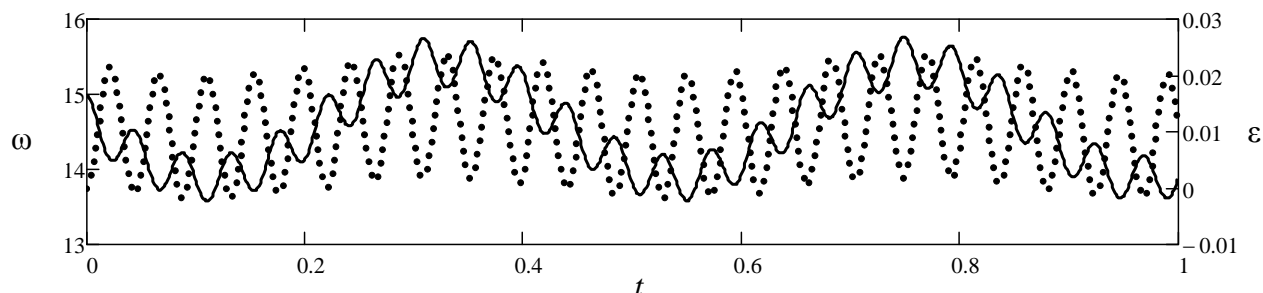


Рисунок 2. – Угловая скорость (сплошная линия) и относительная деформация (точки) при $\omega_0 = 15 \text{ c}^{-1}$

Некоторое представление о точности рассмотренной модели стержня можно получить, рассматривая колебания однородного стержня, закрепленного одним концом, после его однородного начального удлинения. Из уравнений (5) и (15) при $\psi=0$ следует, что в рассмотренной модели частота колебаний равна $\sqrt{3E/\rho l^2}$, тогда как точное решение задачи [6] приводит к значению $\sqrt{\pi^2 E/4\rho l^2}$, которое в $\sqrt{12/\pi^2} \cong 1,1$ раза меньше, то есть погрешность вычисления частоты колебаний составляет около 10%. Естественно, детальная картина колебаний будет существенно отличаться, так как точное решение не описывается гармонической функцией.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена простая модель упругого продольно деформируемого стержня в предположении, что продольная деформация постоянна вдоль его оси. Получены уравнения Лагранжа второго рода для различных видов движения стержня. Численно исследовано вращательное движение стержня в виде усеченного конуса. Показано, что продольные деформации и, как следствие, угловая скорость стержня, носят колебательный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – М.: Лань, 2009. – 736 с.
2. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – М.: Лань, 2001. – 768 с.
3. Левитская, О. Н. Курс теории механизмов и машин / О. Н. Левитская, Н. И. Левитский. – М.: Высш. шк., 1985. — 279 с.
4. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
5. Власов, В. З. Тонкостенные упругие стержни / В. З. Власов. – М.: ГИТТЛ, 1959. – 568 с.
6. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
7. Борисов, А. В. Динамика эндо- и экзоскелета / А. В. Борисов. – Смоленск: Смоленская городская типография, 2012. – 296 с.

SUMMARY

The simple model of a longitudinally elastically deformable thin rod is considered in approximation that the relative longitudinal deformation is constant along the rod axes. The second order Lagrange equations for different types of motion of the deformable rod are obtained. Rotational movement of the truncated cone rod is investigated. It is shown that the longitudinal deformation and as a consequence the angular velocity of the rod are antiphase oscillatory.

Поступила в редакцию 09.10.2013

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

маг. ¹ Шавловская О.Г., д. ф.-м. н. ² Леоненко Д.В.

¹ УО «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины», Гомель

² УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

Введение. Широкое применение в авиа-, ракето-, машино-, приборо- и судостроении многослойных конструкций приводит к необходимости разработки методов их расчета на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами.

При рассмотрении многослойных конструкций с криволинейными слоями можно указать три типа оболочек: тонкие, средней толщины и толстостенные. Для тонких оболочек можно пренебречь изменением метрики при переходе от слоя к слою и не учитывать поперечное деформирование заполнителей [1]. Для оболочек средней толщины необходим учет дискретного характера работы конструкции. В этом случае для несущих слоев принимают гипотезы Кирггофа-Лява. Для заполнителей существенными являются деформации поперечных сдвигов и трансверсальная деформация.

В монографии [2] рассмотрено деформирование трехслойных элементов конструкций, не связанных с упругими средами. В статье [3] исследованы колебания трехслойной цилиндрической оболочки в упругой среде при действии локальных нагрузок. Здесь выполнена постановка краевой задачи о статическом деформировании трехслойной оболочки вращения в упругой среде.

1 Постановка задачи. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирггофа-Лява, в жестком сжимаемом заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Деформации малые.

Обозначим: h_k – толщину k -го слоя; $k = 1, 2, 3$ – здесь и далее номера внешнего, нижнего слоев и заполнителя; $h_3 = 2c$; H_α, k_α ($\alpha = 1, 2$) – коэффициенты Ламе и главные кривизны срединной поверхности заполнителя.

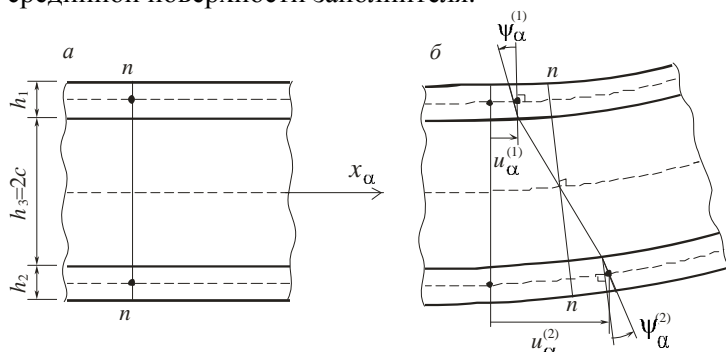


Рисунок 1. – Перемещения в оболочке со сжимаемым заполнителем

Проводя постановку краевой задачи в перемещениях, за независимые переменные принимаем u_α^k, w^k – тангенциальные перемещения и прогибы точек срединной поверхности несущих слоев в направлении осей x_α, z правой системы координат, отнесенной к линиям главных кривизн срединной поверхности заполнителя и к внешней нормали, соответственно (рисунок 1).

Перемещения в несущих слоях принимаем в виде ($c \leq z \leq c + h_1, -c - h_2 \leq z \leq -c$):

$$u_\alpha^{kz} = u_\alpha^k + (z \mp a_k) \psi_\alpha^k, \quad a_k = c + 0,5h_k.$$

Здесь и далее: греческие индексы принимают значения 1, 2; латинские – 1, 2, 3; нижний знак соответствует индексу $k = 2$; ψ_α^k – угол поворота нормали в k -ом несущем слое; частное дифференцирование обозначается соответствующим координатным нижним индексом, следующим после запятой.

Перемещения в заполнителе принимаем в виде ($-c \leq z \leq c$):

$$u_\alpha^{3z} = \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) (B_{k\alpha} u_\alpha^k \pm D_{k\alpha} w^k), \quad w^{3z} = 0,5 \sum_{k=1}^2 (1 \pm z/c) w^k,$$

где $B_{k\alpha} = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{1}{2} h_k c_\alpha^k k_\alpha \right), \quad D_{k\alpha} = \frac{h_k c_\alpha^k}{4H_\alpha}.$

Используя соотношения связи малых деформаций и перемещений в криволинейной ортогональной системе координат [4], получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\alpha}^{kz} &= (1 + k_\alpha z)^{-1} \left(H_\alpha^{-1} u_\alpha^{kz},_\alpha + H_1^{-1} H_2^{-1} H_{\alpha,\gamma} u_\gamma^{kz} + k_\alpha w^{kz} \right), \\ \varepsilon_{12}^{kz} &= 0,5(1 + k_1 z)^{-1} \left(H_1^{-1} u_2^{kz},_1 - H_1^{-1} H_2^{-1} H_{1,2} u_1^{kz} \right) + 0,5(1 + k_2 z)^{-1} \left(H_2^{-1} u_2^{kz},_1 - H_1^{-1} H_2^{-1} H_{2,1} u_2^{kz} \right), \\ \varepsilon_{\alpha 3}^{3z} &= 0,5 \left(u_\alpha^{3z},_\alpha - (1 + k_\alpha z)^{-1} k_\alpha u_\alpha^{3z} + H_\alpha^{-1} (1 + k_\alpha z)^{-1} w^{3z},_\alpha \right), \\ \varepsilon_{\alpha 3}^{3z} &= w^{3z},_\alpha; \quad (\gamma \neq \alpha, k = 1, 2, 3; \alpha, \gamma = 1, 2.)\end{aligned}\quad (1)$$

Реакцию упругой среды обозначим q_{3r}^k и предполагаем, что она описывается моделью Винклера:

$$q_{3r}^k = \kappa_k w^k,$$

где κ_k – коэффициент жесткости упругой среды со стороны k -го несущего слоя.

Уравнения равновесия и силовые граничные условия следуют из вариационного принципа Лагранжа:

$$-\delta W + \delta A = 0, \quad (2)$$

где δW – вариация потенциальной энергии деформации, $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – вариация работы внешних сил δA_1 и контурных усилий δA_2 .

С учетом поперечных сдвигов и обжатия заполнителя вариация внутренней потенциальной энергии будет (по повторяющимся греческим индексам производится суммирование):

$$\delta W = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{kz} (1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz + \int_{h_3} (2\sigma_{\alpha 3}^3 \delta \varepsilon_{\alpha 3}^{3z} + \sigma_{33}^3 \delta \varepsilon_{33}^{3z}) (1 + k_1 z)(1 + k_2 z) dz \right] H_1 H_2 dx_1 dx_2, \quad (3)$$

где l_α – линейный размер оболочки в направлении координатной оси x_α .

При определении вариации работы внешних сил считаем, что к наружным поверхностям несущих слоев ($k = 1, 2$) приложены произвольные распределенные нагрузки q_α^k, q_3^k . По границам (торцам оболочки) – усилия и моменты: $N_{\alpha\beta 0}^k, Q_{\alpha 0}^k, M_{\alpha\alpha 0}^k$. Тогда

$$\delta A_1 = \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \sum_{k=1}^2 \left[(q_\alpha^k + q_{3r}^k) \left(\delta u_\alpha^k + \frac{(-1)^{k+1} h_k}{2} \delta \psi_\alpha^k \right) \left(1 + (-1)^{k+1} k_1 (c + h_k) \right) \left(1 + (-1)^{k+1} k_2 (c + h_k) \right) \right] H_1 H_2 dx_1 dx_2. \quad (4)$$

Вариация работы внутренних обобщенных усилий и моментов

$$\delta A_2 = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{l_\gamma} \left(N_{\alpha\beta 0}^k \delta u_\beta^k + Q_{\alpha 0}^k \delta w^k + M_{\alpha\alpha 0}^k \delta w_{,\alpha}^k \right) dx_\gamma, \quad (5)$$

где $N_{\alpha\beta 0}^k, Q_{\alpha 0}^k, M_{\alpha\alpha 0}^k$ – заданные на контурной линии $x = x_\gamma$ (длины l_γ) обобщенные усилия и моменты.

2 Решение задачи. Подставив в вариационное уравнение (2) соотношения (3)–(5) и выделяя независимые вариации перемещений путем интегрирования по частям, получим в итоге следующее выражение:

$$\int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \left(\sum_{\alpha, k=1}^2 L_\alpha^k \delta u_\alpha^k + \sum_{k=1}^2 L_3^k \delta w^k \right) dx_1 dx_2 = 0. \quad (6)$$

Приравняв коэффициенты при независимых вариациях нулю в (6), получим шесть уравнений равновесия трехслойной осесимметричной оболочки ($k = 1, 2; i = 1, 2, 3$), в усилиях

$$L_i^k = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_\alpha^k = & -(H_\gamma T_{\alpha\alpha}^k)_{,\alpha} + H_\gamma k_\alpha c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k - (H_\gamma k_\alpha c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k)_{,\alpha} + H_\gamma k_{\alpha,\gamma} c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k - \\ & - H_{\alpha,\gamma} T_{\alpha\gamma}^k - H_{\alpha,\gamma} k_\alpha c_\alpha^k M_{\alpha\gamma}^k - (H_\alpha T_{\alpha\gamma}^k)_{,\gamma} + H_\alpha k_{\alpha,\gamma} c_\alpha^k M_{\gamma\alpha}^k - (H_\alpha k_\alpha c_\alpha^k M_{\gamma\alpha}^k)_{,\gamma} + \\ & + H_\alpha k_{\alpha,\gamma} c_\alpha^k M_{\gamma\alpha}^k - H_{\gamma,\alpha} T_{\gamma\gamma}^k + H_{\gamma,\alpha} k_\alpha c_\alpha^k M_{\gamma\gamma}^k + H_\gamma B_{k_\alpha,\alpha} M_{\alpha\alpha}^{3\pm} - (H_\gamma B_{k_\alpha} M_{\alpha\alpha}^{3\pm})_{,\alpha} - \\ & - H_{\alpha,\gamma} B_{k_\alpha} M_{\alpha\gamma}^{3\pm} + H_\alpha B_{k_\alpha,\gamma} M_{\gamma\alpha}^{3\pm} - (H_\alpha B_{k_\alpha} M_{\gamma\alpha}^{3\pm})_{,\gamma} + H_{\gamma,\alpha} B_{k_\alpha} M_{\gamma\gamma}^{3\pm} \pm \\ & \pm c^{-1} H_\alpha H_\gamma B_{k_\alpha} T_{\alpha\beta}^3 - H_\alpha H_\gamma k_\alpha B_{k_\alpha} M_{\alpha\beta}^{3\pm} - (1 \pm 0,5 h_k c_\alpha^k k_\alpha) H_\alpha H_\gamma m_\alpha^k m_\gamma^k q_\alpha^k, \\ \\ L_3^k = & (H_1^{-1} H_2 c_1^k M_{11}^k)_{,1} - (H_1^{-1} H_2 c_1^k M_{11}^k)_{,11} - (H_1^{-2} H_{1,1} H_2 c_1^k M_{11}^k)_{,1} + \\ & + (H_{1,2} H_2^{-1} c_2^k M_{11}^k)_{,2} + H_1 H_2 k_1 T_{11}^k + (c_2^k M_{12}^k)_{,2} - (H_2^{-1} H_{2,1} H_2 c_2^k M_{12}^k)_{,2} - \\ & + (c_2^k M_{12}^k)_{,12} - (H_1^{-1} H_{1,2} c_1^k M_{12}^k)_{,1} + (c_1^k M_{21}^k)_{,1} - (H_1^{-1} H_{1,2} c_1^k M_{21}^k)_{,1} - \\ & + (c_1^k M_{21}^k)_{,12} - (H_2^{-1} H_{2,1} c_2^k M_{21}^k)_{,2} + (H_1 H_2^{-1} c_2^k M_{22}^k)_{,2} - (c_2^k H_1 H_2^{-1} M_{22}^k)_{,22} - \\ & - (H_1 H_2^{-2} H_{2,2} c_2^k M_{22}^k)_{,2} + (H_1^{-1} H_{2,1} c_1^k M_{22}^k)_{,1} + H_1 H_2 k_2 T_{22}^k \mp (H_2 D_{k1,1} M_{11}^{3\pm})_{,1} \pm \\ & \pm (H_2 D_{k1} M_{11}^{3\pm})_{,11} \mp (H_{1,2} D_{k2} M_{11}^{3\pm})_{,2} + \frac{1}{2} H_1 H_2 k_1 M_{11}^{3\pm} \mp (H_2 D_{k2,1} M_{12}^{3\pm})_{,2} \pm \\ & \pm (H_2 D_{k2} M_{12}^{3\pm})_{,12} \mp (H_{1,2} D_{k1} M_{12}^{3\pm})_{,1} \mp (H_1 D_{k1,2} M_{21}^{3\pm})_{,1} \pm (H_1 D_{k1} M_{21}^{3\pm})_{,1} \pm \\ & \pm (H_{2,1} D_{k2} M_{21}^{3\pm})_{,2} \mp (H_1 D_{k2,2} M_{22}^{3\pm})_{,2} \pm (H_1 D_{k2} M_{22}^{3\pm})_{,22} \mp (H_{2,1} D_{k1} M_{22}^{3\pm})_{,1} + \\ & + \frac{1}{2} H_1 H_2 k_2 M_{22}^{3\pm} - c^{-1} (H_1 H_2 D_{k1} T_{13}^3)_{,1} \pm (H_1 H_2 k_1 D_{k1} M_{13}^{3\pm})_{,1} - 0,5 (H_2 M_{13}^{3\pm})_{,1} - \\ & - c^{-1} (H_1 H_2 D_{k2} T_{23}^3)_{,2} \pm (H_1 H_2 k_2 D_{k2} M_{23}^{3\pm})_{,2} - 0,5 (H_1 M_{23}^{3\pm})_{,2} \pm 0,5 c^{-1} H_1 H_2 T_{33}^3 - \\ & - H_1 H_2 m_1^k m_2^k (q_3^k + q_{3r}^k) \mp 0,5 h_k (q_1^k c_1^k m_1^k m_2^k H_2)_{,1} \mp 0,5 h_k (q_2^k c_2^k m_1^k m_2^k H_1)_{,2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где q_α^k, q_3^k – компоненты поверхностных нагрузок, $k = 1, 2; \alpha \neq \gamma$.

Полученная система уравнений с точностью до обозначений при $\kappa_k = 0$ совпадает с уравнениями равновесия трехслойной оболочки, не связанными с упругой средой [2].

Обобщенные внутренние усилия и моменты в выражениях (7) введены следующими соотношениями ($k \neq 3; i = 1, 2, 3; \gamma \neq \alpha$):

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^k &= \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k (1 + k_\gamma z) dz, \quad M_{\alpha\beta}^k = \int_{h_k} \sigma_{\alpha\beta}^k (z \mp a_k) (1 + k_\gamma z) dz, \\ T_{i3}^{(3)} &= \int_{h_k} \sigma_{i3}^{(3)} (1 + k_1 z) (1 + k_2 z) dz; \quad M_{\alpha i}^{(3)} = \int_{h_k} \sigma_{\alpha i}^{(3)} (1 \pm z/c) (1 + k_\gamma z) dz. \end{aligned}$$

Закрепление кромок несущих слоев осуществляется мембраной, установленной на срезах торцов, абсолютно жесткой на растяжение и сдвиг, но свободно деформирующейся из своей плоскости.

Силовые граничные условия формулируются из требования выполнения в каждой точке координатной линии равенства заданных обобщенных усилий и моментов внутренним силовым факторам, входящим в выражения контурного интеграла вдоль той же линии. На каждом торце формулируется по восемь граничных условий. Например, вдоль линии $x = x_\alpha$:

$$L_{\alpha\beta N}^k \equiv H_\gamma (T_{\alpha\beta}^k + k_\beta c_\beta^k M_{\alpha\beta}^k + B_{k\beta} M_{\alpha\beta}^{3\pm}) = N_{\alpha\beta 0}^k,$$

$$L_{\alpha Q}^k \equiv -H_\alpha^{-1} H_\gamma c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k + (H_\alpha^{-1} H_\gamma c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k)_{,\alpha} + H_\alpha^{-2} H_{\alpha,\alpha} H_\gamma c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k +$$

$$+ H_\alpha^{-1} H_{\alpha,\gamma} c_\alpha^k M_{12}^k - c_{\alpha,\gamma}^k M_{\gamma\alpha}^k + H_\alpha^{-1} H_{\alpha,\gamma} c_\alpha^k M_{21}^k + (c_2^k M_{12}^k)_{,\gamma} + (c_1^k M_{21}^k)_{,\gamma} -$$

$$+ H_\alpha^{-1} H_{\gamma,\alpha} c_\alpha^k M_{\gamma\gamma}^k \pm H_2 D_{k\alpha,1} M_{1\alpha}^k \mp (H_\gamma D_{k1} M_{\alpha 1}^{3\pm})_{,1} \mp H_{\alpha,\gamma} D_{k\alpha} M_{\alpha\gamma}^{3\pm} \mp$$

$$\mp (H_2 D_{k2} M_{12}^{3\pm})_{,\gamma} \pm H_1 D_{k\alpha,2} M_{2\alpha}^{3\pm} \mp (H_1 D_{k\alpha} M_{2\alpha}^{3\pm})_{,2} \pm H_{\gamma,\alpha} D_{k\alpha} M_{\gamma\gamma}^{3\pm} +$$

$$+ c^{-1} H_1 H_2 D_{k\alpha} T_{\alpha 3}^3 \mp H_1 H_2 k_\alpha D_{k\alpha} M_{\alpha 3}^{3\pm} + 0,5 H_\gamma M_{\alpha 3}^{3\pm} = Q_{\alpha 0}^k,$$

$$L_{\alpha M}^k \equiv -H_\alpha^{-1} H_\gamma c_\alpha^k M_{\alpha\alpha}^k \pm H_\gamma D_{k\alpha} M_{\alpha\alpha}^{3\pm} = M_{\alpha\alpha 0}^k, \quad (8)$$

где $\beta, k = 1, 2$; $\alpha, \gamma = 1, 2$; $\gamma \neq \alpha$; $N_{\alpha\beta 0}^k$, $Q_{\alpha 0}^k$, $M_{\alpha\alpha 0}^k$ – заданные на контурной линии $x = x_\gamma$ (длины l_γ) обобщенные усилия и моменты.

Вывод. Таким образом, на основе вариационного принципа Лагранжа поставлена краевая задача (7), (8) об изгибе трехслойной оболочки вращения в упругой среде.

РЕЗЮМЕ

Сделана постановка краевой задачи о деформировании трехслойной оболочки в упругой среде. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа–Лява. В толстом заполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине, изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Упругая среда описывается моделью Винклера. С помощью вариационного принципа Лагранжа получены уравнения равновесия трехслойной оболочки вращения в упругой среде и сформулированы условия на границах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В. В., Механика многослойных конструкций / Ю. Н. Новичков, В. В. Болотин. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 343 с.
3. Леоненко, Д. В. Локальные нагружения трехслойных круговых цилиндрических оболочек с упругим наполнителем / Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 28.– Мн.: 2013. – С. 109–113.
4. Амензаде, Ю.А. Теория упругости / Ю. А. Амензаде. – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.

SUMMARY

A formulation of the boundary value problem about the deformation of a three-layer shell in the elastic medium was made. For isotropic base layers the Kirchhoff-Love hypotheses were accepted. In the thick fill the work of the in-plane shear and thickness reduction are taken into account, the variation of shifts is accepted as a linear along the transverse coordinate. On the interfaces the conditions of shifts' continuity are used. Elastic medium is described by the Winkler's model. Using the variational Lagrange principle we got equations of the equilibrium of a three-layer shell of rotation in the elastic medium and formulated interface conditions.

Поступила в редакцию 19.09.2013

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЫСОКОПОЛИМЕРОВ В СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ НА ОСНОВЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

д.т.н. **Одинокова О.А.**, студ. **Королев С.А.**, студ. **Чураев А.О.**

УО «Тихоокеанский государственный университет», Хабаровск

При проведении прочностных расчетов пластмассовых деталей необходимо учитывать особенности их механического поведения, которые отличаются от поведения традиционных конструкционных материалов, таких как металлы при нормальных температурах. Здесь следует отметить сильную зависимость полимерных материалов от времени действия нагрузки и особенно от температуры. Поэтому для изготовления полимерных деталей конструкций в обеспечение их механической прочности и жесткости используют высокополимеры в стеклообразном и кристаллическом состояниях. При выборе марки пластмасс следует исходить из назначения детали и условий, в которых она будет эксплуатироваться. Успешное решение задачи по конструированию детали возможно лишь при учете характерных для пластмасс различных свойств в зависимости от условий эксплуатации и методов переработки.

При конструировании детали необходимо знать, какие нагрузки будет воспринимать деталь, в каких условиях она будет работать. Поэтому выбор пластмассы и конструкции детали возможен лишь после необходимых испытаний материала в разнообразных условиях. Высокая рабочая температура существенно снижает прочностные показатели материала. Так деформации высокополимеров проявляются наиболее ярко у полимеров, работающих в температурном диапазоне выше температуры текучести. Следовательно, расчет деталей из пластмасс должен включать в себя установление нагрузок, действующих на деталь, и определение температурных условий ее работы.

Термомеханические способы определения температур перехода полимеров (температуры стеклования $T_{ст}$ и температуры текучести $T_{тек}$) наиболее приемлемы вследствие относительной простоты, но все известные способы предполагают построение термомеханических кривых, на получение экспериментальных данных для которых и уходит подавляющая часть требуемых времени и средств. Однако тщательность построения термомеханических кривых теряет свое значение при определении температур перехода, так как последние зависят не от величины деформаций, а лишь от характера термомеханической кривой. Нами предложен способ определения температур перехода, не требующий специальной лабораторной базы и весьма просто реализуемый в обычном термощкафу с регулируемой температурой [1]. Предложенный способ осуществляется следующим образом. Производят основное термомеханическое испытание по схеме трехточечного изгиба образца в виде полоски толщиной 2-3 мм с возможностью свободного поворота его на шарнирных опорах. Толщину образца выбирают из условия быстрого прогревания его объема. Образец помещают в термощкаф, укладывают на него груз и равномерно поднимают температуру со скоростью 1 град/мин, которую фиксируют в момент резкого возрастания деформации образца. Это и есть температура перехода.

Скорость нарастания деформаций при достижении температуры перехода настолько велика (модуль изменяется на порядок), что образец практически проваливается в межопорный пролет, и груз и образец падают на дно шкафа. Это обстоятельство дает возможность производить испытания в термощкафу, не оборудованном даже смотровым окошком. Для установления характера температуры перехода выясняют степень обратимости деформаций, полученных образцом при испытании. Для этого образец после испытаний выдерживают без нагрузки в термощкафу при температуре, несколько большей, чем температура перехода, до исчезновения обратимой части деформации. Если температурой перехода является $T_{ст}$, то в общих деформациях образца будут преобладать обратимые высокоэластические деформации, обусловленные подвижностью отдельных звеньев макромолекулы. При выдержке в термощкафу образец восстановит свои размеры в весьма значительной степени. Если температурой перехода является $T_{тек}$, то преобладающими деформациями будут деформации вязкого течения, связанные с перемещениями всей макромолекулы, которые не исчезают при оговоренной выше выдержке образца в термощкафу. Степень обратимости деформаций определяют визуально, так как образец при достижении температуры перехода приобретает очень большие деформации как обратимого, так и необратимого характера.

Отсутствие необходимости многократного нагружения и проведения каких-либо измерений прогибов образца снижает трудоемкость испытания и значительно упрощает условия проведения эксперимента. Становится возможным отказаться от сложных и дорогостоящих приборов, при этом процесс прогревания образца не прерывается операциями нагружения, разгрузки и измерения и время проведения испытаний значительно сокращается, снижается расход энергии. Эксперимент не требует высокой квалификации обслуживающего персонала. Точность определения температуры перехода не снижается, но при этом необходимо выполнить условие постоянства структуры материала в процессе испытания. Практика показала, что для выполнения этого условия деформация не должна превышать пяти процентов ($\varepsilon_{np}=0.05$) [2]. Резкая температурная зависимость деформационных свойств высокополимеров ужесточает это условие при возрастающей температуре. По этой причине должна быть найдена предельная величина напряжения σ_{np} , при постоянном воздействии которого деформация полимерного образца с повышением температуры до T_{max} в течение фиксированного промежутка времени не превысила бы заданной величины.

В общем случае деформация образца зависит от времени t , напряжения σ , и самым сильным образом от температуры T и описывается уравнением [2]:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(\exp \frac{\sigma}{\sigma_0} \cdot e^{\frac{-T_0}{T}} - 1 \right) \ln \frac{t + t_0}{t_0}. \quad (1)$$

Параметры этого уравнения t_0 , ε_0 , σ_0 и T_0 с размерностью времени, деформации, напряжения и температуры характеризуют деформационные свойства полимера. При этом σ_0 и T_0 являются константами. Величина ε_0 зависит от температуры. Величина t_0 зависит от температуры и напряжения.

Нами разработана методика определения параметров t_0 , ε_0 , σ_0 и T_0 по результатам испытаний материала на ползучесть при различных уровнях напряжения и температуры. В конечном итоге величина напряжения σ_{np} , при котором за заданное время t и нагреве до T_{max} деформация не превысит предельной величины ε_{np} , определится из уравнения (1), как

$$\sigma_{np} = \sigma_0 \frac{\ln \left[\frac{\varepsilon_{np}}{\varepsilon_0 \ln \frac{t + t_0}{t_0}} + 1 \right]}{e^{-T_0/T}}. \quad (2)$$

Окончательно сформируется массив предельных напряжений σ_{np} как функция максимальной температуры и длительности опыта. Для ударопрочного винипласта полученные значения σ_{np} при $\varepsilon_0=0.05$ приведены в таблице 1. Анализ $\sigma_{np}(t, T)$ свидетельствует о том, что временная зависимость σ_{np} значительно слабее, чем температурная.

Таблица 1 - Значения предельных напряжений для ударопрочного винипласта (МПа)

Температура, К Время, t мин	293	323	360	430
0.25	75.75	55.58		20.185
8	74.48	54.59		19.86
16	74.07	54.40		19.80
32		54.14		19.70
60	73.71	53.96	36.19	19.69
120		53.72		19.63

Массив предельных напряжений опыта является практически необходимым для обеспечения точности определения температуры перехода полимерных материалов.

Предварительные испытания для выбора максимального значения σ в опытах по определению температуры перехода можно выполнить следующим образом.

Отдельный образец предварительно статически испытывают осевой нагрузкой при исходной температуре основных термомеханических испытаний, строят диаграмму «напряжение - деформация», на которой отсекают часть с максимальной величиной относительной деформации, равной 0,05. Из условия равенства удельной потенциальной энергии деформации в окрестностях наиболее

напряженных точек образцов в предварительном и основном испытаниях подсчитывают величину напряжения основного термомеханического испытания, при этом площади диаграмм предварительного и основного испытаний, должны быть равны. Следовательно, максимальные напряжения основного термомеханического испытания будут определены как

$$\sigma = 20 S, \quad (3)$$

где $S = \int_0^{\varepsilon} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$

определяет удельную работу с размерностью Нм/м³. Величину S можно определить как площадь диаграммы предварительного статического растяжения, ограниченную $\varepsilon = 0.05$. В основном опыте $\sigma = \text{const}$.

При основном нагружении можно осуществлять как растяжение, так и изгиб, а также сжатие. Если в основных испытаниях производят растяжение или сжатие, то в предварительных испытаниях производят такие же нагружения. Если в основных испытаниях производят изгиб, то возможны два варианта: материал, хуже сопротивляющийся растяжению, предварительно испытывают на растяжение; материал, хуже сопротивляющийся сжатию, - на сжатие.

Следует отметить, что при изгибе легче всего осуществить достижение максимального напряжения и удобнее всего следить за моментом резкого нарастания деформаций. Величину груза и расстояние между опорами выбирают таким образом, чтобы максимальное напряжение в образце не превышало величины, подсчитанной по формуле (1) или (3).

Влияние температуры в промежутках между температурами перехода на величину деформации не так значительно, о чем свидетельствуют сами термомеханические кривые, на которых эти участки представлены практически горизонтальными линиями. Следовательно, диапазон напряжений по предлагаемому способу выбран из условия неизменности структуры исследуемого полимера под воздействием механического поля, а это увеличивает достоверность полученных результатов.

РЕЗЮМЕ

На уровне изобретения разработан метод определения температур перехода полимерных материалов, которые играют решающую роль в определении технологических параметров изготовления и эксплуатации изделий из пластмасс. Простота осуществления метода, не требующего сложной измерительной и испытательной аппаратуры, делают его доступным в условиях любой испытательной лаборатории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Одиноква О.А., Одиноква А.В., Толмачев В.Т.. Способ термомеханических испытаний материалов // А.с. № 1343286 (СССР) с приоритетом от 30.05.86 // Бюллетень: Открытия, Изобретения, Пром. Образцы и товарные знаки. - 1987. - № 37.
2. Глухов Е.Е. Основные понятия о конструкционных и технологических свойствах пластмасс. М.: Химия, 1970. 128 с.

SUMMARY

At the level of the invention provides a method for determining the transition temperature of polymeric materials, which play a crucial role in determining the technological parameters of manufacturing and operation of plastic products. Ease of implementation of the method, which does not require sophisticated measurement and test equipment, making it accessible in any testing laboratory.

Поступила в редакцию 18.09.2013

КИНЕМАТИКА КОЛЕСНО-ШАГАЮЩЕГО ДВИЖИТЕЛЯ, ПЕРЕМЕЩАЮЩЕГОСЯ ПО СТУПЕНЯМ

д.т.н. Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Разработанный в БНТУ опытный образец колесно-шагающего движителя (рисунок 1) основной сферой своего применения предполагает сельскохозяйственную технику. Тем не менее, конструктивные особенности данного движителя позволяют перешагивать относительно невысокие препятствия (бордюры, камни, бревна), что является огромным преимуществом при движении по пересеченной местности. Помимо этого, представляется логичным использовать достоинства движителя данной конструкции при передвижении в городской среде. Как известно, людям с ограниченными возможностями, перемещающимся на инвалидных колясках, постоянно приходится сталкиваться с проблемами преодоления высоких бордюров, лестничных маршей и других препятствий. Несмотря на ряд мер, предпринимаемых в последнее время, городская среда в Республике Беларусь по-прежнему остается некомфортной для инвалидов-колясочников.

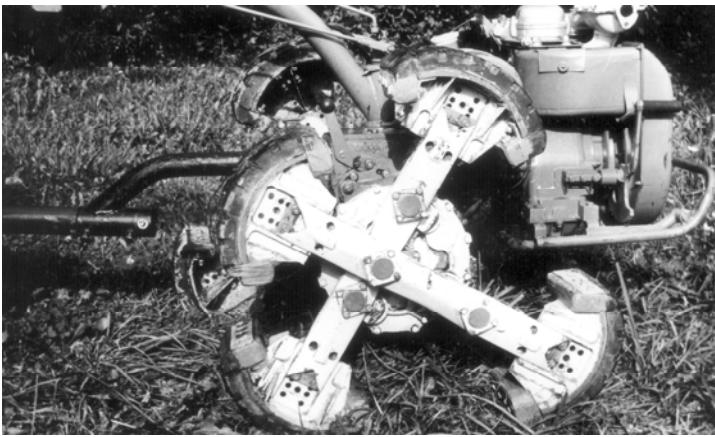


Рисунок 1. – Колесно-шагающий движитель

Используя результаты работ [1, 2], проведем анализ кинематики перемещения колесно-шагающего движителя по лестничным ступеням. Будут рассмотрены два варианта движения: подъема и спуска по лестничному маршу. Поскольку размеры лестничных ступеней оказывают серьезное влияние на кинематику подъема и спуска, следует обеспечить согласование конструктивных размеров движителя с высотой и шириной ступеней. Рассмотрим схему подъема на ступень колесно-шагающего движителя (рисунок 2).

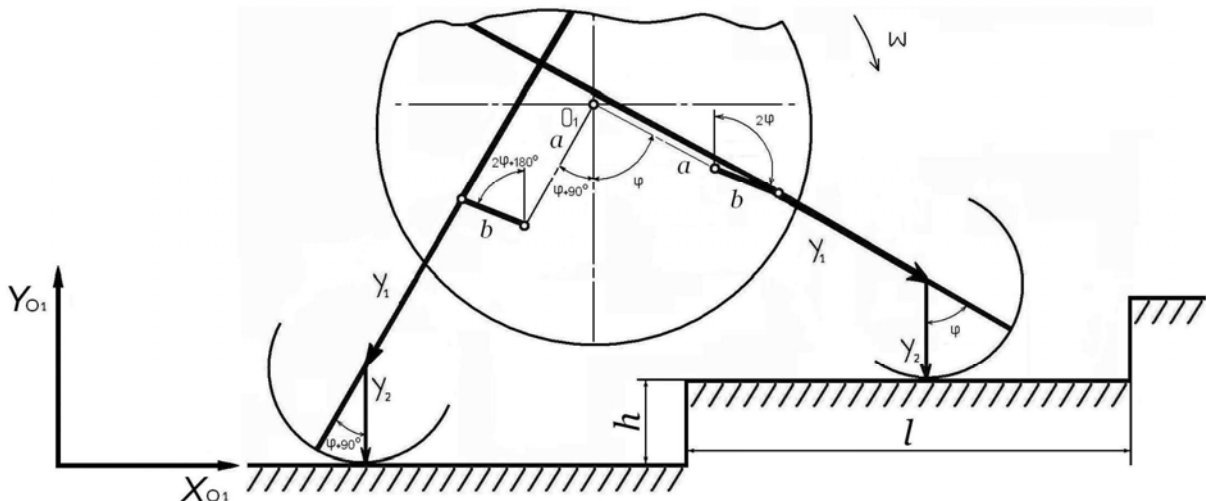


Рисунок 2. – Схема подъема на ступень колесно-шагающего движителя

В данной расчетной схеме обобщенной координатой является угол φ поворота ступицы движителя. Значения координаты φ задаются для того опорного башмака, который вступает в контакт с поверхностью вышестоящей ступени. Для опорного башмака, который должен оторваться от поверхности нижестоящей ступени, угол поворота ступицы принимает значение

$\varphi + 90^\circ$. При движении по плоской поверхности, башмак вступает в контакт с опорой при угле $\varphi = -45^\circ$, а отрывается от опоры из-за поворота ступицы движителя при угле $\varphi = 45^\circ$ [1]. Итак, опорный башмак совершает свой цикл движения за период в 90° углового поворота ступицы, после чего цикл повторяется для следующего башмака. При подъеме на ступень, башмак вступает в контакт с опорой при некотором угле $\varphi = \alpha$, а отрывается от этой ступени, после окончания своего цикла, при угле $\varphi = \alpha + 90^\circ$.

Горизонтальное перемещение оси ступицы, от момента вступления опорного башмака в контакт с поверхностью ступени при угле $\varphi = \alpha$ радиан до момента отрыва от опоры при угле $\varphi = \alpha + \pi/2$ радиан, будет равно длине ступени l [1, 2]:

$$\Delta X_{01} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi/2} ((a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + Y_2) \cdot d\varphi = l. \quad (1)$$

Учтем, что величины $Y_1 = const$, $Y_2 = const$. Произведя интегрирование, получим [3]:

$$\begin{aligned} ((a + Y_1) \cdot \sin(\alpha + \pi/2) + b \cdot \sin(2\alpha + \pi) + Y_2 \cdot (\alpha + \pi/2)) - ((a + Y_1) \cdot \sin \alpha + b \cdot \sin 2\alpha + Y_2 \cdot \alpha) &= l, \\ (a + Y_1) \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha) - 2 \cdot b \cdot \sin 2\alpha + Y_2 \cdot \pi/2 &= l. \end{aligned} \quad (2)$$

Вертикальное перемещение оси ступицы, от момента вступления опорного башмака в контакт с поверхностью ступени при угле $\varphi = \alpha$ радиан до момента отрыва от опоры при угле $\varphi = \alpha + \pi/2$ радиан, будет равно высоте ступени h [1, 2]:

$$\Delta Y_{01} = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi/2} (2 \cdot b \cdot \sin 2\varphi - (a + Y_1) \cdot \sin \varphi) \cdot d\varphi = h. \quad (3)$$

Произведя интегрирование, получим [3]:

$$\begin{aligned} (-b \cdot \cos(2\alpha + \pi) + (a + Y_1) \cdot \cos(\alpha + \pi/2)) - (-b \cdot \cos 2\alpha + (a + Y_1) \cdot \cos \alpha) &= h, \\ (b \cdot \cos 2\alpha - (a + Y_1) \cdot \sin \alpha) - (-b \cdot \cos 2\alpha + (a + Y_1) \cdot \cos \alpha) &= h, \\ 2 \cdot b \cdot \cos 2\alpha - (a + Y_1) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) &= h. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим схему спуска со ступени колесно-шагающего движителя (рисунок 3).

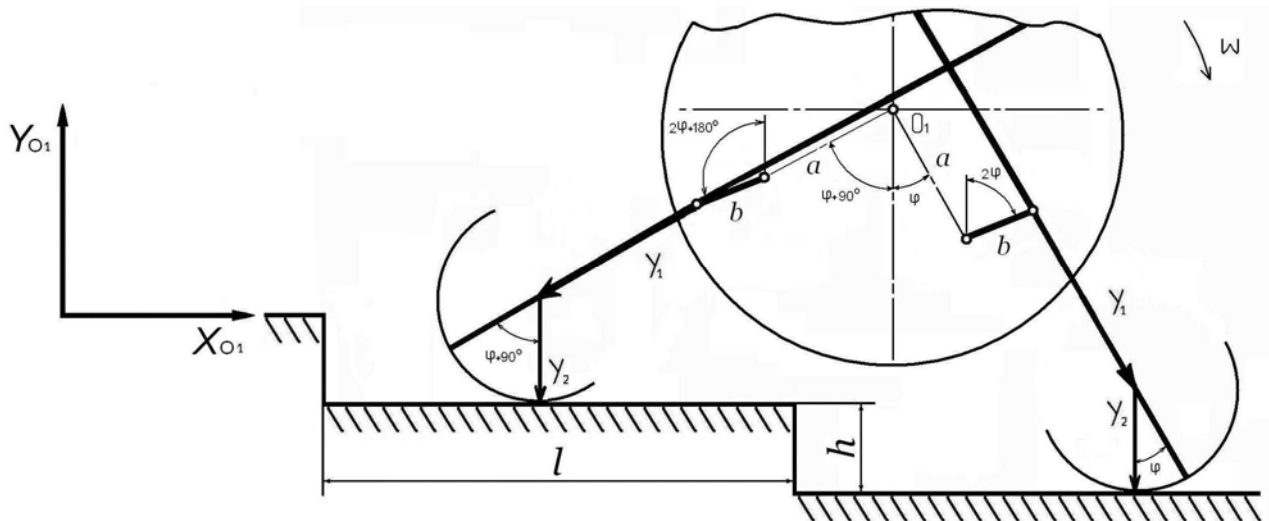


Рисунок 3. – Схема спуска со ступени колесно-шагающего движителя

В данном случае значения координаты φ задаются для того опорного башмака, который вступает в контакт с поверхностью нижестоящей ступени. Для опорного башмака, который в данный момент должен оторваться от поверхности вышестоящей ступени, угол поворота ступицы принимает значение $\varphi + 90^\circ$. Таким образом, при спуске движителя, башмак вступает в контакт с нижестоящей ступенью при некотором угле $\varphi = \beta$, а отрывается от ступени, после окончания своего цикла продолжительностью 90° , при угле $\varphi = \beta + 90^\circ$.

Горизонтальное перемещение оси ступицы при спуске определяется как:

$$\Delta X_{01} = \int_{\beta}^{\beta+\pi/2} ((a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + Y_2) \cdot d\varphi = l. \quad (5)$$

Вертикальное перемещение оси ступицы при спуске за один цикл:

$$\Delta Y_{01} = \int_{\beta}^{\beta+\pi/2} (2 \cdot b \cdot \sin 2\varphi - (a + Y_1) \cdot \sin \varphi) \cdot d\varphi = -h. \quad (6)$$

После интегрирования выражений (8, 9) и преобразований соответственно получим [3]:

$$(a + Y_1) \cdot (\cos \beta - \sin \beta) - 2 \cdot b \cdot \sin 2\beta + Y_2 \cdot \pi/2 = l, \quad (7)$$

$$2 \cdot b \cdot \cos 2\beta - (a + Y_1) \cdot (\cos \beta + \sin \beta) = -h. \quad (8)$$

Для данного движителя при движении по лестничным ступеням, как при подъеме, так и при спуске, угол вступления башмака на опорную поверхность всегда $-\pi/2 \leq \varphi \leq 0$. Исходя из рисунков 2 и 3, можно сделать вывод, что $\alpha + \beta = -\pi/2$.

Подставив выражение $\beta = -\pi/2 - \alpha$ в формулу (7), получим зависимость

$$(a + Y_1) \cdot (\cos(-\pi/2 - \alpha) - \sin(-\pi/2 - \alpha)) - 2 \cdot b \cdot \sin(-\pi - 2\alpha) + Y_2 \cdot \pi/2 = l.$$

После тригонометрических преобразований [3] эта зависимость примет вид:

$$(a + Y_1) \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha) - 2 \cdot b \cdot \sin 2\alpha + Y_2 \cdot \pi/2 = l, \text{ что полностью соответствует формуле (2).}$$

Подставив $\beta = -\pi/2 - \alpha$ в формулу (8), получим выражение

$$2 \cdot b \cdot \cos(-\pi - 2\alpha) - (a + Y_1) \cdot (\cos(-\pi/2 - \alpha) + \sin(-\pi/2 - \alpha)) = -h.$$

После преобразований [3] оно примет вид:

$$2 \cdot b \cdot \cos 2\alpha - (a + Y_1) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) = h, \text{ что соответствует формуле (4).}$$

Итак, формулы (2, 4) выражают зависимость между размерами движителя и размерами ступеней, как при подъеме, так и при спуске по лестнице. Преобразуя формулу (2), получим:

$$a + Y_1 = \frac{l + 2 \cdot b \cdot \sin 2\alpha - Y_2 \cdot \pi/2}{\cos \alpha - \sin \alpha}. \quad (9)$$

Преобразуя формулу (4), получим:

$$a + Y_1 = \frac{2 \cdot b \cdot \cos 2\alpha - h}{\cos \alpha + \sin \alpha}. \quad (10)$$

Приравняв (9, 10), получим:

$$\frac{l + 2 \cdot b \cdot \sin 2\alpha - Y_2 \cdot \pi/2}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{2 \cdot b \cdot \cos 2\alpha - h}{\cos \alpha + \sin \alpha},$$

$$b = \frac{(Y_2 \cdot \pi/2 - l) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) - h \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)}{2 \cdot (\sin 2\alpha \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) - \cos 2\alpha \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha))}. \quad (11)$$

Поскольку в данном движителе $a = 2 \cdot b$ [1], из формулы (10) с учетом (11) получаем:

$$Y_1 = \frac{((Y_2 \cdot \pi/2 - l) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) - h \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)) \cdot (\cos 2\alpha - \cos \alpha - \sin \alpha)}{(\sin 2\alpha \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) - \cos 2\alpha \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)) \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)} - \frac{h}{(\cos \alpha + \sin \alpha)}. \quad (12)$$

Выполним расчеты по формулам (11, 12) с целью определения рациональных значений основных параметров движителя. Длина ступени $l = 0,3$ м, высота ступени $h = 0,15$ м, что соответствует типовой конструкции лестничных маршей в подъездах жилых домов. Зададимся рядом значений угла вступления башмака на ступень при подъеме α , радиус-вектора башмака Y_2 и вычислим значения радиуса кривошипа b , радиус-вектора стойки ноги Y_1 . Результаты расчетов занесем в таблицу 1.

Таблица 1. Расчетные значения основных параметров движителя

α , градусы	$Y_2 = 0,07$ м		$Y_2 = 0,06$ м		$Y_2 = 0,05$ м		$Y_2 = 0,04$ м	
	b , м	Y_1 , м	b , м	Y_1 , м	b , м	Y_1 , м	b , м	Y_1 , м
-90	0,0200	0,1500	0,0279	0,1500	0,0357	0,1500	0,0436	0,1500
-75	-0,0174	0,2043	-0,0135	0,2061	-0,0096	0,2078	-0,0057	0,2096
-60	-0,0677	0,3603	-0,0648	0,3624	-0,0619	0,3645	-0,0590	0,3666
-45	$-\infty/+\infty$	$+\infty/-\infty$	$-\infty/+\infty$	$+\infty/-\infty$	$-\infty/+\infty$	$+\infty/-\infty$	$-\infty/+\infty$	$+\infty/-\infty$
-30	0,1372	-0,3093	0,1401	-0,3072	0,1430	-0,3051	0,1459	-0,3030
-15	0,1125	-0,1616	0,1164	-0,1598	0,1203	-0,1581	0,1242	-0,1563
0	0,1700	-0,1500	0,1779	-0,1500	0,1857	-0,1500	0,1936	-0,1500

Очевидно, что для большинства значений угла α приведенные в таблице 1 вычисленные значения радиуса кривошипа b , радиус-вектора стойки ноги Y_1 не имеют физического смысла. Поэтому выберем значения параметров b и Y_1 , при которых угол вступления башмака на ступень при подъеме равен $\alpha = -90^\circ$. Соответственно, при спуске угол вступления башмака на ступень будет равен $\beta = 0^\circ$. Кроме этого, можно сделать вывод, что существующий образец колесно-шагающего движителя со значениями $a = 0,1$ м, $b = 0,05$ м, $Y_1 = 0,13$ м, $Y_2 = 0,192$ м, не подходит для движения по лестничным маршам в подъездах жилых домов.

Определим кинематические параметры движителя для значений $a = 0,04$ м, $b = 0,02$ м, $Y_1 = 0,15$ м, $Y_2 = 0,07$ м, $\alpha = -90^\circ$, $\beta = 0^\circ$, используя приведенные ниже формулы [2].

Горизонтальное перемещение оси ступицы при подъеме:

$$X_{01} = ((a + Y_1) \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin 2\varphi + Y_2 \cdot \varphi) - ((a + Y_1) \cdot \sin \alpha + b \cdot \sin 2\alpha + Y_2 \cdot \alpha). \quad (13)$$

Горизонтальное перемещение оси ступицы при спуске:

$$X_{01} = ((a + Y_1) \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin 2\varphi + Y_2 \cdot \varphi) - ((a + Y_1) \cdot \sin \beta + b \cdot \sin 2\beta + Y_2 \cdot \beta). \quad (14)$$

Аналог скорости по горизонтали:

$$\frac{dX_{01}}{d\varphi} = (a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 2 \cdot b \cdot \cos 2\varphi + Y_2. \quad (15)$$

Аналог ускорения по горизонтали:

$$\frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2} = -(a + Y_1) \cdot \sin \varphi - 4 \cdot b \cdot \sin 2\varphi. \quad (16)$$

Вертикальное положение оси ступицы:

$$Y_{01} = (a + Y_1) \cdot \cos \varphi - b \cdot \cos 2\varphi + Y_2. \quad (17)$$

Аналог скорости по вертикали:

$$\frac{dY_{01}}{d\varphi} = -(a + Y_1) \cdot \sin \varphi + 2 \cdot b \cdot \sin 2\varphi. \quad (18)$$

Аналог ускорения по вертикали:

$$\frac{d^2 Y_{01}}{d\varphi^2} = -(a + Y_1) \cdot \cos \varphi + 4 \cdot b \cdot \cos 2\varphi. \quad (19)$$

Используя формулы (13–19) выполним расчет кинематики движителя при подъеме и спуске со ступени. В формулы (13, 14) значения углов φ , α , β следует подставлять в радианах. Результаты расчетов заносим в таблицы 2, 3.

Таблица 2. Кинематика колесно-шагающего движителя при подъеме по ступени

φ , градусы	X_{01} , м	$\frac{dX_{01}}{d\varphi}$, м	$\frac{d^2 X_{01}}{d\varphi^2}$, м	Y_{01} , м	$\frac{dY_{01}}{d\varphi}$, м	$\frac{d^2 Y_{01}}{d\varphi^2}$, м
-90	0,0000	0,0300	0,1900	0,0900	0,1900	-0,0800
-80	0,0083	0,0654	0,2145	0,1218	0,1734	-0,1082
-70	0,0230	0,1043	0,2300	0,1503	0,1528	-0,1263
-60	0,0448	0,1450	0,2338	0,1750	0,1299	-0,1350
-50	0,0736	0,1852	0,2243	0,1956	0,1062	-0,1360
-40	0,1093	0,2225	0,2009	0,2121	0,0827	-0,1317
-30	0,1510	0,2545	0,1643	0,2245	0,0604	-0,1245
-20	0,1977	0,2792	0,1164	0,2332	0,0393	-0,1173
-10	0,2479	0,2947	0,0604	0,2383	0,0193	-0,1119
0	0,3000	0,3000	0,0000	0,2400	0,0000	-0,1100

Таблица 3. Кинематика колесно-шагающего движителя при спуске со ступени

φ , градусы	X_{01} , м	$\frac{dX_{01}}{d\varphi}$, м	$\frac{d^2X_{01}}{d\varphi^2}$, м	Y_{01} , м	$\frac{dY_{01}}{d\varphi}$, м	$\frac{d^2Y_{01}}{d\varphi^2}$, м
0	0,0000	0,3000	0,0000	0,2400	0,0000	-0,1100
10	0,0521	0,2947	-0,0604	0,2383	-0,0193	-0,1119
20	0,1023	0,2792	-0,1164	0,2332	-0,0393	-0,1173
30	0,1490	0,2545	-0,1643	0,2245	-0,0604	-0,1245
40	0,1907	0,2225	-0,2009	0,2121	-0,0827	-0,1317
50	0,2263	0,1852	-0,2243	0,1956	-0,1062	-0,1360
60	0,2552	0,1450	-0,2338	0,1750	-0,1299	-0,1350
70	0,2769	0,1043	-0,2300	0,1503	-0,1528	-0,1263
80	0,2917	0,0654	-0,2145	0,1218	-0,1734	-0,1082
90	0,3000	0,0300	-0,1900	0,0900	-0,1900	-0,0800

Исходя из приведенных в таблицах 2, 3 результатов расчетов можно сделать вывод, что перемещение движителя по лестничным ступеням сопровождается значительными колебаниями скорости и ускорения, которые носят характер скачков при смене опорных башмаков. Возникающие при этом инерционные и ударные нагрузки могут оказывать негативное влияние на организм инвалида-колясочника. Тем не менее, данный движитель является перспективным для применения в конструкции инвалидной коляски. Необходимы дальнейшие исследования с целью совершенствования движителя данного типа.

РЕЗЮМЕ

Описана методика расчета кинематических характеристик колесно-шагающего движителя при его движении по ступеням лестницы. Даны основные геометрические характеристики движителя в зависимости от размеров ступеней. Данная методика применима при проектировании средств передвижения для лиц с ограниченными возможностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скойбеда, А.Т. Кинематика колесно-шагающего движителя при опоре на башмаки круглого профиля / А.Т. Скойбеда, В.Н. Жуковец, О.А. Сонич // Современные методы проектирования машин: Республиканский межведомственный сборник научных трудов. Вып.2. В 7 томах. – Т. 3. Проектирование приводов машин / Под общ. ред. П.А. Витязя. – Минск, 2004. – с. 102–106.
2. Скойбеда, А.Т. Выбор формы опорных башмаков и их влияние на кинематику колесно-шагающего движителя / А.Т. Скойбеда, В.Н. Жуковец / Сборник научных трудов «Актуальные вопросы машиноведения». Выпуск 1. – Минск, 2012. – Стр. 212-215.
3. Воднев В.Т., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Основные математические формулы: Справочник. Под ред. Богданова Ю.С. – Мн.: Выш. шк., 1995. – 380 с.

SUMMARY

The paper describes method of calculating kinematic characteristics of wheel-step mover in its motion along the stair steps. The basic geometry of the mover according to the size of the steps has been given. The given method is applicable in design of vehicles for persons with disabilities.

Поступила в редакцию 04.11.2013

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ С КВАДРАТИЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ УСИЛИЙ И РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕМ ВЫЧИСЛЕНИЙ

д. ф.-м. н. Журавков М.А., к. ф.-м. н. Круподеров А.В., к. ф.-м. н. Щербаков С.С.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Как известно любой из существующих численных методов решения задач механики деформируемого твердого тела и в частности задач теории упругости имеет как свои преимущества, так и недостатки. Для метода граничных элементов (МГЭ) одной из наиболее сложных проблем является решение задачи изгиба балки. На основании предыдущих исследований большого количества авторов [1-4] установлено, что при решении задач консольного изгиба с помощью МГЭ на основе схем для граничных элементов с равномерными распределениями усилий не удается добиться хорошего соответствия получаемых решений с аналитическими даже при использовании большого количества элементов. Поэтому, несмотря на простоту реализации МГЭ на основе схем для элементов с равномерными распределениями усилий, требуется использование элементов с распределениями более высокого порядка. Следует отметить, что одним из несомненных преимуществ метода граничных элементов является то, что алгоритмы его реализации хорошо распараллеливаются. В настоящее время интенсивно развивается технология распараллеливания вычислений на основе использования графических процессоров CUDA [5]. Особенностью данной технологии является, что ее использование является намного более экономным, чем, например, использование суперкомпьютеров.

В данной статье описаны результаты реализации процедуры МГЭ на основе использования схемы для элементов с квадратичными распределениями усилий. Представлены результаты распараллеливания вычислений на основе созданных для технологии CUDA алгоритмов. Приведено сравнение полученных решений с аналитическими и сравнение производительности вычислений, выполненных на одном ядре центрального процессора и распараллеленных с использованием технологии CUDA.

Схема метода граничных элементов. В соответствии с общей схемой метода граничных элементов [1-4] исходная граница исследуемого тела разбивается на граничные элементы. При использовании элементов второго порядка элемент представляет собой три узла, в общем случае занимающих произвольное положение в пространстве

Обычно при реализации метода граничных элементов необходимо проведение численного интегрирования для каждого элемента, что требует большого количества машинного времени и уменьшает точность расчета. Поэтому эффективным представляется использование аналитического интегрирования. В этом случае, правда, приходится использовать элементы, узлы которых располагаются на одной прямой. Локальную систему координат будем размещать в центральном узле.

В соответствии с общей схемой непрямого метода граничных элементов требуется найти распределения фиктивных нормальных и касательных усилий, действующих на границе области таким образом, чтобы выполнялись заданные граничные условия. При использовании элементов второго порядка соответствующие компоненты нагрузки на каждом элементе задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{\gamma}^n(x) &= a_{\gamma}^n x^2 + b_{\gamma}^n x + c_{\gamma}^n, \\ p_{\gamma}^{\tau}(x) &= a_{\gamma}^{\tau} x^2 + b_{\gamma}^{\tau} x + c_{\gamma}^{\tau}, \end{aligned} \quad (1)$$

где индекс γ соответствует номеру элемента.

Если для составления основной системы уравнений метода граничных элементов за неизвестные принять значения нагрузки в трех узлах, то на каждом элементе нагрузку можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} p_{\gamma}^n(x) &= p_{\gamma 1}^n q_1(x) + p_{\gamma 2}^n q_2(x) + p_{\gamma 3}^n q_3(x), \\ p_{\gamma}^{\tau}(x) &= p_{\gamma 1}^{\tau} q_1(x) + p_{\gamma 2}^{\tau} q_2(x) + p_{\gamma 3}^{\tau} q_3(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – индексы узлов через которые проходит элемент γ а $q_l(x)$ – функции формы, принимающие значения 1 в l -м узле и 0 в остальных узлах.

Выражения для q_l можно записать следующим образом:

$$q_1(x) = \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x}{2a}, q_2(x) = 1 - \frac{x^2}{a^2}, q_3(x) = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x}{2a}, \quad (3)$$

где a – полудлина элемента.

Таким образом, требуя выполнения граничных условий в узлах граничноэлементной сетки, получаем следующую систему линейных уравнений относительно неизвестных значений фиктивных нагрузок в узлах:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_n} (Asnn_{ij} p_i^n + Assn_{ij} p_i^\tau) &= P_{2j}, \quad \sum_{i=1}^{N_n} (Aunn_{ij} p_i^n + Auns_{ij} p_i^\tau) = U_{2j}, \\ \sum_{i=1}^{N_n} (Asns_{ij} p_i^n + Asss_{ij} p_i^\tau) &= P_{1j}, \quad \sum_{i=1}^{N_n} (Auns_{ij} p_i^\tau + Auss_{ij} p_i^\tau) = U_{1j}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $Asnn_{ij}, Asns_{ij}, Assn_{ij}, Asss_{ij}$ и $Aunn_{ij}, Auns_{ij}, Auns_{ij}, Auss_{ij}$ – коэффициенты влияния, соответственно, усилий и перемещений от нагрузки в i -м узле на соответствующее значение в j -м узле. Данные коэффициенты могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\begin{aligned} Asnn_{ij} &= \sum_{\gamma, i \in E_\gamma} \sum_{\alpha, \beta} a_{2\alpha}^{ij} a_{\beta 2}^{ij} \int_{-a_\gamma}^{a_\gamma} G_{\alpha\beta}^{(n,\sigma)}(\bar{x}_{ij} - \xi, \bar{y}_{ij}) q_{N_i}(\xi) d\xi, \\ Asns_{ij} &= \sum_{\gamma, i \in E_\gamma} \sum_{\alpha, \beta} a_{2\alpha}^{ij} a_{\beta 1}^{ij} \int_{-a_\gamma}^{a_\gamma} G_{\alpha\beta}^{(n,\sigma)}(\bar{x}_{ij} - \xi, \bar{y}_{ij}) q_{N_i}(\xi) d\xi, \\ Assn_{ij} &= \sum_{\gamma, i \in E_\gamma} \sum_{\alpha, \beta} a_{2\alpha}^{ij} a_{\beta 2}^{ij} \int_{-a_\gamma}^{a_\gamma} G_{\alpha\beta}^{(\tau,\sigma)}(\bar{x}_{ij} - \xi, \bar{y}_{ij}) q_{N_i}(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} Asss_{ij} &= \sum_{\gamma, i \in E_\gamma} \sum_{\alpha, \beta} a_{2\alpha}^{ij} a_{\beta 1}^{ij} \int_{-a_\gamma}^{a_\gamma} G_{\alpha\beta}^{(\tau,\sigma)}(\bar{x}_{ij} - \xi, \bar{y}_{ij}) q_{N_i}(\xi) d\xi, \\ Aunn_{ij} &= \sum_{\gamma, i \in E_\gamma} \sum_{\alpha} a_{2\alpha}^{ij} \int_{-a_\gamma}^{a_\gamma} G_{\alpha}^{(n,u)}(\bar{x}_{ij} - \xi, \bar{y}_{ij}) q_{N_i}(\xi) d\xi, \\ Asnu_{ij} &= \sum_{\gamma, i \in E_\gamma} \sum_{\alpha} a_{1\alpha}^{ij} \int_{-a_\gamma}^{a_\gamma} G_{\alpha}^{(n,u)}(\bar{x}_{ij} - \xi, \bar{y}_{ij}) q_{N_i}(\xi) d\xi, \\ Assn_{ij} &= \sum_{\gamma, i \in E_\gamma} \sum_{\alpha} a_{2\alpha}^{ij} \int_{-a_\gamma}^{a_\gamma} G_{\alpha}^{(\tau,u)}(\bar{x}_{ij} - \xi, \bar{y}_{ij}) q_{N_i}(\xi) d\xi, \\ Asss_{ij} &= \sum_{\gamma, i \in E_\gamma} \sum_{\alpha, \beta} a_{2\alpha}^{ij} a_{\beta 1}^{ij} \int_{-a_\gamma}^{a_\gamma} G_{\alpha}^{(\tau,u)}(\bar{x}_{ij} - \xi, \bar{y}_{ij}) q_{N_i}(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}$ – координаты j -го узла в системе координат, связанной с γ -м элементом; $G_{\alpha\beta}^{(n,\sigma)}, G_{\alpha}^{(n,u)}$ – функции влияния соответственно для тензора напряжений и вектора перемещений фундаментальных решений при действии нормальной нагрузки [1-4]; $G_{\alpha\beta}^{(\tau,\sigma)}, G_{\alpha}^{(\tau,u)}$ – функции влияния соответственно для тензора напряжений и вектора перемещений фундаментальных решений при действии касательной нагрузки [1-4]; N_i – номер i -го узла в соответствующем

элементе, $a_{\alpha\beta}^{\gamma j}$ – компоненты матрицы перехода от системы координат связанной с γ -м элементом к системе координат, связанной с i -м узлом.

Реализация МГЭ была произведена на языке программирования C++ в программной среде Visual Studio 2010. При этом процедуры расчета коэффициентов влияния граничных элементов друг на друга, решения системы линейных алгебраических уравнений, а также расчета компонент напряженно-деформированного состояния были распараллелены с помощью технологии CUDA.

Результаты расчетов. Рассмотрим сначала результаты расчетов на основе приведенной схемы МГЭ применительно к одной из проблемных задач МГЭ, задаче консольного изгиба балки. Схема задачи приведена на рисунке 1.

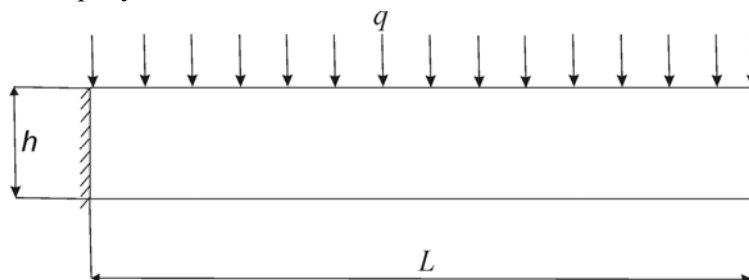


Рисунок 1 – Схема задачи о нагружении консольной балки равномерной нагрузкой

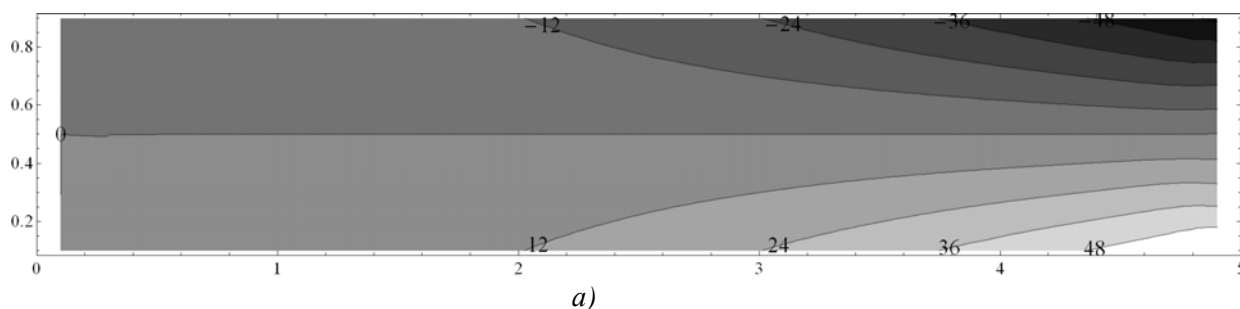
Расчеты проводились для следующих значений параметров модели: $L = 5$ м, $h = 1$ м, $q = 1$ Н/м², $E = 1$ МПа, с использованием элементов с как квадратичным, так и с равномерным распределением нагрузки. На рисунках 2-3 приведены некоторые результаты расчета в виде как собственно распределений напряжений и перемещений, так и распределений погрешностей расчета (в том числе средних, см, таблицу 1) по отношению к результатам, полученным исходя из балочной теории, вычисляемых по следующей формуле:

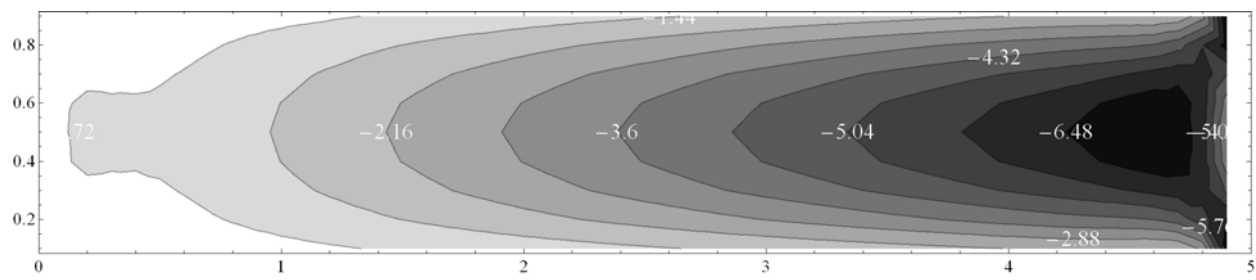
$$errK_i = \frac{K_i - K_i^{an}}{\max\left(\left|K_i^{an}\right|\right)_i}, \quad (7)$$

где K_i – расчетная величина компоненты в i -ой точке; K_i^{an} – величина компоненты, рассчитанная на основании балочной теории; $\max\left(\left|K_i^{an}\right|\right)_i$ – максимум модуля компоненты, рассчитанный на основе балочной теории. При расчетах балка разбивалась элементами с одинаковой длиной, равной 1/32 м.

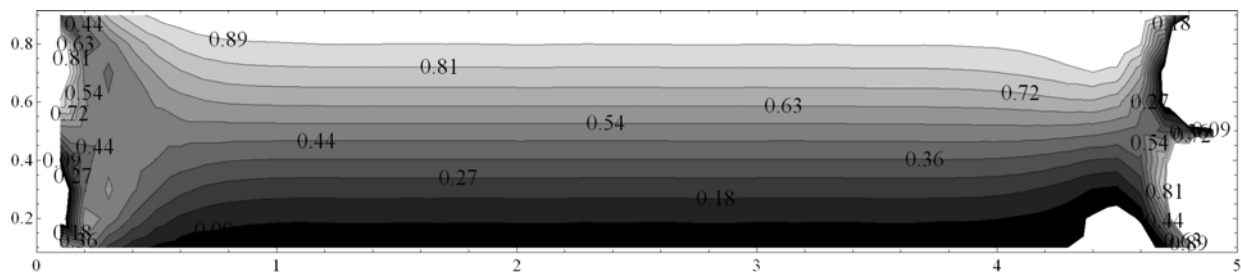
Таблица 1– Данные по средней погрешности при равномерном нагружении и $L = 5$ м

Тип элементов	Средние погрешности по компонентам		
	$\Delta\sigma_{xx}$	$\Delta\sigma_{xy}$	Δu_y
Квадратичные элементы	0.031313	0.0683885	0.0314232
Равномерные элементы	0.0850076	0.092198	0.281024

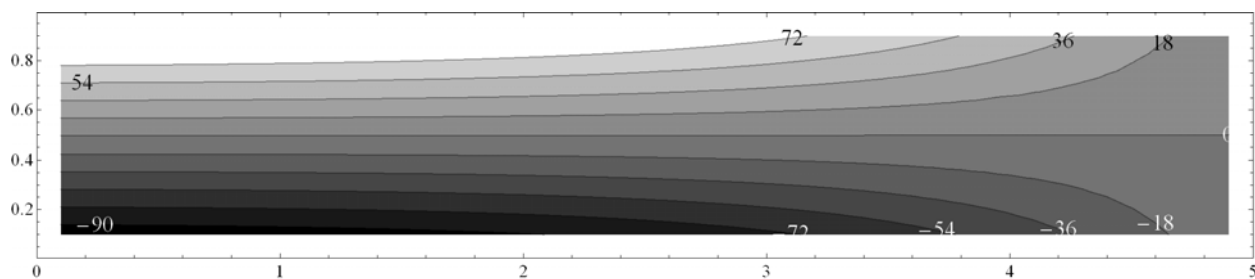




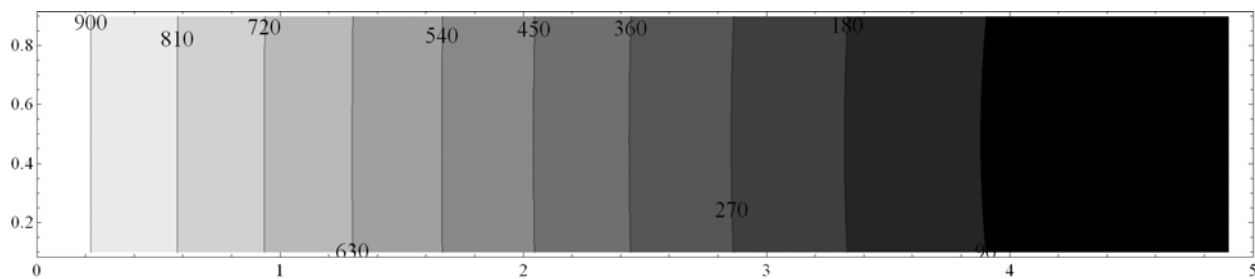
б)



в)

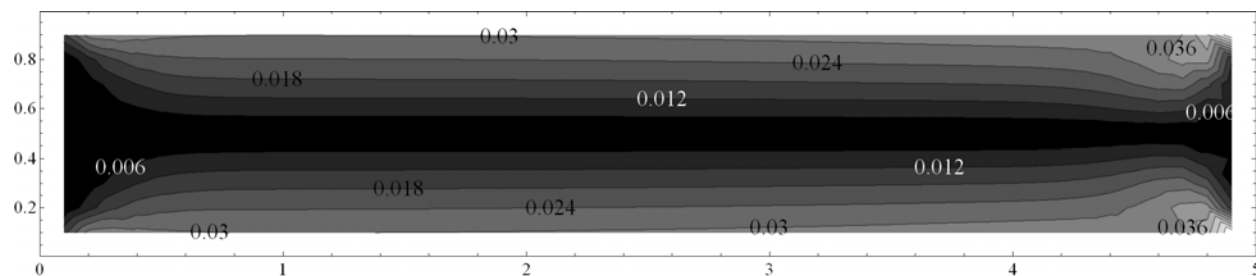


г)



д)

Рисунок 2 – Компоненты НДС: а) σ_{xx} (Па), б) σ_{xy} (Па) в) σ_{yy} (Па), г) u_1 (м) д) u_2 (м)



а)

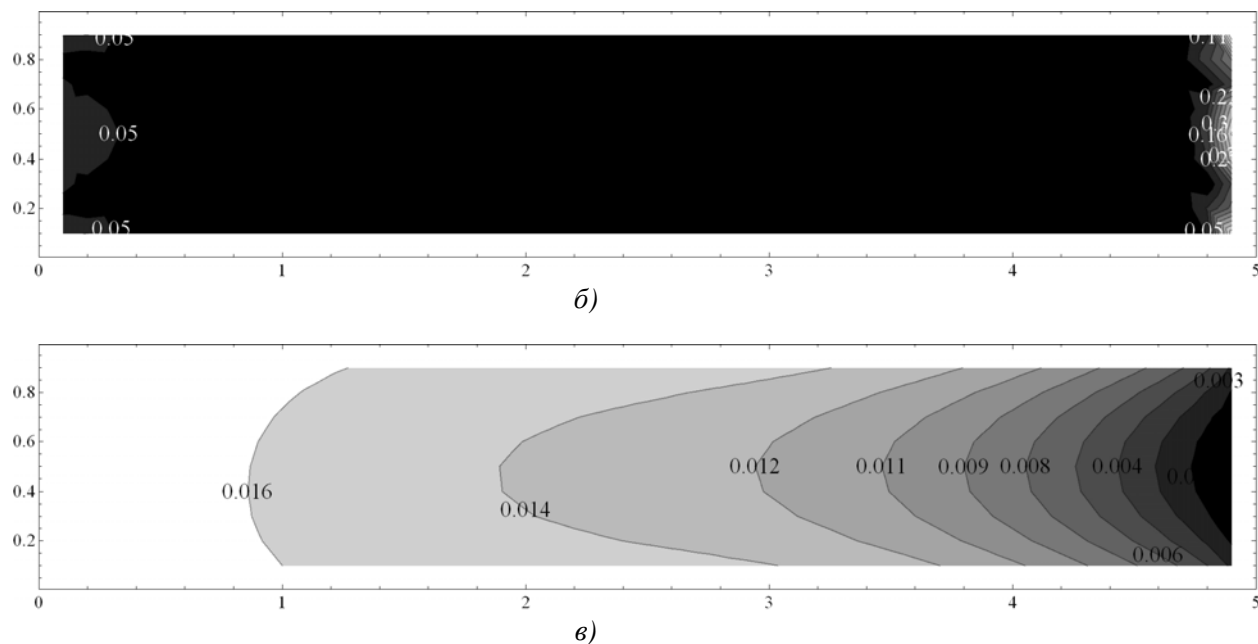


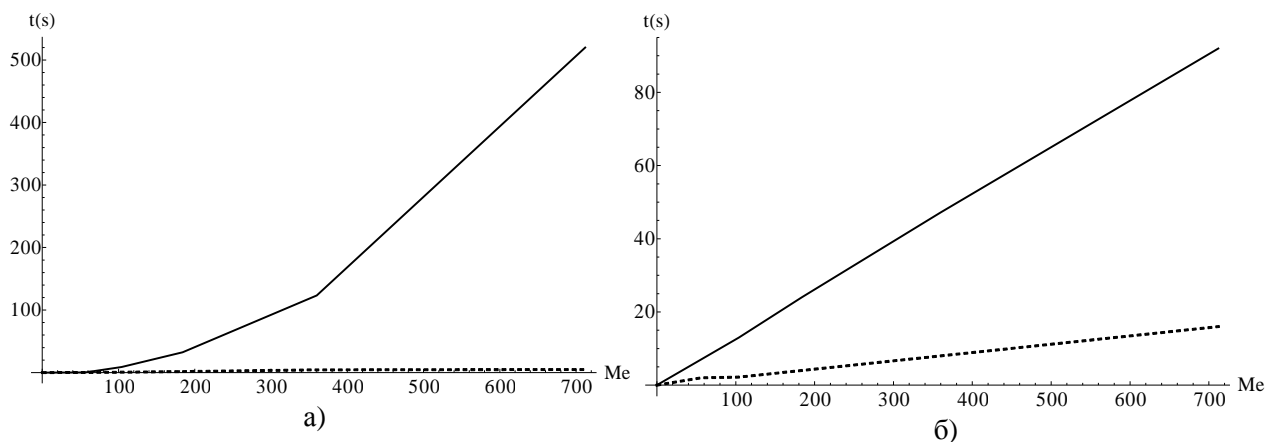
Рисунок 3 – Относительные погрешности компонент НДС по сравнению с решением по балочной теории а) σ_{xx} б) σ_{xy} в) u_2

Анализ рисунков 2 и таблицы 1 показывает, что при использовании элементов с квадратичным распределением усилий погрешность вычислений прогиба значительно ниже (максимальная примерно 4%, средняя 3%) чем при использовании элементов с равномерным распределением усилий (максимальная погрешность примерно 70%, средняя 28%).

На рисунке 4 показаны графики, показывающие эффективность распараллеливания на графические процессоры для различных процедур: сборка матрицы взаимовлияния элементов, вычисление напряжений и перемещений в расчетных точках, решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Пунктирными линиями показаны данные, соответствующие распараллеленным процедурам, а сплошными – нераспараллеленным.

Для расчетов использовался процессор Intel Core i7 2400 ГГц и видеокарта GeForce 660.

Анализ рисунков 4 показывает, что время параллельного расчета сокращается для больших граничноэлементных сеток в 10-100 раз по сравнению с расчетом на одном ядре. Особенно явно это проявляется для наиболее продолжительной процедуры сборки матрицы, для которой время вычислений сокращается более чем в сто раз. Данные результаты свидетельствуют о высокой эффективности распараллеливания гранично-элементных вычислений.



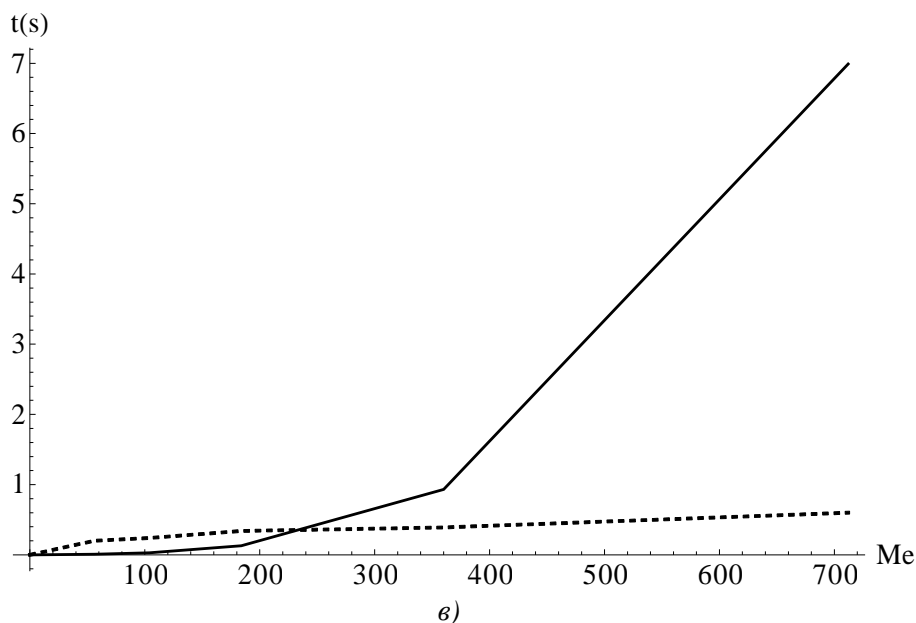


Рисунок 4 – Время а) сборки матрицы взаимовлияний, б) вычисления НДС в расчетных точках, в) решения СЛАУ в зависимости от числа граничных элементов Me

Заключение. Приведена реализация метода граничных элементов на основе схемы с квадратичным распределением поверхностных усилий. Полученные оценки погрешности результатов численного моделирования в сравнении с балочной теорией свидетельствуют о его хорошем соответствии аналитическому расчету. Приведены результаты распараллеливания вычислений на основе технологии CUDA. Показано значительное сокращение (до 100 раз) времени численного моделирования, что свидетельствует об эффективности предложенных расчетных схем.

РЕЗЮМЕ

В работе представлена реализация алгоритмов для метода граничных элементов с использованием элементов с квадратичным распределением нагрузки. Представлены результаты распараллеливания алгоритмов на графические процессоры с использованием технологии CUDA. Приведены примеры расчетов. Показана высокая эффективность распараллеливания вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджт, Р. Баттерфилд – М:Мир, 1984. – 494 с.
2. Брэббия, К. Метод граничных элементов/ К. Брэббия [и др.] – М:Мир, 1987. – 524 с.
3. Крауч, С Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд – М:Мир, 1987. – 328 с.
4. Beer, G. Boundary element method with programming / G. Beer, I. Smith, Duenser C. – Springer, 2008. – 494 p.
5. http://www.nvidia.ru/object/cuda_home_new.html

SUMMARY

Realization of the boundary element method based on using the elements with quadric distribution of tractions is presented in the paper. The results of parallelizing of algorithms using CUDA technology are given. Examples of calculations are presented. High efficiency of calculations parallelizing is shown.

Поступила в редакцию 16.10.2013

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ АВТОМОБИЛЬНЫХ РЕССОР

д. ф.-м. н. **Василевич Ю.В.**, асп. **Томило Е.В.***Белорусский национальный технический университет, Минск*

Введение. Автомобильная промышленность и сельхозмашиностроение являются одними из основных потребителей металлопроката, причем более 300 тыс. тонн проката высокого качества идет на конструктивные элементы подвески, что составляет около 20 % от годовой потребности в прокате. До 10 % импортируемого металлопроката приходится на рессорно-пружинные стали, используемые для изготовления упругих элементов подвески. Подвеска с листовыми рессорами применяется практически на всех зарубежных и отечественных грузовых автомобилях, прицепах и автобусах, а также на ряде легковых автомобилей. Положительными качествами такой подвески является простота, относительно низкая стоимость и малая трудоемкость изготовления и обслуживания. К существенным недостаткам ее следует отнести большую массу упругого элемента и в ряде случаев недостаточную его долговечность. Поэтому уменьшение металлоемкости листовых рессор и увеличение их долговечности является одной из наиболее актуальных задач в автомобилестроении.

Рессорные стали. Для изготовления рессор используют углеродистые и легированные стали, упрочняемые деформационным наклепом и термообработкой с мартенситным превращением. Так, кремнистая (60С2А) сталь перлитного класса, упрочняемая мартенситным превращением, имеет невысокий предел упругости, недостаточную релаксационную стойкость и длительную прочность, склонна к обезуглероживанию, росту зерна и обладает низкой прокаливаемостью. Такой комплекс свойств обусловлен химическим составом стали, в т.ч. наличием значительного количества кремния.

Хромомарганцевые стали (50ХГ) обладают лучшими технологическими свойствами. Совместное легирование хромом и марганцем сильно повышает прочностные характеристики стали при незначительном изменении пластических свойств. Добавка ванадия в хромомарганцевую сталь (50ХГФА) уменьшает ее чувствительность к перегреву, повышает устойчивость стали к отпуску за счет снижения коагуляции карбидной фазы. В результате сталь при высокой твердости обладает значительными пределами прочности, пропорциональности и упругости при повышенной пластичности.

Помимо варьирования химического состава стали, улучшения свойств изделий достигают применением различных способов термообработки. Стандартная термообработка пружинных сталей заключается в закалке в воду или масло и последующем отпуске. Температуру закалки и среду охлаждения выбирают в зависимости от марки стали. Отпуск, как правило, проводят в районе 400–500 °С на твердость 35–45HRC, что соответствует 1300–1600 МПа. После закалки микроструктура стали состоит из мелкокристаллического мартенсита и (или) бейнита твердостью 58–62HRC. После отпуска твердость должна составлять не более 269 НВ, микроструктура — бейнит и карбиды. Изотермическая закалка на нижний бейнит может обеспечить повышение сопротивления динамическому воздействию, повысить пластичность и вязкость материала. Так, после изотермической закалки стали 60С2А с выдержкой при 320 °С предел пропорциональности составляет 142 кг/мм² (1390 МПа). Если после изотермической закалки проводить дополнительный отпуск значення предела пропорциональности и упругости повышаются.

Расчетный метод определения ресурса автомобильных рессор. Методы расчета рессоры как балки равного сопротивления дают возможность проектировать их с требуемой статической прочностью. Такие расчеты предполагают наличие постоянных напряжений в упругом элементе при нагружении в процессе эксплуатации. В автомобильных рессорах при работе наблюдаются непрерывно изменяющиеся практически случайным образом напряжения. И при эксплуатации, напряжения в упругом элементе могут не достигнуть предела прочности, не превзойти предел текучести для материала рессоры, однако спровоцировать поломку упругого элемента, обусловленную недостаточной усталостной прочностью. Разрушение может возникнуть вследствие превышения некоторого уровня напряжений S_r . В этом случае в рессорном листе образуется накопление усталостных повреждений. Зачастую на практике за уровень S_r принимают максимальные напряжения ассиметричного цикла полученного с использованием схематизированной диаграммы предельных напряжений.

Таким образом, для снижения вероятности поломок упругих элементов, необходимо при проектировании рассчитывать их на усталостную долговечность.

Установлено, что при движении автомобиля с постоянной скоростью по однотипной дороге, случайная функция динамических напряжений

$$\sigma(t) = S(t) - S_{cp} \quad (1)$$

является стационарной, обладает эргодическим свойством и её мгновенные значения распределены по нормальному закону [1]. При этом уровень

$$S_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt \quad (2)$$

приблизительно равен напряжениям в рессоре при статическом нагружении

$$S_{cp} \approx \sigma_c. \quad (3)$$

Основываясь на гипотезе линейного суммирования повреждений, можно рассчитать долговечность рессоры

$$L_{\Pi} = \frac{v T_e D_{\sigma} N_0 \sigma_r^m}{3600 \int_{\chi}^{\infty} \sigma^{m+1} e^{-\frac{\sigma^2}{2D_{\sigma}}} d\sigma}, \quad (4)$$

где v – скорость движения автомобиля; T_e – эффективный период изменения динамических напряжений;

$$T_e = 2\pi \sqrt{D_{\sigma} / D_{\dot{\sigma}}}; \quad (5)$$

D_{σ} и $D_{\dot{\sigma}}$ – дисперсии соответственно случайной функции динамических напряжений и её производной; N_0 , σ_r и m – соответственно число циклов в точке перегиба, предел выносливости и показатель кривой выносливости при заданных средних напряжениях в рессоре; $\sigma_r^m N = \sigma^m N = const$;

$$\chi = \frac{\sigma_r}{\sqrt{D_{\sigma}}}; \quad (6)$$

После преобразований получили окончательную формулу для расчёта долговечности рессоры

$$L_{\Pi} = \frac{2\pi N_0 \chi^m v}{\omega_0 \psi(m+2) P(\chi^2; m+2) 3600}, \quad (7)$$

где $\psi(m+2)$ – нормировочная постоянная распределения Пирсона; $P(\chi^2; m+2)$ – функция χ^2 распределения Пирсона.

Долговечность рессоры в смешанных условиях эксплуатации автомобиля устанавливают по предельным долговечностям в каждом конкретном условии эксплуатации L_1, L_2, \dots, L_n и по продолжительности работы автомобиля $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в тех же условиях, выраженной в долях общего пробега L . Тогда

$$L = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{L_i}}. \quad (8)$$

Помимо приведенной методики расчёта долговечности упругих элементов существуют методики проверочного расчёта, которые отличаются способом систематизации нагруженного режима, получаемого при испытаниях готового автомобиля (работы А.М. Горелика, С.В. Серенсена и др.).

Ресурсные испытания рессор автомобильных транспортных средств проводятся в соответствии с ГОСТ Р 51585-2000.

Стенды для ресурсных испытаний, состоящие из: механизма, обеспечивающего циклические прогибы рессор; механизма нагружения рессор для создания предварительной деформации; устройства для изменения хода; устройства для охлаждения рессор воздухом; счетчика числа циклов.

Рекомендуется применять устройство для принудительной остановки стенда при достижении заданного числа циклов или времени, а также устройства для контроля жесткости рессор без снятия их со стенда. Мощность стенда и диапазон возможных ходов и частот выбирают в зависимости от типа испытываемых рессор. Установка для определения упругой характеристики рессоры состоит из пресса, обеспечивающего нагружение рессоры. Она должна иметь системы измерения деформации и нагрузки, обеспечивающие точность измерения $\pm 1\%$.

Схема испытаний на подвижных тележках представлена на рисунке 1. При наличии скользящего конца тележки жестко связывают между собой штангой 1. Длина штанги $L_{ш}$ равна рас-

стоянию между кронштейнами в реальной подвеске. Для рессор со скользящими концами (нижняя схема на рисунке 1) рекомендуется жесткое крепление в центре. Деформацию рессоры измеряют как при нагрузке, так и при разгрузке.

По данным испытаний строят график упругой характеристики рессоры (рисунок 1), на котором на участке ± 25 мм от прогиба, соответствующего статической нагрузке, между линиями нагрузки и разгрузки проводят среднюю линию, соответствующую упругой характеристике рессоры при отсутствии трения.

Жесткость рессоры при статической нагрузке определяют отношением приращения нагрузки по средней линии характеристики при прогибе ± 25 мм от положения, соответствующего статической нагрузке, к значению этого прогиба. Режим ресурсных испытаний рессор задают следующими параметрами: ходом станда S , равным удвоенной амплитуде деформации рессоры; минимальной деформацией рессоры $f_{п}$ (поджатие рессоры), равной разнице между деформацией рессоры при статической нагрузке $f_{п}$ и амплитудой деформации рессоры $S/2$.

Деформацию рессоры при статической нагрузке определяют по упругой характеристике рессоры с заделкой как расстояние от оси ординат до точки пересечения средней линии упругой характеристики с горизонтальной линией, соответствующей статической нагрузке. Ход станда S определяют из условий, что амплитуда изменения напряжений σ_a при испытаниях многоресорных рессор в заделке равна ± 3000 даН·см⁻².

Многоресорные рессоры, напряжения которых при статической нагрузке менее 3000 даН·см⁻², испытывают при пульсирующем цикле, т.е. при нулевом напряжении в рессоре и амплитуде 3000 даН·см⁻². При испытаниях малоресорных рессор допускается амплитуда напряжений ± 4500 даН·см⁻². Для рессор, напряжение которых при статической нагрузке более 6000 даН·см⁻², амплитуду напряжений при испытаниях допускается уменьшать

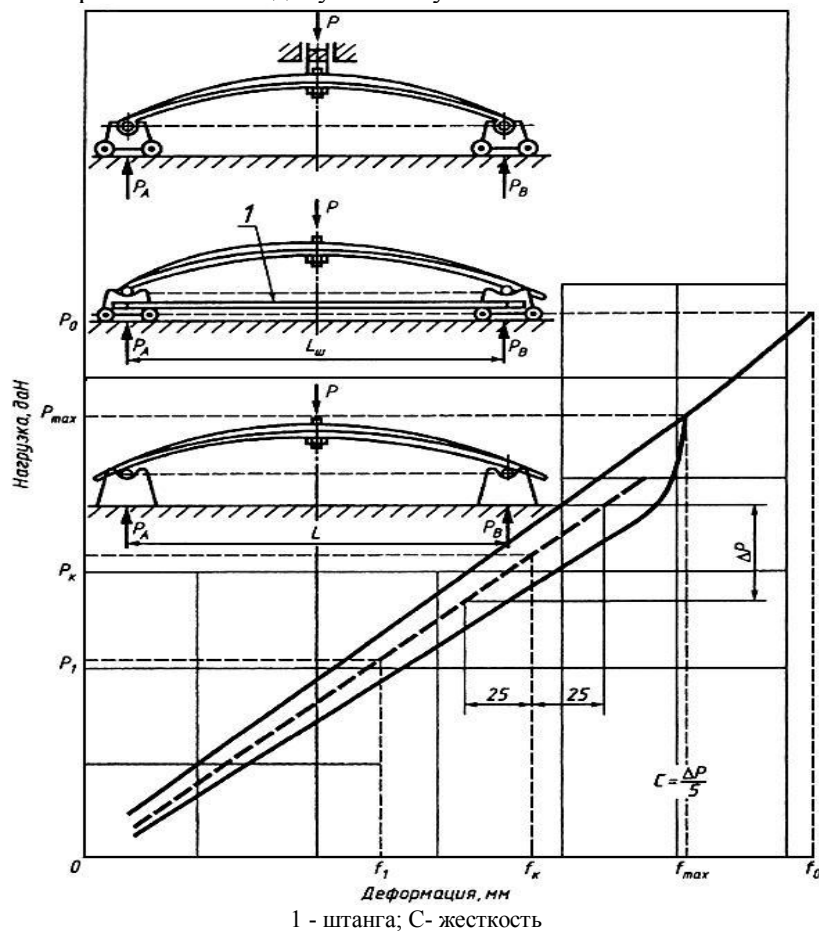


Рисунок 1. – Схема испытаний на подвижных тележках

При испытаниях малоресорных рессор допускается амплитуда напряжений ± 4500 даН·см⁻². Для рессор, напряжение которых при статической нагрузке более 6000 даН·см⁻², амплитуду напряже-

ний при испытаниях допускается уменьшать.

Ход стэнда S рассчитывают по формуле

$$S = \frac{2\sigma_\alpha}{\sigma_\gamma}, \quad (9)$$

где $\sigma_\gamma = \frac{C_\alpha}{K}$ – изменение напряжения при прогибе рессоры на 1 см, даН · см⁻³; C_α – жесткость рессоры в заделке при статической нагрузке, даН · см⁻¹; K – коэффициент, зависящий от конструкции рессоры. Для полуэллиптической несимметричной рессоры

$$K = \frac{L}{L_A L_B} \sum \bar{W}_i, \quad (10)$$

для полуэллиптического симметричного упругого элемента

$$K = \frac{4}{L} \sum \bar{W}_i, \quad (11)$$

где $\sum \bar{W}_i$ – момент сопротивления рессоры; $L = L_p \sqrt[3]{\frac{C}{C_\alpha}}$ – длина рессоры с учетом заделки; $L_A = L_{Ap} \frac{L_p - L}{2}$ – длина переднего конца рессоры; $L_B = L_{Bp} \frac{L_p - L}{2}$ – длина заднего конца рессоры; L_p, L_{Ap}, L_{Bp} – расчетные длины без учета заделки соответственно рессоры, ее переднего и заднего концов; C, C_α – жесткость рессоры, соответственно с заделкой и без нее.

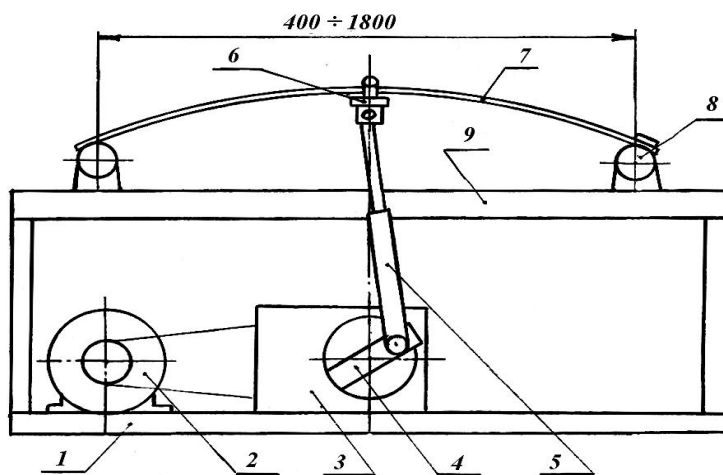
Усилия от ползуна стэнда к заделке рессоры передают: для несимметричных рессор и рессор с различной конструкцией концов – через подшипниковое устройство (нагрузочная штанга, подшипники качения и т.п.), обеспечивающее угловое перемещение рессоры; для симметричных рессор с одинаковой конструкцией концов допускается жесткое крепление к ползуну. Установленную на стэнд рессору подвергают предварительной деформации – поджатию рессоры.

Для оценки эффективности различных вариантов и режимов формирования усталостной прочности разработана методика сравнительных испытаний образцов, подвергнутых разным видам обработки. Суть методики состоит в сравнении числа одинаковых по амплитуде циклов нагружения путем изгиба заготовок, подвергнутых упрочнению, до их разрушения [2]. Эффективность упрочнения определяется уравнением

$$K_\alpha = n_y / n_n. \quad (12)$$

где n_y – число циклов нагружения до разрушения упрочненного образца; n_n – число циклов нагружения до разрушения образца, термообработанного по стандартному режиму, рекомендованному для данной марки стали.

В процессе выполнения работ был выбран стэнд для испытаний плоских упругих элементов на циклическую прочность. Принципиальная схема стэнда представлена на рисунке 2, внешний вид – на рисунке 3.



1 – основание; 2 – электродвигатель; 3 – редуктор; 4 – кривошип; 5 – шатун; 6 – захват; 7 – упругий элемент; 8 – вращающиеся опоры; 9 – рама
Рисунок 2. – Принципиальная схема стэнда

Стенд включает основание 1, на котором установлены электродвигатель 2 и соединенный с ним через клиноременную передачу редуктор 3. На выходном валу редуктора закреплен кривошипно-шатунный механизм, причем как кривошип 4, так и шатун 5 имеют возможность регулировки по длине. На свободном конце шатуна через вращающуюся опору размещен захват 6, действующий в процессе испытаний на упругий элемент 7. Упругий элемент установлен на вращающихся опорах. К одной из опор испытываемый элемент крепится жестко, на второй размещен свободно. Вращающиеся опоры закреплены на раме 9, установленной на основании. Конструкция кривошипно-шатунного механизма стенда позволяет за счет изменений длины кривошипа плавно изменить амплитуду нагружения от 0 до 150 мм. Изменение длины шатуна позволяет производить предварительную подгрузку испытываемого элемента на величину от 0 до 40 мм. Перемещение вращающихся опор позволяет испытывать образцы длиной от 400 до 1800 мм. Испытания проводили с частотой 0,9 Гц. Стенд снабжен электронно-механическим счетчиком числа циклов нагружения и механизмом автоматического отключения при разрушении испытываемого образца.

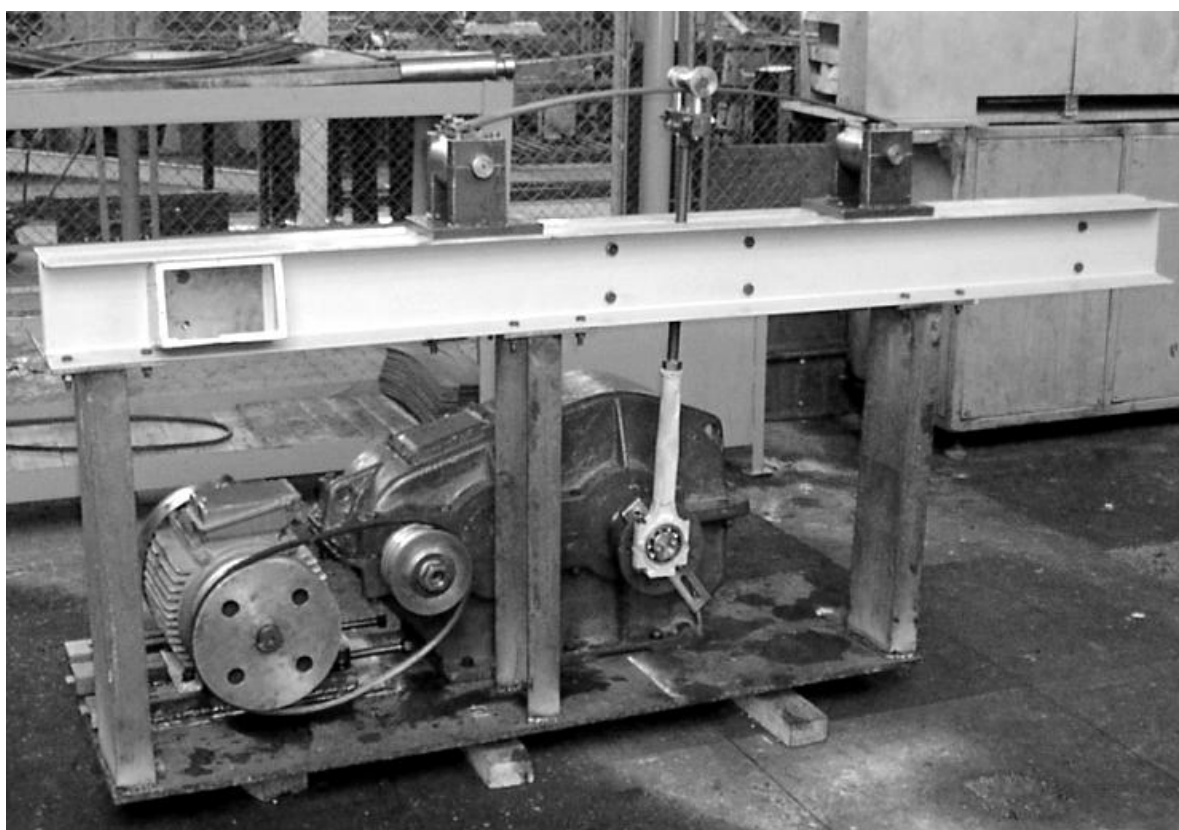


Рисунок 3. — Испытательный стенд

Сравнительным стендовым испытаниям подвергнуты листы рессоры из стали 50ХГФА с различными режимами термообработки и упрочнением поверхности. Установлено, что оптимизация термообработки позволяет повысить ресурс на 25...30%, а дробеструйное упрочнение до 40%. Рессора в сборе имеет ресурс на 30...40% ниже, чем ее отдельные листы, что можно объяснить негативным влиянием межлистового трения.

Выводы. Представленные аналитические зависимости позволяют оценить ресурс рессор в зависимости от их прочностных характеристик и условий эксплуатации. Основное влияние на долговечность рессор оказывает тип и состояние дорожного покрытия. Качественное асфальтобетонное покрытие обеспечивает увеличение ресурса рессор до десяти раз. Стендовые испытания представляют интерес, в первую очередь, для результатов, полученных при сравнительных испытаниях, и не отражают реальную долговечность рессор при эксплуатации автомобиля.

РЕЗЮМЕ

В статье представлены аналитические зависимости, позволяющие оценить долговечность рессор. Описаны основные факторы, оказывающие влияние на ресурс плоских упругих элементов. Приведены методики ресурсных испытаний, оборудование для их проведения, материалы и основные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пархиловский И.Г. Автомобильные листовые рессоры. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.
2. Перспективные материалы и технологии / Под редакцией В.В. Клубовича – Витебск: Изд-во УО «ВГТУ», 2013. – 655с. – Глава 18. Аналитический расчёт и компьютерное моделирование напряжённо-деформированного состояния листовых рессор // Клубович В.В., Василевич Ю.В., Томило Е.В., Игнатков Д.А. – с.356–389
3. Василевич, Ю.В. Моделирование напряжённо-деформированного состояния упругих элементов при больших деформациях / Ю.В. Василевич, В.В. Левкович, Е.В. Томило // Современные методы и технологии создания и обработки материалов: VII Междунар. науч.-техн. конф. (Минск, 19-21 сентября 2012 г.): сб. материалов. В 3 кн. Кн. 3. Технологические процессы обработки металлов давлением, получения материалов с применением технологий литья. – Минск: ФТИ НАН Беларуси, 2012. – С.215-221.
4. Клубович, В.В. Технологии и обработки специальных периодических профилей: монография / В.В. Клубович, В.А. Томило. – Минск: БНТУ, 2007. –298 с.
5. Томило Е.В. Влияние скорости нагружения на особенности деформирования листа переменного сечения / Сборник тезисов докладов международной научно-технической конференции молодых учёных «Новые материалы, оборудование и технологии в промышленности» Могилёв: Белорус.-Рос. ун-т, 2011. – 290 с.
6. Безухов, Н. И. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач / Н. И. Безухов, О. В. Лужин. М. : Высш. шк., 1974.-200 с.
7. Писаренко, Г.С. Сопrotивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Агарёв, А.Л. Квитка, В.Г. Попков, Э.С. Уманский. Киев. Вища школа, 1986. - С. 458 - 461.

SUMMARY

The paper presents the analytical dependencies for service life evaluation of springs. The main factors influencing the endurance of the plane elastic elements are described. The operational life testing methods, equipment to carry them out, materials and basic results are presented.

Поступила в редакцию 04.10.2013

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ ТРУБЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВк.т.н.¹ Шилько С.В., н.с.¹ Рябченко Т.В., н.с.¹ Петроковец Е.М., мл. н.с.¹ Башлакова А.Л.,к.т.н.² Кропотин О.В.¹*Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого, Гомель*²*Омский государственный технический университет, Омск*

Введение. Методы расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций из композитов должны учитывать специфику деформирования и разрушения указанных неоднородных и, как правило, физически нелинейных материалов. Так, полимерные композиты, широко используемые при изготовлении трубчатых элементов (муфт, фитингов, участков трубопроводов, оправок и т.д.), характеризуются большими (конечными) упругими деформациями и ярко выраженными вязкоупругими свойствами, что проявляется в виде ползучести и релаксации.

В ряде случаев вязкоупругие эффекты положительно влияют на прочность трубчатых элементов. Так, релаксация способствует снижению нагруженности последних, обеспечивая выравнивание объемных и контактных напряжений, вызванных осевыми гидродинамическими нагрузками и смещениями опорной поверхности, монтажными усилиями и начальными перекосами, а также термическими деформациями при воздействии теплоносителя.

С другой стороны, вязкоупругость полимерных материалов приводит к негативным явлениям: возникновению динамических усилий из-за появления несоосности вращающихся валов; нарушению прочности и герметичности трубных соединений, получаемых напрессовкой или термоусадкой соединительных муфт; появлению натяга в соединении вала с оправкой при намотке на нее пленки или нитей, и т.д. Прогнозировать уровень напряжений и деформаций в с учетом вязкоупругости необходимо также для оптимизации состава полимерных композитов исходя из противоречивых требований к прочности и деформативности. К примеру, армирующий эффект относительно жестких наполнителей (например, высокомодульных углеродных волокон) способствует уменьшению деформаций ползучести, но одновременно снижает гибкость трубопровода, что затрудняет его монтаж.

В этой связи в статье разрабатывается комплексный подход к оценке прочности и деформативности полимерных трубчатых конструкций, включающий испытания их фрагментов на статическое сжатие и релаксацию с последующим конечноэлементным расчетом параметров НДС в условиях осевого сжатия, бокового обжатия и сжатия с кручением.

Экспериментальное исследование. Особенностью механических испытаний полимерных материалов является выраженная зависимость результатов измерения от условий нагружения, а также необходимость проведения весьма длительных (в течение нескольких месяцев и даже лет) экспериментов на ползучесть и релаксацию [1-3]. Для оперативного получения информации о вязкоупругих свойствах на современном высокоточном автоматизированном оборудовании (например, машинах Instron, Zwick и т.п.) целесообразно проводить испытания фрагментов исследуемых натуральных трубчатых изделий на кратковременную (продолжительностью несколько часов) релаксацию при осевом сжатии. В этом случае напряженное состояние указанных фрагментов достаточно близко соответствует состоянию одноосного сжатия, реализуемого в стандартном образце цилиндрической формы при определении механических характеристик по ГОСТ 4651-82 [4]. Важно, что при испытании на релаксацию привод автоматизированной испытательной машины механического типа работает в облегченном режиме по сравнению с испытаниями на ползучесть.

В настоящей работе механические испытания проводили на машине Instron 5567 с программным обеспечением Merlin; в качестве образцов использовали трубчатые заготовки с наружным диаметром 140 мм, внутренним диаметром 114 мм и высотой 30 мм из углепластика Флувис на основе материала фторопласт-4, армированного неориентированными короткими волокнами (рисунок 1а), а также фрагменты шпульт из различных термопластов (рисунок 2а). Помимо регистрации перемещений штатным экстензометром, производилось измерение осевых деформаций на поверхности образца при помощи тензостанции TS-32 (ИПФ НАН Беларуси). Тензодатчики подключались по четвертьмостовой схеме и, как показано на рисунке 1б, размещались в направлении оси вращения образца и окружном направлении симметрично по высоте, чтобы исключить краевой эффект. Компенсационный датчик устанавливался на стандартном цилиндрическом образце

из аналогичного материала. Для минимизации неоднородности напряженно-деформированного состояния образец позиционировали по способу [5].

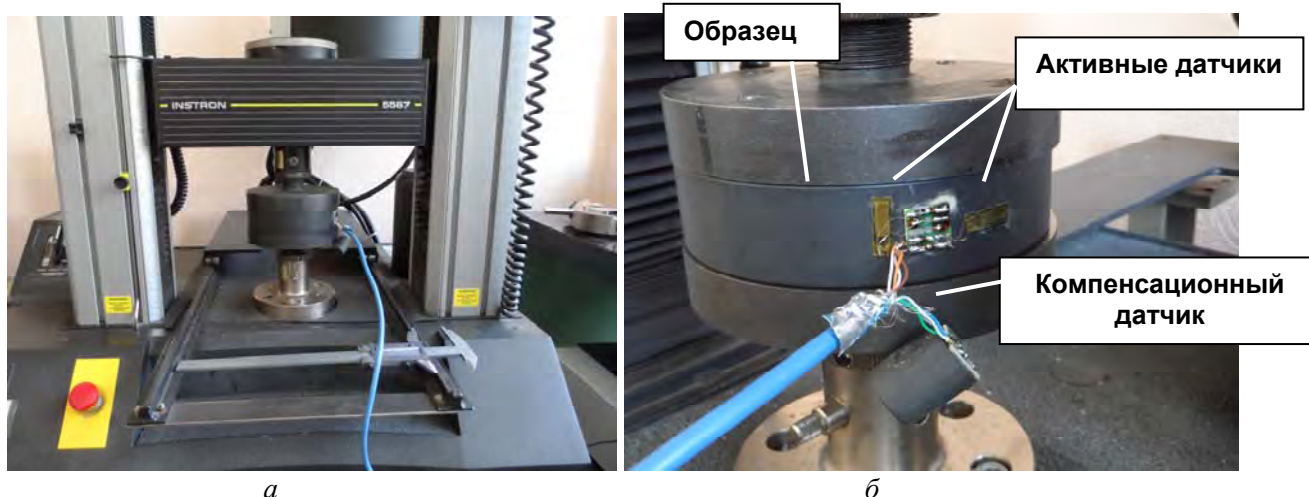


Рисунок 1 – Испытание композитной трубы на релаксацию при осевом сжатии: а) способ нагружения образца на машине Instron 5567; б) размещение датчиков деформации.

Оценка корректности испытаний трубчатых образцов на осевое сжатие. При существенных различиях диаграмм $\sigma - \epsilon$, полученных при осевом сжатии фрагментов шпульт из 5-ти материалов (рисунок 2а), очевидна возможность корректного определения модуля упругости и коэффициента Пуассона на участках линейно-упругого деформирования. Для оценки краевого эффекта и последующего анализа НДС трубчатых элементов при различных условиях нагружения были построены их конечноэлементные модели (например, модель осевого нагружения заготовки из углепластика Флувис показана на рисунке 2б).

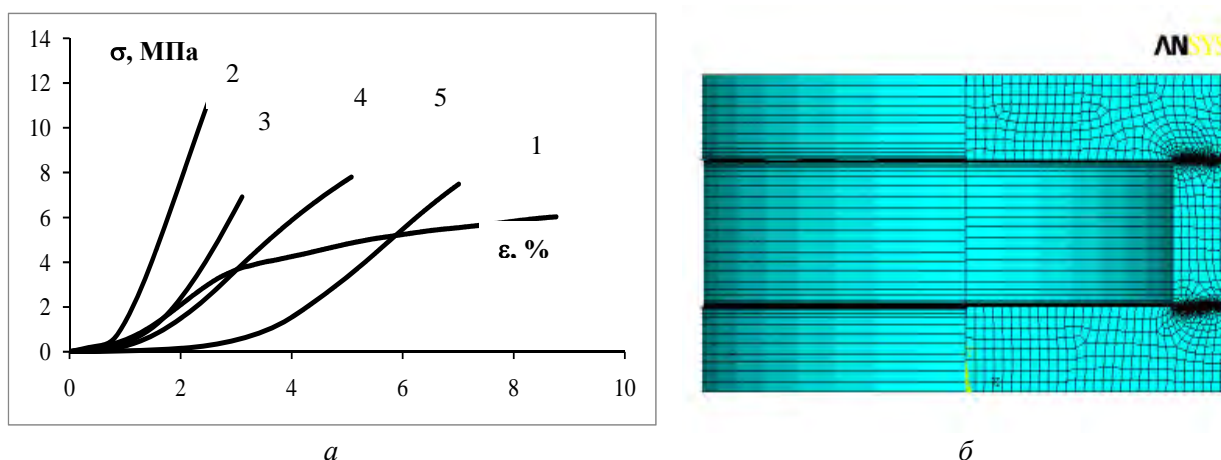


Рисунок 2 – Зависимости «напряжение (МПа) – деформация (%)» для фрагментов шпульт в виде цилиндрических колец (а) и конечноэлементная модель трубчатого элемента, сжимаемого опорными плитами испытательной машины (б).

В предположении линейно-упругого деформирования с учетом трения в контакте образца с опорными плитами были вычислены осевые перемещения (осадка), а также распределения внутренних и контактных напряжений (рисунок 3). Сопоставление расчетного и экспериментального значений осадки показало, что их различие не превышает 24%. При использованном соотношении высоты и толщины стенок образцов, а также низком коэффициенте трения углепластика по стали, (примерно 0,1), можно считать НДС образца одноосным, за исключением приконтактных зон (рисунок 3). Погрешность расчета в сторону занижения перемещений обусловлена пластическими деформациями в локальной краевой зоне образца и шероховатостью контактирующих поверхностей, что не учитывалось в модели.

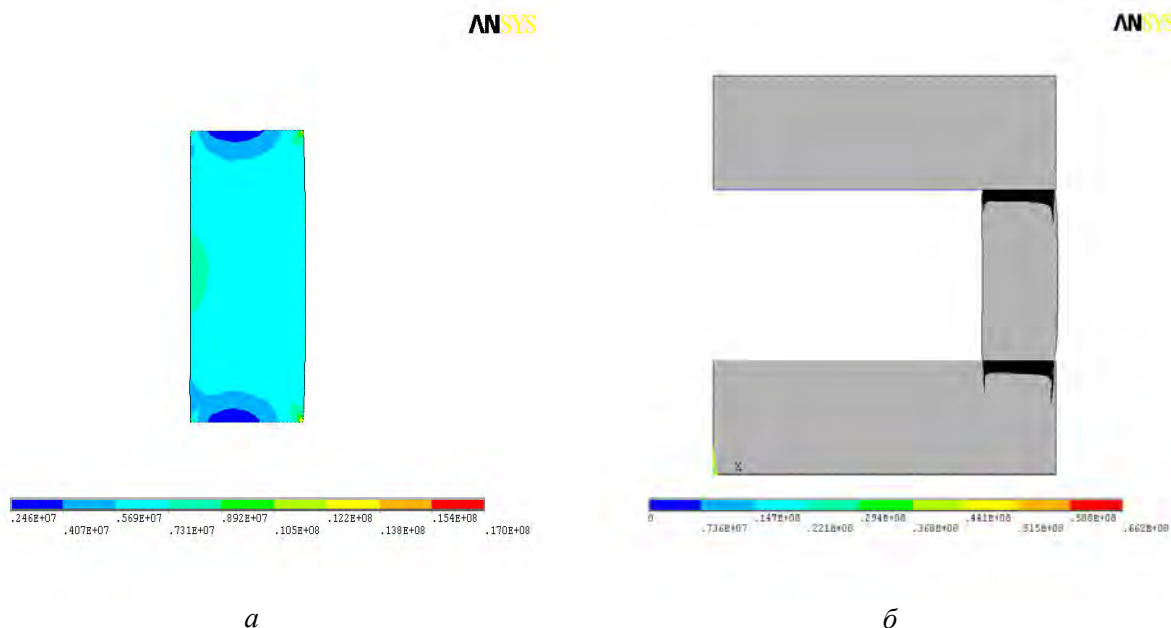


Рисунок 3 – Распределение эквивалентных напряжений (а) и давлений в контакте с опорными плитами (б).

Испытания на релаксацию проводились при уровнях сжатия (осадке) 0,5 мм и 1 мм. Средняя температура испытания составляла 26°C . В частности, на рисунке 3 приведена зависимость сжимающего усилия во времени для начального сжатия 1 мм; а на рисунке 4 показаны зависимости осевой деформации на наружной поверхности образца от времени, полученные на одном образце с «отдыхом» в течение 24 часов. Видно, что скорость релаксации максимальна в начальный период в пределах 10 мин. Весьма высокая дискретность измерения усилия позволяет экстраполировать экспериментальные данные кратковременной релаксации на более длительный период при использовании имеющихся в конечноэлементных программах реологических моделей, например, описания Прони [6].

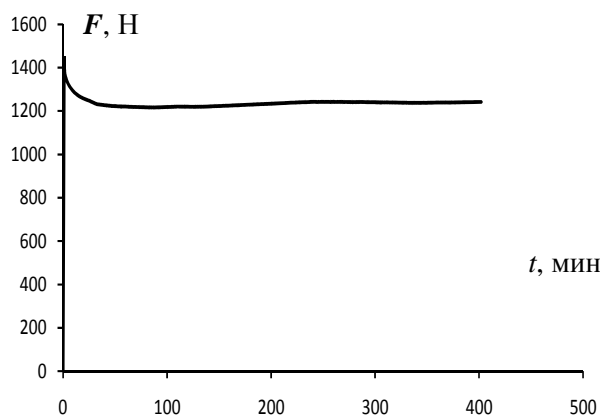


Рисунок 4 – Зависимость сжимающего усилия от времени при сжатии образца трубы из углепластика на 1 мм.

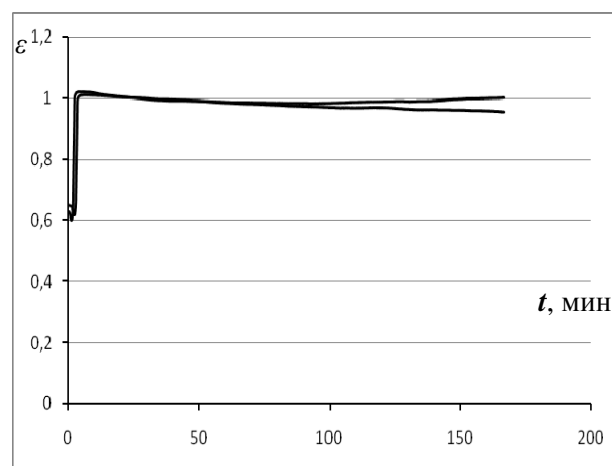


Рисунок 5 – Зависимость осевой деформации от времени при сжатии трубы из углепластика на 1 мм.

Наблюдается хорошее соответствие результатов измерения сжимающего усилия и осевой деформации при испытании трубы из углепластика на кратковременную релаксацию при сжатии. Кроме того, из рисунка 5 следует воспроизводимость релаксационных кривых при повторном испытании после «отдыха» образца в течение 24 часов.

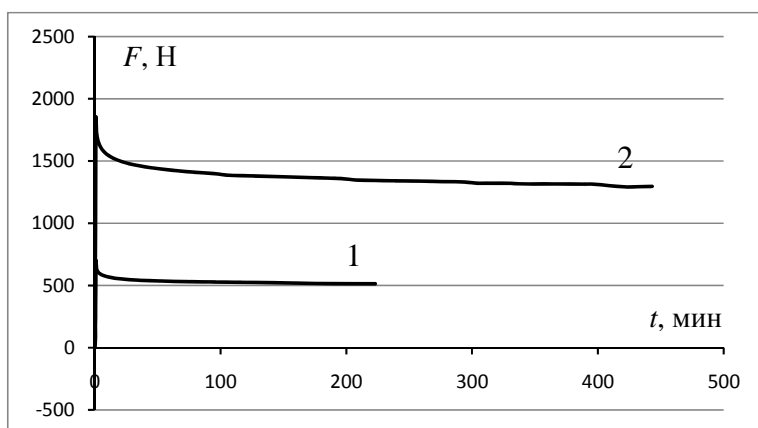


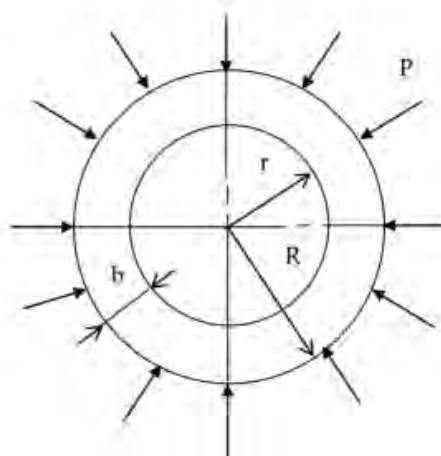
Рисунок 6 – Зависимость сжимающего усилия от времени при уровне сжатия 0,5 мм (кривая 1) и 1 мм (кривая 2) образца матричного материала фторопласт-4

При вышеуказанных уровнях сжатия были также проведены испытания на релаксацию матричного материала фторопласт-4 (рисунок 6) с использованием цилиндрического образца, размеры которого соответствовали требованиям ГОСТ 4651-82 [8]. Видно, что реологические свойства композита в основном определяются вязкоупругостью полимерной матрицы.

Анализ НДС шпульт для намотки пленки. В технических приложениях выбор материалов изделий осуществляется, исходя из требований сертификатов качества и технических условий. В частности, упомянутые выше трубчатые элементы в виде шпульт в процессе намотки полимерной пленки, бумаги, нитей и т.д. подвергаются боковому обжатию, которое при недостаточной жесткости приводит возникновению натяга и препятствует снятию с оправки. Так как испытание на боковое смятие (рисунок 7а) не позволяет воспроизвести условия намотки, радиальное перемещение внутренней поверхности шпульт определялось по расчетной схеме, приведенной на рисунке 6б с учетом диаграмм $\sigma - \epsilon$, полученных при осевом сжатии фрагментов шпульт (рисунок 2а). Видно, что минимальные радиальные перемещения соответствуют варианту материала № 2.



а



б

Рисунок 7. – Испытание на боковое сжатие (а) и расчетная схема для определения параметров обжатия (б)

Таблица. Исходные данные и результаты моделирования обжатия полимерных шпульт

№ варианта	1	2	3	4	5
E , МПа	142	970	78	223	45
ν	0,3	0,35	0,45	0,45	0,45
b , мм	15	7	10	8	10
u_k , мм	0,45	0,2	2,2	0,65	1,8
$\sigma_{экв}$, МПа	1,72	3,85	4,05	3,22	2,32

Влияние сжимаемости материала на жесткость трубчатых валов. Армирование полимерной матрицы высокомодульным наполнителем предоставляет широкие возможности управления деформационно-прочностными свойствами конструктивных элементов. В частности, использование объемной конечноэлементной модели позволило исследовать влияние коэффициента

Пуассона материала в теоретически допустимом интервале значений на НДС при кручении трубчатых валов, имеющих радиус $r = 5$ мм и длину $H = 100$ мм при модуле Юнга $E = 1$ ГПа и крутящем моменте $M_k = 500$ Н*см. В частности, соответствующие зависимости расчетного осевого перемещения трубчатого вала при варьировании толщины стенки h и диаметра поперечного отверстия показаны на рисунке 8. Можно видеть, что в отличие от сплошного вала, крутильная жесткость трубчатых валов существенно зависит от коэффициента Пуассона.

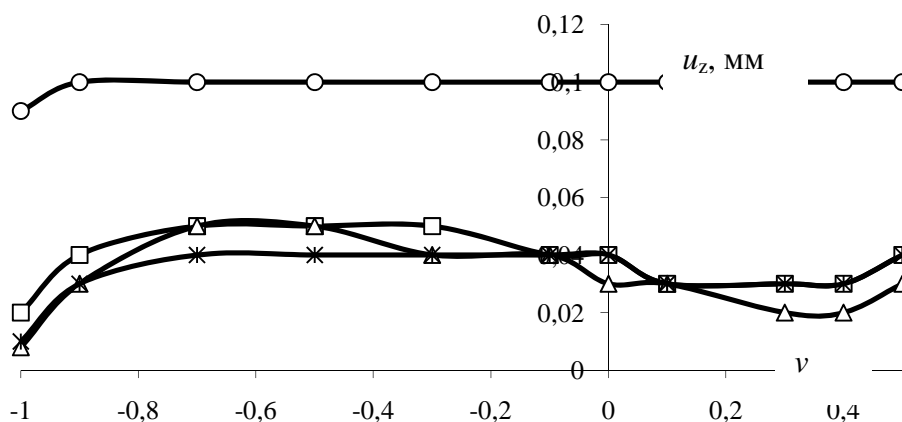


Рисунок 8 – Зависимость перемещения u_z от коэффициента Пуассона ν : сплошной вал (треугольники); сплошной вал с отверстием (звездочки); трубчатый вал с толщиной стенки $h = 3$ мм (квадраты), $h = 1$ мм (кружки).

РЕЗЮМЕ

Разработанный расчетно-экспериментальный подход позволяет получить важную информацию о напряженно-деформированном состоянии трубчатых элементов конструкций из полимерных материалов при различных условиях нагружения, основываясь на методически простых стандартных испытаниях и конечно-элементном моделировании. Это позволяет сформулировать рекомендации по выбору материалов и конструкции конкретных изделий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтунов М.А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации // Механика полимеров. – 1968. – № 4.
2. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. – М.: Наука. – 1985. – 303 с.
3. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир. – 1986. – 360 с.
4. ГОСТ 4651-82. Пластмассы. Метод испытания на сжатие.
5. Способ получения напряженно-деформированного состояния образца материала для определения его механических характеристик при сжатии: пат. 6417 Респ. Беларусь, МПК7 G 01N 3/08 / С.В. Шилько, Н.Н. Бодрунов / 2004.
6. Шилько С.В., Рябченко Т.В., Кропотин О.В. Анализ формирования на оправке герметизатора из нелинейно-упругого полимерного материала // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2013. – № 3. – С. 43–49.

SUMMARY

Possibilities of the finite-element strength analysis of tubular structure elements made of polymeric materials under various loading conditions are analyzed using experimental data obtained by methodically simple standard tests.

Поступила в редакцию 04.11.2013

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ РУНГЕ – КУТТЫ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ТОЧНОСТИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

д. ф.-м. н. **Янковский А.П.**

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Новосибирск*

Многие физические и механические явления и процессы описываются начально-краевыми задачами с сингулярным возмущением [1 и др.], решения которых обладают локальными эффектами типа пограничных слоев. Как правило, наибольший интерес у исследователей вызывает поведение неизвестных функций именно в этих подобластях погранслоев, где решения имеют большие градиенты. Поэтому актуальной является проблема разработки надежных, устойчивых методов численного интегрирования начально-краевых задач с большими градиентами решения [2 и др.]. Для наиболее достоверного определения поведения неизвестных функций в подобластях с большими и быстроосциллирующими градиентами целесообразно, чтобы эти методы обладали высокими порядками точности.

В одномерных случаях хорошо зарекомендовали себя неклассические методы Рунге – Кутты (МРК) [3] для эффективного численного интегрирования начальных и краевых задач с жесткими дифференциальными уравнениями, решения которых обладают указанными выше особенностями. Поэтому естественно возникает вопрос о целесообразности обобщения этих методов на многомерные случаи, что и было сделано автором в [4 и др.].

Известно, что уравнение переноса является модельным и позволяет «отрабатывать» схемы для более сложных уравнений акустики, нелинейных уравнений газовой динамики и др. [5]. Поэтому исследование численных схем интегрирования этого уравнения обобщенными МРК представляет определенный методологический интерес. В работе [4] было показано, что некоторые классические конечно-разностные схемы интегрирования уравнения переноса могут быть получены как следствие применения обобщенных МРК.

Настоящее исследование посвящено изучению спектральной устойчивости обобщенных МРК высоких порядков точности применительно к численному интегрированию начальной задачи для уравнения переноса.

С этой целью рассмотрим задачу Коши для уравнения переноса

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \frac{\partial y}{\partial x}, \quad y(0, x) = y_0(x), \quad |x| < \infty, \quad t \geq 0, \quad \alpha = \pm 1, \quad (1)$$

где $y_0(x)$ – дифференцируемая функция. Решением задачи (1) является «бегущая волна» [5]

$$y(t, x) = y_0(x + \alpha t). \quad (2)$$

Дискретизируем начальную задачу (1) по времени, т.е. будем рассматривать ее решение в моменты времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t_0 = 0, \quad (3)$$

где τ – шаг по времени (возможно, переменный: $\tau = \tau_{n+1}$).

Далее будем исследовать спектральную устойчивость разных обобщенных МРК применительно к (1) в дискретные моменты времени (3). Согласно [5], для этого решение при $t = t_n$ представим в виде гармоники

$$y^n(x) \equiv y(t_n, x) = q_n \sin(kx + \varphi_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Тогда в силу свойства «бегущей волны» (2) решение в следующий момент времени должно иметь вид

$$y^{n+1}(x) = q_{n+1} \sin(kx + \varphi_{n+1}), \quad |x| < \infty, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta_n, \quad (5)$$

где k , q_n , q_{n+1} , φ_n , θ_n – некоторые постоянные, причем q_{n+1} , θ_n зависят от α , k , q_n , φ_n , τ ; θ_n – сдвиг фазы гармоники, характеризующий свойство переноса («бегущую волну»).

Введем норму решения в пространстве C :

$$\|y^n\|_C = \max_x |y^n(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

тогда в силу (4), (5) имеем

$$\|y^n\|_C = |q_n|, \quad \|y^{n+1}\|_C = |q_{n+1}|. \quad (7)$$

Отношение

$$R = R(\alpha, \tau, k) = |q_{n+1}|/|q_n| \quad (8)$$

по аналогии с терминологией, принятой в [3], целесообразно назвать функцией устойчивости соответствующего обобщенного МРК применительно к начальной задаче для уравнения переноса (1).

Согласно (6)–(8), если $R \leq 1$, то обобщенный МРК спектрально устойчив, а при $R > 1$ – спектрально неустойчив.

В силу равенств (4), (5), (8) для определения функции устойчивости в (4) достаточно принять

$$q_n = 1, \quad (9)$$

тогда из (8) следует

$$R(\alpha, \tau, k) = |q_{n+1}(\alpha, \tau, k)|. \quad (10)$$

Таким образом, для определения функции устойчивости R , соответствующей обобщенному МРК, необходимо определить коэффициент q_{n+1} в (5) при выполнении равенств (4), (9).

Согласно [4], применение s -стадийного обобщенного МРК для интегрирования начальной задачи (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений по пространственной переменной x следующего вида:

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{E}y^n(x) + \alpha\tau\mathbf{A}\mathbf{Y}'(x); \quad (11)$$

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \alpha\tau\mathbf{B}^*\mathbf{Y}'(x), \quad (12)$$

где

$$\mathbf{Y}(x) = \{Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_s(x)\}^*, \quad \mathbf{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}^*; \quad (13)$$

$\mathbf{Y}(x)$ – вспомогательная векторная функция; $A = (a_{ij})$ – $s \times s$ -матрица Бутчера соответствующего МРК; \mathbf{B} – s -компонентный вектор, составленный из элементов последней строки матрицы Бутчера (см. (3.1.6) в [3]); \mathbf{E} – s -компонентный единичный вектор; звездочка означает операцию транспонирования; штрих – производная по x .

З а м е ч а н и е. Без потери общности рассуждений для упрощения выкладок в (4) можно принять $\varphi_n = 0$ и учесть (9), тогда из (5), (10) получим функцию устойчивости и $\varphi_{n+1} = \theta_n$.

Подставим (4) в (11), тогда периодическое по x решение системы (11) следует разыскивать в виде

$$\mathbf{Y}(x) = \mathbf{U} \sin kx + \mathbf{V} \cos kx, \quad |x| < \infty, \quad (13)$$

где \mathbf{U}, \mathbf{V} – s -компонентные векторы-столбцы, подлежащие определению.

Из системы (11) с учетом (4), (13) и замечания следует матричное равенство

$$\mathbf{U} \sin kx + \mathbf{V} \cos kx = \mathbf{E} \sin kx + \alpha\tau\mathbf{A}(k\mathbf{U} \cos kx - k\mathbf{V} \sin kx). \quad (14)$$

Так как функции $\sin kx$, $\cos kx$ являются линейно независимыми, то из (14) получаем матричные соотношения

$$\mathbf{U} = \mathbf{E} - \alpha\tau k\mathbf{A}\mathbf{V}; \quad (15)$$

$$\mathbf{V} = \alpha\tau k\mathbf{A}\mathbf{U}. \quad (16)$$

Подставим (16) в (15), тогда будем иметь матричное уравнение

$$\mathbf{U} = \mathbf{E} - (\alpha\tau k)^2 \mathbf{A}^2 \mathbf{U},$$

откуда

$$\left[I + (\tau k)^2 \mathbf{A}^2 \right] \mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad (17)$$

где I – единичная $s \times s$ -матрица.

Матричное уравнение (17) является СЛАУ относительно \mathbf{U} . Решив это уравнение, определим вектор \mathbf{U} , после подстановки которого в (16) получим и вектор \mathbf{V} .

Согласно (5), имеет место разложение $y^{n+1}(x) = y_s^{n+1} \sin kx + y_c^{n+1} \cos kx$, где y_s^{n+1} , y_c^{n+1} – разыскиваемые коэффициенты. Подставим это выражение в (12) и учтем (4), (13) и замечание, тогда получим

$$y_s^{n+1} \sin kx + y_c^{n+1} \cos kx = \sin kx + \alpha \tau \mathbf{B}^* (k\mathbf{U} \cos kx - k\mathbf{V} \sin kx),$$

отсюда следует

$$y_s^{n+1} = 1 - \alpha \tau k \mathbf{B}^* \mathbf{V}, \quad y_c^{n+1} = \alpha \tau k \mathbf{B}^* \mathbf{U}. \quad (18)$$

Согласно (5), (9), (10) и замечанию, из (18) окончательно получаем

$$R(\alpha, \tau k) = \sqrt{(y_s^{n+1})^2 + (y_c^{n+1})^2}, \quad \cos \theta_n = y_s^{n+1} / R, \quad \sin \theta_n = y_c^{n+1} / R. \quad (19)$$

На основании соотношений (16)–(19) можно исследовать спектральную устойчивость обобщенных МРК разных порядков точности. Для этого необходимо лишь использовать компоненты матрицы Бутчера соответствующего МРК [3]. В случаях малостадийных МРК (низких порядков точности) функцию устойчивости R можно получить в явном виде. В случаях же многостадийных МРК (высоких порядков точности по τ) целесообразно исследовать функцию устойчивости по схеме (16)–(19) численно, варьируя произведение τk от нуля до бесконечности (машинной бесконечности).

Исследуем спектральную устойчивость конкретных обобщенных МРК высоких порядков точности.

Четырехстадийный ($s = 4$) метод Лобатто IIIA (здесь и далее использованы названия МРК, принятые в [3]) шестого порядка точности по τ определяется следующими компонентами матрицы A и вектора \mathbf{B} (см. (11), (12))

$$\begin{aligned} a_{1j} &= 0 \quad (j = \overline{1, 4}), \quad a_{21} = (11 + \sqrt{5})/120, \quad a_{22} = (25 - \sqrt{5})/120, \quad a_{23} = (25 - 13\sqrt{5})/120, \\ a_{24} &= (-1 + \sqrt{5})/120, \quad a_{31} = (11 - \sqrt{5})/120, \quad a_{32} = (25 + 13\sqrt{5})/120, \quad a_{33} = (25 + \sqrt{5})/120, \\ a_{34} &= (-1 - \sqrt{5})/120, \quad a_{41} = a_{44} = b_1 = b_4 = 1/12, \quad a_{42} = a_{43} = b_2 = b_3 = 5/12. \end{aligned} \quad (20)$$

Расчеты, проведенные по формулам (16)–(19) с учетом (20), показали, что для этого метода $R \equiv 1$, т.е. имеет место спектральная устойчивость.

Четырехстадийный метод Лобатто IIIB (шестой порядок точности) характеризуется коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{i1} &= 1/12, \quad a_{i4} = 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad a_{12} = (-1 - \sqrt{5})/24, \quad a_{13} = (-1 + \sqrt{5})/24, \quad a_{22} = (25 + \sqrt{5})/120, \\ a_{23} &= (25 - 13\sqrt{5})/120, \quad a_{32} = (25 + 13\sqrt{5})/120, \quad a_{33} = (25 - \sqrt{5})/120, \quad a_{42} = (11 - \sqrt{5})/24, \\ a_{43} &= (11 + \sqrt{5})/24, \quad b_1 = b_4 = 1/12, \quad b_2 = b_3 = 5/12, \end{aligned} \quad (21)$$

на основании которых по формулам (16)–(19) было получено $R \equiv 1$ (спектральная устойчивость).

Четырехстадийный метод Лобатто IIIC (шестой порядок точности) определяется следующими компонентами матрицы A и вектора \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} a_{i1} &= 1/12 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad a_{12} = -\sqrt{5}/12, \quad a_{13} = \sqrt{5}/12, \quad a_{14} = -1/12, \\ a_{22} &= 1/4, \quad a_{23} = (10 - 7\sqrt{5})/60, \quad a_{24} = \sqrt{5}/60, \quad a_{32} = (10 + 7\sqrt{5})/60, \quad a_{33} = 1/4, \\ a_{34} &= -\sqrt{5}/60, \quad a_{41} = a_{44} = b_1 = b_4 = 1/12, \quad a_{42} = a_{43} = b_2 = b_3 = 5/12. \end{aligned} \quad (22)$$

Расчеты, проведенные по формулам (16)–(19) с учетом (22), показали, что в отличие от предыдущих случаев функция устойчивости этого метода монотонно убывает от 1 до 0 при изменении произведения τk от 0 до бесконечности ($R < 1$ при $\tau k \in (0, \infty)$) – спектральная устойчивость).

Трехстадийный ($s = 3$) метод Радо IIA (пятый порядок точности по τ) характеризуется коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11} &= (88 - 7\sqrt{6})/360, \quad a_{12} = (296 - 169\sqrt{6})/1800, \quad a_{13} = (-2 + 3\sqrt{6})/225, \\ a_{21} &= (296 + 169\sqrt{6})/1800, \quad a_{22} = (88 + 7\sqrt{6})/360, \quad a_{23} = (-2 - 3\sqrt{6})/225, \\ a_{31} &= b_1 = (16 - \sqrt{6})/36, \quad a_{32} = b_2 = (16 + \sqrt{6})/36, \quad a_{33} = b_3 = 1/9, \end{aligned} \quad (23)$$

на основании которых было установлено, что функция устойчивости этого метода монотонно убывает от 1 до 0 при $\tau k \in [0, \infty)$ (спектральная устойчивость).

Трехстадийный метод Радо IIA (пятый порядок точности по τ) определяется следующими компонентами матрицы A и вектора \mathbf{B} :

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{i1} = 1/9 \quad (i = \overline{1, 3}), \quad a_{12} = (-1 - \sqrt{6})/18, \quad a_{13} = (-1 + \sqrt{6})/18, \\ a_{22} &= (88 + 7\sqrt{6})/360, \quad a_{23} = (88 - 43\sqrt{6})/360, \quad a_{32} = (88 + 43\sqrt{6})/360, \\ a_{33} &= (88 - 7\sqrt{6})/360, \quad b_2 = (16 + \sqrt{6})/36, \quad b_3 = (16 - \sqrt{6})/36. \end{aligned} \quad (24)$$

Расчеты, проведенные по формулам (16)–(19) с учетом (24), показали, что функция устойчивости этого метода также монотонно убывает от 1 до 0 при $\tau k \in [0, \infty)$ (спектральная устойчивость).

Трехстадийный метод Гаусса – Лежандра (шестой порядка точности по τ) характеризуется коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11} &= 5/36, & a_{12} &= (80 - 24\sqrt{15})/360, & a_{13} &= (50 - 12\sqrt{15})/360, & a_{21} &= (50 + 15\sqrt{15})/360, \\ a_{22} &= 2/9, & a_{23} &= (50 - 15\sqrt{15})/360, & a_{31} &= (50 + 12\sqrt{15})/360, & a_{32} &= (80 + 24\sqrt{15})/360, \\ a_{33} &= 5/36, & b_1 &= b_3 = 5/18, & b_2 &= 4/9, \end{aligned} \quad (25)$$

на основании которых было установлено, что для этого метода $R \equiv 1$ (имеет место спектральная устойчивость).

Согласно (20)–(25), все исследованные выше обобщенные МРК являются неявными. Для решения же задачи Коши (1) наиболее естественно использовать явные методы [5]. Компоненты матрицы Бутчера для явных МРК разных порядков точности приведены, например, в [6]. Анализ явных обобщенных МРК, проведенный по формулам (16)–(19), показал, что для них функция устойчивости монотонно изменяется от 1 до бесконечности при $\tau k \in [0, \infty)$ (т.е. все явные обобщенные МРК спектрально неустойчивы). В частности, явный метод Эйлера (первый порядок точности по τ), согласно (1), реализуется так:

$$y^{n+1}(x) = y^n(x) + \tau \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=t_n} = y^n(x) + \alpha \tau (y^n(x))',$$

и имеет функцию устойчивости $R = \sqrt{1 + (\tau k)^2} > 1$ при $\tau k \in (0, \infty)$.

Среди неявных обобщенных МРК особое место занимают диагональные методы, так как для них ненулевые компоненты матрицы A (см. (11)) расположены на и под главной диагональю, что позволяет интегрировать уравнения системы (11) последовательно на каждой стадии. Так, например, трехстадийный диагонально неявный метод (метод Барриджа) определяется следующими ненулевыми компонентами матрицы A и вектора B :

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \gamma \quad (i = \overline{1, 3}), & a_{21} &= 1/2 - \gamma, & a_{31} &= 2\gamma, & a_{32} &= 1 - 4\gamma, \\ b_1 &= b_3 = [24(1/2 - \gamma)^2]^{-1}, & b_2 &= 1 - [12(1/2 - \gamma)^2]^{-1}, \end{aligned} \quad (26)$$

где γ – некоторая постоянная. При

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} \cos(\pi/18) \quad (27)$$

метод имеет четвертый порядок точности, а при других γ – третий [3]. Анализ функции устойчивости, проведенный по формулам (16)–(19) с учетом (26), (27), показал, что для метода Барриджа она монотонно убывает от 1 до 0.6304 при $\tau k \in [0, \infty)$ (спектральная устойчивость).

Для апробации полученных выше схем интегрирования начальной задачи (1) рассмотрим случай $\alpha = -1$ при начальном условии

$$y_0(x) = \sum_{m=0}^M \frac{8}{k_m} \sin(k_m x), \quad k_m = 2\pi(2m+1), \quad M = 0, 1, 2, \dots, \quad (28)$$

которое представляет собой конечную сумму гармоник.

Сравнивая (28) и (4) при $n = 0$, получим

$$q_0^{(m)} = 8/k_m, \quad \varphi_0^{(m)} = 0, \quad 0 \leq m \leq M. \quad (29)$$

Согласно (28), функция $y_0(x)$ является частичной суммой ряда Фурье для периодической ступенчатой функции

$$z(x) = \begin{cases} -1, & -1/2 + l \leq x < l; \\ +1, & l \leq x < 1/2 + l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \end{cases} \quad (30)$$

с периодом $X = 1$. Точное решение начальной задачи Коши (1), (28) в силу (2) имеет вид

$$y(t, x) = \sum_{m=0}^M \frac{8}{k_m} \sin(k_m(x-t)). \quad (31)$$

Из равенства (31) следует, что на прямых $x-t = l/2$ частные производные по модулю

$$\left| \frac{\partial y}{\partial t} \right| = \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| = 8 \left| \sum_{m=0}^M \cos(\pi(2m+1)l) \right| = 8(M+1), \quad x-t = l/2, \quad (32)$$

а модуль градиента решения в этих точках равен $8\sqrt{2}(M+1)$.

В качестве конкретного примера рассмотрим случай $M = 29$. При этом максимальные значения модуля градиента решения больше 330, а модуль функции (31) с учетом эффекта Гиббса, возникающего в силу разрывности функции (30), не превосходит значения 1.2, т.е. градиенты решения являются большими и пе-

риодически повторяющимися. Именно на задачах с такими особенностями решения целесообразно апробировать обобщенные МРК высокого порядка точности, позволяющих выяснить достоинства и недостатки этих методов, которые трудно оценить на весьма гладких (типа одной гармоники) решениях начальной задачи (1).

Так как точное решение (31) является периодическим с периодом $T = X = 1$ (равным периоду колебаний низшей гармоники при $m = 0$), то внутри каждого периода колебаний целесообразно ввести локальное время t_* ($0 \leq t_* < T = 1$). Тогда глобальное t и локальное t_* время связаны между собой соотношением

$$t = t_* + TN = t_* + N, \quad 0 \leq t_* < 1, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (33)$$

где N – количество периодов колебаний низшей гармоники, предшествующих рассматриваемому периоду.

На рис. 1–3 приведены точное (кривые 1) и приближенные (остальные кривые) решения начальной задачи (1), (28) в точке $x = 0$ при относительно малых и больших значениях времени t . Согласно (33), на всех рисунках по оси абсцисс отложено локальное время t_* и указано соответствующее значение N : $N = 5 \cdot 10^4$ для рис. 1, 2 и рис. 3, б (большие значения времени) и $N = 50$ для рис. 3, а (относительно малые значения времени t). В расчетах шаг τ выбирался так, чтобы 10 шагов по времени были равны периоду колебаний высшей гармоники в решении (31), т.е. при $m = M = 29$.

На рис. 1 кривая 2 соответствует приближенному решению задачи (1), (28), полученному на основе обобщенного трехстадийного метода Гаусса – Лежандра (см. (25)). Дополнительные расчеты показали, что приближенные решения, полученные на базе четырехстадийных методов Лобатто IIIA и IIIB (см. (20), (21)), визуально не отличаются от этой кривой (для всех этих методов $R \equiv 1$). На рис. 2 кривая 2 характеризует

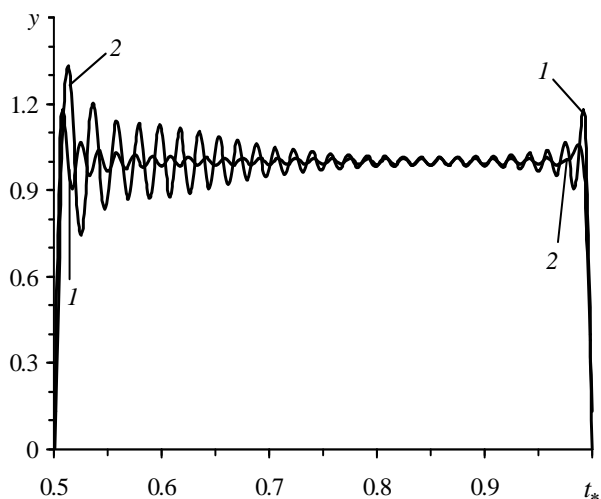


Рисунок 1 – Точное и приближенное решение, полученное трехстадийным методом Гаусса – Лежандра при $N = 5 \cdot 10^4$

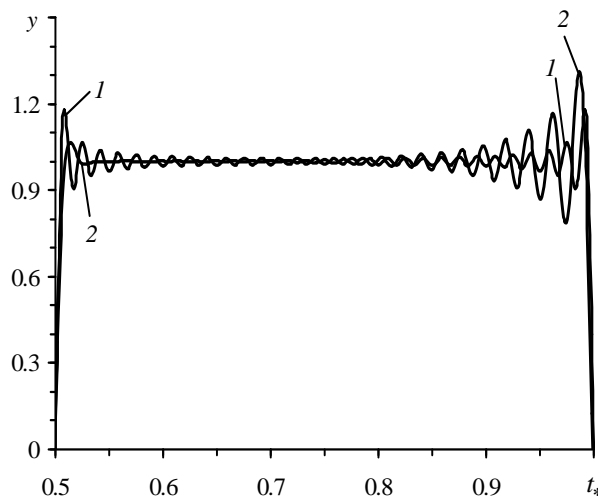


Рисунок 2 – Точное и приближенное решение, полученное четырехстадийным методом Лобатто IIIC при $N = 5 \cdot 10^4$

приближенное решение, определенное четырехстадийным методом Лобатто IIIС ($R < 1$).

Согласно поведению кривых 2 на рис. 1, 2, при больших значениях времени t ($N = 5 \cdot 10^4$, см. (33)) все указанные методы приводят к резкому увеличению «пиковых» значений (экстремумов) в окрестности точек $t_* \approx 0,5$ и $t_* \approx 1$ соответственно (т.е. в окрестности точек, в которых точное решение (31) имеет большие по модулю градиенты (32)). Так как для кривой 2, изображенной на рис. 1, $R \equiv 1$, то с увеличением времени t (с увеличением N) максимальные пиковые значения не убывают, а возрастают, хотя и ограничены сверху по модулю (последнее можно показать, исходя из (4), (5), (28), (29)). Пики же на кривой 2 рис. 2 с увеличением t постепенно затухают, так как для метода Лобатто IIIC $R < 1$.

На рис. 3 кривые 2 рассчитаны трехстадийным методом Радо IA (расчет методом Радо ПА (см. (23), (24)) приводит к результату, который визуально не отличается от линий 2), а кривые 3 – методом Барриджа (см. (26), (27)). Как видно из рис. 3, а, методы Радо IA и ПА при относительно малых значениях времени t ($N = 50$) приводят к приближенным результатам, которые визуально не отличаются от точного решения (кривая 1). Аналогичные результаты при $N = 50$ получаются и в случаях использования методов шестого порядка точности (см. (20)–(22), (25)).

Метод Барриджа (кривые 3 на рис. 3) в силу наименьшего порядка точности по сравнению с другими рассмотренными методами дает наихудшее приближение к точному решению, причем даже при относительно малых значениях времени t точность решения является достаточно грубой.

Сопоставление приближенных решений, приведенных на рис. 1–3, с точным решением позволяет сделать вывод, что, по-видимому, для численного интегрирования начальной задачи (1) наиболее целесообразно использовать методы Радо IA и ПА (см. кривые 2 на рис. 3).

Систему (11) можно разрешить относительно производных:

$$\mathbf{Y}'(x) = \alpha \tau^{-1} A^{-1} [\mathbf{Y}(x) - \mathbf{E}y^n(x)], \quad (34)$$

где A^{-1} – матрица, обратная матрице A . Применяя для интегрирования системы (34) обычные МРК [3, 6] и исключая из (12) за счет (34) производные, получим конечно-разностные схемы для интегрирования начально-краевой задачи для уравнения переноса. В [4] было продемонстрировано, что некоторые классические конечно-разностные схемы могут быть получены именно таким путем. Анализ этих схем показал, что если они построены на базе явных обобщенных МРК, для которых $R > 1$, то являются условно устойчивыми; если на основе неявных обобщенных МРК, для которых $R \equiv 1$, то схемы устойчивы в энергетической норме

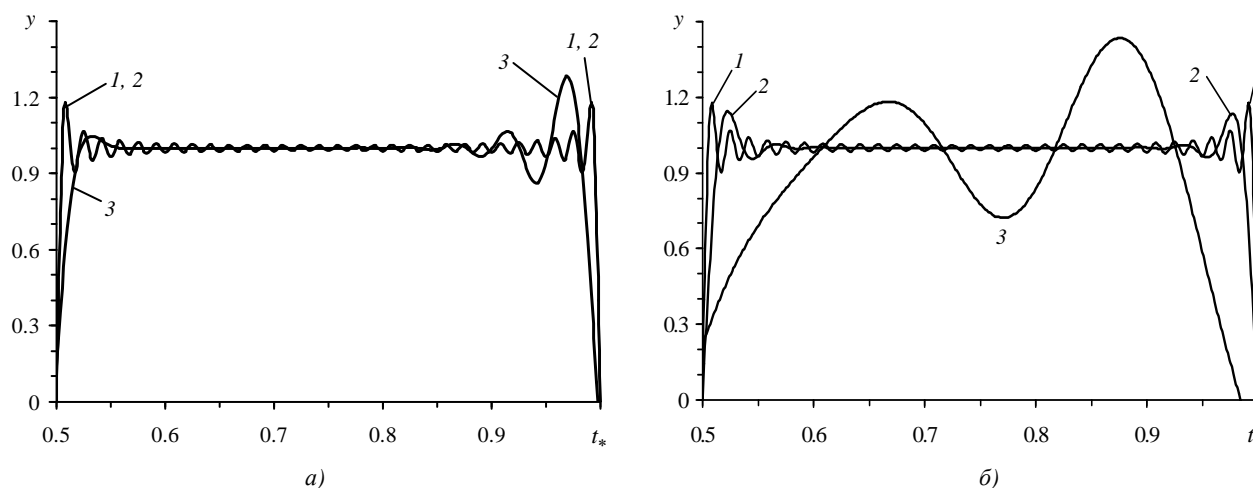


Рисунок 3 – Точное и приближенные решения, полученные трехстадийными методами Радо IA, ПА и методом Барриджа: а) – при $N = 50$; б) – при $N = 5 \cdot 10^4$

и неустойчивы в норме C пространства сеточных функций; если же на базе неявных обобщенных МРК, для которых $R < 1$, то схемы получаются безусловно устойчивыми в пространстве C . Эти факты дают некоторое представление о том, на какие обобщенные МРК следует ориентироваться при построении численных схем высоких порядков точности для интегрирования начально-краевой задачи для уравнения переноса. Окончательный вывод может быть сделан, конечно же, лишь после изучения устойчивости конкретной конечно-разностной схемы, что выходит за рамки настоящего исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

РЕЗЮМЕ

Исследована спектральная устойчивость обобщенных методов Рунге – Кутты высоких порядков точности применительно к численному интегрированию начальной задачи для уравнения переноса. Проведено сравнение приближенных решений, полученных на базе разных обобщенных методов Рунге – Кутты, с точным решением при сложно осциллирующих начальных условиях с большими по модулю производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Найфе, А. Введение в методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1984. – 536 с.
2. Лисейкин, В.Д. Технология построения разностных сеток / В.Д. Лисейкин, Ю.И. Шокин, И.А. Васева, Ю.В. Лиханова. – Новосибирск: Наука, 2009. – 414 с.
3. Деккер, К. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
4. Немировский, Ю.В. Обобщение методов Рунге – Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 57–76.
5. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
6. Березин, И.С. Методы вычислений. Т. II. / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз, 1959. – 620 с.

SUMMARY

Spectral stability of generalized Runge – Kutta high order method is studied as applied to the numerical integration of initial task for the transfer equation. Comparison of approximate solutions obtained on the basis of different generalized Runge – Kutta methods, with the exact solution in difficult oscillating initial conditions with large modulo derivatives is held.

Поступила в редакцию 04.11.2013

О ФОРМАХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СЛОЕВ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

к. ф.-м. н. Конон П.Н.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

В различных отраслях промышленности широко применяются технологические процессы, использующие движение слоя жидкости на вращающихся поверхностях. Во многих случаях эти процессы основаны на явлениях неустойчивости свободной поверхности слоя жидкости.

Например, производство минеральных и металлических волокон из высокотемпературных расплавов при центробежном способе состоит в переработке расплава в волокно вращающимися дисками. В данном случае при быстром вращении дисков имеет место неустойчивость слоя под действием центробежных сил. По касательной к поверхности струи жидкости сбрасываются в окружающее пространство, дробятся на капли, которые в свою очередь могут делиться и, вытягиваясь и застывая, образуют металлическую нить или минеральное волокно.

В других технологических процессах требуются минимальные возмущения поверхности слоя жидкости. Это достигается при определенных умеренных угловых скоростях вращения диска. Ряд экспериментов показывает, что в данном случае движение диска и слоя можно рассматривать как единое целое. В [3,4] рассмотрено относительное равновесие вязких слоев жидкости на внутренней и внешней поверхности закрученного цилиндра, другие задачи определения равновесных форм исследованы в книге [2].

Рассмотрим движение капли вязкой жидкости на поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью ω диска в поле сил инерции, поверхностного натяжения и силы тяжести.

Движение удобно рассматривать в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , в которой ось z направлена вдоль оси симметрии; r – в радиальном, а φ – в окружном направлениях. Пусть $\vec{v} = (u, v, w)$ – вектор скорости, а u, v, w – его составляющие в проекции на оси r, φ, z соответственно, p – давление в жидкости, ρ – ее плотность жидкости, а μ – коэффициент динамической вязкости.

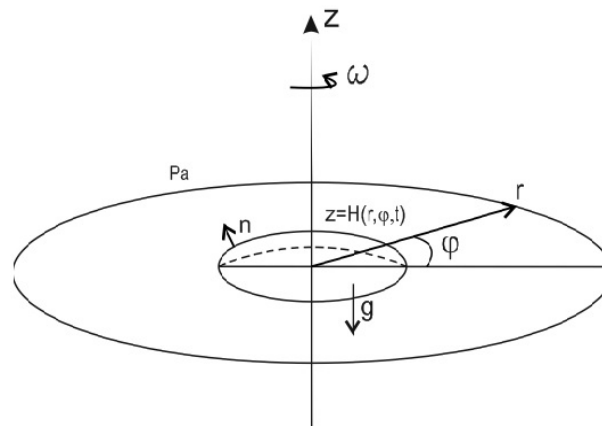


Рисунок 1 – К исследованию движения слоя на вращающемся диске

Движение капли жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса, неразрывности и неизвестной свободной поверхности $z = H(r, \varphi, t)$:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial H}{\partial \varphi} = w, \quad z=H(r, \varphi, t) \quad (3)$$

Для получения конкретных решений из множества возможных при интегрировании системы уравнений (1)–(3) ставятся граничные условия.

На поверхности диска $z=0$ выполняется условие прилипания, т.е. совпадение скоростей частиц жидкости со скоростями точек вращающегося диска:

$$u=0; \quad v=r\omega; \quad w=0, \quad z=0. \quad (4)$$

На свободной поверхности жидкости $z = H(r, \varphi, t)$ выполняются условия на нормальные и касательные напряжения. Два из них выражают непрерывность напряжений в касательной плоскости, а третье – скачок нормальных напряжений, вызванный действием капиллярных сил [1].

Система (1)–(3) с указанными граничными условиями, дополненная начальными значениями, определяет полную постановку задачи о движении слоя вязкой жидкости на поверхности вращающегося диска.

Ряд экспериментальных исследований подтверждает факт, что возможно вращение диска и жидкости как единого целого. Это говорит о том, что задача исследования форм относительного равновесия жидкости на вращающемся диске имеет самостоятельный интерес.

Решение задачи, соответствующее слою, неподвижному относительно вращающегося диска, разыскиваем в виде:

$$u=0, \quad v=r\omega, \quad w=0, \quad p=p(r, \varphi, z), \quad z=H(r, \varphi). \quad (5)$$

Подставляя предполагаемый вид решения в уравнения движения (1), имеем систему:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

с решением

$$p = p(r, z) = \frac{1}{2} \rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C.$$

Полагая, что давление в центре капли равно $p=p_0$, получаем выражение давления в слое вращающейся капли

$$p = p(r, z) = \frac{1}{2} \rho\omega^2 r^2 - \rho g z + p_0. \quad (6)$$

На поверхности $z = H(r, \varphi)$ выполняется граничное условие на нормальные напряжения, которое в случае относительного равновесия жидкости имеет вид:

$$p - p_a = \sigma \frac{2}{R_s}, \quad z=H(r, \varphi). \quad (7)$$

Здесь $2/R_s$ – средняя кривизна поверхности слоя, известная формула из дифференциальной геометрии; p_a – внешнее давление.

Из последних двух соотношений получаем уравнение, определяющее форму относительного равновесия капли на вращающемся диске:

$$\frac{1}{2} \rho\omega^2 r^2 - \rho g H + p - p_a = \sigma \frac{2}{R_s}. \quad (8)$$

Приведем уравнение (8) к безразмерному виду. Для этого разделим левую и правую части равенства на $\rho l_0^2 \omega^2$. В качестве значения характерной длины l_0 можно использовать величину $l_0 = \sqrt{\sigma / \rho g}$.

В итоге уравнение (8) примет вид:

$$\frac{1}{2} We(2Eu + r^2 - \frac{2H}{Fr}) = \frac{2}{R_s}. \quad (9)$$

Оно содержит три безразмерных параметра. Это число Эйлера Eu , характеризующее перепад давлений в точке слоя $(0,0,0)$ и атмосферного; число Фруда Fr и число Вебера We : $Eu = \frac{P_0 - P_a}{\rho l_0^2 \omega^2}$,

$$Fr = \frac{l_0^2 \omega^2}{g l_0}, \quad We = \frac{\rho l_0^3 \omega^2}{\sigma}.$$

Величины r и H в (9) отнесены к l_0 .

Подставляя значение $2/R_s$ средней кривизны поверхности слоя в (9), получаем основное уравнение, определяющее вид свободной поверхности слоя, неподвижного относительно вращающегося диска.

$$\frac{1}{2} We (2Eu + r^2 - \frac{2H}{Fr}) = \frac{r(1 + H_r^2)(rH_r + H_{\varphi\varphi}) - 2H_r H_\varphi (rH_{\varphi\varphi} - H_\varphi) + (r^2 + H_\varphi^2)rH_{rr}}{[r^2(1 + H_r^2) + H_\varphi^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (10)$$

Здесь нижний индекс обозначает частную производную по соответствующему направлению. Уравнение (10) является в общем случае нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных.

В дальнейшем исследуются осесимметричные формы относительного равновесия капли, когда $H = H(r)$. Тогда уравнение (10) представляется в виде:

$$rH'' - We(Eu + \frac{1}{2}r^2 - \frac{H}{Fr})r(1 + H'^2)^{\frac{3}{2}} + (1 + H'^2)H' = 0. \quad (11)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по r . К этому дифференциальному уравнению второго порядка необходимо добавить четыре условия: ограниченность смачиваемой поверхности, определяемой, вообще говоря, неизвестным радиусом r_0 , наличие постоянного угла смачивания ε_0 , выполнение симметрии решения относительно вертикальной оси и сохранения постоянной массы капли.

$$H|_{r=r_0} = 0; \quad H'|_{r=r_0} = -tg \varepsilon_0; \quad H'|_{r=0} = 0; \quad M = 2\pi \int_0^{r_0} rH dr = M_0 = const. \quad (12)$$

Условие $M=const$ служит для определения перепада давления в центре капли и окружающей среды $Eu = p_0 - p_a$. Решение уравнения (11) с четырьмя условиями (12) позволит определить осесимметричную форму слоя вместе с радиусом смачиваемой поверхности r_0 и перепадом давлений Eu .

Исследование уравнения относительного равновесия (11) в случае осевой симметрии удобно провести в естественной системе координат. Ее выбор обеспечивает возможность интегрировать систему дифференциальных уравнений, избегая особенности в вычислениях.

Пусть внутренняя система координат описывается параметрами s, ε , связанными с поверхностью капли, где s – текущая длина свободной поверхности, ε – угол между касательной к поверхности $z=H(r)$ и положительным направлением оси r .

Из геометрических соображений ясно, что

$$\frac{dH}{ds} = \sin \varepsilon, \quad \frac{dr}{ds} = -\cos \varepsilon.$$

Тогда, вычисляя производные

$$H' = \frac{dH}{dr} = -tg \varepsilon, \quad H'' = \frac{d}{dr}(-tg \varepsilon) = \frac{1}{\cos^3 \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{ds}$$

с помощью уравнения (11) и определения массы получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dH}{ds} = \sin \varepsilon, \frac{dr}{ds} = -\cos \varepsilon, \frac{dM}{ds} = 2\pi r H \sin \varepsilon, \quad (13)$$

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\sin \varepsilon}{r} + We(Eu + \frac{1}{2}r^2 - \frac{H}{Fr}).$$

Граничные условия для системы (13) имеют вид:

$$z(0) = 0, r(0) = r_0, \varepsilon(0) = \pi - \varepsilon_0, M(0) = 0. \quad (14)$$

Дополнительные условия для определения поверхности смачивания r_0 и перепада давлений Eu запишутся в виде

$$r(\varepsilon(s))=0, \varepsilon(s)=\pi; \quad M(\varepsilon(s))=M_0, \varepsilon(s)=\varepsilon_0. \quad (15)$$

Решение краевой задачи (13)-(15) позволяет найти зависимости $z=z(s), r=r(s), \varepsilon=\varepsilon(s), M=M(s)$, а затем и форму свободной поверхности капли $z=H(r)$.

Рассмотрим численное решение задачи (11) с граничными условиями

$$H|_{r=1} = 0; \quad H'|_{r=r_0} = -tg \varepsilon_0. \quad (16)$$

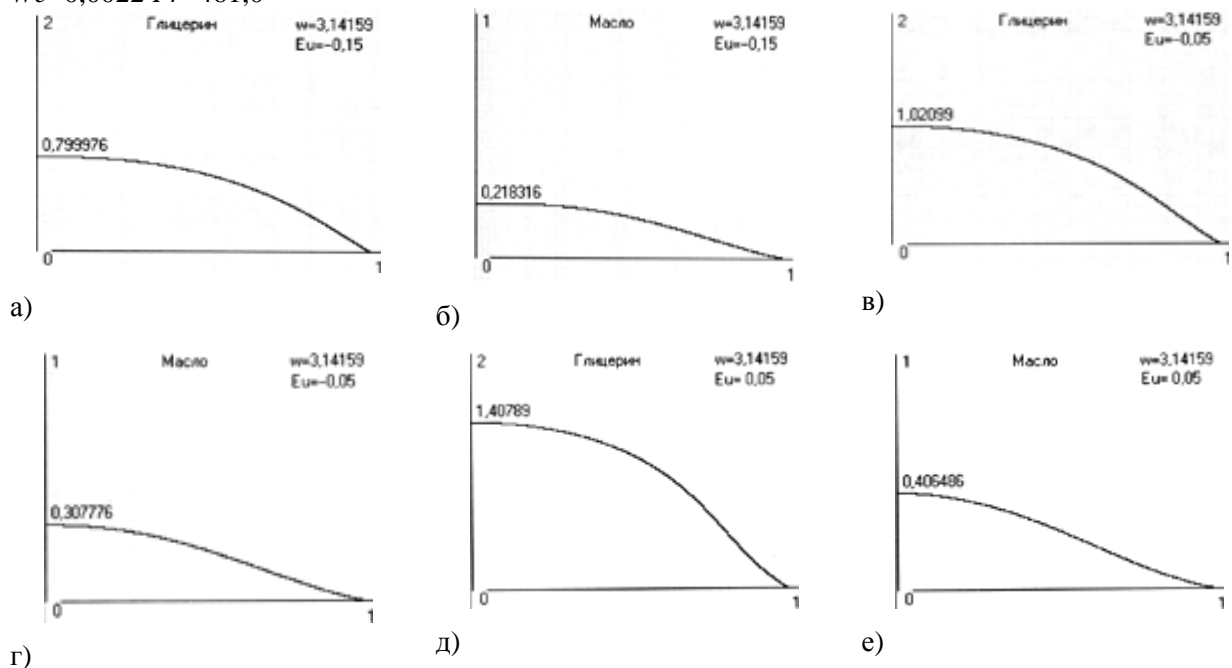
В этом случае масса слоя не фиксируется, а определяется заданным перепадом давлений Eu и найденной формой поверхности с помощью интеграла

$$M = 2\pi \int_0^{r_0} r H dr. \quad (17)$$

Решение задачи(11),(16) проводилось с помощью численного интегрирования по формулам Рунге-Кутта четвертого порядка точности для решения систем дифференциальных уравнений.

Исследованы формы равновесия вращающейся капли на диске при различных значениях угловой скорости, перепада давлений в слое и окружающей среде, физических свойств жидкостей. Масса жидкости однозначно определяется разностью давлений и смачиваемой поверхностью.

Рассмотрим формы свободных поверхностей капель глицерина ($\rho=1260 \text{ кг/м}^3, \sigma=0,07\text{н/м}$) и масла ($\rho=1110 \text{ кг/м}^3, \sigma=0,05\text{н/м}$), имеющих различный краевой угол смачивания. Для слоя глицерина он равен $\varepsilon_0 = 60^\circ$, для слоя масла – $\varepsilon_0 = 15^\circ$. Будем изменять параметр Eu на отрезке $[-0.15; 0.15]$ с шагом $dEu=0.1$. Частота вращения диска предполагается равной $n=0.5$ оборота в секунду. При этом угловая скорость $\omega = 2\pi n$ равна 3.1416рад/сек. На рисунках 2 представлен вид поверхности половины слоя, вращающегося как одно целое с диском при различном перепаде давления и числах Вебера и Фруда, равных для глицерина $We=0,0024, Fr=417,6$, для масла $We=0,0022 Fr=461,0$



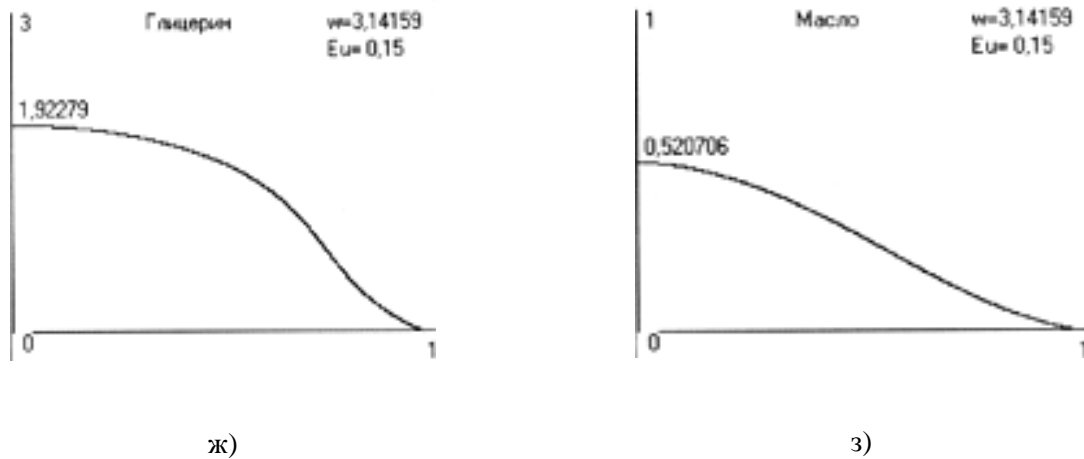


Рисунок 2 – Формы равновесия капли глицерина и масла при а),б) $Eu=-0.15$; в),г) $Eu=-0.05$; д),е) $Eu=0.05$; ж),з) $Eu=0.15$

Исследования показали, что масса слоя, удерживаемого силами поверхностного натяжения и тяжести с увеличением влияния давления атмосферы уменьшается по сравнению с давлением в центре капли уменьшается. С уменьшением внешнего давления у линии поверхности слоя может появиться точка перегиба. Капли глицерина, у которого угол смачивания ($\varepsilon_0 = 60^\circ$) значительно больше, чем у масла ($\varepsilon_0 = 15^\circ$) имеет большую высоту поверхности при прочих равных условиях. Высота капли жидкости зависит от скорости вращения и разности давлений. Могут существовать различные значения We , Fr и Eu , при которых капля будет иметь одинаковую высоту и близкую к совпадающей форму поверхности, что показано на рисунке 3. Левый рисунок соответствует значениям $We=0,0024$, $Fr=417,6$, $Eu= -0,1$; правый – $We=0,0016$, $Fr=644,9$, $Eu= 0,1$.

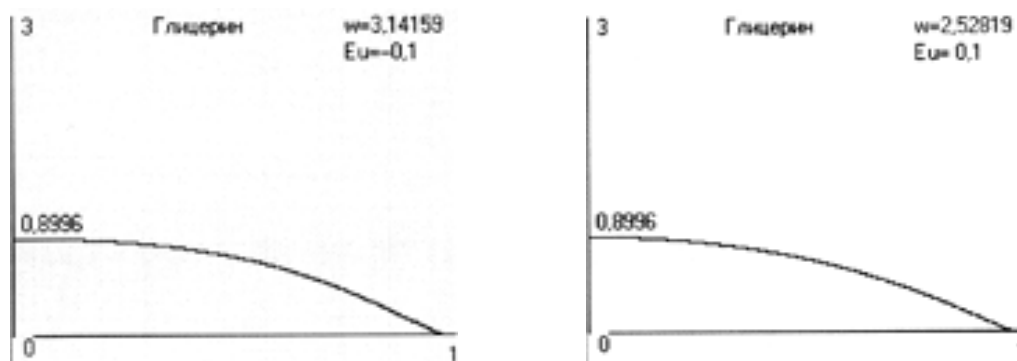


Рисунок 3 – Близкие по виду формы равновесия капли глицерина при различных значениях параметров We , Fr и Eu : $We=0,0024$, $Fr=417,6$, $Eu= -0,1$ и $We=0,0016$, $Fr=644,9$, $Eu= 0,1$

Проведенные автором результаты экспериментальных исследований позволяет сделать вывод, что при определенной угловой скорости вращения диска для вязкой жидкости могут наблюдаться осесимметричные формы капли. С увеличением угловой скорости от нее могут отщепляться капли близкие к неподвижным с периодически распределенными по углу возмущениями, что показано на рисунке 4.



Рисунок 4 – Вид сверху капли на вращающемся диске с периодически распределенными по углу возмущениями

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено движение капли вязкой жидкости на поверхности вращающегося диска в поле сил инерции, поверхностного натяжения и силы тяжести. Проведены экспериментальные исследования. Получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, описывающее относительное равновесие капли. Проведены его исследования во внутренней системе координат, связанной с поверхностью слоя. Численно получены и проанализированы формы относительного равновесия свободной поверхности капли.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. -М., -1973г.-192 с.
2. Гидромеханика невесомости/ Под ред. А.Д. Мышкиса.-М.: Наука, -1976.-506 с.
3. Епихин В.Е., Конон П.Н., Шкадов В.Я. О формах кольцевых слоев жидкости на поверхности вращающегося цилиндра// ИФЖ.-1988.-Т.55, N 3.-С. 423-430.
4. Конон П.Н., Шпортько В.В. Исследования плоских и осесимметричных слоев жидкости, неподвижных относительно внутренней поверхности вращающегося цилиндра// Вестник БРФФИ-2011.-№3.-С. 98-110.

SUMMARY

We consider a motion of a viscous liquid drops on the surface of the rotating disk in the inertia forces of surface tension and gravity. An experiment was conducted. A nonlinear differential equation of the second order partial derivatives, which describes the relative balance of the drop. Conducted his research in the internal coordinate system associated with the surface layer. Numerically obtained and analyzed the relative equilibrium shape of the free surface of the drop.

Поступила в редакцию 23.10.2013

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ЛАЗЕРНОЙ ОБРАБОТКЕ ГАЗОТЕРМИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ

д. т. н. ¹Девойно О.Г., к. т. н. ²Пилипчук А.П., ¹Кочеров А.Л.

¹УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

²УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск

В настоящее время интенсивно развивается лазерная обработка деталей, основанная на возможности лазерного излучения создавать на малом участке поверхности высокие плотности теплового потока, необходимые для нагрева или расплавления материала. При этом происходят структурные и фазовые превращения, возникают внутренние напряжения и деформации, под действием которых происходит изменение формы и размеров конструкции. Технологии лазерной закалки, наплавки, легирования и обработки газотермических покрытий широко используются в машиностроительном комплексе РБ, а также при ремонте деталей военной техники [1]. Разработанные в настоящее время технологии создания газотермических покрытий из самофлюсующихся сплавов системы Ni-Cr-B-Si с последующей лазерной обработкой позволяют восстанавливать изношенные детали до номинальных размеров. Основным объектом являются детали автотракторной техники, нефтяного и нефтехимического оборудования (валы насосов, рабочие колеса в местах их щелевых уплотнений, рис. 1).



Рисунок 1. – Восстановленные валы и шнеки насосов

Для всех видов покрытий является важной задачей обеспечение безотказного длительного функционирования поверхностного слоя. Следствием применения для создания покрытий материалов разнородных по отношению к основе, различия в теплопроводности, модулях упругости, значении коэффициентов термического расширения материалов покрытия и основы, температурных градиентах является высокий уровень остаточных напряжений, возникающих в системе «покрытие-основа». Данные напряжения, алгебраически складываясь с рабочими (внешними) напряжениями, могут их усиливать или ослаблять, изменять адгезионную и когезионную прочность покрытия, приводя к снижению прочности сцепления, являясь причиной образования трещин или отслаивания покрытия при эксплуатации [2].

Для устранения отмеченных недостатков необходимо при выборе материалов покрытия и режимов лазерной обработки учитывать напряженное состояние формируемого поверхностного слоя. Эффективным способом исследования процесса формирования остаточных напряжений в настоящее время является математическое моделирование на основе решения задачи теории пластичности. Для решения данной задачи целесообразно проведение вычислительного эксперимента, имеющего целью определение напряженного состояния нескольких возможных вариантов покрытия с последующим выбором оптимального с точки зрения прочности [3].

В настоящее время для определения напряженного состояния поверхностного слоя применяются экспериментальные и расчетные методы [4]. Использование данных методов позволяет прослеживать кинетику процессов развития внутренних напряжений и деформаций на протяжении

всего цикла деформирования, а не ограничиваться областью остаточных напряжений. Расчетные методы анализа напряженно-деформированного состояния при лазерной обработке основаны на использовании положений термоупругости и термопластичности. В наиболее общей постановке процесс формирования остаточных напряжений после поверхностного упрочнения в принципе сводится к сложной задаче теории термопластичности. Для решения технических задач целесообразно пользоваться частными вариантами данной теории, что позволяет облегчить процесс решения, но при этом позволяет достаточно полно исследовать напряженное состояние [5]. В данной работе для выявления закономерностей образования остаточных напряжений после поверхностного упрочнения предлагается использовать метод переменных параметров упругости [6,7]. В основе данного метода лежит представление уравнений термопластичности как уравнений термоупругости, в которых параметры упругости зависят не только от температуры, но и от напряженно-деформированного состояния материала в данной точке тела.

В первом приближении материал считаем идеально упругим ($E^{(1)} = E$) и по известным формулам теории упругости определяем напряжения $\sigma_*^{(1)}$. Далее по кривой деформирования находим $\varepsilon^{(1)} = \sigma_*^{(1)} / E$ и соответствующее значение $\sigma^{(1)}$. На следующих этапах расчета по методу переменных параметров упругости в каждой точке сечения в качестве модуля упругости в n -м приближении принимаем секущий модуль, определяемый в соответствии с кривой деформирования по значениям напряжения и деформации предыдущего приближения (рис. 2).

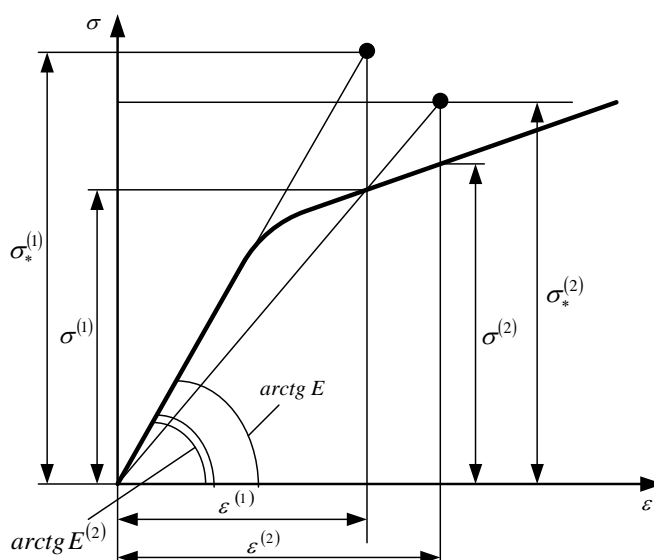


Рисунок 2. – Последовательность расчета по методу переменных параметров упругости

На основе метода переменных параметров упругости выполнен расчет напряженного состояния для системы никель – сталь 40X. На рисунке 3 представлено распределение напряжений в первых четырех приближениях в рассмотренной задаче. Расчет заканчивается при достаточной близости значений напряжений данного и предыдущего приближения $|\sigma^{(n)} - \sigma^{(n-1)}| < \Delta_1$, при условии, что изображающая точка лежит на кривой деформирования: $|\sigma_*^{(n)} - \sigma^{(n)}| < \Delta_2$. Величины Δ_1 и Δ_2 , имеющие размерность напряжений, характеризуют необходимую точность расчета ($\Delta_1 = \Delta_2 = 5$ МПа). В рассмотренной задаче данные условия выполнены в четвертом приближении, что свидетельствует о хорошей сходимости данного процесса последовательных приближений (кривые 2,3,4). Для сравнения на рисунке представлен результат расчета напряжений в предположении, что материал является идеально упругим (кривая 1). При этом напряжения в точке с максимальной температурой ($T_{\max} = 1100^\circ \text{C}$) значительно превосходят предел текучести ($\sigma = -1453$ МПа).

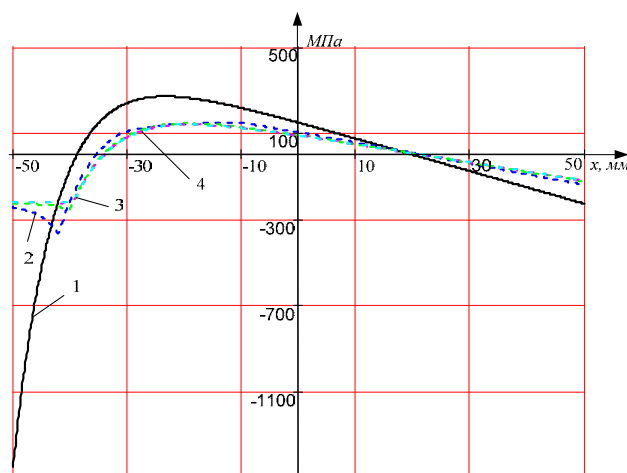


Рисунок 3. – Результаты расчета температурных напряжений в пластине на этапе нагрева (1 – упругий расчет; 2, 3, 4 – расчет по методу переменных параметров упругости)

Применение метода переменных параметров упругости позволило решить задачу оценки напряженного состояния в детали с покрытием. Полученное решение можно использовать для выбора материалов покрытия, определения оптимальных способов и режимов поверхностного упрочнения деталей на стадии их проектирования.

РЕЗЮМЕ

В статье обоснована необходимость определения напряженного состояния в деталях с покрытиями. Для выявления закономерностей образования остаточных напряжений после поверхностного упрочнения предлагается использовать метод переменных параметров упругости. Представлены результаты расчета остаточного напряжённого состояния поверхностного слоя стальных деталей с покрытием из никеля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилипчук, А.П. Использование современных технологий восстановления механических узлов при ремонте военной техники // Вест. ВА РБ. – 2007. – № 1. – С. 70–76.
2. Куприянов, И.Л., Геллер, М.А. Газотермические покрытия с повышенной прочностью сцепления. – Минск: Навука і тэхніка, 1990. – 176 с.
3. Девойно, О. Г., Оковитый, В.А., Шевцов А.И. Оптимизация технологических параметров обработки композиционных плазменных покрытий лазером непрерывного действия / О. Г. Девойно, В.А. Оковитый, А.И. Шевцов // Сварка и родственные технологии, №10, 2008. – С.56 – 59.
4. Григорьянц, А.Г. Основы лазерной обработки материалов / А.Г. Григорьянц – М. Машиностроение, 1989. – 304 с.
5. Биргер, И. А. Термопрочность деталей машин / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Демьянушко – М.: Машиностроение, 1975. – 455с.
6. Биргер, И. А., Мавлютов, Р.Р. Сопrotивление материалов: учебное пособие / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов – М.: Наука, 1986. – 560с.
7. Мэнсон, С. Температурные напряжения и малоцикловая усталость / С. Мэнсон – М. Машиностроение, 1989. – 304 с.

SUMMARY

The necessity of determination of the stress state in detail with coatings is shown in the article. The method of variable parameters of elasticity is proposed to identify the regularities of residual stresses appearance after surface hardening. The results of residual stress analysis of the surface layer of steel parts coated with nickel are presented.

Поступила в редакцию 03.11.2013

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЕБАНИЙ КОНСОЛЬНОГО ГРУЗОПОДЪЁМНОГО УСТРОЙСТВА

Д. Т. Н.¹ **Омаров Т.И.**, к. ф.-м. н. ¹ **Тулегенова К.Б.**, ¹ **Бекенов Е.Т.**,
к. ф.-м. н. ² **Кончина Л.В.**, к.п.н ² **Гончарова И.А.**

¹ *Казахский национальный технический университет им. К.И.Сатпаева, Алма-Ата, Казахстан*

² *Филиал Московского энергетического института, Смоленск, Россия*

Для определения истинных нагрузок в контурах звеньев исполнительных механизмов действующих машин удобно использовать дифференциальные уравнения, описывающие процессы, происходящие в процессе работы исследуемых машин. В частности, это относится к различным видам подъёмно-транспортных машин. Грузоподъемные устройства с консольным расположением рабочего органа, применяемые в горно-металлургической, строительной и других отраслях промышленности подвергаются в процессе эксплуатации значительным перегрузкам. Основная причина их – изгибные колебания консольной балки с параметрическим возбуждением, вызываемые изменением массы разгружаемого материала. Исследование таких устройств с помощью дифференциальных уравнений позволит выявить причины перегрузок несущих деталей привода и предложить меры по их усовершенствованию.

Консольное грузоподъемное устройство завалочной машины мартеновского цеха представляет собой двухопорную упругую балку 1 на подвижном основании 2 с закрепленной на свободном конце мульдой с шихтой 1. Для удобства исследования заменяем реальную дискретно-континуальную систему (рисунок 1) расчетной динамической схемой (рисунок 2) с двумя дискретными массами, одна из которых содержит переменную составляющую. Задача приведения распределенной по длине массы балки в точку D решалась на основе метода Рэлея из условия равенства кинетической энергии приведенной и исходной системы [1].

Основание хобота заключено в недеформированную качающуюся раму 4, которая с исходными дискретными массами $m_B, m_d, m_{рд}, m_t, m_p$ и моментом инерции поворотной рамы J_p может быть приведена к системе с одной массой m_1 , равной

$$m_1 = m_A + m_B + m_d + m_{рд} + m_t + m_p$$

и сосредоточенной в центре O масс данной системы, и с моментом инерции J_1 , равным моменту инерции исходной системы относительно центра масс

$$J_1 = J_p + m_A l_{OA}^2 + m_B l_{OB}^2 + m_d l_d^2 + m_{рд} l_{рд}^2 + m_t l_t^2.$$

Здесь обозначено: J_p – момент инерции рамы относительно центра O масс системы; массы: m_d – электродвигателя; $m_{рд}, m_t$ – редуктора и тормоза; m_p – рамы; $l_{OA}, l_{OB}, l_d, l_{рд}, l_t$ – соответственно расстояния от центра масс системы до центров указанных масс.

Основным видом движения при работе исследуемого консольного грузоподъемного устройства будут изгибные колебания балки хобота 1 (рисунок 1). Колебательный процесс оказывает наиболее разрушительное действие на детали и узлы машины. При разгрузке содержимого мульды в свод мартеновской печи происходит резкое изменение массы. Изменение какого-либо параметра (масса, жесткость) в механических системах с упругими звеньями и связями вызывает интенсивный процесс, называемый параметрическими колебаниями.

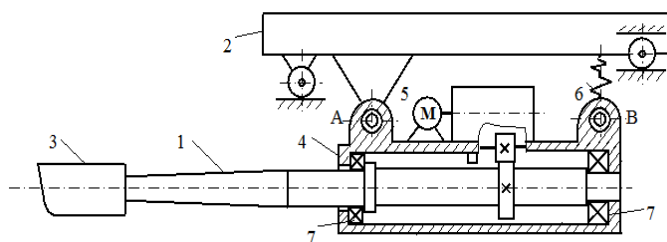


Рисунок 1. - Схема исходной системы консольного грузоподъемного устройства

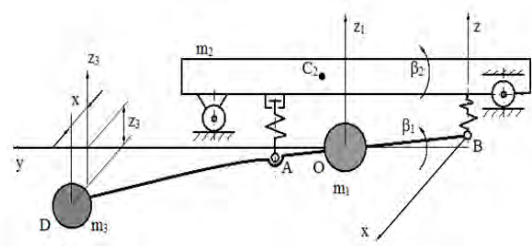


Рисунок 2. - Схема приведенной системы консольного грузоподъемного устройства

При особо неблагоприятных условиях возникает угроза разрушительного параметрического резонанса. В рассматриваемом случае параметрическое возбуждение колебаний происходит из-за изменения массы разгружаемого металлолома. Вид дальнейших колебаний определяет характер изменения массы, который рассматривается далее. Таким образом, математическая модель описывает в основном колебательный процесс с переменными параметрами (масса, жесткость, наличие зазоров).

В точке D конца хобота (исходная система, рисунки 1 и 2) сосредоточена масса m_3 , выражение для которой с учетом переменной массы имеет вид

$$m_3 = m_D + a_{10}(m_M + m_k \cos kt),$$

где m_D - приведенная масса балки хобота; m_M - масса мульды; $m_v = m_k \cos kt$ - переменная масса шихты (m_k - полная масса загруженного лома); a_{10} - коэффициент смещения центра масс мульды. Переменная масса m_v в первом приближении может быть представлена так [2]

$$m_v = \begin{cases} m_k \cos kt, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t \geq T \end{cases},$$

Время разгрузки равно $T = \frac{\Psi}{\omega}$, где ω - угловая скорость вращения хобота при выполнении операции разгрузки. Значение k определим из условия, что в момент времени $t = T$ $\cos kt = 0$, т.е. $k = \frac{\pi\omega}{2\Psi}$.

Массы m_1 и m_2 связаны невесомым, упругим двухопорным стержнем. Опоры стержня имеют нелинейные характеристики из-за наличия зазора в опоре А и переменной жесткости упругой связи в опоре В, что обозначено диаграммами на рисунке 2.

Изменение массы шахты при разгрузке вызывает реактивную составляющую усилия, действующую на систему. Отделившуюся массу можно представить в виде

$$m^* = a m_k (1 - \cos kt) \text{ при } 0 < t < T \text{ и } m^* = 0 \text{ при } t > T,$$

где T - время полной разгрузки шихты.

Расчётная схема (рисунок 2) имеет пять обобщённых координат:

z_1 и β_1 - плоское движение части АВ балки; z_3 и x - колебания дискретной массы в вертикальной и горизонтальной плоскостях; β_2 - колебания основания на котором смонтирована балка. При составлении дифференциальных уравнений из-за незначительности горизонтальных колебаний (координата x) и не существенного влияния на основной процесс движения основания (координата β_2) учитываются три обобщённые координаты.

Система дифференциальных уравнений, описывающих движение консольного грузоподъемного устройства (преимущественно изгибные колебания) имеет вид

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= \frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dR_{DA}^z}{dt} + \frac{H_A}{c_A} \cdot \frac{dP_A}{dt} + \frac{H_B}{c_B} \cdot \frac{dP_B}{dt} + R_{DA}^z + P_A + P_B - m_1 g J_1 \frac{d^2 \beta}{dt^2} = - \frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dM_{DA}}{dt} \\ &- \frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dR_{DA}^z}{dt} \ell_{OA} - \frac{H_A}{c_A} \frac{dP_A}{dt} \ell_{OA} + R_{DA}^z \ell_{OA} - P_A \ell_{OA} + P_B \ell_{OB} \\ J_1 \frac{d^2 \beta}{dt^2} &= - \frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dM_{DA}}{dt} - \frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dR_{DA}^z}{dt} \ell_{OA} - \frac{H_A}{c_A} \cdot \frac{dP_A}{dt} \ell_{OA} + \\ &+ \frac{H_B}{c_B} \cdot \frac{dP_B}{dt} \ell_{OB} - M_{DA} - R_{DA}^z \ell_{OA} - P_A \ell_{OA} + P_B \ell_{OB} \\ [m_D + a_{10}(m_M + m_v)] \frac{d^2 z_3}{dt^2} &= - \frac{H_D}{c_u} \cdot \frac{dR_{DA}^z}{dt} - R_{DA}^z - [m_D + a_{10}(m_M + m_v)] g + R_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено: J_1 – момент инерции совершающего плоское движение участка АВ относительно точки О – центра масс системы; C_A, H_A, C_B, H_B – коэффициенты, определяющие жесткости и диссипативные сопротивления упругих связей соответственно в точках А и В. $R_{DA}^z, R_{DA}^x, M_{DA}$ – реактивные составляющие, характеризующие взаимодействие частей исследуемой системы при расчленении в точке А:

$$R_{DA}^z = c_u (z_3 - z_1 + \beta_1 \ell_{OD}) \ell_1; \quad R_{DA}^x = c_u x; \quad M_{DA} = R_{DA}^z \ell_{DA} = c_u (z_3 - z_1 + \beta_1 \ell_{OD}) \ell_1,$$

где c_u – изгибная жесткость балки хобота; H_D – коэффициент диссипативного сопротивления материала балки хобота при деформации изгиба; P_A и P_B – восстанавливающие силы в шарнирах А и В; g – ускорение свободного падения.

Система нелинейных дифференциальных уравнений (1) имеет переменную структуру из-за наличия переменной массы, зазора в шарнире А, кусочно-линейной характеристики упругой связи в шарнире В. Поэтому выражения для сил P_A , P_B и коэффициентов H_B и C_B имеют различный вид. Ниже приводятся выражения для сил P_A , P_B и коэффициентов H_B и C_B .

$$P_A = -c_A [z_1 - \beta_1 \ell_{OA} - \delta_A \operatorname{sign} (z_1 - \ell_{OA} \beta_1)],$$

$$\text{если } |z_1 - \beta_1 \ell_{OA}| > \delta_A \text{ и } P_A = 0, \text{ если } |z_1 - \beta_1 \ell_{OA}| \leq \delta_A.$$

$$P_B = -c_{B1} (z_1 + \beta_1 \ell_{OB}), \text{ если } |z_1 + \beta_1 \ell_{OB}| \leq \delta_B$$

$$\text{и } P_B = -[c_{B1} \delta_B + c_{B2} (|z_1 + \beta_1 \ell_{OB}| - \delta_B)] \operatorname{sign} (z_1 + \beta_1 \ell_{OB}), \text{ если } |z_1 + \beta_1 \ell_{OB}| > \delta_B.$$

$$H_B = H_{B1}, \text{ если } |z_1 + \beta_1 \ell_{OB}| \leq \delta_B; \quad H_{B2}, \text{ если } |z_1 + \beta_1 \ell_{OB}| > \delta_B.$$

$$c_B = c_{B1}, \text{ если } |z_1 + \beta_1 \ell_{OB}| \leq \delta_B; \quad c_B = c_{B2}, \quad \text{если } |z_1 + \beta_1 \ell_{OB}| > \delta_B.$$

где c_{B1} – эквивалентная жесткость пружин 1 (рисунок 1) в упругом соединении В шатуна с рамой качания хобота; c_{B2} – эквивалентная жесткость на растяжение пальцев, фиксирующих пружины на шатуне механизма качания хобота, $2\delta_A$ – величина зазора в точке А, δ_B – величина максимальной деформации пружин 1 (рисунок 2).

Реактивные составляющие усилия, появляющиеся в результате изменения массы в проекциях на оси координат

$$R_x = A_x a_{10} m_k \frac{\pi}{4} \sin 2kt \quad \text{и} \quad R_z = A_z a_{10} m_k \frac{\pi}{4} \sin 2kt,$$

$$\text{где } A_z = -g \cos \varphi (\cos \varphi + \mu \sin \varphi), \quad A_x = -g \cos \varphi (\sin \varphi - \mu \cos \varphi),$$

Зависимости между обобщенными координатами Z_1, β_1 и координатами перемещения точек А и В, Z_A и Z_B , расчетной схемы выражается равенствами

$$Z_A = Z_1 - \beta_1 \ell_{OA} \quad \text{и} \quad Z_B = Z_1 + \beta_1 \ell_{OB},$$

где ℓ_{OA} и ℓ_{OB} – расстояния от центра масс О системы до точек А и В.

Деформация λ изгиба хобота в вертикальной плоскости, замеряемая в точке D хобота, определяется по формуле

$$\lambda = z_3 - z_1 + \beta_1 \ell_{DO}.$$

Система уравнений (1) решена численным методом (Рунге-Кутта) для параметров завалочной машины мартеновского цеха относительно усилий в шарнирах А и В – P_A и P_B . Решение показывает, что изменение массы возбуждает в консольной балке интенсивные изгибные колебания, вызывающие знакопеременные нагрузки на опоры А и В и подвижное основание. Шарнир А, где периодически раскрывается зазор испытывает ударные нагрузки. Максимальные по модулю значения нагрузок совпадают во времени, что дает значительную перегрузку системы.

Результаты решения системы дифференциальных уравнений движения (1) показывают, что динамические реакции в опорных точках при эксплуатации консольных грузоподъемных устройств значительно превосходят статические. Наиболее рациональным путем уменьшение нагрузок в элементах подобных устройств является изменение их структуры. На одно из таких решений получено авторское свидетельство [3].

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются колебания, возникающие при работе грузоподъемных устройств с консольным расположением рабочего органа и причины их вызывающие. Показано влияние переменной массы, нелинейных характеристик упругих связей и зазоров на возникновение динамических нагрузок в устройстве. Составлены дифференциальные уравнения движения системы, учитывающие все указанные выше реальные факторы. Дан анализ решения системы дифференциальных уравнений движения, который наглядно показывает наличие повышенных динамических нагрузок, появляющихся в процессе работы консольных грузоподъемных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей. Теория звука. – М.: Гостехтехиздат, том 1, 1940. – 500 с.
2. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. – М.: Наука, 1967, - 279 с.
3. А.с. 1164198 (СССР). Тележка подъемно – транспортного средства / С.Н. Кожевников, Е.Я. Антонюк, Т.И. Омаров. – Оpubл. в Б. И., 1985, №36.

SUMMARY

In work the fluctuations arising at work of load-lifting devices with a console arrangement of working body and their reason causing are considered. Influence of variable weight, nonlinear characteristics of elastic communications and backlashes on occurrence of dynamic loadings in the device is shown. The differential equations of movement the systems considering all real factors specified above are worked out. The analysis of the decision of system of the differential equations of movement which visually shows presence of the raised dynamic loadings appearing in the course of work of console load-lifting devices is given.

Поступила в редакцию 15.10.2013

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОГИБОВ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ, ЧАСТИЧНО ОПЕРТОЙ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

д. ф.-м. н. Яровая А. В., асп. Поддубный А. А.

УО «Белорусский государственный университет транспорта», Гомель

В промышленном и гражданском строительстве, транспортном машиностроении, при строительстве и восстановлении искусственных сооружений на железных и автомобильных дорогах широко используются слоистые, в том числе трехслойные элементы конструкций. Среди них достаточно часто встречаются балки и плиты, контактирующие с упругим основанием. Многочисленные исследования показывают, что в процессе их эксплуатации по ряду причин возможно появления зазора между конструкцией и основанием. При этом происходит изменение расчетной схемы конструкции и ее напряженно-деформированного состояния, что в ряде случаев приводит к преждевременному разрушению.

Вместе с тем принятые в настоящее время методы расчета балок и плит на упругом основании часто не учитывают неполный контакт конструкции и основания. Поэтому теоретические и экспериментальные исследования, направленные на совершенствование методов расчета элементов конструкций на упругом основании, позволяющие увеличить их долговечность и снизить затраты на содержание и ремонт, являются актуальными.

Статическое деформирование трехслойных элементов конструкций исследовано в [1–3]. В работе [3] рассмотрен изгиб трехслойной балки под действием локальных нагрузок с использованием разрывных функций Хевисайда и Дирака. В данной статье рассмотрен изгиб подобной балки с учетом полного или частичного опирания на упругое основание. Решения получены отдельно для трех участков, а затем «сшиты» с использованием условий равенства перемещений и усилий на границах. Для подтверждения адекватности полученных результатов был проведен собственный эксперимент.

Расчетная схема балки. Рассматривается прямоугольная трехслойная балка длиной l и размерами поперечного сечения $h \times b_0$ (рисунок 1). Наружные слои являются несущими, они тонкие и выполнены из достаточно прочного материала. Менее прочный толстый наполнитель разносит несущие слои на заданное расстояние по высоте балки и обеспечивает их совместную работу.

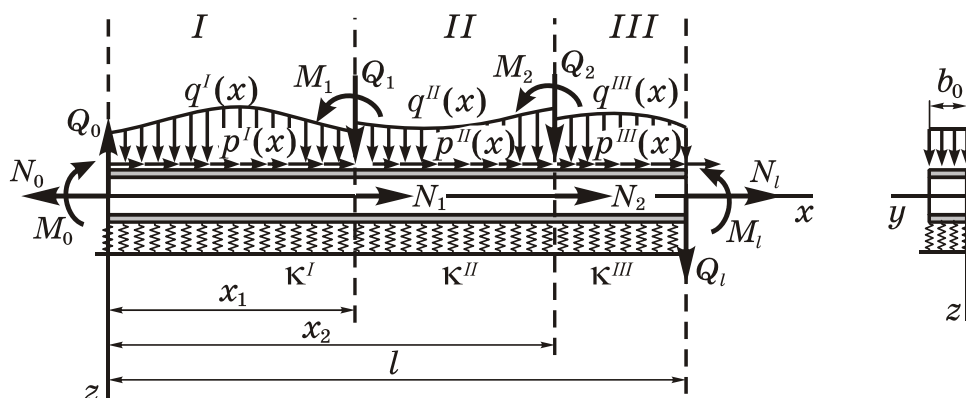


Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойной балки, частично или полностью опирающейся на упругое основание

Система координат x, y, z связана со срединной плоскостью наполнителя. Ось x направлена вдоль балки, ось z – вниз. Несущий слой, расположенный со стороны положительного направления оси z , считается первым слоем, следующий несущий слой – вторым, а наполнитель – третьим (см. рисунок 1). Номер слоя обозначен индексом k ($k = 1, 2, 3$).

На верхний внешний слой балки действуют распределенные поверхностные нагрузки, не изменяющиеся вдоль оси y . На торцах балки (при $x = 0$ и $x = l$) действуют сосредоточенные силы и моменты N_0, Q_0, M_0 и N_l, Q_l, M_l . К сечениям 1 ($x = x_1$) и 2 ($x = x_2$) приложены усилия N_1, Q_1, M_1 и N_2, Q_2, M_2 .

По длине балки выделим три участка I ($0 \leq x \leq x_1$), II ($x_1 \leq x \leq x_2$), III ($x_2 \leq x \leq l$). Обозначим: $p^n(x)$, $q^n(x)$, Pa – продольная и поперечная распределенные нагрузки на n -м участке ($n = I, II, III$); h_1^n , h_2^n , c^n – толщины 1-го и 2-го несущих слоев и половина толщины заполнителя на n -м участке. Таким образом, нагрузки на каждом из участков могут иметь различные величины и закон изменения, а могут и отсутствовать. Балка опирается на участки упругого основания различной жесткости, через κ^n обозначен коэффициент жесткости упругого основания на n -м участке. Если на одном или двух участках основание отсутствует, то необходимо принять нулевым соответствующий коэффициент жесткости.

Основные гипотезы. Для описания кинематики трехслойного пакета используется гипотеза «ломаной» линии: прямолинейная до деформирования нормаль при изгибе становится ломаной; в несущих слоях нормаль остается перпендикулярной к деформированной оси балки; в заполнителе за счет сдвига она поворачивается на дополнительный угол.

Между слоями предусмотрена склейка, не допускающая взаимного проскальзывания. Слои несжимаемы по толщине. Деформации малые. Материалы слоев в общем случае считаются ортотропными, проявляют упругие свойства, для них справедлив закон Гука.

Искомые функции. Постановка и решение задачи проводятся в перемещениях. В качестве искомых величин принимаются функции $w^n(x)$, $u^n(x)$ – прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, а также $\psi^n(x)$ – угол поворота нормали в заполнителе за счет сдвига (угол сдвига) на n -м участке.

В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений:

$$\begin{aligned} w^I(x_1) = w^{II}(x_1); \quad w^{II}(x_2) = w^{III}(x_2); \quad u^I(x_1) = u^{II}(x_1); \quad u^{II}(x_2) = u^{III}(x_2); \quad \psi^I(x_1) = \psi^{II}(x_1); \\ \psi^{II}(x_2) = \psi^{III}(x_2); \quad w'_{,xx}(x_1) = w''_{,xx}(x_1); \quad w''_{,xx}(x_2) = w'''_{,xx}(x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Если на торцах балки предусмотрены жесткие диафрагмы, которые препятствуют повороту нормали в заполнителе, то

$$\psi^I(0) = 0; \quad \psi^{III}(l) = 0. \quad (2)$$

что может служить граничными условиями. Если же диафрагмы на торцах не предусмотрены, то углы сдвига в заполнителе для торцевых сечений необходимо учитывать.

Модель упругого основания. Для описания действия упругого основания на n -ом участке используется модель Винклера, согласно которой реакция основания $q_R^n(x)$ пропорциональна прогибу $w^n(x)$ и направлена в противоположную сторону $q_R^n(x) = \kappa^n w^n(x)$.

Перемещения, деформации и напряжения. В направлении оси x перемещения $u_x^{(k)n}(x, z)$ для каждого из слоев выражаются с использованием введенных гипотез через три искомые функции зависимостями:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)n} &= u^n + c\psi^n - zw^n_{,x} \quad (c^n \leq z \leq c^n + h_1^n); \\ u_x^{(2)n} &= u^n - c\psi^n - zw^n_{,x} \quad (-c^n - h_2^n \leq z \leq -c^n); \\ u_x^{(3)n} &= u^n + z\psi^n - zw^n_{,x} \quad (-c^n \leq z \leq c^n), \end{aligned} \quad (3)$$

где z – координата рассматриваемого волокна.

Так как слои несжимаемы по толщине, то в направлении оси z перемещения точек балки равны прогибу срединной плоскости заполнителя: $u_z^{(k)n} = w^n$. В направлении оси y перемещения отсутствуют: $u_y^{(k)n} = 0$.

С помощью соотношений Коши и выражений для перемещений (3) в каждом слое определяются компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon_x^{(1)n} = u^n_{,x} + c\psi^n_{,x} - zw^n_{,xx} \quad (c^n \leq z \leq c^n + h_1^n);$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^{(2)n} &= u^n,_{,x} - c\Psi^n,_{,x} - zW^n,_{,xx} \quad (-c^n - h_2^n \leq z \leq -c^n); \\
\varepsilon_x^{(3)n}(x, z) &= u^n,_{,x} + z\Psi^n,_{,x} - zW^n,_{,xx} \quad (-c^n \leq z \leq c^n); \\
\varepsilon_{xz}^{(1)n} = \varepsilon_{zx}^{(1)n} &= 0; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)n} = \varepsilon_{zx}^{(2)n} = 0; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)n} = \varepsilon_{zx}^{(3)n} = \frac{1}{2}\Psi^n; \quad \varepsilon_z^{(k)n} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Из компонент тензора напряжений ненулевыми являются $\sigma_x^{(k)n}$ и $\sigma_{xz}^{(3)n} = \sigma_{zx}^{(3)n}$ ($k=1, 2, 3$ – номер слоя; $n = I, II, III$ – номер участка).

Внутренние силы и моменты. Внутренние усилия для n -го участка вводятся в виде интегралов по толщине каждого слоя:

$$\begin{aligned}
N^{(1)n}(x) &= b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} dz; \quad M^{(1)n}(x) = b_0 \int_{c^n}^{c^n+h_1^n} \sigma_x^{(1)n} z dz; \\
N^{(2)n}(x) &= b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} dz; \quad M^{(2)n}(x) = b_0 \int_{-c^n-h_2^n}^{-c^n} \sigma_x^{(2)n} z dz; \\
N^{(3)n}(x) &= b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} dz; \quad M^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_x^{(3)n} z dz; \quad Q^{(3)n}(x) = b_0 \int_{-c^n}^{c^n} \sigma_{xz}^{(3)n} dz,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $N^{(k)n}, M^{(k)n}$ – продольная сила и изгибающий момент в сечении с координатой x для k -го слоя; $Q^{(3)n}$ – поперечная сила для 3-го слоя (заполнителя); b_0 – ширина балки; $\sigma_x^{(k)n}, \sigma_{xz}^{(3)n}$ – компоненты тензора напряжений для k -го слоя.

Удобно ввести полные внутренние усилия для n -го участка, просуммировав силы и моменты (5) по слоям:

$$N^n = \sum_{k=1}^3 N^{(k)n}; \quad M^n = \sum_{k=1}^3 M^{(k)n}; \quad Q^n = Q^{(3)n}; \quad H^n = c^n(N^{(1)n} - N^{(2)n}) + M^{(3)n}, \tag{6}$$

где N^n, M^n, Q^n – полные продольная сила, изгибающий момент и поперечная сила; H^n – дополнительный момент, возникающий из-за сдвига в заполнителе (момент сдвига).

Уравнения равновесия в усилиях. К деформированной балке применяется принцип возможных перемещений Лагранжа, который выражает условие равновесия системы внутренних и внешних сил. Для этого необходимо составить выражения возможных работ внешних и внутренних сил и приравнять их. Из полученного равенства следуют дифференциальные уравнения равновесия в усилиях

$$N^n,_{,x} + b_0 p^n = 0; \quad H^n,_{,x} - Q^n = 0; \quad M^n,_{,xx} - b_0 q_R^n + b_0 q^n = 0, \tag{7}$$

силовые граничные условия

$$N^I(0) = N_0; \quad M^I(0) = M_0; \quad M^I,_{,x}(0) = Q_0; \quad N^{III}(l) = N_l; \quad M^{III}(l) = M_l; \quad M^{III},_{,x}(l) = Q_l; \tag{8}$$

$$H^I(0) = 0; \quad H^{III}(l) = 0 \tag{9}$$

и условия для внутренних усилий в точках сопряжения участков $x = x_1$ и $x = x_2$:

$$N^I(x_1) - N^{II}(x_1) = N_1; \quad M^I(x_1) - M^{II}(x_1) = M_1; \quad M^I,_{,x}(x_1) - M^{II},_{,x}(x_1) = Q_1;$$

$$H^I(x_1) - H^{II}(x_1) = 0; \quad N^{II}(x_2) - N^{III}(x_2) = N_2; \quad M^{II}(x_2) - M^{III}(x_2) = M_2;$$

$$M^{II},_{,x}(x_2) - M^{III},_{,x}(x_2) = Q_2; \quad H^{II}(x_2) - H^{III}(x_2) = 0. \tag{10}$$

Если на левом ($x = 0$) и правом ($x = l$) торцах стержня имеются жесткие диафрагмы, то граничные условия (9) не справедливы. Вместо них необходимо использовать условия равенства нулю углов сдвига на торцах (2). При отсутствии сосредоточенных внешних усилий в сечениях 1 и 2 в правой части условий (10) будут нули.

Закон Гука. При изгибе упругой балки относительно оси y деформации $\varepsilon_y = 0$. Кроме этого, так как материал несжимаем, то $\varepsilon_z = 0$. С учетом этого закон Гука имеет вид:

$$\sigma_x = A_x \varepsilon_x; \quad A_x = \frac{E_x (1 - \nu_{yz} \nu_{zy})}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx} - \nu_{yz} \nu_{zy} - \nu_{xz} \nu_{zx} - \nu_{xy} \nu_{yz} \nu_{zx} - \nu_{xz} \nu_{zy} \nu_{yx}}, \quad (11)$$

где E_x – модуль Юнга; $\nu_{xy}, \nu_{yx}, \nu_{xz}, \nu_{zx}, \nu_{yz}, \nu_{zy}$ – коэффициенты Пуассона.

Выражение внутренних усилий через перемещения. Применяя соотношения (4), (5) и (11), выразим компоненты тензора напряжений в слоях через перемещения, и далее внутренние силы и моменты через функции $w^n(x), u^n(x), \psi^n(x)$:

$$\begin{aligned} N^n &= b_0 (a_1^n u^n{}_{,x} + a_6^n \psi^n{}_{,x} - a_7^n w^n{}_{,xx}), & H^n &= b_0 (a_6^n u^n{}_{,x} + a_2^n \psi^n{}_{,x} - a_3^n w^n{}_{,xx}); \\ Q^n &= b_0 a_5^n \psi^n; & M^n &= b_0 (a_7^n u^n{}_{,x} + a_3^n \psi^n{}_{,x} - a_4^n w^n{}_{,xx}), \end{aligned} \quad (12)$$

где a_1^n, \dots, a_7^n – параметры, характеризующие геометрические и упругие свойства слоев на n -м участке:

$$\begin{aligned} a_1^n &= A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + 2A_x^{(3)} c^n; & a_2^n &= c^{n2} [A_x^{(1)} h_1^n + A_x^{(2)} h_2^n + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^n]; \\ a_3^n &= c^n [A_x^{(1)} h_1^n (c^n + \frac{1}{2} h_1^n) + A_x^{(2)} h_2^n (c^n + \frac{1}{2} h_2^n) + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^{n2}]; \\ a_4^n &= A_x^{(1)} h_1^n (c^{n2} + c^n h_1^n + \frac{1}{3} h_1^{n2}) + A_x^{(2)} h_2^n (c^{n2} + c^n h_2^n + \frac{1}{3} h_2^{n2}) + \frac{2}{3} A_x^{(3)} c^{n3}; \\ a_5^n &= 2G_{xz}^{(3)} c^n; & a_6^n &= c^n [A_x^{(1)} h_1^n - A_x^{(2)} h_2^n]; & a_7^n &= A_x^{(1)} h_1^n (c^n + \frac{1}{2} h_1^n) - A_x^{(2)} h_2^n (c^n + \frac{1}{2} h_2^n). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим выражения (12) в уравнения (7). Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия упругого трехслойной балки в перемещениях. Для n -го участка, связанного с упругим основанием, эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1^n u^n{}_{,xx} + a_6^n \psi^n{}_{,xx} - a_7^n w^n{}_{,xxx} &= -p^n, \\ a_6^n u^n{}_{,xx} + a_2^n \psi^n{}_{,xx} - a_3^n w^n{}_{,xxx} - a_5^n \psi^n &= 0, \\ a_7^n u^n{}_{,xxx} + a_3^n \psi^n{}_{,xxx} - a_4^n w^n{}_{,xxxx} - \kappa^n w^n &= -q^n, \end{aligned} \quad (14)$$

Если n -й участок не связан с упругим основанием, то третье уравнение системы (14) будет следующим: $a_7^n u^n{}_{,xxx} + a_3^n \psi^n{}_{,xxx} - a_4^n w^n{}_{,xxxx} = -q^n$.

Определение перемещений на участках. Соотношения для сдвига в заполнителе $\psi^n(x)$, прогиба $w^n(x)$ и продольного перемещения срединной плоскости заполнителя $u^n(x)$ получим, решив соответствующие системы уравнений равновесия. Заметим, что аналитический вид решений зависит от типа упругого основания.

Для n -го участка, связанного с упругим основанием малой или большой жесткости

$$\begin{aligned} w^n(x) &= C_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + w_p^n(x); \\ \psi^n(x) &= C_1^n b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^n b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_3^n b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + \\ &+ C_4^n b_2^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^n b_3^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_5^n b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^n b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^n b_3^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^n b_2^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^n + f_1^n(x); \\ u^n(x) &= C_1^n b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) - C_3^n b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_3^n b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + \\ &+ C_4^n b_5^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_4^n b_6^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_5^n b_6^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) - C_5^n b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + \\ &+ C_6^n b_6^n \operatorname{sh}(\beta_1^n x) \cos(\beta_2^n x) + C_6^n b_5^n \operatorname{ch}(\beta_1^n x) \sin(\beta_2^n x) + C_7^n \alpha_{12}^n + C_8^n x + C_9^n + f_2^n(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Для n -го участка, на упругом основании средней жесткости

$$w^n(x) = C_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_2^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_3^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + C_4^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_5^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_6^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + w_p^n;$$

$$\begin{aligned}
\psi^n(x) &= C_1^n b_1^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_1^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^n b_7^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^n b_7^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\
&\quad + C_5^n b_8^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^n b_8^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^n + f_1^n(x); \\
u^n(x) &= C_1^n b_4^n \operatorname{ch}(\lambda_1^n x) + C_2^n b_4^n \operatorname{sh}(\lambda_1^n x) + C_3^n b_9^n \operatorname{ch}(\lambda_3^n x) + C_4^n b_9^n \operatorname{sh}(\lambda_3^n x) + \\
&\quad + C_5^n b_{10}^n \operatorname{ch}(\lambda_5^n x) + C_6^n b_{10}^n \operatorname{sh}(\lambda_5^n x) + C_7^n \alpha_{12}^n + C_8^n x + C_9^n + f_2^n(x). \quad (16)
\end{aligned}$$

Если n -й участок не связан с упругим основанием, то

$$\begin{aligned}
\psi^n(x) &= C_1^n b_{11}^n + C_2^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + g_1^n(x); \\
w^n(x) &= C_1^n (\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3 / 6) + C_2^n b_{14}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_3^n b_{14}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_4^n x^2 / 2 + C_5^n x + C_6^n + g_2^n(x); \\
u^n(x) &= C_1^n (b_{15}^n + b_{16}^n x^2) + C_2^n b_{17}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) + C_3^n b_{17}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) + C_4^n \alpha_{13}^n x + C_5^n \alpha_{13}^n + C_7^n x + C_8^n + g_3^n(x). \quad (17)
\end{aligned}$$

В выражениях (15)–(17) C_1^n, \dots, C_9^n – константы интегрирования, $w_p^n(x)$ – частное решение, зависящее от вида нагрузки, коэффициенты $b_i^n, \alpha_i^n, \beta_i^n$ выражаются через параметры a_i^n (13), а функции определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
f_1^n(x) &= \alpha_8^n w_{p,xxx}^n + \alpha_9^n \int w_p^n dx + \alpha_{10}^n \int q^n dx + \alpha_{11}^n p^n; \\
f_2^n(x) &= \alpha_8^n \alpha_{12}^n w_{p,xxx}^n + \alpha_9^n \alpha_{12}^n \int w_p^n dx + \alpha_{13}^n w_{p,x}^n + \alpha_{10}^n \alpha_{12}^n \int q^n dx + \alpha_{11}^n \alpha_{12}^n p^n + \alpha_{14}^n \iint p^n dx dx; \\
g_1^n(x) &= b_{12}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \left(\int q^n dx \right) dx - b_{12}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \left(\int q^n dx \right) dx + \\
&\quad + b_{13}^n \operatorname{sh}(\beta_3^n x) \int \operatorname{ch}(\beta_3^n x) p dx - b_{13}^n \operatorname{ch}(\beta_3^n x) \int \operatorname{sh}(\beta_3^n x) p dx; \\
g_2^n(x) &= \alpha_{17}^n \int g_1^n dx + \alpha_{18}^n \iiint q^n dx dx dx + \alpha_{19}^n \iiint p^n dx dx dx; \\
g_3^n(x) &= b_{18}^n g_1^n(x) + b_{19}^n g_2^n(x) + \alpha_{13}^n \alpha_{18}^n \iiint q^n dx dx dx + b_{20}^n \iiint p^n dx dx dx.
\end{aligned}$$

Для определения констант интегрирования необходимо учесть граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом.

Граничные условия. На левом и правом торцах балки должны выполняться условия для внутренних усилий (8), (9). Выразив усилия через перемещения, согласно (14), получим:

– на левом торце ($x = 0$):

$$\begin{aligned}
\left(a_1^I u^I,{}_x + a_6^I \psi^I,{}_x - a_7^I w^I,{}_{xx} \right)_{x=0} &= N_0 / b_0; \quad \left(a_7^I u^I,{}_x + a_3^I \psi^I,{}_x - a_4^I w^I,{}_{xx} \right)_{x=0} = M_0 / b_0; \\
\left(a_7^I u^I,{}_{xx} + a_3^I \psi^I,{}_{xx} - a_4^I w^I,{}_{xxx} \right)_{x=0} &= Q_0 / b_0; \quad \left(a_6^I u^I,{}_x + a_2^I \psi^I,{}_x - a_3^I w^I,{}_{xx} \right)_{x=0} = 0; \quad (18)
\end{aligned}$$

– на правом торце ($x = l$):

$$\begin{aligned}
\left(a_1^{III} u^{III},{}_x + a_6^{III} \psi^{III},{}_x - a_7^{III} w^{III},{}_{xx} \right)_{x=l} &= N_l / b_0; \quad \left(a_7^{III} u^{III},{}_x + a_3^{III} \psi^{III},{}_x - a_4^{III} w^{III},{}_{xx} \right)_{x=l} = M_l / b_0; \\
\left(a_7^{III} u^{III},{}_{xx} + a_3^{III} \psi^{III},{}_{xx} - a_4^{III} w^{III},{}_{xxx} \right)_{x=l} &= Q_l / b_0; \quad \left(a_6^{III} u^{III},{}_x + a_2^{III} \psi^{III},{}_x - a_3^{III} w^{III},{}_{xx} \right)_{x=l} = 0. \quad (19)
\end{aligned}$$

При наличии жестких диафрагм на торцах последние условия в соотношениях (18), (19) не справедливы. Вместо них необходимо использовать условия равенства нулю углов сдвига (2). Если балка, кроме опирания на упругое основание, жестко или шарнирно закреплена на торцах, вместо граничных условий в усилиях (18), (19) удобнее условия в перемещениях.

Рассмотрим конкретную балку с жесткими диафрагмами на торцах, свободно лежащую на упругом основании, причем на среднем участке основание отсутствует (рисунок 2). Для нее граничные условия записываются так:

$$\begin{aligned}
\left(a_1^I u^I,{}_x + a_6^I \psi^I,{}_x - a_7^I w^I,{}_{xx} \right)_{x=0} &= 0; \quad \left(a_7^I u^I,{}_x + a_3^I \psi^I,{}_x - a_4^I w^I,{}_{xx} \right)_{x=0} = 0; \\
\left(a_7^I u^I,{}_{xx} + a_3^I \psi^I,{}_{xx} - a_4^I w^I,{}_{xxx} \right)_{x=0} &= 0; \quad \psi^I(0) = 0;
\end{aligned}$$

$$\left(a_1^{\text{III}} u^{\text{III}},_x + a_6^{\text{III}} \psi^{\text{III}},_x - a_7^{\text{III}} w^{\text{III}},_{xx} \right)_{x=l} = 0; \quad \left(a_7^{\text{III}} u^{\text{III}},_x + a_3^{\text{III}} \psi^{\text{III}},_x - a_4^{\text{III}} w^{\text{III}},_{xx} \right)_{x=l} = 0;$$

$$\left(a_7^{\text{III}} u^{\text{III}},_{xx} + a_3^{\text{III}} \psi^{\text{III}},_{xx} - a_4^{\text{III}} w^{\text{III}},_{xxx} \right)_{x=l} = 0; \quad \psi^{\text{III}}(l) = 0.$$

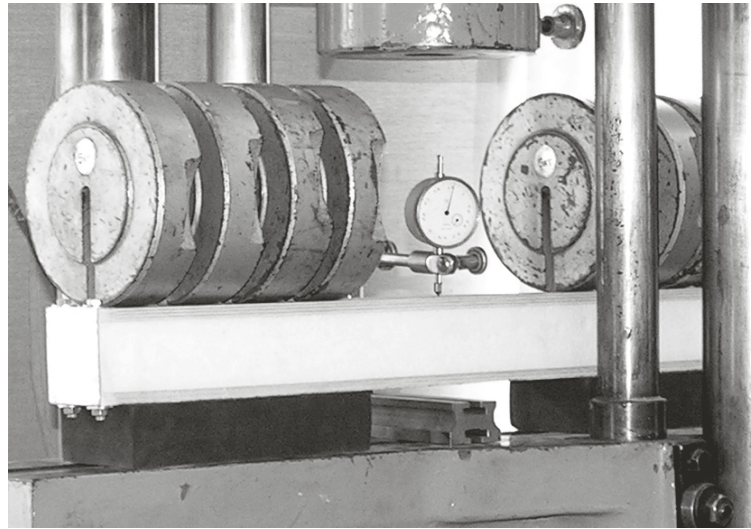


Рисунок 2 – Трехслойная балка с диафрагмами на торцах, опирающаяся на упругое основание двумя крайними участками.

Условия сопряжения на границах участков. На границах первого и второго ($x = x_1$) и второго и третьего ($x = x_2$) участков должны выполняться условия равенства перемещений и внутренних усилий с учетом приложенных сосредоточенных внешних сил и моментов.

Принимая во внимание выражения (10), получим следующие условия сопряжения в перемещениях на границе участков *I* и *II* ($x = x_1$):

$$w^I(x_1) = w^{II}(x_1); \quad u^I(x_1) = u^{II}(x_1); \quad \psi^I(x_1) = \psi^{II}(x_1); \quad w^I,_x(x_1) = w^{II},_x(x_1);$$

$$\left(a_1^I u^I,_x + a_6^I \psi^I,_x - a_7^I w^I,_xx - a_1^{II} u^{II},_x - a_6^{II} \psi^{II},_x + a_7^{II} w^{II},_xx \right)_{x=x_1} = N_1 / b_0;$$

$$\left(a_7^I u^I,_x + a_3^I \psi^I,_x - a_4^I w^I,_xx - a_7^{II} u^{II},_x - a_3^{II} \psi^{II},_x + a_4^{II} w^{II},_xx \right)_{x=x_1} = M_1 / b_0;$$

$$\left(a_7^I u^I,_xx + a_3^I \psi^I,_xx - a_4^I w^I,_xxx - a_7^{II} u^{II},_xx - a_3^{II} \psi^{II},_xx + a_4^{II} w^{II},_xxx \right)_{x=x_1} = Q_1 / b_0;$$

$$\left(a_6^I u^I,_x + a_2^I \psi^I,_x - a_3^I w^I,_xx - a_6^{II} u^{II},_x - a_2^{II} \psi^{II},_x + a_3^{II} w^{II},_xx \right)_{x=x_1} = 0. \quad (20)$$

На границе участков *II* и *III* ($x = x_2$) следует использовать условия, аналогичные (20), заменив индекс *I* на *II*, *II* на *III*, а координату x_1 на x_2 .

Граничные условия на торцах и условия сопряжения на границах участков позволяют составить систему 24-х линейных алгебраических уравнений для определения констант интегрирования.

Описание эксперимента. Эксперимент был проведен в лаборатории при кафедре «Строительная механика» УО «БелГУТ». Испытывалась трехслойная балка прямоугольного поперечного сечения с жесткими диафрагмами на торцах, опирающаяся на упругое основание двумя крайними участками (см. рисунок 2). Ранее были теоретически и экспериментально получены значения прогибов этой балки, установленной на шарнирные опоры и не связанной с упругим основанием [4].

Несущие слои выполнены из семислойной березовой фанеры с модулями упругости $E_1 = 6000$ МПа, $G_1 = 750$ МПа, наполнитель – из пенополистирола, для которого $E_2 = 15$ МПа, $G_2 = 5,14$ МПа. Геометрические размеры балки следующие: длина $l = 660$ мм, ширина $b_0 = 60$ мм, высота сечения $h = 66$ мм, толщины слоев $h_1 = h_2 = 8$ мм, $h_3 = 50$ мм. Распределенная по всей длине нагрузка прикладывалась к балке с помощью 13 грузов по 5 кг, локальная распределенная нагрузка на двух крайних участках – с помощью 8 грузов по 5 кг. Прогибы балки определялись при помощи индикаторов часового типа ИЧ-10 (цена деления шкалы $m = 0,01$ мм). Жесткость упругого основания $\kappa = 213$ МН/м³ была получена экспериментально.

Результаты. При численной реализации решений интенсивность распределенной нагрузки, модули упругости материалов и толщины слоев в трехслойном пакете фанера–пенополистирол–фанера принимались такими же, что и в проведенном эксперименте. Теоретически и экспериментально были определены прогибы балки при полном и неполном контакте с упругим основанием под действием нагрузки, распределенной по всей длине или приложенной локально. Например, для балки, опирающейся на упругое основание двумя крайними участками и нагруженной на этих участках локальной распределенной нагрузкой (см. рисунок 2), наибольший прогиб w_{max} составил 0,736 мм по данным расчета и 0,81 мм по результатам эксперимента.

Выводы. Числовые значения прогибов, полученных теоретически, достаточно хорошо согласуются с данными проведенного испытания, что подтверждает точность и достоверность предложенной методики расчета трехслойной балки при ее неполном контакте с упругим основанием. Однако некоторые расхождения результатов показывают на необходимость проведения дальнейших теоретических и экспериментальных исследований, направленных на уточнение расчетных зависимостей для перемещений и напряжений в трехслойных конструкциях, так как во многих случаях они являются элементами сложных и ответственных сооружений.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрен изгиб упругой трехслойной балки под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок при неполном контакте с упругим основанием. По длине балки выделены три участка, на каждом из которых нагрузки и жесткость упругого основания могут иметь различную величину, а могут и отсутствовать. Выведена система дифференциальных уравнений равновесия, получено ее аналитическое решение в перемещениях, выписаны граничные условия и условия сопряжения на границах участков. Получены числовые значения прогибов теоретическим и экспериментальным путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.
2. Плескачевский, Ю. М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
3. Андреев, А. Н. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания / А. Н. Андреев, Ю. В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
4. Яровая, А. В. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов упругой шарнирно опертой трехслойной балки / А. В. Яровая, А. А. Поддубный // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. 2012. № 2(25). – С. 97-102.

SUMMARY

Bending of elastic sandwich beams under distributed and lumped loads of incomplete contact with the elastic base. The length beams allocated three sections each of which load and stiffness of the elastic base may have a different value and may be absent. A system of differential equations of equilibrium, obtained an analytic solution in terms of displacements, written boundary conditions and the matching conditions on the boundary. Obtained numerical values of deflections theoretical and experimental way.

Поступила в редакцию 05.11.2013

АНАЛИЗ ПОВРЕЖДЕННОСТИ БЕДРЕННОЙ КОСТИ С ПОСТРЕЗЕКЦИОННЫМ ДЕФЕКТОМ ПРИ ДЕЙСТВИИ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

к. ф.-м. н.¹ **Босяков С. М.**, к. м. н.² **Шпилевский И. Э.**, асп.¹ **Алексеев Д. В.**

¹ *Белорусский государственный университет, Минск*

² *Республиканский научно-практический центр травматологии и ортопедии, Минск*

Введение. Основным методом лечения доброкачественных новообразований костей конечностей является хирургический, при котором осуществляется секторальная резекция (удаление пораженного участка с формированием секторального дефекта кости) в соответствии со схемой, представленной на рисунке 1.

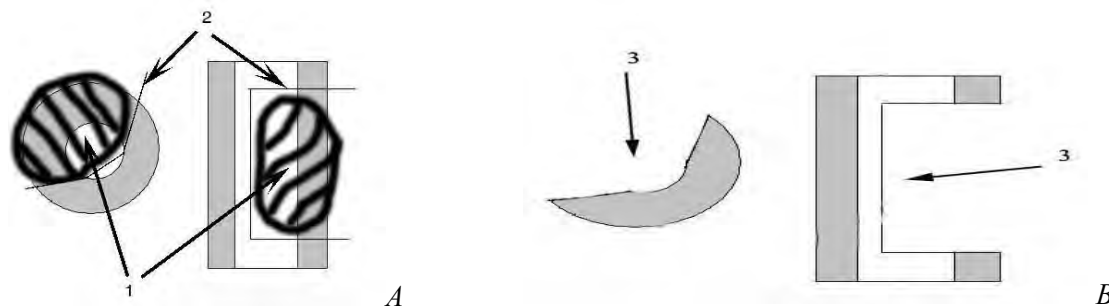


Рисунок 1. – Схема секторальной резекции:

А – фрагмент трубчатой кости до резекции (1 – новообразование, 2 – линии иссечения кости);

В – фрагмент трубчатой кости после выполнения резекции (3 – пострезекционный дефект).

В результате прочность сегмента снижается и появляется риск патологического перелома кости на уровне резекции, что существенно снижает функциональные возможности конечности и качество жизни пациента [1, 2]. Обзор исследований, направленных на разработку критериев прогнозирования трещин и переломов в костях с дефектами и неповрежденных костях, показывает, что для этого используются конечно-элементное моделирование, рентгеновская компьютерная томография или рутинная рентгенография. В частности, в работе [3] предложен подход к прогнозированию переломов в вертельной области бедра с метастатическим дефектом, основанный на ретроспективном анализе рентгенограмм пациентов с высокой вероятностью патологического перелома и с фактически наступившим переломом. В исследовании [4] на основании сравнительного анализа данных вычислительного конечно-элементного расчета удельной энергии деформации большеберцовой кости получено соотношение, определяющее величину крутящего момента, при действии которого происходит возникновение трещины в окрестности пострезекционного или метастатического дефекта. В работе [5] предложено прогнозировать трещины в окрестности метастатического повреждения на основании возникновения пластических деформаций. Методика прогнозирования патологического перелома после секторальной резекции основанная на непосредственном использовании количественной компьютерной томографии изложена в исследовании [6].

Большое внимание при прогнозировании прочности трубчатых костей с пострезекционными и метастатическими дефектами, а также возникновения в них патологических переломов уделяется нахождению главных или эквивалентных напряжений [7]. Обзор исследований, выполненных в этом направлении, представлен в работе [8]. С нахождением главных напряжений также связан подход оценки прочности кости, основанный на определении поврежденности костной ткани. В частности, в работе [9] предложено использование коэффициентов безопасности (или коэффициентов, характеризующих запас прочности), которые определяются отношением допустимого в соответствии с определенной теорией прочности, напряжения к расчетному напряжению. Значения коэффициентов безопасности определяются для каждого из конечных элементов. Величина коэффициента меньшая единицы, указывает на поврежденность соответствующего элемента и позволяет прогнозировать локализацию и характер перелома. Непосредственное измерение объема поврежденных конечных элементов для оценки прочности дистального отдела лучевой кости и проксимального отдела бедренной кости предложено в работах [10–12]. Здесь поврежденным считается элемент, для которого не выполняется определенный критерий прочности. Преимуществом такого подхода является не только возможность прогнозирования возникновения трещины или перелома, а также возможность определения локализации и характера перелома. Настоящая

работа развивает это актуальное направление и посвящена конечно-элементному анализу поврежденности бедренной кости, содержащей пострезекционный дефект в различных отделах.

Конечно-элементное моделирование. Компьютерная томография анатомического препарата бедренной кости выполнена на спиральном рентгеновском томографе Siemens Somatom Emotion 16, шаг среза 2 мм. Генерация трехмерной твердотельной модели бедренной кости проведена с применением компьютерной системы обработки медицинских изображений ScanIP (Simpleware Ltd., UK). Усредненная виртуальная стереолитографическая модель (STL-модель) обработана с использованием различных масок и фильтров таким образом, чтобы, сохранив максимально подробно особенности анатомического строения кости, минимизировать затраты машинных ресурсов при их обработке. STL-модель преобразована в твердотельную с применением CAD-пакета CATIA V5 (Dassault Systèmes, France). После импортирования модели в программную среду пакета ANSYS Workbench 14.0 (ANSYS Inc., USA) построены пострезекционные дефекты. Все секторальные дефекты были локализованы в средней трети бедренной кости и располагались по ее наружной поверхности. Длина дефекта по оси кости составляла d , $2d$, $3d$ и $4d$ (d – диаметр средней поверхности кости на уровне дефекта); угловые размеры дефектов 90° , 180° и 270° .

Величина статической нагрузки, действующей на бедренную кость, составляла 800 Н. Нагрузка направлена вдоль оси, проходящей от верхнего полюса головки бедра до середины расстояния между крайними нижними отделами мышечков бедра, как показано на рисунке 2-В. Зона приложения нагрузки составляла третью часть верхнего сегмента головки бедренной кости. Граничные условия определены таким образом, что головка бедренной кости (участок контакта с вертлужной впадиной) и нижние отделы мышечков бедра (участки контакта с мышечками большеберцовой кости) жестко заделаны [2]. Генерация пострезекционного дефекта в средней трети бедренной кости, угловой и линейный размеры которого составляют 180° и $2d$, область заделки мышечков бедренной кости и приложения нагрузки показаны на рисунке 2.

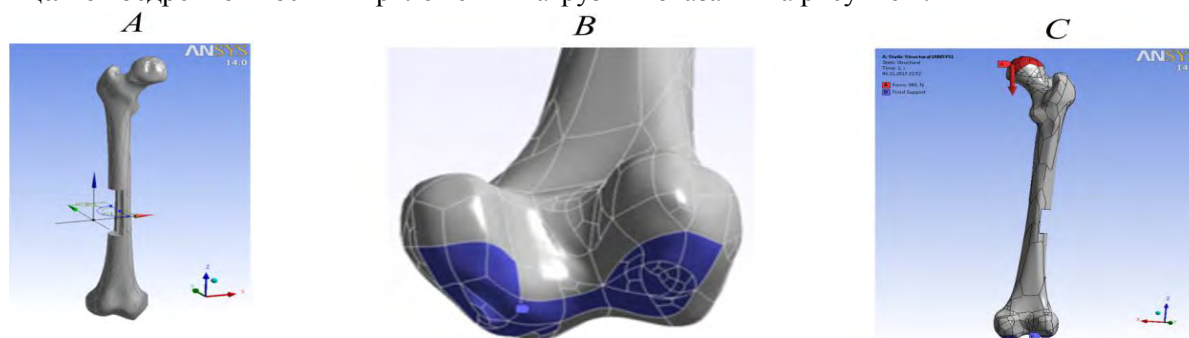


Рисунок 2. – Генерация пострезекционного дефекта (А); область жесткой заделки мышечков бедренной кости (В); зона приложения и ось действия нагрузки к головке бедра нагрузки (С)

Костная ткань является однородной изотропной средой; модуль упругости которой 18 ГПа, коэффициент Пуассона 0,3 (постоянные упругости соответствуют кортикальной костной ткани [13]). Для всех моделей костей задавалось свободное конечно-элементное разбиение (максимальный размер конечного элемента равен 3 мм), за исключением зон, находящихся у концентраторов пострезекционного дефекта (максимальный размер конечного элемента составляет 0,1 мм).

Анализ поврежденности. Согласно модели тела с опасным объемом абсолютная мера поврежденности определяется как объем материала с критическим уровнем в нем напряжений [14]. В качестве критерия ограничения опасных объемов в области пострезекционного отверстия использованы условия теорий разрушения Коломба – Мора [12, 15]: $(\sigma_1 - \sigma_3)/\sigma_{yc} \geq 1$,

где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ – главные напряжения; $\sigma_{yc} = E\varepsilon_{yc}$ – предел прочности кортикальной кости на сжатие; ε_{yc} – предельная деформация сжатия (для кортикальной кости $\varepsilon_{yc} = 0,0154$ [12]).

С учетом величин опасных объемов V для бедренных костей с пострезекционными дефектами, локализованными в верхней, средней и нижней третях, определены поврежденности $\Psi = \int_V \psi dV$ ($\psi = (\sigma_1 - \sigma_3)/\sigma_{yc}$) и средние по объему поврежденности $\Psi_{avg} = \Psi/V$. На рисунке 3 показаны зависимости опасных объемов, поврежденности и средней по объему поврежденности от длины пострезекционного дефекта для различных третей кости. Зависимости V_1 , Ψ_1 , $(\Psi_{avg})_1$

от длины l соответствуют верхней трети, $V_2, \Psi_2, (\Psi_{\text{avg}})_2$ – средней трети, $V_3, \Psi_3, (\Psi_{\text{avg}})_3$ – нижней трети.

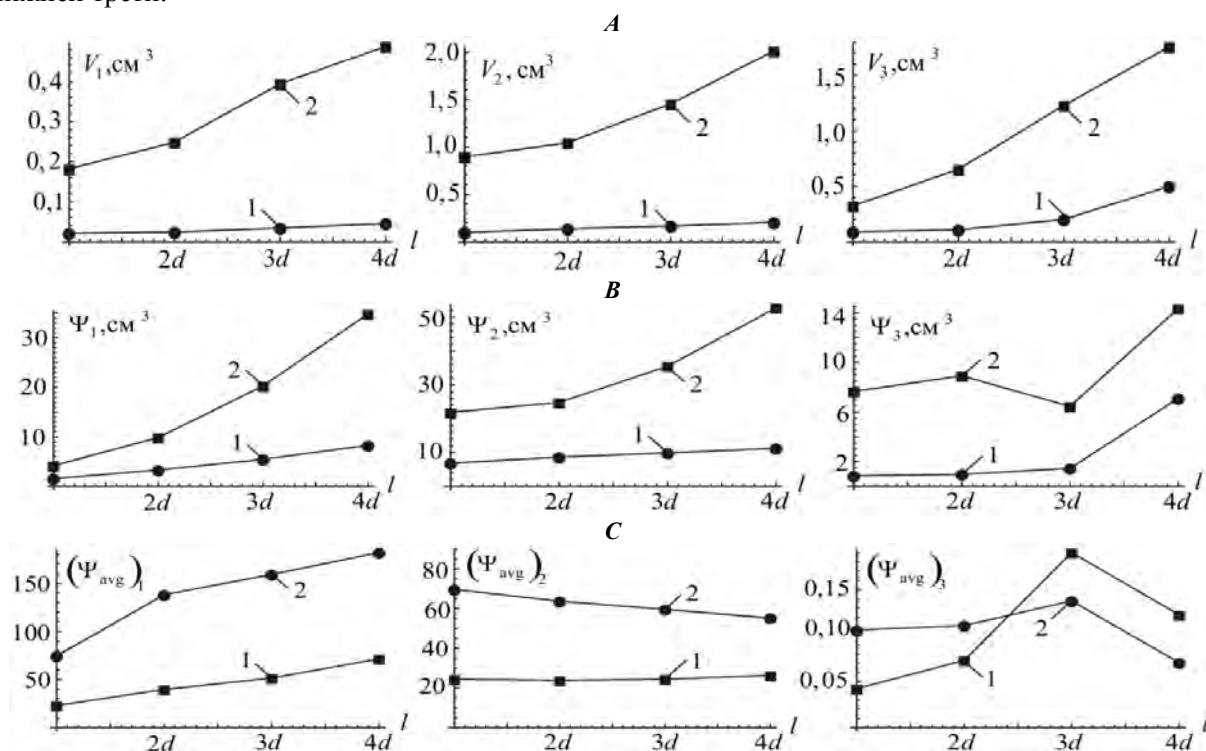


Рисунок 3. – Зависимости опасных объемов (А), поврежденности (В) и средней по объему поврежденности (С) от длины костного дефекта при его различных угловых размерах: 1 – $4\pi/3$; 2 – $3\pi/2$

Из рисунка 3, А видно, что наибольшие значения опасных объемов и поврежденности для соответствующих линейных и угловых размеров наблюдаются при локализации костного дефекта в средней трети бедренной кости. Поскольку предельные значения опасных объемов, согласно различным литературным источникам, могут принимать значения от $0,15 \text{ см}^3$ до $0,405 \text{ см}^3$ [10–12], на основании рисунка 3, А можно сделать вывод, что при действии статической нагрузки на бедренную кость с пострезекционным дефектом, расположенным в средней или нижней третях, при угловом размере $3\pi/2$ и независимо от его длины, возникнет патологический перелом. В верхней трети при таком угле возникновение перелома произойдет при длине послеоперационного отверстия, изменяющейся от $3d$ до $4d$.

Зависимости опасных объемов, поврежденности и средней по объему поврежденности от длины пострезекционного дефекта для угловых размеров $\pi/2, 2\pi/3$ и π на рисунке 3 не приведены, поскольку значения V, Ψ и Ψ_{avg} для всех третей соответствующие этим углам и длине дефекта, равной $4d$, значительно меньше величин V, Ψ и Ψ_{avg} для углового и линейного размеров, равных $4\pi/3$ и d соответственно. В частности, при длине дефекта равной $4d$ имеем $V_1(\pi) \approx 4,0 \text{ мм}^3, V_2(\pi) \approx 17,6 \text{ мм}^3, V_3(\pi) \approx 6,1 \text{ мм}^3$, тогда как при $l=d$ опасные объемы составляют $V_1(4\pi/3) \approx 20,9 \text{ мм}^3, V_2(4\pi/3) \approx 98,8 \text{ мм}^3, V_3(4\pi/3) \approx 90,1 \text{ мм}^3$. Аналогичное соотношение наблюдается между значениями поврежденности и средней по объему поврежденности, соответствующим линейному и угловому размерам дефекта ($4d, \pi$) и ($d, 4\pi/3$). Исключение составляют значения поврежденности для нижней трети. Здесь $\Psi_3(4d, \pi) = 1332,87 \text{ мм}^3$ и $\Psi_3(d, 4\pi/3) = 848,4 \text{ мм}^3$. Поскольку величины опасных объемов при линейных и угловых размерах пострезекционного дефекта, изменяющихся от d до $4d$ и от $\pi/2$ до π соответственно, не превышают значение 18 мм^3 , с учетом выше указанных предельных значений опасных объемов можно сделать вывод, что патологического перелома при таких параметрах дефекта не произойдет. В то же время, ретроспективный анализ возникновения переломов у пациентов, подвергшихся секторальной резекции, показывает, что патологические переломы могут возникать при длине дефекта $1,5d - 2d$ и угловом размере, равном π . Поэтому прогнозирование патологического пере-

лома необходимо осуществлять на основании, как значений опасных объемов, так и соответствующих значений поврежденности и средней по объему поврежденности.

Заключение. Полученные в работе результаты позволяют осуществлять прогнозирование патологического перелома в бедренной кости, подвергшейся секторальной резекции. Определены диапазоны линейных и угловых размеров дефекта, при которых произойдет перелом в отсутствие мероприятий по компенсации потери прочности. Следует отметить, что выполненные расчеты имеют отношение к «идеальной» резекции, когда не учитываются реальные особенности выполнения вмешательства (линия сечения кости не является идеально прямой, в углах дефекта образуются «запилы», краевое растрескивание кости). При этом в реальных условиях на уровне вмешательства в кости образуются очаги концентрации напряжений, которые не учтены при выполнении расчетов.

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе получены зависимости опасных объемов, поврежденности и средней по объему поврежденности, характеризующих прочность бедренной кости после секторальной резекции, от линейного размера пострезекционного дефекта. Зависимости получены на основании результатов конечно-элементного расчета напряженно-деформированного состояния бедренной кости при действии статической нагрузки. Модель бедренной кости получена на основании томографических данных. Пострезекционный дефект локализован в различных третях внешней стороны бедренной кости. В качестве критерия ограничения опасного объема использован критерий разрушения Колумба–Мора. Определены диапазоны угловых и линейных размеров пострезекционного дефекта, при которых произойдет патологический перелом в средней и нижней третях бедренной кости, если не будет компенсирована потеря прочности кости после секторальной резекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зацепин, С. Т. Костная патология у взрослых / С. Т. Зацепин.–М.: Медицина, 2001.–С. 512.
2. Шпилевский, И.Э. Оценка прочности бедренной кости при секторальной резекции / И.Э. Шпилевский, А.В. Спиглазов // Мед. новости.–2010, №9.–С.100–105.
3. Dijkstra, P. D. S. Prediction of pathological subtrochanteric fractures due to metastatic lesions / P. D. S. Dijkstra, M. Oudkerk, T. Wiggers // Arch. Orthop. Trauma Surg.–1997.–Vol. 116.–P. 221–224.
4. Spruijt, S. Prediction of torsional failure in 22 cadaver femora with and without simulated subtrochanteric metastatic defects / S. Spruijt [et al.] // Acta Orthop. 2006.–Vol. 77, No. 3.–P. 474–481.
5. Tanck, E. Pathological fracture prediction in patients with metastatic lesions can be improved with quantitative computed tomography based computer models / E. Tanck [et al.] // Bone.–2009.–Vol. 45.–P. 777–783.
6. Lee, T. Predicting failure load of the femur with simulated osteolytic defects using noninvasive imaging technique in a simplified load case // Ann Biomed Eng.–2007. Vol. 35.–P. 642–650.
7. Elias, J. J. The open section effect in a long bone with a longitudinal defect – a theoretical modeling study / J. J. Elias, F. J. Frassica, E. Y.S. Chao // J. Biomech.–2000.–Vol. 33.–P. 1517–1522.
8. Schileo E. Subject-specific finite element models implementing a maximum principal strain criterion are able to estimate failure risk and fracture location on human femurs tested *in vitro* / E. Schileo, F. Taddei, L. Cristofolini, M. Viceconti // J. Biomech.–2008.–Vol. 41.–P. 356–367.
9. Keyak, J. H. Prediction of femoral fracture load using finite element models: an examination of stress- and strain-based failure theories / J. H. Keyak, S. A. Rossi // J. Biomech.–2000.–Vol. 33.–P. 209–214.
10. Pistoia, W. Estimation of distal radius failure load with micro-finite element analysis models based on three-dimensional peripheral quantitative computed tomography images / W. Pistoia [et al.] // Bone.–2002.–Vol. 30.–P. 842–848.
11. Keyak, J. H. Prediction of femoral fracture load using automated finite element modeling / J. H. Keyak, S. A. Rossi, K. A. Jones, H. B. Skinner // J. Biomech.–1998.–Vol.31.–P. 125–133.
12. Edwards, W. B. Finite element prediction of surface strain and fracture strength at the distal radius / W.B. Edwards, K.L. Troy // Med. Eng. Phys.–2012.–Vol. 34.–P. 290–298.
13. Чуйко, А.Н. Особенности биомеханики в стоматологии / А.Н. Чуйко, В.Е. Вовк.–Харьков: Прапор, 2006. – С. 304.
14. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский.–Минск: БГУ, 2011.–407 с.
15. Doblaré, M. Modelling bone tissue fracture and healing: a review / M. Doblaré, J. M. García, M. J. Gómez // Eng. Fract. Mech.–2004.–Vol. 71.–P. 1809–1840.

SUMMARY

In this paper the dependences of failure volumes, damage and volume-average damage to the linear size of the post-resection defect. These values characterize the strength of the femur after resection of a sectoral resection. Curves were obtained on the basis of the finite element analysis of the femur stress- strain state under a static load. Femur model based on the tomographic data is obtained. Postresection defect localized in different third outer side of the femur. The criterion for limiting the failure volume is Colomb - Mohr fracture criterion. The ranges of angular and linear dimensions of the post-resection defect according pathological fracture in the middle and lower thirds of the femur (if not offset by the loss of bone strength after sector resection) are established.

Поступила в редакцию 06.11.2013

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАДИОСИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

к. ф.-м. н. ¹Баркалин В.В., асп. ²Белогуров Е.А.

¹ Белорусский национальный технический университет НИЧ, Минск

² Белорусский национальный технический университет, Минск

Исследование нанорadiосистем является одним из приоритетных направлений развития применений нанотехнологий в системах связи [1,2]. Моделирование таких систем имеет по необходимости иерархическую природу вследствие невозможности использования полномасштабного квантовомеханического или молекулярно-динамического подходов к моделированию [3,4]. На практике приходится использовать континуальные модели с параметрами материалов, вычисленными на более глубоких уровнях иерархии, особенно конечноэлементные.

На сегодняшний день метод конечных элементов (МКЭ) нашёл широкое применение и популярность в инженерной науке [5]. Такая популярность обусловлена тем, что МКЭ является хорошо исследованным и апробированным в различных инженерных приложениях. Существует много пакетов программного обеспечения для решения самых разнообразных задач [6]. Для моделирования радиосистемы на основе углеродных нанотрубок (УНТ) использовался программный пакет COMSOL Multiphysics 3.5a [7].

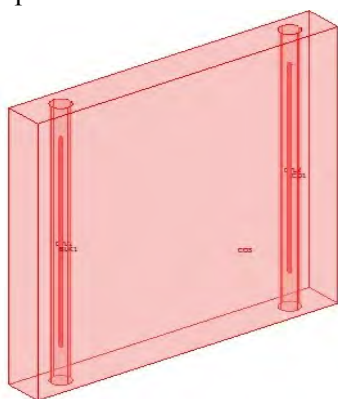


Рисунок 1 — Исследуемая радиосистема на основе двух нанотрубок

Моделируемая система состоит из двух углеродных нанотрубок, которые находятся в прямоугольном конечном объёме слабопроводящей среды с проводимостью 10^{-9} См/м (рисунок 1).

На внешних границах среды устанавливалось условие полной электроизоляции, т.е. равенство нулю нормальной компоненты плотности электрического тока ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$). УНТ были заземлены, а на границах между трубками и средой и границами между областями внутренними областями среды было задано условие непрерывности. На правый круглый электрод на верхней границе объема, занимаемого средой, подавалось постоянное напряжение, а на левый — переменное с частотой 100 МГц (соответствующий период 10^{-8} с). Электропроводность УНТ принималась равной $260 \cdot 10^6$ См/м.

УНТ имеют следующие параметры: длина - 600 нм, внешний диаметр - 10 нм, внутренний диаметр - 6 нм, плотность - 2460 кг/м^3 , модули упругости: $C_{11}=C_{22}=5,227 \cdot 10^{11}$ Па, $C_{13}=C_{23}=1,754 \cdot 10^{11}$ Па, $C_{12}=1,727 \cdot 10^{11}$ Па, $C_{33}=1,368 \cdot 10^{12}$ Па, $C_{44}=C_{55}=2,533 \cdot 10^{11}$ Па, $C_{66}=1,744 \cdot 10^{11}$ Па. Модули упругости были получены моделированием нанотрубок методом молекулярной динамики [3].

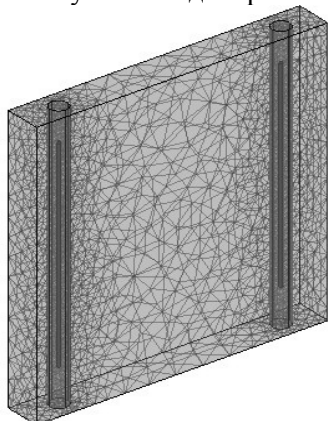


Рисунок 2 — Используемая сетка конечных элементов

На рисунке 2 показана используемая для расчётов сетка конечных элементов.

Для расчётов бралась неструктурированная тетраэдрическая сетка. Количество элементов составило 139000, минимальное качество элемента — 0,2, а максимальное — 0,8.

При появлении на круглых электродах потенциалов на трубках индуцируется поверхностная плотность заряда, на которую действует электрическое поле в системе. На рисунках 3 — 7 показано поведение правой трубки при различных значениях подаваемого на круговые электроды напряжения. Левая трубка в этих расчетах была закреплена.

Как видно из рисунков, при снижении напряжения на левом электроде с 1000 до 100 В наблюдается возникновение колебаний на гармониках с удвоенной частотой 200 МГц.

Из рисунка 7 видно, что если напряжение на правом электроде выше, то происходит затухание колебаний трубки, практически полное затухание происходит примерно через 50 периодов.

Кроме того, следует отметить появление биений вследствие сложения колебаний, отличающихся примерно на 10 МГц. Эти биения, по-видимому, можно объяснить разной полевой зависимостью частот собственных колебаний УНТ вдоль и поперек большой грани параллелепипеда среды.

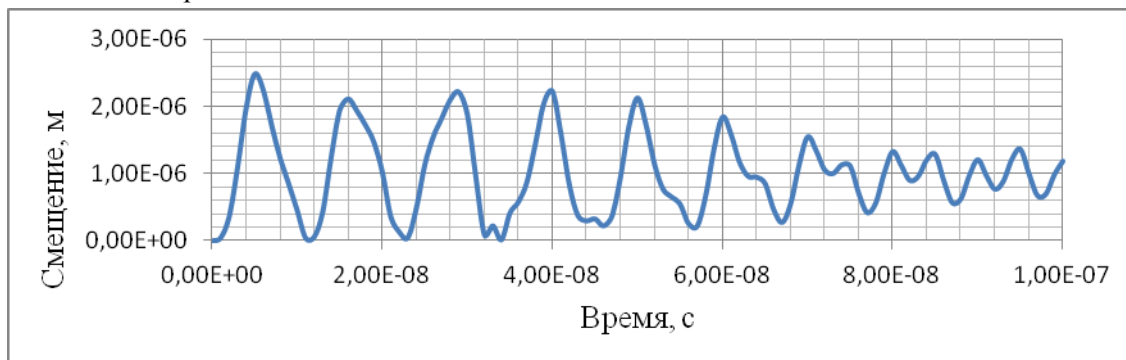


Рисунок 3— Полное смещение правой нанотрубки при значении потенциалов 1000 В и 0 В соответственно на левом и правом электродах

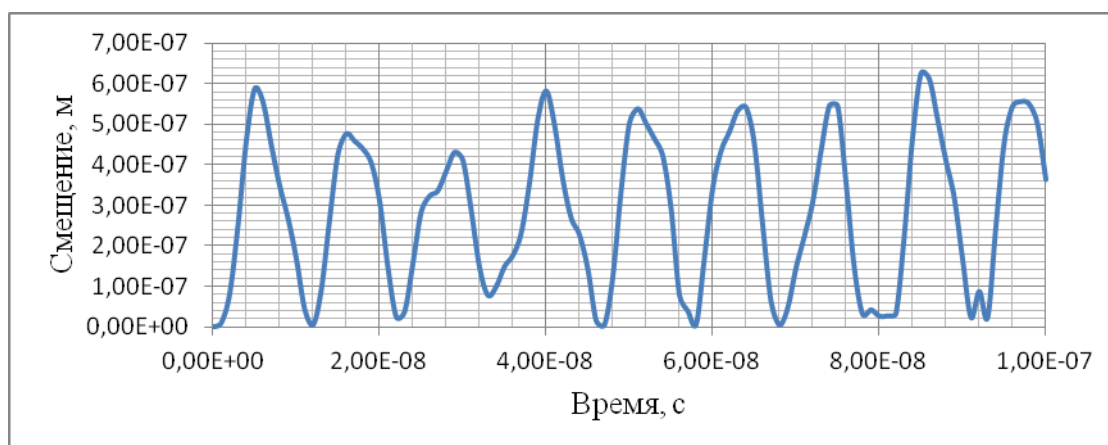


Рисунок 4— Полное смещение правой нанотрубки при значении потенциалов 500 В и 0 В соответственно на левом и правом электродах

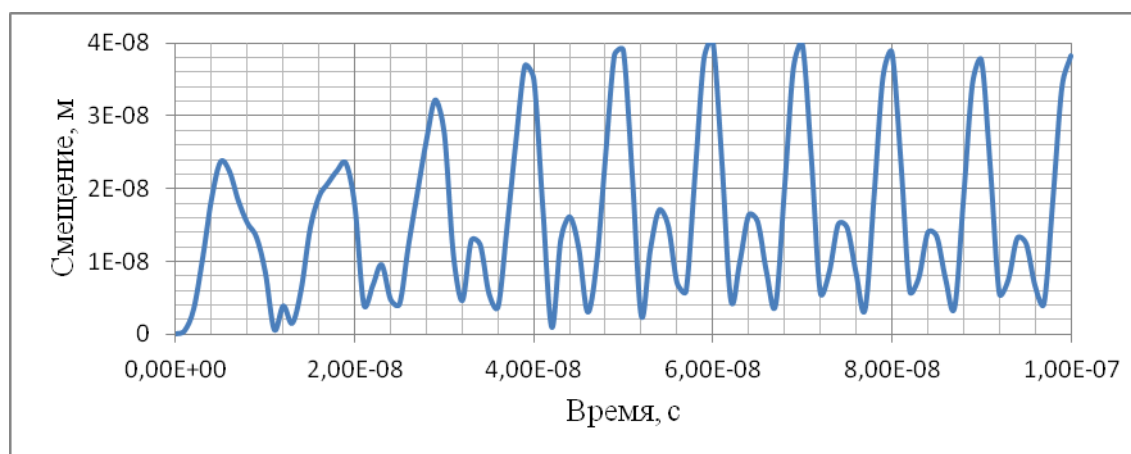


Рисунок 5— Полное смещение правой нанотрубки при значении потенциалов 100 В и 0 В соответственно на левом и правом электродах

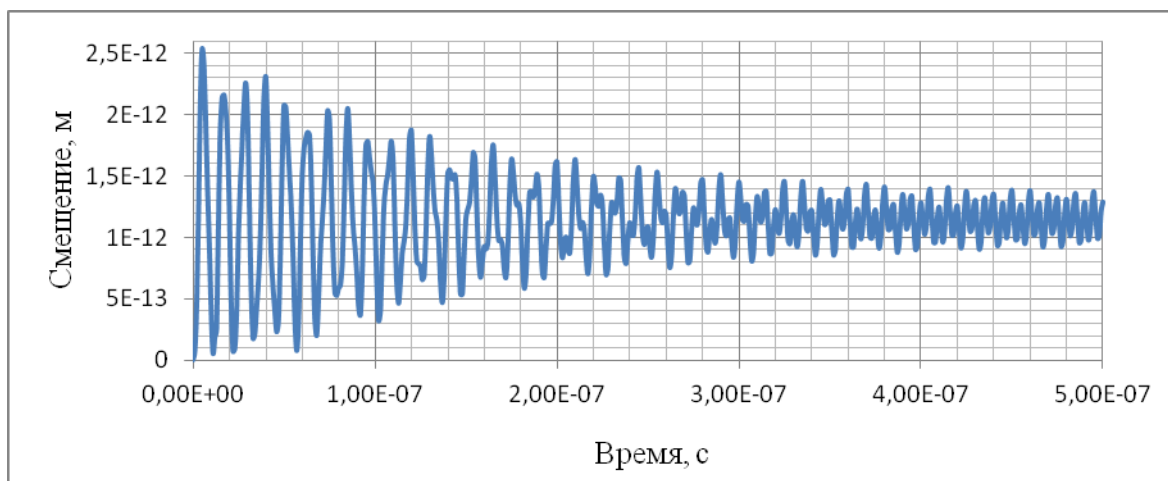


Рисунок 6— Полное смещение правой нанотрубки при значении потенциалов 1 В и 0 В соответственно на левом и правом электродах

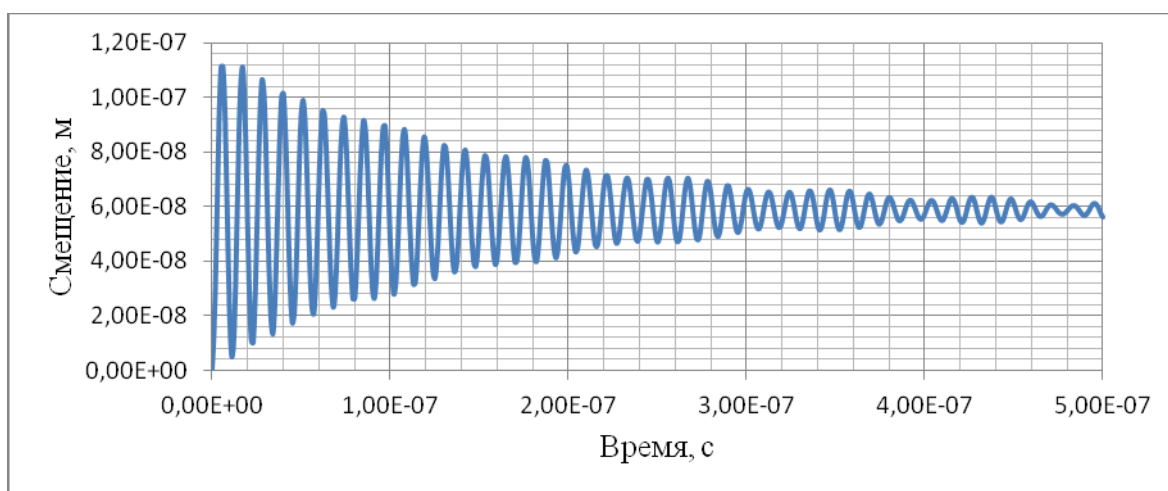


Рисунок 7— Полное смещение правой нанотрубки при значении потенциалов 1 В и 10 В соответственно на левом и правом электродах.

Появление второй гармоники в смещениях правой нанотрубки можно объяснить пондеромоторными силами, действующими на нанотрубку со стороны неоднородного электрического поля, которые квадратичны по полю.

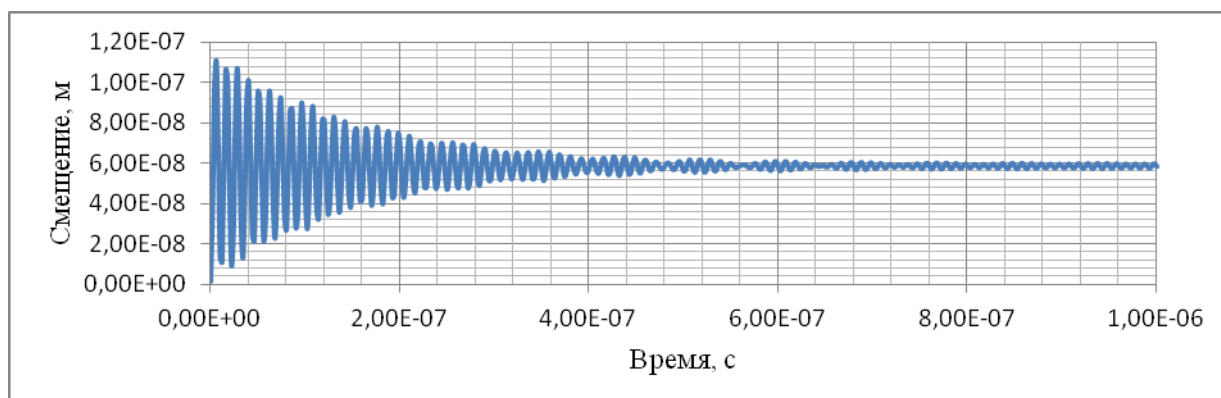


Рисунок 8 — Полное смещение правой нанотрубки при значении потенциалов 1 В и 10 В соответственно на левом и правом электродах. Левая трубка не закреплена

Далее рассматривался случай, когда левая трубка является свободной (рисунок 8). Качественно характер движения правой трубки при этом не меняется. Левая трубка испытывает при этом сходное колебательное движение на основной частоте. Уменьшение амплитуды смещений со временем можно объяснить экранировкой поля на нанотрубках вследствие хоть и малой, но конечной проводимости среды.

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрено конечноэлементное моделирование нанорадиосистемы на углеродных нанотрубках с опорной частотой 100 МГц. Наблюдается передача колебаний от одной трубки к другой при наличии внешнего постоянного поля на приемной трубке. При амплитуде переменного поля на передающей трубке менее 100 В на приемной трубке возбуждается и вторая гармоника колебаний на частоте 200 МГц.

ЛИТЕРАТУРА

- I. Abramov, V. V. Barkalin, E. A. Belogurov, V. A. Labunov, A. S. Chashynski. Simulation of resonant excitation of electromechanical vibrations in carbon nanotube radio receiver // 21th International Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology”. September 12-16, 2011, Sevastopol, Ukraine, pp. 803-805.
1. Barkaline V.V., Abramov I.I., Labunov V.A., Basaev A.S. CONTINUAL SIMULATION OF ELECTROMAGNETIC EXCITATION OF RESONANT VIBRATION OF CARBON NANOTUBE ARRAYS // 22th International Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology” (CriMiCo’2012). 10—14 September, Sevastopol, Crimea, Ukraine, p. 705-708.
2. V.Barkaline, I.Abramov, E.Belogurov, A.Chashynski, V.Labunov, A.Pletezhov, Y.Shukevich. Simulation of Carbon Nanotubes and Resonant Excitation of Their Mechanical Vibrations of by Electromagnetic Field for Nanoradio Applications // Nonlinear phenomena in complex systems, vol. 15, no. 1 (2012), pp. 23 – 42.
3. V.Barkaline, Y. Douhaya, A. Chashynski, A. Pletezhov, T. Szeplieniec. Hierarchical Approach to Nanodesign // Perspective technologies and methods in MEMS design, proceeding of the VI International Conference MEMSTECH’2010, 20-23 April, 2010, Polyana, Ukraine - Lviv: Publishing house Vezha&Co, 2010, p. 3-12.
4. О. Зенкевич «Метод конечных элементов в технике», Москва, Мир, 1975, 513 с.
5. Ж.К. Сабоннатьер, Ж.Л. Кулон. «Метод конечных элементов и САПР», Москва, Мир, 1992, 192 с.

SUMMARY

The paper consider finite element modeling of carbon nanotubes’ based nanoradiosystem with reference frequency 100 MHz. The transmission of vibration from one nanotube to another was observed with the assistance of external applied voltage. Second harmonicss appear on 200 MHz frequency for voltage on the left electrode less then 100 V.

Поступила в редакцию 16.10.2013

ИССЛЕДОВАНИЕ МАКЕТА ПОДВЕСКИ СИДЕНЬЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА

к. ф.-м. н. Докукова Н.А., Голод С.В., Кафтайкина Е.Н.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Опыт проектирования подвесок транспортных средств показывает [1-3], что использование устройств, обеспечивающих квазиулеву жесткость, позволяет существенно снизить первую резонансную частоту по величине и устремить ее значение к нулю с увеличением силы сопротивления более чем в 20 раз для виброизоляторов с квазиулеву жесткостью и с пневматическими элементами. Система виброизоляции с квазиулеву жесткостью на основе «фермы Мизеса», предложенная профессором Алабужевым П.М. [3] с упругими пружинами, снижает первую резонансную частоту в 1,02 раза. В последнем случае работа сил сопротивления незначительна – площадь петли гистерезиса составляет бесконечно малую величину толщины кривой кубической зависимости относительно перемещения. Одним из основных недостатков этих методик виброизоляции является существование небольшой зоны рабочего размаха перемещений, на котором жесткость равна нулю. Период смещений и максимум амплитуд не меняются, изменяется графический вид этих характеристик. В течение одного периода колебаний виброизолируемый объект продолжительнее задерживается в области нулевых значений перемещения и резко дважды проскакивает до своих противолежащих максимальных значений. Такое явление авторы методик виброизоляции с квазиулеву жесткостью назвали – «перескок». При этом система, не имея достаточных сил сопротивления в случае «фермы Мизеса», отклонится на недопустимо большую величину. Для предотвращения этого предложена конструкция с упругими ограничителями, в следствие чего происходят ударные действия с переменным кулоновым трением, для поглощения и рассеивания излишней кинетической энергии, приобретенной виброизолируемым телом. Разработчики предлагают внедрить в динамическую систему элемент с регулируемой силой сопротивления, характер которой должен быть регрессивным, силы должны возрастать пропорционально отклонению защищаемого объекта от положения равновесия, и при этом автоматически отключаться, обращаясь в ноль во время остановки тела и в прохождении им положений равновесия. Для этих мероприятий потребуются дополнительные теоретические исследования о формировании сил сухого трения и доработка конструкции. Предлагается совершенно иной подход к рассматриваемой проблеме, учитывающий последнее замечание в полной мере. Сила сопротивления виброизолятора должна обеспечивать гашение высоких скоростей изолируемых тел и снижение больших амплитуд виброперемещений на резонансных частотах за период колебания. Такое гашение способны совершать амортизаторы с гидродинамическими свойствами, преобразуя кинетическую энергию виброизолируемого объекта в тепловую.

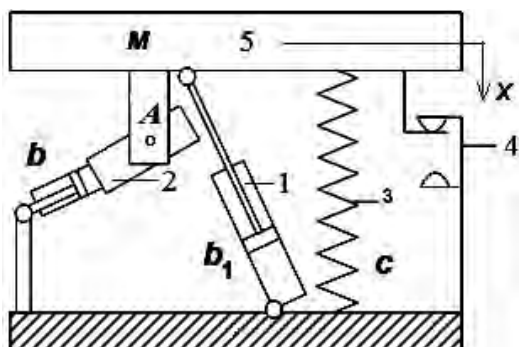


Рисунок 1 – Подвеска сиденья транспортного средства

Получены патенты на полезные модели [4, 5]. Задача предлагаемой модели состоит в уменьшении накопления энергии в конструкции, в условиях ограниченности хода подвески, увеличении комфорта сиденья. Технический результат достигается за счет улучшения динамических качеств подвески, путем усовершенствования конструкции и использования элементов, рассеивающих энергию, установленных особым образом.

Подвеска сиденья транспортного средства [5], состоящая из посадочного места, неподвижного основания, упругого элемента, демпфирующего устройства, эластичных упоров, отличающаяся тем, что содержит дополнительное демпфирующее устройство 2 на рисунке 1.

Стандартный серийный амортизатор работает равномерно в течение всего заданного хода подвески на внешних нагрузочных режимах не превышающих величин Mg и состоит из элементов: демпфера 1, закрепленного в точке А на схеме рисунка 1, пружины 3, упругих упоров 4 и сиденья оператора 5. При этом эластичные упоры 4 на рисунке 1 не позволяют произойти

жесткому удару с одной стороны, а с другой стороны при вступлении в работу данных дополнительных упругих элементов 1 и 3 увеличивается резонансная частота всей подвески, что ухудшает ее гасящие свойства, а при определенных условиях приводит к динамическому усилению колебаний за один расчетный ход подвески, воздействующих на сидение, в связи со сближением резонансных колебаний от основания кабины и динамической резонансной частоты сидения. Эластичные упоры являются элементами, накапливающими энергию и затем отдающими ее. Все вышеперечисленное приводит к тому, что сиденье при работе в реальных условиях эксплуатации транспортного средства в режимах, близких к граничным режимам хода подвески, не ослабляет колебаний, воздействующих на оператора, а усиливает их. Это является недостатком выпускаемой конструкции.

Проблемным является нахождение такого технического решения, которое позволит свести к минимуму усиления колебаний на режимах, близких к граничным режимам хода подвески, и в то же время существенно не ухудшить качество работы подвески при более слабых уровнях воздействующих на нее возмущений. Технический результат достигается за счет улучшения динамических качеств подвески, путем усовершенствования конструкции и использования элементов, рассеивающих энергию, установленных особым образом. Подвеска транспортного средства включает в себя, рисунок 1, – стандартное демпфирующее устройство 1, дополнительное демпфирующее устройство 2, упругий элемент 3, выполненный в виде пружины, эластичные упоры 4, посадочное место 5, неподвижное основание.

У новой подвески сиденья транспортного средства стандартное демпфирующее устройство 1 работает равномерно в течение всего хода подвески, дополнительное демпфирующее устройство 2 меняет свои характеристики в зависимости от положения подвески. При прохождении подвески средних положений дополнительное демпфирующее устройство 2 оказывает малое влияние на колебания сидения. По мере отклонения подвески до максимального положения меняется угол наклона дополнительного демпфирующего устройства 2, что приводит к усилению воздействия обоих демпфирующих элементов 1 и 2 на режим работы подвески. При рациональном выборе параметров всех элементов подвески и приближении их к граничным положениям ее хода можно практически избежать нежелательных ударных нагрузок в его конце.

Новая конструкция позволит улучшить виброизоляцию сиденья транспортного средства, избежать ударов в крайних положениях рабочего хода подвески, влияния которых снижают надежность конструкции, избежать резкого усиления ускорений, их воздействия на оператора, что позволит работать оператору более комфортно на повышенных уровнях ускорений транспортного средства, работать на больших скоростях и с большей производительностью. Принципиальное отличие существующих подходов в ограничении хода подвески заключается в том, что применяемые буферные элементы при вступлении в работу накапливают энергию и затем ее отдают при разжимании, в предлагаемой полезной модели эта энергия рассеивается в демпфирующих устройствах, превращаясь в тепловую энергию, и обратно не возвращается.

Проведены расчеты двух конструкций серийной и новой макетной рисунок 1 [5]. У серийной подвески, выпускаемой на РУП МТЗ, демпфирующий элемент 1 закреплен в точке А на схеме рисунка 1. В общей постановке задача динамики подвески сиденья транспортного средства получена на основании использования уравнения Лагранжа II рода – является нелинейной и решалась численно. В силу ее громоздкости приведем постановку в общем виде

$$a_1(t)\ddot{x} + a_2(t)\dot{x} + a_3(t)x = Mg \cos(\omega t) \quad (1)$$

Листинги результатов расчетов на рисунках 2-5, здесь элемент 5 имеет массу M и совершает вертикальные перемещения $x(t)$, элемент 3 имеет упругость c , элемент 1 коэффициент демпфирования – b_1 , элемент 2 коэффициент демпфирования – b , нагрузка прикладываемая к телу 5 – $Mg \cos(\omega t)$, ω – частота внешней нагрузки, $a_i(t)$, $i=1, 3$ – коэффициенты, зависящие от геометрического положения частей механизма в произвольный момент времени и физических параметров системы. Заданы параметры: $M = 75$ кг, $c = 3350$ кг/с², $b_1=1500$ кг/с для серийной подвески. Расчет динамических характеристик серийной подвески транспортного средства с коэффициентами $b_1=1500.0$ кг/с при $b=0$ кг/с представлен на рисунке 2 а, макета новой конструкции с коэффициентами $b=b_1=1500.0$ кг/с на рисунке 2 б. Перемещения места оператора на резонансной частоте снижены в 1,3 раза или на 23 %.

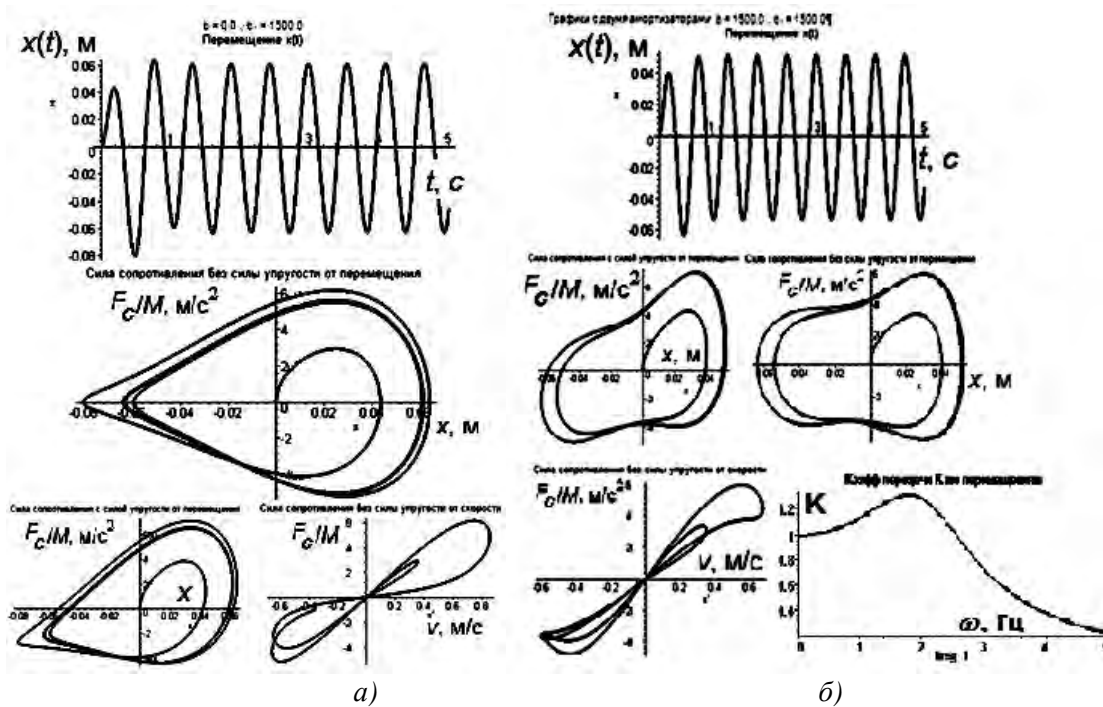


Рисунок 2 – Листинг программы расчета перемещений, силы сопротивления математической модели (1) для серийной подвески с элементом 1, величина которого $b_1=1500$ кг/с, на а, и новой подвески с коэффициентами $b = b_1= 1500$ кг/с на б

Следуя методике выбора рациональных параметров пассивных амортизаторов, развитой в [6-9], коэффициенты механической системы должны соответствовать критерию:

$$\int_0^{2\pi/\omega} a_2(t)dt \geq 2 \int_0^{2\pi/\omega} \sqrt{a_1(t)a_3(t)}dt \cdot \quad (2)$$

Численные значения физических величин, входящих в уравнение динамики (1), можно отыскать, линеаризуя и обезразмеривая уравнение (1) с использованием критерия (2).

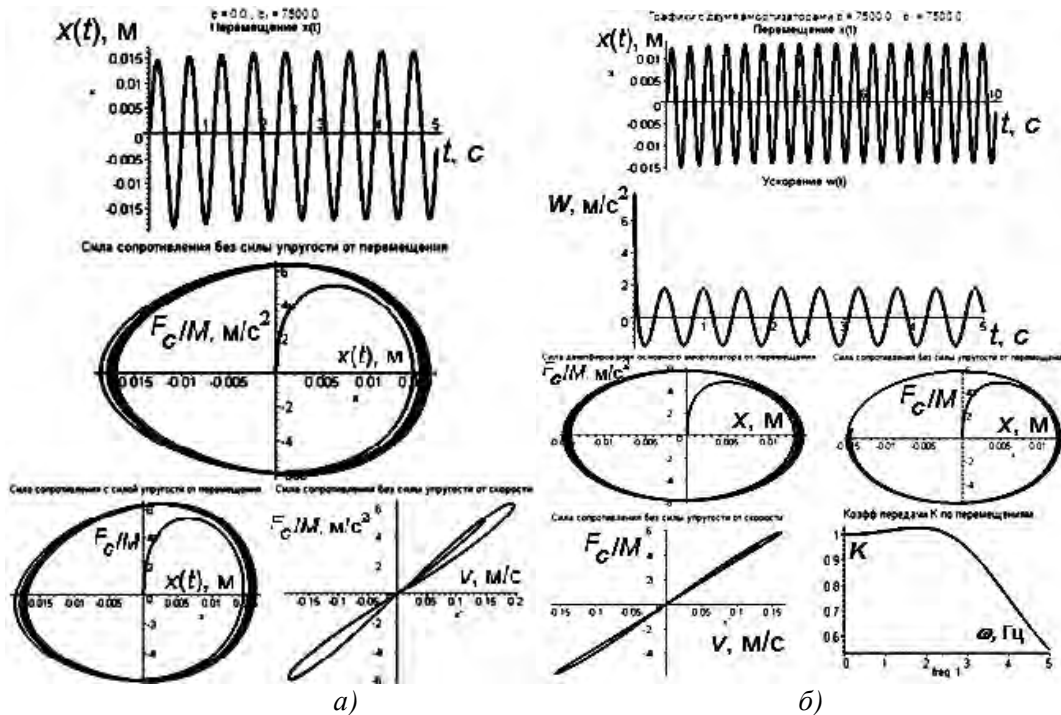


Рисунок 3 – Листинг программы расчета перемещений, силы сопротивления математической модели (1) для серийной подвески с элементом 1, величина которого $b_1=7500$ кг/с, на а, и новой подвески с коэффициентами $b = b_1= 7500$ кг/с на б

Тогда для схемы на рисунке 1 и выбранных параметров коэффициенты демпфирования b и b_1 должны удовлетворять условиям $b > 2173$ кг/с и $b_1 > 6800$ кг/с. Выберем их значения равными $b = b_1$ и проведем расчет со значением 7500 кг/с. Численные результаты отражены на рисунке 3 б. В последнем случае смещения сидения водителя происходит в пределах 3 см на резонансной частоте $\omega = 1.8$ Гц и при нагрузочном режиме $Mg \cos(\omega t)$. Это почти в 5,3 раза ниже, чем для серийной подвески с коэффициентом $b_1=1500$ кг/с рисунок 2 а. При этом на высоких частотах колебания существенно снижаются. Если для серийной подвески увеличить коэффициент $b_1=7500.0$ кг/с, то перемещения снижаются в 4,2 раза по сравнению с выпускаемой серийной подвеской с $b_1=1500.0$ кг/с при тех же условиях нагружения и том же режиме работы на низшей резонансной частоте, рисунок 3 а.

Результаты проведенных расчетов сгруппированы в таблице 1. Предлагаемая новая модель макета подвески сиденья транспортного средства на 15-25% эффективнее, чем ныне применяемая серийная подвеска сидения водителя. Сравнивая максимальный ход подвески сидения серийного образца с ходом макетного убеждаемся, что эффективность последнего возрастает до 80% при более низком коэффициенте передачи усилий близ лежащим конструкциям.

Таблица 1 – Значения физических параметров, исследуемых подвесок сидения водителя

Вид подвески	Коэффициенты демпфирования амортизаторов b_1 и b , кг/с	Модель подвески с элементом 1, закрепленным как у серийного образца, рисунок 1		Модель макетного образца подвески, рисунок 1		
		Максимальный ход подвески сидения, см	Сила сопротивления, отнесенная к единице массы, м/с ²	Максимальный ход подвески сидения, см	Сила сопротивления, отнесенная к единице массы, м/с ²	Коэффициент передачи усилий
1	2	3	4	5	6	7
Серийная подвеска	$b_1 = 1500$ $b = 0$	14,2	6,2	11,0	5,0	1,5
	$b_1 = 2173$ $b = 0$	11,0	6,2	8,2	5,8	1,25
	$b_1 = 7500$ $b = 0$	3,5	6,2	2,8	6,0	1,15
Один горизонтальный амортизатор	$b_1 = 0$ $b = 1500$	18,0	6,0	18,0	6,0	8,0
	$b_1 = 0$ $b = 6613$	10,5	10,0	10,5	10,0	1,25
	$b_1 = 0$ $b = 7500$	10,0	10,0	10,0	10,0	1,25
Два амортизатора	$b_1 = 1500$ $b = 1500$	13,2	8,0	11,2	6,4	1,25
	$b_1 = 7500$ $b = 7500$	3,2	6,2	2,7	6,0	1,15

Представлены численные зависимости коэффициента передачи макетного образца сидения трактора от частоты внешнего воздействия рисунок 4 а для сравнения с экспериментальным рисунок 4 б, полученным на испытательном полигоне РУП МТЗ. Достоверное совпадение теоретических и экспериментальных кривых позволяет утверждать, что математическая модель выбрана удачно, все аналитические выводы по определению рациональных параметров многоэлементных динамических систем и режимов работы соответствуют реальным [6-9].



а)

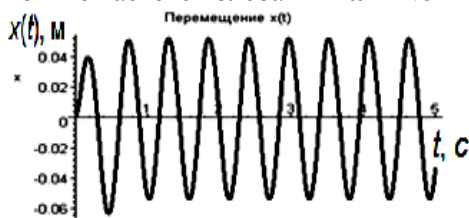


б)

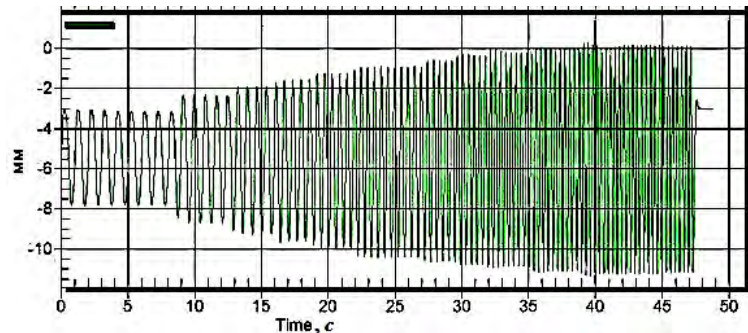
Рисунок 4 – Аналитические зависимости коэффициента передачи макетного образца сиденья трактора от частоты на а, и экспериментальные – на б)

Для макетного образца подвески сиденья транспортного средства, находящегося под нагрузочным режимом $7,213\cos(\omega t)$ м/с², $\omega = 1.8$ Гц, на низшей резонансной частоте с коэффициентами $b_1 = 1500$ кг/с и $b=0$ кг/с получена кривая коэффициента передачи сиденья трактора – рисунок 4 а, соответствующая верхней экспериментальной кривой α на рисунке 4 б.

По частоте и амплитудам графики на рисунках 5 а и 5 б практически совпадают. Для установившихся колебаний на осциллограмме рисунка 5 б перемещение составляет 11,2 см. Аналогичные замеры на графике аналитических вычислений составляют 11,3 см рисунок 5 а, при той же частоте колебаний $\omega = 1.8$ Гц.



а)



б)

Рисунок 5 – Аналитические зависимости перемещения макетного образца сиденья трактора от времени – а, экспериментальные зависимости – б

Исследование макета подвески сиденья транспортного средства и патента на полезную модель [4, 5] показывают, что

- конструкция в заявке более гибкая к изменениям физических параметров демпфирования. Малые их приращения, по нашей методике (1), (2), приводят к существенному снижению высоких уровней вибраций, амплитуд и сил инерции;

- серийная конструкция, по этой же причине, менее чувствительна к изменениям коэффициентов демпфирования. Для нее следует значительно увеличивать этот параметр, в три с половиной раза, чтобы погасить повышенный уровень вибраций и хода – максимального перемещения сиденья;

- теоретические результаты сопоставлены с экспериментальными. Получено достоверное совпадение;

- исследован макет подвески сиденья водителя для колесных тракторов «Беларус».

Научная и практическая значимость полученных результатов заключается в простоте использования основных аналитических зависимостей при проектировании и выборе эксплуатационных режимов работы виброизоляторов, гидроупругих опор, пассивных и активных амортизаторов для автомобильной техники Республики Беларусь.

РЕЗЮМЕ

Проанализированы основные типы виброизолирующих устройств, встречающихся в машиностроении: с пневматической подвеской, с «фермой Мизеса», с системой Алабужева, упругие части которых обеспечивают квазинулевою жесткость, и демпфирующими

амортизаторами; приведены новые виды амортизаторов, в полученных охранных документах – патентах на полезную модель, их преимущества, технические особенности, расчетные модели и численные параметры, отличающиеся от исследуемых выше; сопоставлены расчетные характеристики рассмотренных типов виброамортизаторов.

Научная и практическая значимость полученных результатов заключается в простоте использования основных аналитических зависимостей при проектировании и выборе эксплуатационных режимов работы виброизоляторов, гидроупругих опор, пассивных и активных амортизаторов для автомобильной техники Республики Беларусь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пилипенко В.В. Пневматические системы виброзащиты с квазиулевой жесткостью/ Пилипенко В.В., Пилипенко О.В., Запольский Л.Г. // Техн. механика. 2008. – № 2.
2. Зотов А.Н. / Зотов А.Н., Ахияров Д.Т. Надыршин Р.Ф. Ударозащитная система с квазиулевой жесткостью// Нефтегазовое дело. 2006.
3. Алабужев П.М. Виброзащитные системы с квазиулевой жесткостью/ Алабужев П.М. и др.; Под ред. К.М. Рагульскаса. – Л.: Машиностроение. 1986. – 96 с.
4. Шаметько С.А., Орехов М.Б., Голод С.Н., Докукова Н.А., Кафтайкина Е.Н. Подвеска сиденья транспортного средства /Патент на полезную модель. № 8548 , 2010.02.28 , В 60N 2/50. Патент получен 28.08.2012.
5. Докукова Н.А., Голод С.Н., Кафтайкина Е.Н. Подвеска сиденья транспортного средства /Патент на полезную модель. № 8521 , 2012.08.30 , В 60N 2/54. Патент получен 28.08.2012.
6. Dokukova N. A./ Dokukova N. A. and Konon P. N. Generalities of passive vibration dampers isolating vibrations// Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2006. – Volume 79. – Number 2. – Pages 412-417. Publisher Springer New York, ISSN: 1062-0125.
7. Dokukova N. A./Dokukova N. A. and Konon P. N. General laws governing in mechanical vibratory systems// Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2006. – Volume 79. – Number 4. – Pages 824-831. Publisher Springer New York, ISSN: 1062-0125.
8. Dokukova N. A./Dokukova N. A., Martynenko M. D. and Kaftaikina E. N. Nonlinear vibrations of hydraulic shock absorbers// Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2008. – Volume 81. – Number 6. – Pages 1197-1200. Publisher Springer New York, ISSN: 1062-0125.
9. Dokukova N. A./Dokukova N. A., Konon P. N. and Kaftaikina E. N. Nonnatural vibrations of hydraulic shock-absorbers// Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2008. – Volume 81. – Number 6. – Pages 1191-1196. Publisher Springer New York, ISSN: 1062-0125.

SUMMARY

Analysis of the main types of anti-vibration devices encountered in mechanical engineering: air suspension , with «farm Mises» system Alabuzheva , the elastic part of which provide quasi-zero stiffness and damping shock absorbers , are the new kinds of shock absorbers in the resulting protective rights – patents for utility model their advantages , technical features , design models and numerical parameters that differ from the above study , compared the design characteristics of the above types of shock absorbers. Scientific and practical importance of these results is the simplicity of use of the basic analytical relationships in the design and selection of operating modes of vibration isolators, hydroelastic supports passive and active shock absorbers for motor vehicles of the Republic of Belarus.

Поступила в редакцию 10.10.2013

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРЕПРЕГОВ

д. ф.-м. н. ¹Василевич Ю.В., к. т. н. ²Горелый К.А., ³Сахоненко В.М., ³Сахоненко С.В.

¹ УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

² ОАО «Авангард», Россия

³ Московский государственный открытый университет, Россия

Рассматриваем равновесное состояние препрегов, которые представляют собой ортотропную многослойную структуру на основе тканей, имеющих упорядоченное расположение волокон и пропитанных связующим в неотвержденном состоянии. Тканый материал состоит из комбинации двух семейств нитей, связанных между собой определенной зависимостью. Для стеклотканей гладкого переплетения (полотняное, саржевое и атласное) эта зависимость осуществляется посредством сил трения скольжения. Строение тканей гладкого переплетения позволяет нитям одного семейства создавать для любой нити второго семейства своеобразный канал, по которому они могут скользить, преодолевая силы трения в узлах переплетения. При этом перемещения нитей могут достигать конечных значений. В результате такие перемещения в отдельных случаях могут превращать область деформирования из односвязной в многосвязную, например, при проколе отверстия.

Предполагается, что нагрузки, приложенные к препрегу, возрастают очень медленно от нулевых до своих окончательных значений и остаются в этом конечном состоянии без изменений. Допускается, что тепло, выделяемое в процессе этого медленного деформирования, отводится так, что термодинамический процесс можно считать изотермическим. Исключается возникновение источников тепла и нагревание поверхности. Предполагается поэтому, что температура в каждой точке физической системы постоянна. В частности, тепло, вырабатываемое силами трения, выводится полностью в окружающую среду. Предполагаем далее, что в физической системе отсутствуют начальные деформации, вызванные усадкой или набуханием материала. Наконец, предполагаем, что во время деформации на поверхности не возникает дополнительных связей, опорных реакций. Предположение изотермичности процесса деформации приводит к тому, что энергия деформации не зависит от температуры, поэтому энергия равна работе сил, вызывающих деформацию. На этом основании предполагается отсутствие влияния сил трения на удельную потенциальную энергию деформации препрегов. Другими словами, работу сил трения на соответствующих перемещениях при выводе энергетических зависимостей для физической системы следует полагать равной нулю.

Проведенные исследования с препрегами, у которых наполнителями служат стеклоткани гладкого переплетения, показали, что для этого материала необходимо расширить закон Гука до введения в его линейные зависимости постоянных слагаемых [1]

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} + \gamma_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} + \gamma_{22}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{E_{12}} + \gamma_{12}, \quad \varepsilon_{21} = \frac{\sigma_{21}}{E_{21}} + \gamma_{21}.$$

Здесь первые два уравнения представляют растяжение нитей в продольном направлении, а два вторых – сжатие нитей в поперечном направлении. Следует также отметить, что в установленном законе (1) постоянные коэффициенты при компонентах напряжений характеризуют упругость армирующего материала препрегов, а постоянные слагаемые в линейных формах – свойства неупругости. Остановившись на сжатии препрегов, необходимо отметить, что сжатие в обычном понимании приводит к потере устойчивости армирующего материала, так как нити в тканых материалах следует считать абсолютно гибкими. Сжатие без потери устойчивости может быть осуществлено только совместно с растяжением. Это эквивалентно случаю, когда одно семейство нитей растягивается, а второе – сжимается в поперечном направлении. Простейший случай такого сжатия получается при параллельном сдвиге одного семейства нитей вдоль второго. Такое сжатие с растяжением сопровождается большими перемещениями нитей семейств относительно друг друга и возникновением сил трения между ними. Превышение предельных сил трения приводит к сдвигу со смещением между нитями семейств в узлах переплетения. Силы трения каждого семейства нитей приложены в направ-

лении касательных к нитям и составляют между собой тупой угол. Предельные силы трения выражаются зависимостями [2]

$$\begin{aligned}\tau_{12}^{\text{пр}} &= (k_{11}\sigma_{11} + k_{12}\sigma_{22} + \mu_1 p) \sin \alpha, \\ \tau_{21}^{\text{пр}} &= (k_{21}\sigma_{11} + k_{22}\sigma_{22} + \mu_2 p) \sin \alpha,\end{aligned}\quad (2)$$

где α - угол между нитями семейств. При этом минимальные значения напряжений растяжения σ_{11}^0 и σ_{22}^0 , при которых возможен сдвиг, равны

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{10} + \frac{\mu_1}{k_{11}} p, \quad \sigma_{22}^0 = \sigma_{20} + \frac{\mu_2}{k_{22}} p. \quad (3)$$

Здесь p - удельное давление внутри препрега; σ_{10} , σ_{20} - напряжения растяжения в нитях, возникшие в результате ткачества полотна ткани; k_{11} , k_{22} , k_{12} , k_{21} , μ_1 , μ_2 - постоянные числа, отождествляемые с коэффициентами внутреннего трения.

Гипотезы об абсолютной гибкости нитей и достаточной малости коэффициентов внутреннего трения позволили получить уравнения равновесия [3]

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{R_1}{h_0} (k_{12}\sigma_{22} + \mu_1 p) \sin \alpha &= 0, \\ \frac{\sigma_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{R_2}{h_0} (k_{12}\sigma_{11} + \mu_2 p) \sin \alpha &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial R_1} &= - \left(\frac{k_{21}}{h_0} - \frac{1}{R_1} \right) \sigma_{11} + \frac{k_{12}}{h_0} \sigma_{22} \cos \alpha - \frac{\mu_2 - \mu_1 \cos \alpha}{h_0} p, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial R_2} &= - \left(\frac{k_{12}}{h_0} - \frac{1}{R_2} \right) \sigma_{22} + \frac{k_{21}}{h_0} \sigma_{11} \cos \alpha - \frac{\mu_1 - \mu_2 \cos \alpha}{h_0} p.\end{aligned}\quad (4)$$

где α_1 , R_1 и α_2 , R_2 - полярные координаты, относящиеся к семействам нитей «1» и «2»; h_0 - толщина слоя ткани.

Пусть в какой-то точке ткани в результате деформации угол между семействами нитей стал равным α . Вырежем небольшой ромбик из ткани с длиной стороны a и гранями перпендикулярными к главным осям напряжений сжатия семейств нитей σ_{12} и σ_{21} . Предположим, что величины главных напряжений σ_{11} , σ_{12} , σ_{21} , σ_{22} и главных деформаций ε_{11} , ε_{12} , ε_{21} , ε_{22} достигнуты в результате непрерывного нарастания, и промежуточные значения напряжений и деформаций соответственно равны $k\sigma_{11}$, $k\sigma_{12}$, $k\sigma_{21}$, $k\sigma_{22}$, $k\varepsilon'_{11}$, $k\varepsilon'_{12}$, $k\varepsilon'_{21}$, $k\varepsilon'_{22}$, где k изменяется от 0 до 1, а $k\varepsilon'_{ij} = (\varepsilon_{ij} - \gamma_{ij})$ - относительная линейная деформация. Работа от неупругой относительной деформации γ_{ij} ($i, j = 1, 2$) равна нулю. Тогда в любой стадии сила, приложенная, например, к нитям семейства «1» и растягивающая их будет равна $kh_0 a \sigma_{11} \sin \alpha$, а упругое перемещение этих нитей в направлении σ_{11} при увеличении k до $k + dk$ будет равно $a\varepsilon'_{11} dk$, так что полная работа, произведенная силами в направлении σ_{11} , в конечном итоге будет иметь вид

$$h_0 a^2 \sigma_{11} \varepsilon'_{11} \sin \alpha \int_0^1 k dk = \frac{1}{2} h_0 a^2 \sigma_{11} \varepsilon'_{11} \sin \alpha.$$

Работа при сжатии вырезанного тела в направлении напряжения σ_{12} , равна работе при сжатии параллелепипеда размером $h_0 \times a \times a \sin \alpha$. В этом случае сжимающая сила $h_0 a \sigma_{12} k$ на упругом перемещении, равном $a\varepsilon'_{12} \sin \alpha dk$, производит работу

$$\frac{1}{2} h_0 a^2 \sigma_{12} \varepsilon'_{12} \sin \alpha.$$

Аналогичные выражения можно получить и относительно других направлений. Сложим их вместе и разделим на объем вырезанного тела $h_0 a^2 \sin \alpha$. В результате получим

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon'_{11} + \sigma_{22} \varepsilon'_{22} + \sigma_{12} \varepsilon'_{12} + \sigma_{21} \varepsilon'_{21}), \quad (5)$$

где W является удельной потенциальной энергией деформации. Необходимо также отметить, что конечная величина накопленной энергии независима от характера нагружения и линейное выражение нагрузки в данном случае выбрано лишь для простоты расчета.

Выражение для удельной потенциальной энергии может быть представлено в другой форме. Используя выражения (1), можно получить

$$W = \frac{1}{2} \left(\sigma_{11} \frac{\sigma_{11}}{E_{11}} + \sigma_{22} \frac{\sigma_{22}}{E_{22}} + \sigma_{12} \frac{\sigma_{12}}{E_{12}} + \sigma_{21} \frac{\sigma_{21}}{E_{21}} \right).$$

Таким образом, удельная потенциальная энергия деформации является положительно определенной величиной.

Докажем единственность решения краевых задач статики препрегов. Такое доказательство строится на решении, удовлетворяющем как дифференциальным уравнениям статики, так и граничным условиям задачи. Оно базируется на том, что предположение о неединственности приводит к противоречию. Предположим, имеются два решения: $u_i^{(1)}, v_i^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}$ и $u_i^{(2)}, v_i^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}$, которые удовлетворяют одним и тем же граничным условиям и основным уравнениям (1) - (5).

Введем обозначения: $\tilde{u}_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $\tilde{v}_i = v_i^{(1)} - v_i^{(2)}$, $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)}$. Легко показать, что напряжения $\tilde{\sigma}_{ij}$ и относительные деформации $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ должны удовлетворять и удовлетворяют обобщенному закону Гука (1) при равенстве нулю неупругих относительных деформаций γ_{ij} и уравнениям равновесия (4) при отсутствии в них давления p . Также компоненты перемещений и компоненты напряжений удовлетворяют нулевым граничным условиям. Кроме того, в силу изотермического процесса деформирования препрегов работу сил трения на соответствующих перемещениях считаем равной нулю. С учетом сделанных замечаний покажем, что внутри препрега исчезают деформации и напряжения. С этой целью рассмотрим работу деформации одного слоя ткани. На основании (5) имеем

$$\tilde{A} = h_0 \int_F \tilde{W} dF = \frac{h_0}{2} \int_F (\tilde{\sigma}_{11} \tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\sigma}_{22} \tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\sigma}_{12} \tilde{\varepsilon}_{12} + \tilde{\sigma}_{21} \tilde{\varepsilon}_{21}) dF. \quad (6)$$

Преобразуем выражение (6), учитывая, что между деформациями и перемещениями существуют зависимости

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{11}^T &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\tilde{u}_1}{R_1}, & \tilde{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial R_1}, \\ \tilde{\varepsilon}_{22}^T &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\tilde{u}_2}{R_2}, & \tilde{\varepsilon}_{21}^T &= \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial R_2}. \end{aligned}$$

Эти соотношения справедливы, если их правые части достаточно малы. Для тканей гладкого переплетения ε'_{ij} малы, следовательно, малы и $\tilde{\varepsilon}'_{ij}$. На этом основании указанные зависимости между деформациями и перемещениями справедливы. Тогда, применяя предыдущие зависимости и закон (4), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} \tilde{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\tilde{\sigma}_{11} \tilde{v}_{11}) + \frac{\tilde{\tau}_{12}^{\text{np}} \tilde{v}_1}{h_0} + \frac{\tilde{\sigma}_{11} \tilde{u}_1}{R_1}, \\ \tilde{\sigma}_{12} \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{\partial}{\partial R_1} (\tilde{\sigma}_{12} \tilde{u}_1) - \frac{\tilde{\sigma}_{11} \tilde{u}_1}{R_1} + \frac{\tilde{\tau}_{21} \tilde{u}_1}{h_0} \sin \alpha, \\ \tilde{\sigma}_{22} \tilde{\varepsilon}_{22} &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\tilde{\sigma}_{22} \tilde{v}_2) + \frac{\tilde{\tau}_{21}^{\text{np}} \tilde{v}_2}{h_0} + \frac{\tilde{\sigma}_{22} \tilde{u}_2}{R_2}, \\ \tilde{\sigma}_{21} \tilde{\varepsilon}_{21} &= \frac{\partial}{\partial R_2} (\tilde{\sigma}_{21} \tilde{u}_2) - \frac{\tilde{\sigma}_{22} \tilde{u}_2}{R_2} + \frac{\tilde{\tau}_{12} \tilde{u}_2}{h_0} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой Грина и представлениями выше, (6) преобразуем к виду

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} \int_S (\tilde{\sigma}_{11} \tilde{v}_1 + \tilde{\sigma}_{12} \tilde{u}_1 + \tilde{\sigma}_{22} \tilde{v}_2 + \tilde{\sigma}_{21} \tilde{u}_2) dS + \\ + \frac{1}{2} \int_F (\tilde{\tau}_{12}^{pp} \tilde{v}_1 + \tilde{\tau}_{21} \tilde{u}_1 \sin \alpha + \tilde{\tau}_{12}^{pp} \tilde{v}_2 + \tilde{\tau}_{12} \tilde{u}_2 \sin \alpha) dF .$$

Здесь первый интеграл равен нулю, так как напряжения $\tilde{\sigma}_{ij}$ удовлетворяют нулевым граничным условиям. Второй интеграл в полученном равенстве тоже равен нулю в силу того, что он представляет работу сил трения на перемещениях \tilde{u}_{ij} и \tilde{v}_{ij} . В таком случае равенство (6) принимает вид

$$\int_F \tilde{W} dF = 0.$$

Поскольку величина удельной потенциальной энергии упругой деформации всегда положительна, то с учетом (1) это равенство может быть выполнено только для

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = 0$$

Отсюда следует

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(2)}, \quad \sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)},$$

что и доказывает единственность решения краевой задачи.

РЕЗЮМЕ

Структура тканей гладкого переплетения способствует нитям одного семейства скользить по нитям второго семейства в процессе деформирования препрегов. Сопротивлением такому движению являются силы трения. Для изотермического процесса деформирования препрегов доказана единственность решения статических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колганов В.И., Колганов А.В, Сахоненко В.М., Сахоненко С.В. Метод исследования напряженно – деформированного состояния неотвержденных композиционно - волокнистых материалов. - Межвуз.сб. Вып.4 «Неразрушающий контроль и диагностика окружающей среды, материалов и промышленных изделий», СПб.:2001. С. 125-134.
2. Комков М.А., Колганов В.И., Колганов А.В, Сахоненко В.М., Сахоненко С.В. Сдвиговые перемещения нитей в неотвержденных тканых композитах под действием внешних нагрузок. Вопросы оборонной техники. Серия 15. Композиционные неметаллические материалы в машиностроении. – М.: НТЦ «Информтехника». – Вып. 1(134) – 2 (135), 2004 г. С.51-55.
3. Василевич Ю.В., Сахоненко В.М., Сахоненко С.В. Модель деформирования препрегов в условиях равновесия // Межведомственный научно-технический сборник «Машиностроение» - 2007. №22. С.134-142.

SUMMARY

Plain weave fabric structure facilitates the threads of a family slide over the threads of the second family in the process of deformation of prepregs. Resistance of such a movement is the friction force. For isothermal deformation process of the uniqueness of solutions prepregs static problems.

Поступила в редакцию 01.10.2013

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВИБРАЦИЙ ЦЕНТРОБЕЖНОГО ПОЖАРНОГО НАСОСА С ПРОСЛАБЛЕННОЙ ПОСАДКОЙ ВАЛА В ПОДШИПНИКАХ

д.т.н. ¹ Ларин А.Н., к.т.н. ² Ларин А.А., асп. ² Водка А.А., ³ Ущипивский И.Л.

¹ Национальный университет гражданской защиты Украины, Харьков

² Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

³ Главное управление государственной службы по чрезвычайным ситуациям Украины во Львовской области, Львов, Украина

Введение. Центробежные насосы являются важной частью пожарного оборудования, работа которых существенно влияет на эффективность выполнения операций по ликвидации чрезвычайных ситуаций подразделениями государственной службы по чрезвычайным ситуациям.

На сегодняшний день на вооружении соответствующих служб в странах СНГ имеется большое число единиц пожарной техники, которые находятся уже в длительной эксплуатации. Установленные на них центробежные насосы уже близки к исчерпанию своего проектного ресурса. Тем не менее Указанная ситуация приводит к тому, что существует высокая вероятность наличия в центробежных насосах скрытых дефектов, которые могут привести к выходу из строя насосов и таким образом снизить эффективность работы подразделений при оперативных действиях по ликвидации чрезвычайной ситуации. Кроме того, некоторые дефекты способны проявляться негативным образом на тактико-технических показателях работы насоса (например уменьшать напор), что также негативно отражается на эффективности его использования.

Существующая система контроля надежности насосов базируется на системе технических осмотров и планово-предупредительных ремонтных работах. Такой подход эффективен если существуют качественные методики диагностики, особенно такие, которые не требуют проведения операций их разборки. Опыт эксплуатации насосов указывает на то, что дефекты, которые приводят к выходу из строя насосов, обычно, приводят к повышению вибрационного уровня, который сопровождает работу насоса. В этой связи, применение вибрационной диагностики, инструмента определения технического состояния центробежных пожарных насосов может быть эффективным способом повышения надежности и эффективности их использования.

Постановка задачи. В основе данной работы лежит проведение серии экспериментальных исследований, направленных на определение закономерностей изменения вибрационных характеристик насоса вследствие наличия дефекта. Таким образом, сравнительный анализ изменения в динамике системы по сравнению с эталоном позволяет сформировать признаки скрытого дефекта внутри насоса, а следовательно позволяет проводить диагностирование его технического состояния.

Условия и средства проведения экспериментальных исследований. В данной работе рассмотрены экспериментальные испытания центробежного пожарного насоса ПН-40УВ для подачи огнетушащих веществ, который установлен на аварийно-спасательном автомобиле.

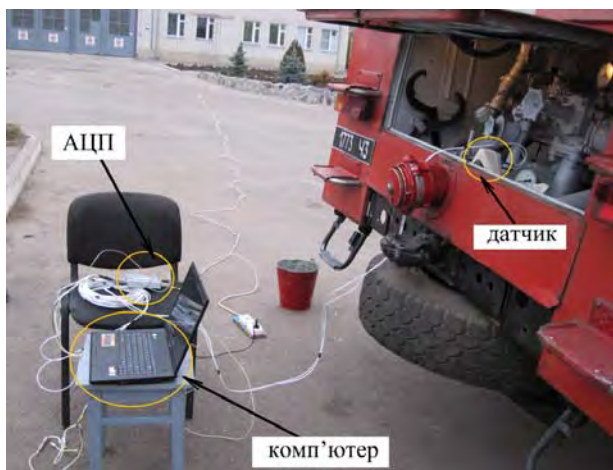


Рисунок 1. – Измерительный комплекс «Ультра-В-И» при экспериментальных исследованиях

Экспериментальные исследования проводились с использованием измерительного комплекса «Ультра-В-И» [1,2], который разработан на кафедре динамики и прочности машин Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» (Харьков, Украина). Измерительный комплекс состоит из (рис. 1): датчика виброускорений; аналого-цифрового преобразователя (АЦП) и портативного компьютера. «Ультра-В-И» имеет действительное свидетельство о государственной метрологической аттестации и позволяет проводить измерения виброускорений в точке конструкции.

В рамках натурных испытаний с данным измерительным комплексом использовался датчик виброускорений, который оснащен микроэлектромеханическим сенсором ADXL250 (производство Analog Device, США). Датчик является емкостным и позволяет проводить замеры виброускорений с амплитудами в диапазоне 0.5 до 40 м/с² и в частотном диапазоне от 1 до 400 Гц. Испытания вибраций насоса на пожарном автомобиле проводились на корпусе всасывающего патрубка в трех направлениях: осевом (Z), вертикальном (Y) и горизонтальном (X).

Исследование вибраций на всасывающем патрубке пожарного насоса. Первоочередной задачей экспериментальных исследований был анализ вибрационного состояния пожарного насоса ПН-40УВ, который не имеет дефектов. Для проявления различного рода особенностей в вибрации анализировалась работа насоса на наиболее динамически нагруженном режиме, т.е. во время работы насоса с водой без ее подачи.

При этих испытаниях частота вращения ротора удерживалась у максимального значения несколько более 2000 об/мин. Следует отметить, что вращение ротора не является четко зафиксированным вследствие существования неравномерности хода двигателя, кроме того управление скоростью вращения ротора пожарного насоса реализуется в ручном режиме, то есть присутствует человеческий фактор. В связи с этим при анализе вибраций необходимо контролировать значения частоты вращения ротора. В рамках данных исследований использовался частотомер, который был установлен у соединения ротора насоса с валом отбора мощности автомобиля. Данные в режиме реального времени параллельно с виброускорениями передавались на АЦП и сохранялись на компьютере. Так, например, при испытаниях насоса с удержанием наибольшей скорости вращения ротора средняя частота нагрузки составила $\langle \omega \rangle = 37,73$ Гц, что соответствует 2264 об/мин. Разброс значений частоты был зафиксирован в пределах от 35,67 Гц до 39 Гц (2140 об/мин - 2340 об/мин) с дисперсией $\sigma_{\omega}^2 = 0,71$ Гц².

С целью более детальных исследований спектральных показателей вибраций насоса уместно анализировать вибрации на других скоростях вращения ротора. Обобщением этих результатов является «прогонка» насоса с постепенным непрерывным увеличением частоты возмущения. И так был проведен тест при котором скорость вращения насоса постепенно увеличивалась начиная от 800 об/мин до 2100 об/мин. Зарегистрирован сигнал, демонстрирующий изменение во времени частоты вращения ротора представлен на рис. 2,а, а временной сигнал с виброускорения на рис. 2,б. Разгон проводился в течение 30 секунд

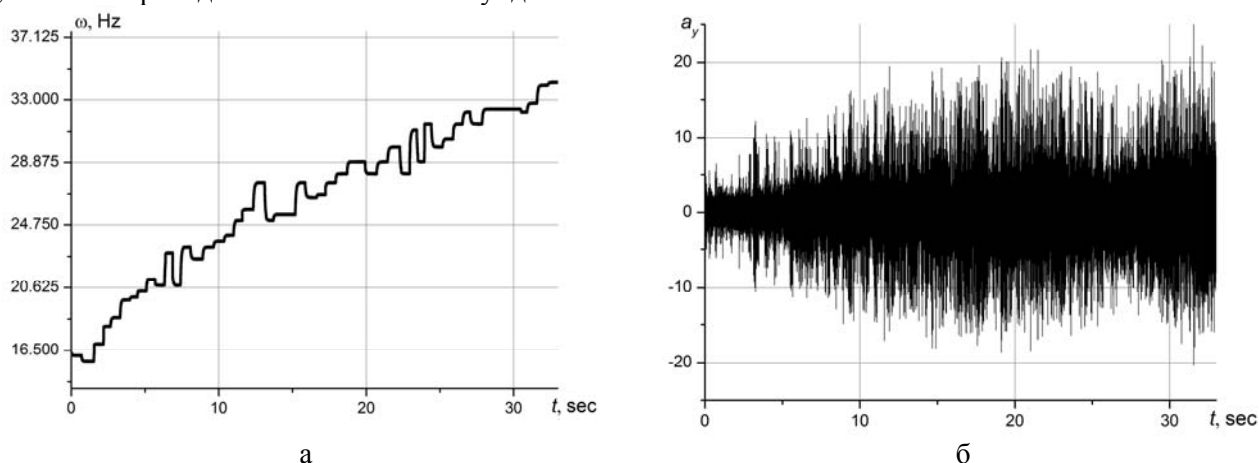


Рисунок 2 – «Прогонка» насоса а – зарегистрированный сигнал с тахометра (частота вращения ротора во времени), б - зарегистрированный сигнал виброускорений в вертикальном направлении

Все полученные сигналы анализировались по их спектральным составом. При этом использовалась процедура быстрого преобразования Фурье [4,5]. Сигналы виброускорения, полученные при тестах с постепенным непрерывным увеличением частоты возбуждения анализировались с помощью спектрограмм [6]. Для построения спектрограмм сигнал делился на отдельные фрагменты (окна), в пределах каждого из которых проводилась классическая процедура быстрого преобразования Фурье. Далее происходила построение карты полученных результатов: по осям координат отложены время зарегистрированного сигнала однозначно соответствует скорости вращения ротора, а второй оси частоты на которой происходит вибрации насоса - уровень амплитуды колебаний на этих частотах отличался цветом (крупнейшие амплитуды

черным цветом, а наименьшие - белым). Такая процедура называется оконного преобразования Фурье.

Ширина окна задавалась равной 0,5 секунды. Такое значение с одной стороны является достаточным для получения корректных результатов с быстрого преобразования Фурье в рамках каждого окна (учитывая, что наименьшая рабочая частота сигнала соответствует 800 об/мин есть 13,3 Гц, а это 10 периодов на низкой частоте в окне). С другой стороны указанная ширина окна позволяет получить результаты по более 60 окнам и, таким образом, построить непрерывное поле изменения спектра вибраций во времени с увеличением частоты нагрузки.

На рис. 3 сведены спектры вибраций и поля их изменения с ростом частоты вращения ротора (спектрограммы). Анализируя приведенные спектры следует отметить наличие существенных амплитуд со старшими гармониками. В-первую очередь это касается 7 гармоника, что хорошо просматривается на спектрограммах. Указанная гармоника превосходит все другие в спектрах на всем диапазоне значений частоты возмущения, особенно для вертикального и осевого направлений. Проявление 7 гармоника связан с турбулентными течениями в рабочей камере насоса, которые образуются как кромочные следы вокруг лопастей рабочего колеса. В данной конструкции 7 лопастей. Кроме этого можно видеть на спектре и 14 гармонику с частоты вращения ротора, которая является второй кратностью частоты пульсаций кромочный следа.

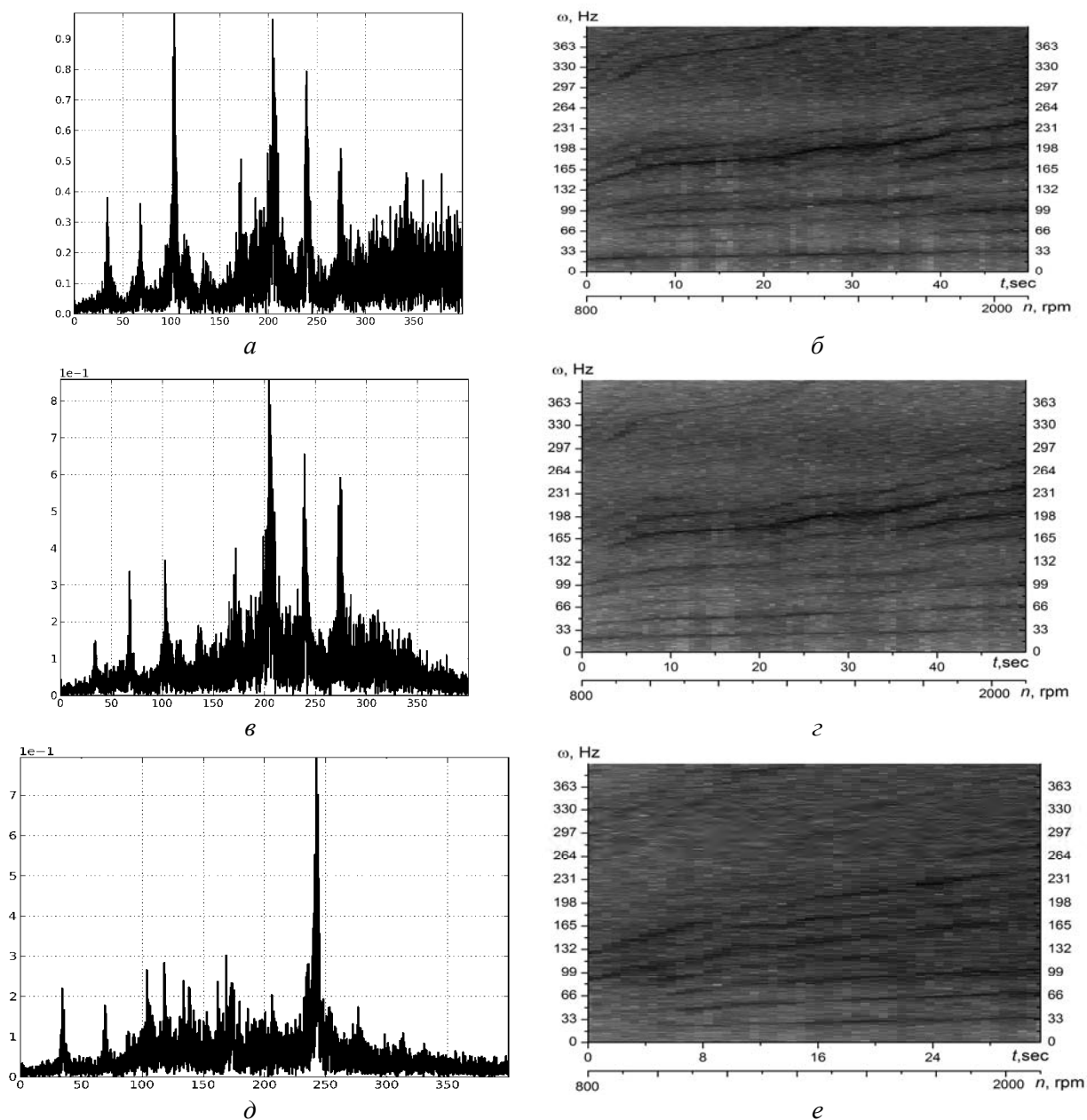


Рисунок 3 – Спектры (а,в,д) и спектрограммы (б,г,е) вибраций насоса в вертикальном (а, б), осевом (в, г) и горизонтальном (д, е) направлениях

Сравнительный анализ количественных показателей вибраций в разных направлениях указывает на то, что наибольшие вибрации наблюдаются в вертикальном направлении, а в горизонтальном наименьшие.

Детальный анализ направленности вибраций в точке насоса можно сделать по пространственной траектории вектора виброускорений. Соответствующие результаты графически представлены на рис. 4. Все проекции траектории образуют эллиптические фигуры. Присутствует эффект наклона большей оси эллипса в проекции траектории вектора виброускорений на плоскость YZ. Угол наклона к осевому направлению составляет 55° .

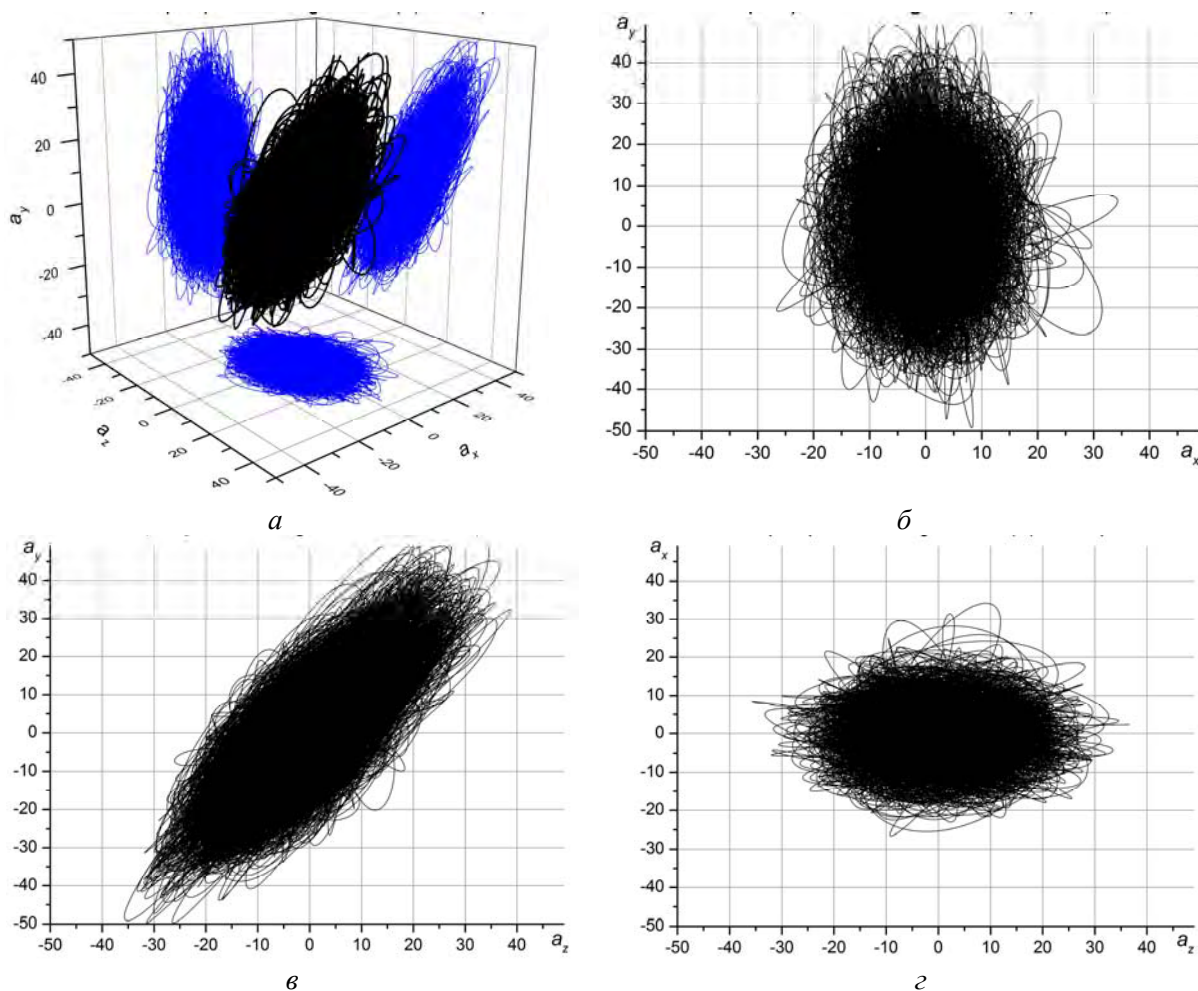
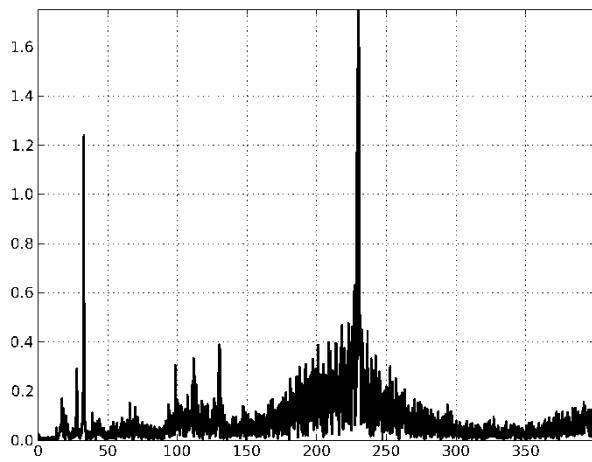


Рисунок 4 – Пространственная траектория вектора виброускорений (частота вращения ротора 2000 об/мин)
 а – траектория в пространстве; б, в, г – ее проекции на плоскости XY; YZ; XZ

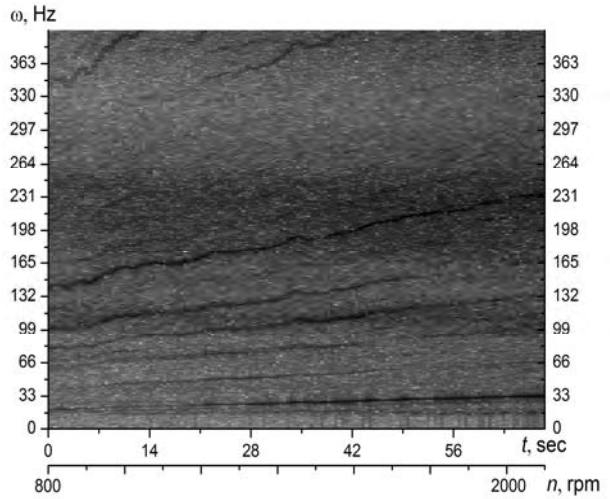
Исследование вибраций пожарного насоса ПН-40УВ, который имеет ослабление крепления вала в подшипниках. Среди характерных дефектов, сопровождающий работу центробежных пожарных насосов является дефект ослабление посадки вала в подшипниковом узлу. С целью исследования вибраций насоса с указанным дефектом, было собрано новый насос вал рабочего колеса которого меньший радиус на 0.03мм в месте его посадки на первый подшипник. Спектры и спектрограммы вибраций показаны на рис. 5. Анализ спектра вибраций в вертикальном направлении (рис. 5,а) показывает присутствие 1й, 3й, 4й и 7ой гармоник с частотами кратными частоте вращения ротора (это частоты 33 Гц, 99 Гц, 133 Гц и 233 Гц). Однако наиболее важным является наличие в спектре суб-гармоник, которые указывают на присутствие в системе нелинейностей, вызванных наличием дополнительных контактов или ударов через люфт в посадке вала. К ним относятся гармоники с 0,5 и 3,5 кратности частоты вращения ротора (16,5 Гц и 116 Гц).

Аналогичный результат можно наблюдать на поле изменения во времени спектра вибраций, показанный на рис. 5,б. Анализ спектрограммы указывает на существенное доминирование 1 - й (основной) и 7 - й гармоник вибраций. Подтверждается также наличие эффекта сопровождающей суб-гармоники с кратностью 0,5 от частоты вращения ротора, которая

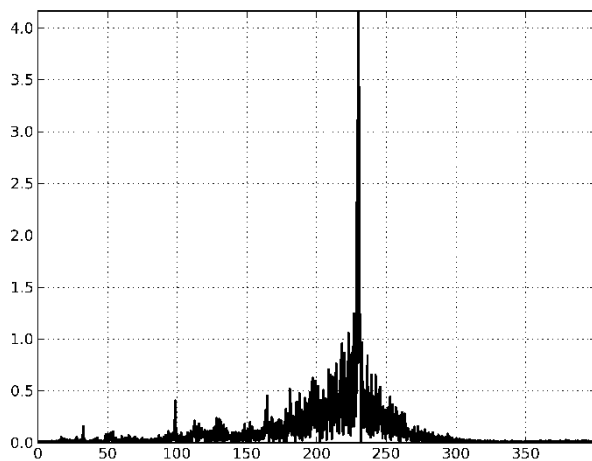
наблюдается во всем частотном диапазоне вибраций. Суб-ультра гармоника с кратностью 3,5 от частоты вращения ротора проявляется только на больших уровнях вибраций т.е. при самых высоких скоростях вращения ротора. Спектр и спектрограмма в осевом направлении (рис. 5, в, з) является качественно близким к соответствующим характеристикам вибраций насоса без внутренних дефектов. Проявляется больше доминирование у 7 гармонике и на спектрограмме можно видеть суб-гармонику с частотой 0,5 от частоты вращения ротора. Спектр вибраций в горизонтальном направлении (рис. 5, д, е) довольно похож на шум. Возбуждается первая основная гармоника и суб-гармоники.



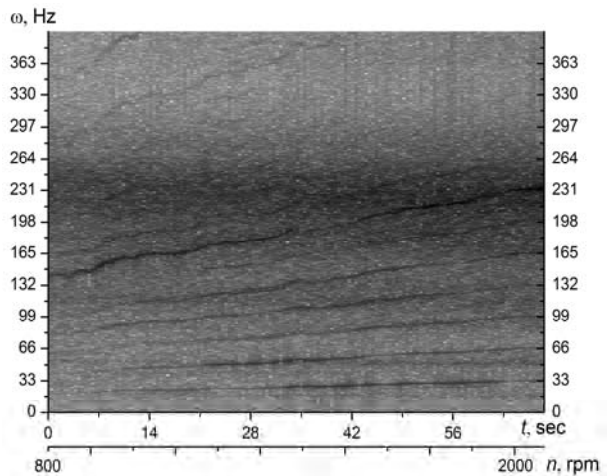
а



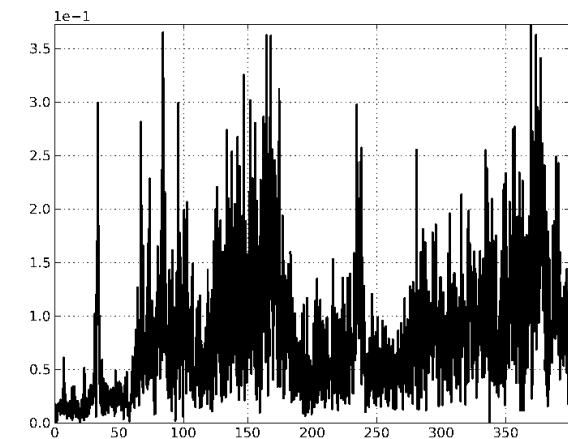
б



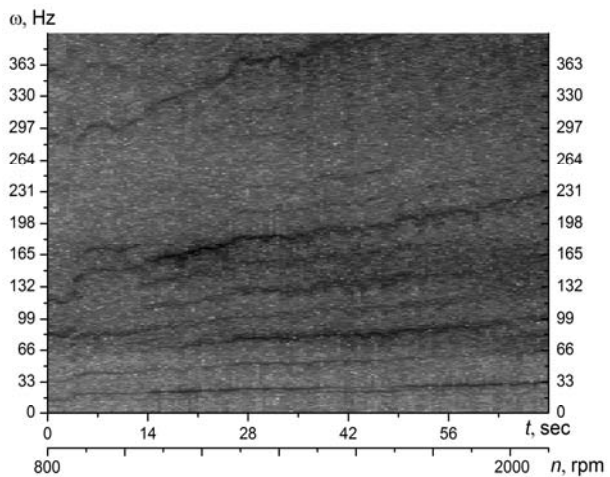
в



з



д



е

Рисунок 5. – Спектры (а, в, д) и спектрограммы (б, з, е) вибраций насоса, который имеет ослабление крепления вала в подшипниках в вертикальном (а, б), осевом (в, з) и горизонтальном (д, е) направлениях

Сравнение количественных показателей вибраций в разных направлениях указывает на то, что наибольший уровень вибраций наблюдаются в осевом направлении, а в горизонтальном – наименьший.

Сравнение вибраций насоса с дефектом посадки вала и без него указывает, на то что дефект ослабляет в первую очередь осевое направление, что приводит к существенному увеличению вибраций в этом направлении на 80% в то время как вибрации в других направлениях остаются почти такими же как и у насоса без указанного дефекта.

Следующим признаком, сопровождающим наличие дефекта типа ослабления посадки вала в подшипниках является изменение в пространственной форме вибрации. Действительно, вследствие наличия дефекта происходит перераспределение жесткости системы и как следствие меняется пространственная форма колебаний. Исследование указанного явления может быть реализовано при анализе ориентации результирующего вектора виброускорения. На рис. 6 представлено пространственная траектория вектора виброускорения в точке насоса с наличием внутреннего дефекта.

Кроме выраженного доминирования вибраций в осевом направлении интересно изменение угла ориентации эллипса проекции траектории на плоскость YZ. Так, при рассмотрении ориентации вектора вибраций в предыдущем случае угол ориентации составлял около 55° в то время как при наличии дефекта этот угол достигает 80° .

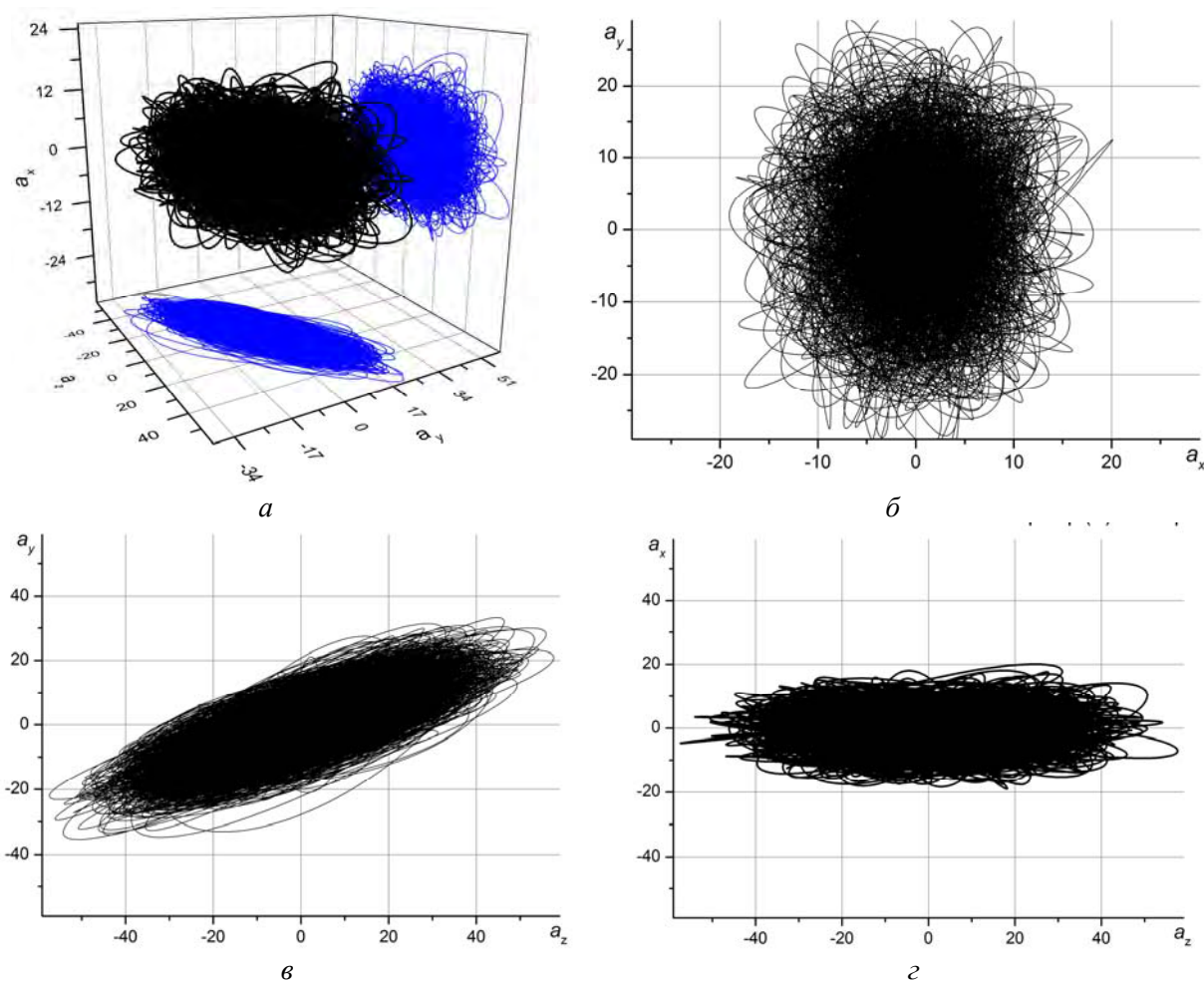


Рисунок 6. – Пространственная траектория вектора виброускорений в точке насоса, который имеет ослабление крепления вала в подшипниках (частота вращения ротора 2000 об/мин)
 а – траектория в пространстве; б, в, г – ее проекции на плоскости XY; YZ; XZ

РЕЗЮМЕ

В работе представлены экспериментальные исследования вибраций центробежного пожарного насоса ПН-40УВ, который не имеет повреждений и с дефектом в виде изношенного подшипникового узла. Проведен спектральный анализ вибраций и построены пространственные траектории вектора виброускорений в точке насоса. Определено, что в спектрах вибраций насоса с повреждением указанного типа присутствуют субгармоники с частотами равными 0,5 и 3,5 кратности частоты вращения ротора. Определено также что наличие дефекта приводит к изменению в пространственной ориентации вибраций. Так у не дефектном насосе доминирует вертикальное направление в то время как насос с дефектом воспроизводит самые вибрации в осевом направлении. Полученные вибрационные признаки наличия скрытого дефекта указанного типа может быть положено в методику технической диагностики пожарных насосов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Водка А.А. Виброизмерительный комплекс на основе микроэлектромеханического сенсора / А.А. Водка, А.И. Трубаев, Ю.Н. Ульянов // Вісник Східноукраїнського Національного університету ім. В. Даля. – Луганськ, 2012.– № 9 (180). Ч.1. – С. 140-147.
2. Ульянов Ю.Н. Комплекс для измерения виброускорений на основе микроэлектромеханического сенсора / А.А. Водка, А.И. Трубаев, Ю.Н. Ульянов // Материалы III Международной научно-практической конференции «Проблемы развития транспортных систем и логистики», Евпатория, 2012 год. – 2012. – С. 191.
3. Brigham E.O. The fast Fourier transform and its applications / Brigham E. Oran. – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1988, 448 p.
4. Oppenheim A.V. Discrete-time signal processing / Alan V. Oppenheim, R. W. Schaffer and J. R. Buck. – Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 3rd edition, 2009, 1120 p.
5. Allen J.B. Short Time Spectral Analysis, Synthesis, and Modification by Discrete Fourier Transform / Jont B. Allen // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. ASSP-25 (3), 1977, Pp. 235–238

SUMMARY

The work deals with the experimental studies of vibrations of centrifugal fire pump PN-40UV without defects and with unfasten shaft in a bearing seat. A spectral analysis of vibration and investigation of the forming of spatial trajectory of vibration acceleration vector have been carried out. It was determined that the spectrum of vibrations of the pump with mentioned type of defect have sub-harmonics (with 0.5 and 3.5 factors of the rotor rotation). The changing in the spatial orientation of the vibration of the defected pump have been defined. Non-defected pump has vibrations with domination in vertical direction, but defected pump vibrations are axially oriented.

Поступила в редакцию 16.10.2013

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ И КОМПОНЕНТОВ ОБОРУДОВАНИЯ ЯЭУ

к. ф.-м. н. **Ширвель П.И.**, маг. **Сергей А.А.**, асп. **Чигарев В.А.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

Характерной особенностью, отличающей условия эксплуатации любых ЯЭУ (предназначенных как для атомных электростанций и других энергетических систем выработки высокопотенциального тепла, так и для космических объектов, транспортных средств или двигательных систем на основе использования ядерной энергии), является работа в течение длительного срока в условиях повышенных температур и интенсивных радиационных облучений. Это приводит к дополнительным эффектам поведения облученного материала, которые оказывают определяющее влияние на процессы деформирования в целом [1–3]. Учет этих изменений крайне важен, так как непредвиденное поведение элементов конструкций и компонентов оборудования в зоне высокой радиации может привести к катастрофе [4, 5]. В этой связи возникает необходимость в более адекватном описании и имитационном моделировании ответственных элементов конструкций, подверженных сложным техногенным воздействиям. Вообще говоря, современная постановка задач прогнозирования ресурса и продления эксплуатации компонентов оборудования, внедрения новых материалов в элементы конструкции требует исследования процесса деформирования при всевозможных условиях, как правило, экстремальной эксплуатации, включая аварийные ситуации, вплоть до разрушения. Создание механико-математических моделей и методов расчета, в полной мере удовлетворяющих этим зачастую противоречивым требованиям, является одним из приоритетных направлений современных научных исследований. Данная проблематика соответствует приоритетным направлениям фундаментальных и прикладных научных исследований, а также приоритетным направлениям научно-технической деятельности в Беларуси. Именно поэтому, озвученная тема, как и вообще тематика научных работ, посвященных моделированию процессов деформирования твердых тел в сложных условиях немеханического нагружения, актуальна как в теоретическом, так и в прикладном плане, что подтверждается ростом числа публикаций в отечественной и зарубежной литературе (по данным индекса цитируемости систем научного поиска Web of Science, Scopus и SciVerse Science Direct). К примеру, вопросам моделирования процессов деформирования твердых тел, эксплуатирующихся в условиях термосиловых и радиационных воздействий, уделено внимание в определенном числе работ. Однако при детальном анализе с позиций механики деформируемого твердого тела выясняется, что в них не в полной мере учитываются особенности поведения материалов в терморadiационных потоках. Как следствие, такие решения в большинстве своем отражают интересы и возможности авторов и не исчерпывают поставленную задачу в целом. В тоже время, механическое поведение элементов конструкций и компонентов оборудования ЯЭУ зависит от большого числа различных явлений, где существует целый комплекс взаимосвязанных физических, химических и механических процессов, причем лишь некоторые из них описаны теоретически. Как правило, столь жесткие условия эксплуатации сопровождаются необратимыми изменениями теплофизических, механических и прочностных характеристик используемых материалов [2]. Кроме того, здесь используются предельные возможности современных конструкционных и топливных (делящихся) материалов [5]. Следует отметить, что не последнюю роль в этом вопросе играет и корректное определение напряженного и деформированного состояния элементов конструкций с последующей оценкой их работоспособности на основе того или иного критерия [6]. Без преувеличения, повышенные требования, предъявляемые к прочности и надежности таких элементов, могут быть обеспечены лишь при наличии достоверной информации об их НДС. Последующий расчет на прочность и оценка долговечности основаны на анализе НДС с учетом особенностей свойств и поведения материала в реальных условиях эксплуатации. Вообще говоря, общая особенность эксплуатации почти всех элементов конструкций атомной техники заключается в том, что прочностная надежность ответственных конструктивных элементов во многом определяется уровнем и характером распределения возникающих в них внутренних напряжений [4, 6]. Поэтому обеспечение безопасности эксплуатации и продление ресурса оборудования энергетических установок тесно связано с анализом НДС наиболее напряженных элементов конструкций. В связи с этим и возрастает роль как теплофизических, так и прочностных расчетов и анализа НДС компонентов ЯЭУ, повышаются требования к их точности.

Таким образом, проблема расчета и анализа напряженного и деформированного состояния конструктивных элементов ЯЭУ является актуальной в первую очередь с точки зрения прогнозирования ресурса и безопасности работы всей АЭС.

На сегодня решению задач определения НДС конструктивных элементов в условиях термо-радиационных воздействий посвящено много работ [4–6]. В нашей мы занялись разработкой современных моделей расчета НДС элементов конструкций и компонентов оборудования цилиндрической геометрии, основанных на достижениях механики деформированного твердого тела, общих закономерностях деформирования и разрушения материалов в терморadiационных потоках и компьютерных технологий для расчета НДС конструкций, находящихся в условиях сложного нагружения с учетом внутриреакторных условий АЭС. Конкретнее, ставилась задача создания общей механико-математической модели деформирования физически нелинейных твердых тел с учетом интенсивного облучения потоками частиц большой энергии в условиях неоднородного термосилового воздействия и изменения свойств материалов, а также моделирование НДС при ползучести и облучении длинных цилиндрических тел в стационарном, квазистационарном и нестационарном приближениях, с учетом имеющихся в научной и справочной литературе исходных данных. Это направление исследований последнее время стремительно развивается (особенно за рубежом), что связано как с быстрым ростом вычислительных мощностей, так и с потребностью в обобщении разнородных данных из радиационного материаловедения и механики сплошных сред, в их формализации на уровне комплексных математических моделей. Для проведения исследований на разработанных моделях, реализован оригинальный алгоритм расчета НДС и компьютерная программа решения задач в условиях облучения. Здесь следует отметить, что наиболее удобной формой представления вычислительного алгоритма реализации полученных при выполнении проекта механико-математических моделей деформирования и разрушения элементов конструкций ЯЭУ, а также построенных численных схем определения НДС твердых тел при термомеханических и радиационных воздействиях является стандартная программа, реализованная в виде процедур на современном алгоритмическом языке C++ или C# [7, 8]. Система языка C#/C++ обеспечивает пользователям удобную интегрированную операционную среду, а также существенно облегчает профессиональное программирование, в котором определяющими параметрами являются скорость компиляции, высокое качество генерируемого кода и относительно малая потребляемость оперативной памяти. Тем самым, использование алгоритмического языка в некоторой степени снижает барьер между профессиональным программистом и математиком-механиком. От которого требуются лишь минимальные знания основ программирования для того, чтобы организовать требуемую программу расчета с использованием отдельных процедур. Общая структурная блок-схема программы моделирования НДС приведена на рисунке 1.

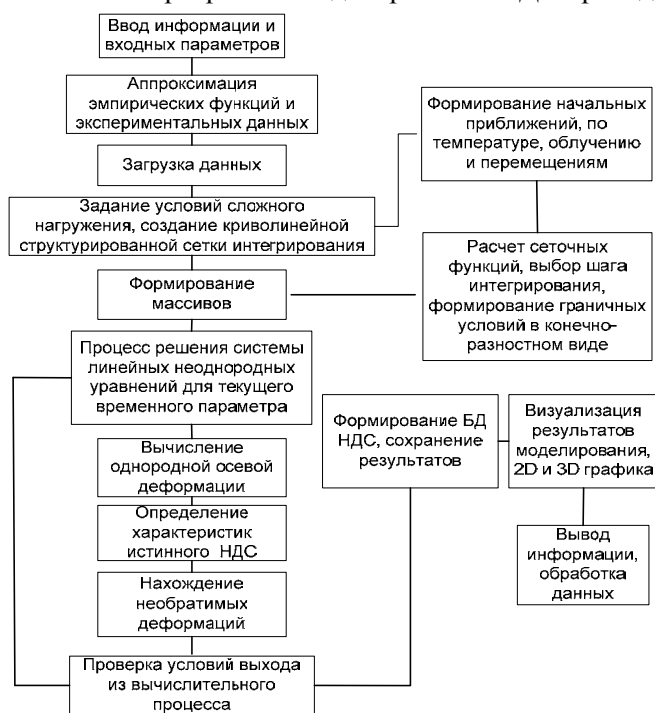


Рисунок 1 – Упрощенная структурная схема программы

В функциональное назначение программы входит загрузка данных и входных параметров, аппроксимация эмпирических функций и экспериментальных данных, импорт геометрии расчетной области, задание модели среды, расстановка начальных и граничных условий, генерация криволинейной структурированной расчетной сетки, задание критериев сходимости и т.д. После этого управление передается решателю, выполненного на основе разработанного численного метода, который начинает процесс счета с учетом алгоритма определения необратимых деформаций.

В ходе выполнения работы оказалось, что учет НДС, который предполагалось провести существующими методами, по отношению к рассматриваемым нелинейным моделям ползучести и радиационного распухания является весьма сложной задачей, и пришлось разработать гибридный численный метод решения данного класса

задач. К настоящему моменту метод был протестирован как на обыкновенных дифференциальных уравнениях, так и на уравнениях в частных производных. Следует отметить также, что решение может осуществляться как для бесконечно длинных цилиндрических тел, так и с учетом однородной осевой (обобщенной плоской) деформации. При достижении требуемого значения критерия сходимости вычислительный процесс может быть остановлен. В дальнейшем результаты доступны для их обработки, формирования базы данных, сохранения и визуализации. Отметим, что такое построение программы позволяет проводить виртуальное моделирование и одновременно, визуализируя значение характеристик НДС, анализировать получаемые результаты, менять условия нагружения, а также параметры механико-математической модели. В целом, указанная структурная схема представляет собой совокупность предписаний, обеспечивающих выполнение операций и процедур, необходимых для получения решений, позволяющих исследовать процессы функционирования рассматриваемой механической системы. Все дальнейшие вычислительные процедуры производились на базе современных ПЭВМ на языке C# с использованием программной среды Microsoft Visual Studio 2011 Express [9, 10].

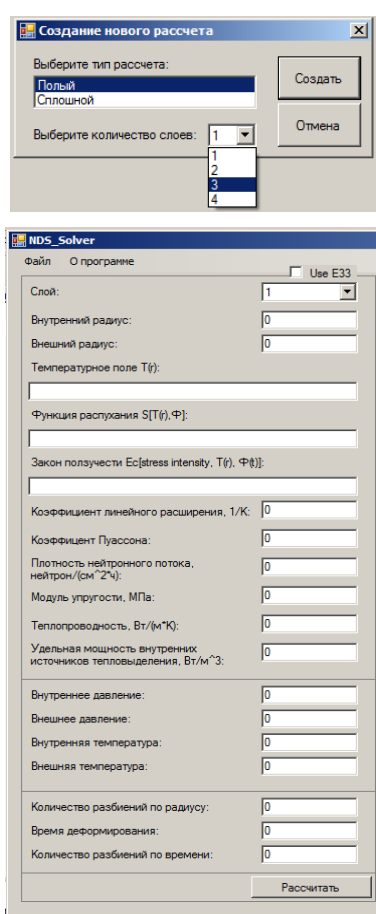


Рисунок 3.

В результате, на основании математических моделей и вычислительных процедур, полученных на отдельных этапах исследования, разработан пакет программ для современных персональных компьютеров. Все программы являются оригинальными. Разработанные отдельные коды для удобства проведения виртуальных (численных) экспериментов и дальнейшей обработки получаемых результатов были сведены в единый программный комплекс. Программный комплекс составляет множество основных файлов функционально связанных между собой, которые объединены в один управляющий файл NDS_Solver.exe. Работа всех кодов комплекса осуществляется последовательным выполнением программных файлов, каждый из которых выполняет определенную задачу и управляет работой комплекса, например, в зависимости от требования пользователя формирует исходную информацию о материалах, из которых изготовлены исследуемые тела, их геометрии и форме; подготавливает данные по физико-механическим и теплофизическим свойствам (конкретные зависимости, характеризующие свойства материалов вводятся или загружаются в начале работы), а также о механических нагрузках и терморadiационных воздействиях; производит графическое представление результатов моделирования (все найденные характеристики НДС) в виде цветных двумерных и трехмерных графиков (рисунок 2); содержит информацию по базе данных, относящуюся к материалам, которые будут использованы при расчетах, проводит расчет НДС однослойных или многослойных цилиндрических тел, формирует информацию в виде БД; организует управление программой, сохранение и загрузку данных и др. Расчет производится в диалоговом режиме (рисунок 3 и 4).

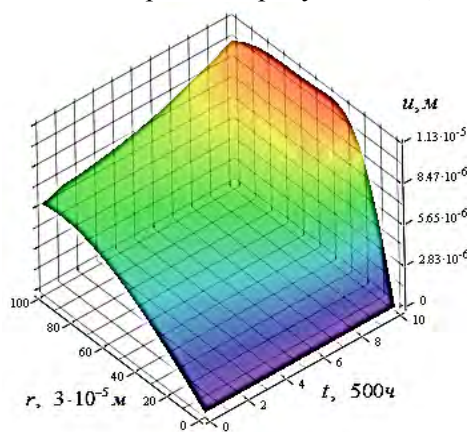
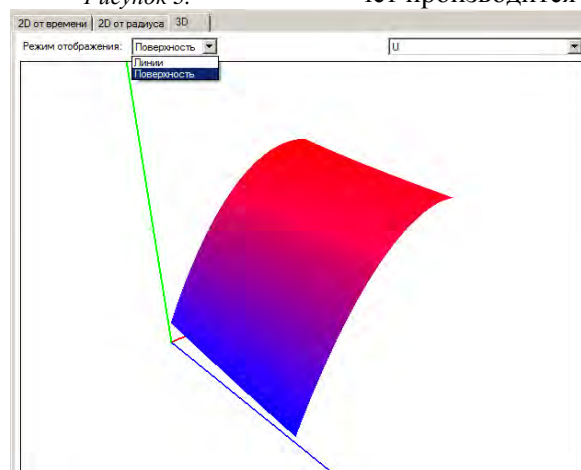


Рисунок 2. – Полученные графические 3D результаты до (слева) и после (справа) обработки

Также в программном комплексе использованы следующие динамически загружаемые библиотеки: ZedGraph.dll – .Net библиотека для работы с двумерными графиками; Visualisation.dll – .Net библиотека для работы с трехмерными графиками; Tao.OpenGL.dll, Tao.FreeGlut.dll – .Net библиотека для работы с графикой, необходима для корректной работы Visualization; IniFileClass.dll – .Net библиотека для работы с ini-файлами, которые отвечают за сохранение и загрузку конфигурации приложения; Freeglut .dll – библиотека для поддержки функций freeglut. Используется для упрощения работы с графической библиотекой OpenGL; DynamicFunctions.dll – .Net библиотека для работы с математическими формулами. Программный комплекс может быть использован для работы на персональных компьютерах под управлением операционной системы Windows (XP, Vista) и выше (необходимо наличие библиотек .Net Framework 3.0). Архитектура программного комплекса является модульной, что дает возможность добавлять новые функциональные возможности и вносить улучшения. Внешний вид программы соответствует стандартам и рекомендациям к приложениям для операционных систем Windows (рисунок 4).

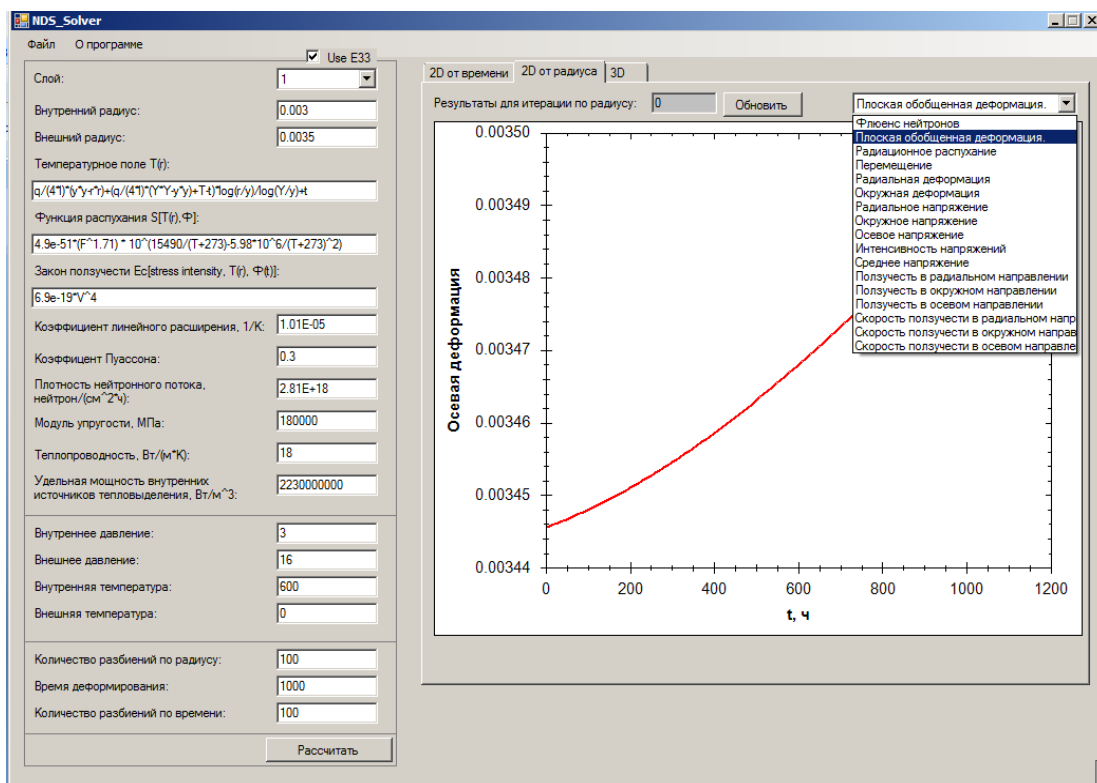


Рисунок 4. – Разработанный программный комплекс NDS_Solver

Не вдаваясь в излишние подробности, далее кратко перечислим основные научные результаты проведенных исследований. На первом этапе проекта были модифицированы механико-математические модели деформирования цилиндрических тел, описывающие основные закономерности поведения конструкционных и топливных материалов в условиях термосиловых и радиационных воздействий с учетом зависимости их механических и теплофизических характеристик от уровней действующих температур в диапазоне до 1150 К и флюенсов нейтронов 10^{25} – 10^{27} нейтрон/м² [5–7]. Получены разрешающие системы дифференциальных уравнений в частных производных описывающие НДС цилиндрических тел при облучении. Далее для их решения предложен и обоснован численный метод. На втором этапе исследований была разработана расчетная схема и алгоритмы нахождения основных характеристик НДС цилиндрических тел в условиях ползучести и нейтронного облучения (при определении деформаций ползучести использовалась теория течения с учетом радиационной составляющей). На третьем этапе исследований на основе предложенных моделей были созданы эффективные методики, оригинальные алгоритмы и программные средства, позволяющие проводить численное исследование кинетики упруговязких процессов деформирования элементов конструкций и компонентов оборудования, работающих в условиях сложных квазистатических терморadiационных воздействий. Универсальный программный комплекс для различных типов граничных условий и вида цилиндрических областей (сплошной, полый, многослойный цилиндры) имеет адаптацию к различным видам физической нелинейности (радиационное распухание и ползучесть). Проведен ряд вычислительных экспери-

ментов, а также верификации и валидация данных, полученных в результате моделирования НДС в условиях неравномерного нагрева и интенсивного нейтронного облучения [11]. Также получен ряд решений модельных и тестовых задач для изучения деформирования цилиндрических тел с учетом физической нелинейности. На заключительном этапе исследований была разработана специальная методика проведения виртуальных экспериментальных исследований и программный модуль для имитационного моделирования и исследования НДС тепловыделяющих цилиндрических тел, позволяющие адекватно описать реально происходящие процессы деформирования при ползучести и облучении для основных конструкционных и тепловыделяющих материалов.

Предложенная общая механико-математическая модель и численный метод определения НДС могут послужить базой для разработки отечественных компьютерных кодов, моделирующих поведение цилиндрических элементов конструкций и компонентов оборудования, работающих в условиях экстремальных механических, термических и радиационных нагрузок при определении НДС элементов конструкций и компонентов оборудования в атомном машиностроении и энергетике. Полученные результаты могут стать в дальнейшем важным инструментом при оценке работоспособности элементов активных зон проектируемых ядерных реакторов нового поколения. С этой точки зрения данная тематика является достаточно перспективной и своевременной, учитывая новый этап развития атомной энергетики в Беларуси, отечественный потенциал которой напрямую зависит от объемов научно-исследовательских разработок. Результаты проведенных исследований могут быть также использованы при чтении специальных курсов студентам специальностей, связанных с компьютерным моделированием необратимых механических процессов, а также для подготовки отечественных специалистов по прочностным расчетам в области атомного машиностроения. Они уже нашли применение в учебном процессе БНТУ.

Дальнейшие планы предусматривают совместно со специалистами БГУИР, ФТИ, ОИМ и ОИЭЯИ – Сосны применение разработанных моделей и программных средств для определения оптимальных эксплуатационных нагрузок цилиндрических элементов конструкций и компонентов оборудования в машиностроении и энергетике: при анализе НДС конструктивных элементов, при прогнозировании ресурса конкретных технических устройств и анализе возможных механизмов и причин их повреждения в условиях экстремальной эксплуатации, а также применение изложенной методики и разработанного пакета прикладных программ при проведении прочностных расчетов с целью повышения точности прогнозирования ресурса широко применяемых в современной технике конструктивных элементов оборудования в виде цилиндрических тел в различных условиях экстремального нагружения.

В перспективе, полученные результаты могут наряду с нейтронно-физическим и теплофизическим блоками стать одной из трех составляющих общего компьютерного кода для проведения комплексных расчетов нейтронно-физических, теплофизических и прочностных характеристик конструктивных элементов ядерных реакторов. Подчеркнем, что до настоящего времени вычислительная программа такого уровня нигде в мире не создана. Проведенное исследование является хорошим заделом для создания такой общей программы расчета характеристик ЯЭУ: нейтронно-физический расчет – теплофизический расчет – напряженно-деформированное-состояние и обратная связь: нейтронно-физический расчет – теплофизический расчет – напряженно-деформированное состояние, но уже с учетом изменившейся геометрии активной зоны в результате деформирования и т.д.

Подходы, приемы и методы, используемые и полученные при выполнении исследований могут быть использованы: для дальнейшего развития и совершенствования методов моделирования и изучения терморadiационного НДС; при выполнении научно-исследовательских фундаментальных и прикладных тем, связанных с изучением прочностных характеристик твердых тел в условиях сложных термосиловых нагружений. Возможный экономический эффект заключается в том, что полученные результаты, позволяют без проведения дорогостоящих экспериментов и связанных с ними энергетических и материальных затрат рассчитывать напряженно-деформированное состояние и критические нагрузки при проектировании цилиндрических конструктивных элементов энергетического и машиностроительного оборудования, работающего в экстремальных условиях.

Благодарности

- *Исследования проведены при финансовой поддержке БРФФИ в рамках проекта T12-MB-038 «Моделирование процессов деформирования и разрушения элементов конструкций ядерных энергетических установок», № госрегистрации в ГУ «БелИСА» 20123143 от 09.10.2012.*

- Авторы проекта считают приятным долгом выразить благодарность профессору И.С. Куликову и профессору А.В. Чigareву за ценные советы и замечания.

РЕЗЮМЕ

Проведен комплекс исследований по изучению механического поведения конструктивных элементов цилиндрической геометрии при воздействии неоднородных термосиловых и интенсивных радиационных полей. Выполнены виртуальные эксперименты по применению полученной модели для численного анализа элементов конструкций ЯЭУ. Программная модель реализована на C# в лицензионной среде Visual Studio 2011, которая позволяет обрабатывать и визуализировать результаты расчетов кинетики НДС цилиндрических тел. Проведена верификация и валидация методики решения и программы расчета, проверено соответствие разработанного программного средства процессам в реальном конструкционном элементе реактора. Полученные результаты можно квалифицировать как решение задачи численного моделирования физико-механических систем с недетерминированными параметрами, которая имеет существенное значение в области расчетов конструктивных элементов энергетического и машиностроительного оборудования, а также позволяет улучшить существующие модели деформирования и разрушения сплошных сред в условиях сложных техногенных воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Todreas, N.E. Nuclear Systems I. Thermal Hydraulic Fundamentals / N.E. Todreas, M.S. Kazimi. – New York: Hemisphere Publishing Co, 1990.
2. Физика радиационных явлений и радиационное материаловедение / Паршин А.М., Неклюдов И.М., Камышанченко И.В., Тихонов А.Н. и др. Белгород: – Изд. Белгородского университета, 1998. –378 с.
3. Радиационная повреждаемость и работоспособность конструкционных материалов / А.Д.Амаев, А.М.Крюков, И.М.Неклюдов и др. Под ред. А.М.Паршина и П.А.Платонова. –СПб.: Политехника, 1997. –312 с.
4. Куликов, И. С. Прочность элементов конструкций при облучении / И. С. Куликов, В. Б. Нестеренко, Б. Е. Тверковкин. - Минск: Навука і тэхніка, 1990. - 143с.
5. Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях: В 2-х т. / Под ред. Г. С. Писаренко. - Киев: Наук. думка, 1980.
6. Киселевский, В. Н. Прочность конструкционных материалов ядерных реакторов / В. Н. Киселевский. - Киев: Наук. думка, 1990. – 163с.
7. Кристиан Нейгел и др. C# 5.0 и платформа .NET 4.5 для профессионалов = Professional C# 5.0 and .NET 4.5. — М.: «Диалектика», 2013. — 1440 с. — ISBN 978-5-8459-1850-5
8. А. Хейлсберг, М. Торгерсен, С. Вилтамут, П. Голд Язык программирования C#. Классика Computers Science. 4-е издание = C# Programming Language (Covering C# 4.0), 4th Ed. — СПб.:«Питер», 2012. — 784 с. — ISBN 978-5-459-00283-6
9. Джон Скит. C#: программирование для профессионалов, 2-е издание = C# in Depth, 2nd Edition. — М.: «Вильямс», 2011. — 544 с. — ISBN 978-5-8459-1555-9
10. Кристиан Нейгел, Карли Уотсон и др. Visual C# 2010: полный курс = Beginning Microsoft Visual C# 2010. — М.: Диалектика, 2010. — ISBN 978-5-8459-1699-0
11. Кавун О.Ю. САПР отрасли. Программы и программные комплексы, применяемые при конструировании ЯЭУ. Примеры применения и верификации конечно-разностных схем при разработке программ. М.: изд-во Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, 2005. -108с.

SUMMARY

The purpose of work is to create nonlinear mechanical models of stress/strain state for cylindrical elements undergoing irregular temperatures, swelling and creep. The main goal is to produce a general mathematical model of solve stress/strain state problem for solid, hollow and multilayer cylinders undergoing nuclear radiation, creep and thermal strains; software implementation of these models, numerical solution, research and analysis. Methods of research are systems programming C#/C++, a programming environment Microsoft Visual Studio 2011 Express, general methodology of mathematical modeling and computer simulation, theory of nonlinear differential equations. The obtained results can be used in in the design and development of a wide class of problem for power engineering and nuclear power. Also they can be used in teaching process by reading special courses of mechanical modeling and simulation in universities.

Поступила в редакцию 29.10.2013

РАЗВИТИЕ ТРЕЩИНОПОДОБНОГО ПОВРЕЖДЕНИЯ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

к. ф.-м. н. Щербаков С.С., асп. Шемет Л.А.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. При изучении процессов усталости обычно рассматривают две его характерных стадии: стадия до зарождения трещины и стадия развития трещины. Соотношение продолжительности этих стадий изменяется в широких пределах в зависимости от уровня действующих напряжений, схемы нагружения, размеров и формы объекта, состояния материала и т. п. В некоторых случаях стадия развития магистральной трещины может составлять 60...90 % общей долговечности.

Если трещина при деформации растяжения развивается в пластине неограниченных размеров, то коэффициент интенсивности напряжений, применяемый для ее описания, будет следующим [1-4]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l}, \quad (1)$$

где σ – нормальные к линии трещины растягивающие напряжения, l – длина (глубина) трещины.

Для реальных (конкретных) объектов формула (1) записывают с учетом поправочной функции Y_I , которая учитывает схему нагружения и геометрию трещин:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} Y_I. \quad (2)$$

Если на трещиностойкость (в том числе циклическую) испытывают компактные образцы по схеме внецентренного растяжения (рис. 1), то поправочная функция будет

$$Y_I \left(\frac{l}{B} \right) = 29.6 - 185.5 \left(\frac{l}{B} \right) + 655.7 \left(\frac{l}{B} \right)^2 - 1017 \left(\frac{l}{B} \right)^3 + 638.7 \left(\frac{l}{B} \right)^4 \quad (3)$$

и тогда выражение для коэффициента интенсивности (1) примет вид

$$K_I = \frac{Q}{h_0 \sqrt{B}} Y(l/B), \quad (4)$$

где h_0 , B – размеры образца (см. рисунок 1), l – длина трещины, отсчитываемая от линии действия нагрузки Q .

Опасные объемы. В связи с наличием широкого спектра компьютерных программ для прочностного расчета, целесообразно их применение для исследования развития трещиноподобного повреждения.

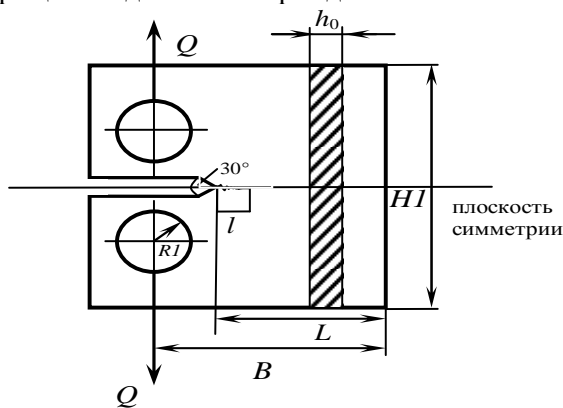


Рисунок 1 – Расчетная схема для образца с трещиной

Предельное значение определяется по некоторой компоненте тензора напряжений как экстремальное значение ее распределения при действии предельной нагрузки.

Поскольку опасные объемы являются мерой поврежденности деформируемых тел, то, анализируя их, можно указать конкретные области (зоны), в которых возможно зарождение и развитие как поверхностных, так и внутренних трещин. Очевидно, что действие необратимых повреждений реализуется там, где соответствующие опасные объемы пересекаются (т. е. накладываются друг на друга) или совмещаются друг с другом.

Рассмотрим тензор механического параметра φ_{ij} , конкретизациями которого являются тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} . Для однородного изотропного деформируемого твердого тела определим предельные нормальные и касательные значения $\varphi_n^{(*\text{lim})}$ и $\varphi_\tau^{(*\text{lim})}$ тензора $\varphi_{ij}^{(\pm*\text{lim})}$, а также предельное главное значение тензора $\varphi_1^{(*\text{lim})}$ и предельную интенсивность $\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$ [2,9,10]:

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(*\text{lim})} &= \max_{dV,i} \left(\left| \varphi_{ii} (F_{\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad i = x, y, z, \\
\varphi_\tau^{(*\text{lim})} &= \max_{dV,i,j} \left(\left| \varphi_{ij} (F_{\text{lim}}, dV) \right| \right), \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j, \\
\varphi_1^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} \left(\left| \varphi_1 (F_{\text{lim}}, dV) \right| \right), \\
\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})} &= \max_{dV} \left[\varphi_{\text{int}} (F_{\text{lim}}, dV) \right],
\end{aligned} \tag{5}$$

где dV – элементарный объем нагруженного тела.

Следовательно, если рассмотреть тензор φ_{ij} в каждом элементарном объеме dV тела, то в общем случае для описания изменения величины действующих напряжений по сравнению с величиной предельных напряжений можно ввести три типа относительных повреждающих напряжений [2,9,10]: компонентные, главные и октаэдрические:

$$\Psi_{ij} = \left| \varphi_{ij} / \varphi_m^{(*\text{lim})} \right|, \quad \Psi_i = \left| \varphi_i / \varphi_1^{(*\text{lim})} \right|, \quad \Psi_{\text{int}} = \varphi_{\text{int}} / \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}, \tag{6}$$

где Ψ_{ij} , Ψ_i , Ψ_{int} , вообще говоря, имеют вероятностную природу, поскольку в условиях прочности как действующие напряжения φ_{ij} , φ_i , φ_{int} , так и предельные значения $\varphi_k^{(*\text{lim})}$, $\varphi_i^{(*\text{lim})}$, $\varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$ являются случайными величинами с соответствующими плотностями распределения.

Условия для ограничения опасных объемов с учетом формул (5) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
V_{ij} &= \left\{ dV / \varphi_{ij} \geq \varphi_m^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\}, \quad i, j = x, y, z, \\
m &= \begin{cases} n & \text{при } i = j, \\ \tau & \text{при } i \neq j, \end{cases} \\
V_i &= \left\{ dV / \varphi_i \geq \varphi_1^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \\
V_{\text{int}} &= \left\{ dV / \varphi_{\text{int}} \geq \varphi_{\text{int}}^{(*\text{lim})}, dV \subset V_k \right\},
\end{aligned} \tag{7}$$

где V_k – рабочий объем нагруженного тела.

Поскольку опасные объемы могут иметь произвольную и сложную форму, то их аналитическое определение, согласно формулам (5)–(7), может быть затруднено; в таких случаях их вычисляют методом Монте-Карло [2,9].

Моделирование распространения повреждения. В рамках проведенных расчетов эквивалентные напряжения рассчитывались в соответствии с первой теорией прочности

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1.$$

Предельное значение напряжений для материала исследуемой модели было выбрано равным $\sigma_1^{\text{lim}} = 600 \text{ МПа}$. Для расчета были приняты следующие размеры плоского образца, представленного на рисунке 1: $B=0.05 \text{ м}$, $H1=0.06 \text{ м}$, $L=0.04 \text{ м}$, $R1=0.00625 \text{ м}$. Растягивающая нагрузка Q варьровалась от 600 Н до 800 Н с шагом в 50 Н.

Опасный объем в соответствии с формулой (7) формировался из тех элементов, в которых значения главного напряжения превышают предельные.

Для реализации расчета опасных объемов была создана программа с помощью встроенного в ANSYS языка APDL [9, 10]. Принцип работы программы заключается в том, что после проведения расчета для i -го конечного элемента имеются значения средних напряжений и деформаций. Эти значения переносятся в массив, который используется в дальнейших вычислениях значений повреждаемости, как отношений действующих и предельных напряжений в соответствии с (6):

$$\Psi_1^i = \sigma_1^i / \sigma_1^{\text{lim}}. \tag{8}$$

Величины объемов элементов, для которых выполняется условие $\Psi_1^i \geq 1$, суммируются для получения значения опасного объема V_1 для всей расчетной модели.

Результатом работы программы является массив конечных элементов, составляющих опасный объем и его значение.

Развитие трещиноподобного повреждения моделируется удалением данного массива из конечно-элементной модели на текущем шаге по времени. На следующем шаге последовательный расчет напряженно-деформированного состояния, состояния поврежденности и опасных объемов производится для модифицированной конечно-элементной модели (с увеличенной длиной повреждения).

В двумерной постановке, опасный объем V_1 принимает вид опасной площади S_1 .

Из рисунка 2, а видно, что с ростом длины трещиноподобного повреждения увеличиваются как величина опасной площади, так и ее приращение на каждом шаге нагружения (см. рисунок 2, б). При увеличении приращения длины повреждения (скорости его удлинения) приращение опасной площади (скорости ее увеличения) также растет (см. рисунка 2, в). Из рисунка 2 видно,

что чем больше растягивающая сила Q , тем быстрее растет площадь повреждения, вследствие чего уменьшается число рабочих циклов нагружения. Одной и той же длине повреждения соответствуют различные объемы повреждения, т.е. с увеличением нагрузки возрастает число элементов, в которых значения напряжений превышают предельные.

Из рисунков 3, а и б видно, что при всех пяти рассматриваемых величинах силы Q количество элементов и его приращение увеличиваются с ростом длины повреждения, т.е. на каждом последующем шаге нагружения из модели удаляется больше конечных элементов, чем на предыдущем. Наибольшие приращения опасная площадь получает на последних циклах нагружения. Из рисунка 3, в видно, что с ростом приращения длины повреждения увеличивается приращение числа элементов в опасном объеме. Таким образом, чем меньше нагрузка, тем уже будет повреждение, т.е. одной и той же длине поврежденности при различных нагрузках соответствует разное количество элементов, составляющих опасную площадь.

Из рисунков 4, а и б, видно, что при всех рассматриваемых величинах силы Q значение коэффициента интенсивности напряжений K_1 увеличивается с ростом как длины повреждения, так и ее приращения. Такой же эффект наблюдается с увеличением опасной площади и ее приращения (см. рисунки 4, в и г).

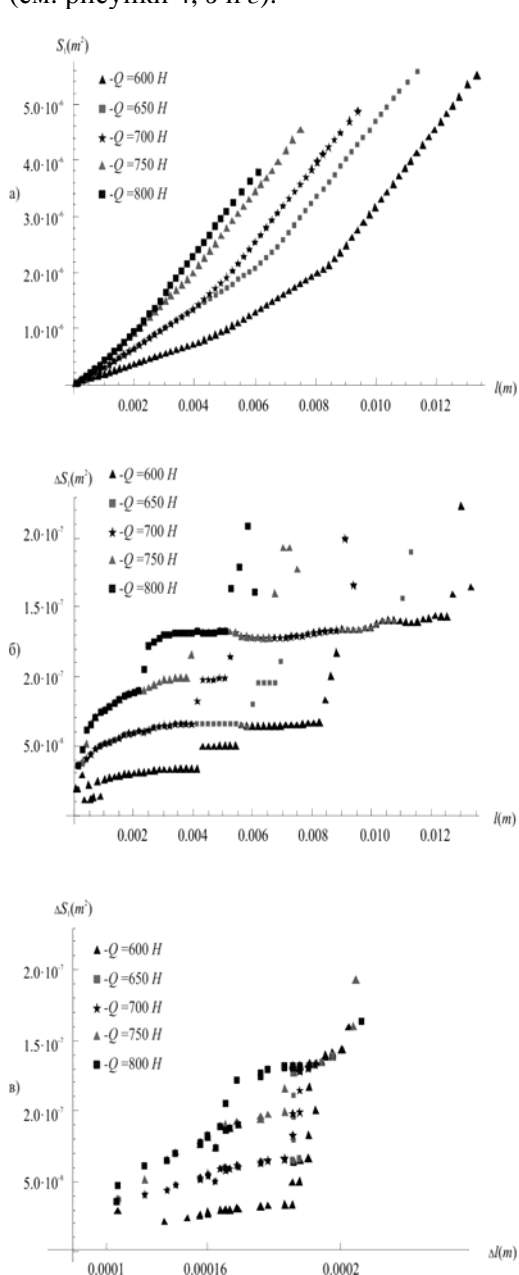


Рисунок 2 – Зависимости: а) опасной площади от длины трещиноподобного повреждения, б) приращения опасной площади от длины трещиноподобного повреждения, в) приращения опасной площади от приращения длины трещиноподобного повреждения

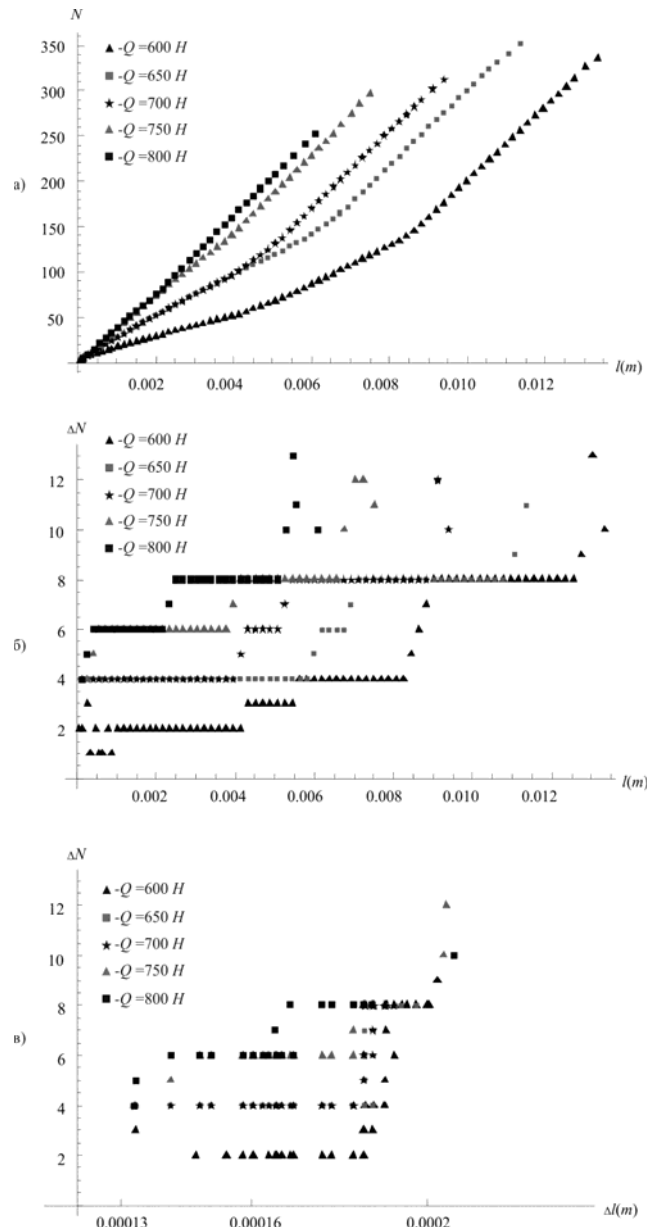


Рисунок 3 – Зависимости: а) количества элементов, составляющих опасную площадь от длины трещиноподобного повреждения, б) приращения количества элементов, составляющих опасную площадь, в зависимости от длины трещиноподобного повреждения, в) приращения количества элементов, составляющих опасную площадь, в зависимости от приращения длины трещиноподобного повреждения

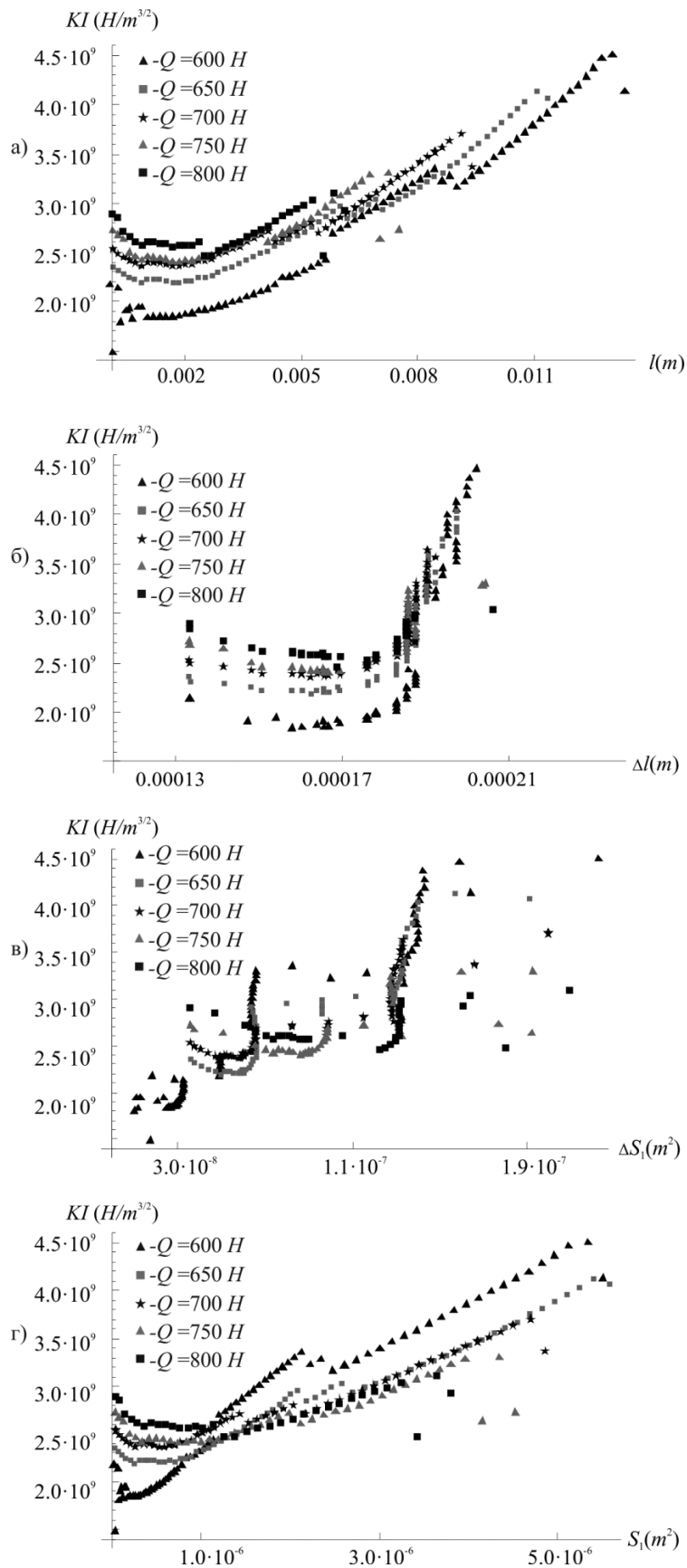


Рисунок 4 - Зависимости коэффициента интенсивности напряжений от:
а) длины трещиноподобного повреждения, б) приращения длины трещиноподобного повреждения, в) приращения опасной площади, г) величины опасной площади

Заключение. В работе представлены результаты компьютерного моделирования распространения трещиноподобного повреждения во времени. Необходимые для этого расчеты повреждаемости осуществлялись с использованием модели деформируемого твердого тела с

опасным объемом [1-3, 9, 10]. В соответствии с данной моделью принималось, что опасный объем состоит из элементов, в которых главные напряжения превышают предельные.

Для реализации расчета опасных объемов и приращений длины трещиноподобного повреждения была создана программа с помощью встроенного в ANSYS языка APDL.

На каждом шаге нагружения была вычислена длина повреждения и соответствующие коэффициенты интенсивности напряжений.

Представленная на рисунке 4, б зависимость коэффициента интенсивности напряжений от приращения длины трещины для рассматриваемых нагрузок в качественном отношении хорошо согласуется с кинетической диаграммой усталостного разрушения [1,7], что подтверждает эффективность представленного здесь способа моделирования распространения трещиноподобного повреждения в компактном образце на основе модели деформированного твердого тела с опасным объемом.

РЕЗЮМЕ

В работе представлено двумерное компьютерное моделирование распространения трещиноподобного повреждения с использованием конечно-элементного пакета. Расчеты проводились на основе модели деформированного твердого тела с опасным объемом путем удаления опасных площадей на каждом шаге нагружения. Представлены зависимости коэффициента интенсивности напряжений от длины трещиноподобного повреждения, величины опасной площади и их приращений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосновский, Л.А. Основы трибофатики/ Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2003. Т. 1. – 246 с.; Т. 2. – 234 с.
2. Сосновский, Л. А. Механика износоусталостного повреждения / Л. А. Сосновский. - Гомель: БелГУТ, 2007. – 434 с.
3. Сосновский, Л.А. Статистическая механика усталостного разрушения/ Л.А. Сосновский. – Минск: Наука и техника, 1987. – 288 с.
4. Сосновский, Л.А. Трещиностойкость/ Л.А. Сосновский, А.В. Богданович. – Гомель: БелГУТ, 2011. – 366 с.
5. Чигарев, А.В. ANSYS для инженеров/ А.В. Чигарев, А.С. Кравчук, А.Ф. Смалюк. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 512 с.
6. Морозов, Е.М. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения/ Е.М. Морозов, А.Ю. Муйземнек, А.С. Шадский. – Москва: ЛЕНАНД, 2010. – 456 с.
7. Циклическая трещиностойкость материала труб линейной части нефтепровода в связи с длительной эксплуатацией/ В.М. Веселуха, А.В. Богданович // Тр. VI-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2010), 25 октября – 1 ноября 2010 г., Минск (Беларусь) / Редкол.: М.А. Журавков (пред.) [и др]. – Минск: БГУ, 2010. Т. 1. – С. 289–293.
8. Циклическая вязкость разрушения пластичных сталей / Л.А. Сосновский, А.В. Богданович //Тр. VI-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2010), 25 октября – 1 ноября 2010 г., Минск (Беларусь) / Редкол.: М.А. Журавков (пред.) [и др]. – Минск: БГУ, 2010. Т. 1. – С. 767–776.
9. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
10. Щербаков, С.С. Моделирование повреждаемости методом конечных элементов при одновременном действии контактных и неконтактных нагрузок // С.С. Щербаков / Инженерно-физический журнал. –2012. Т. 85, –№ 4. –С 437–441.

SUMMARY

Two-dimensional computer simulation of crack-like damage propagation by the means of finite element package is considered in the paper. Calculations were made basing on the model of deformable solid with a dangerous volume by deleting the dangerous surfaces at each step of loading. The dependencies of stress intensity factor on the length of crack-like damage, the value of dangerous surface and their increments are presented.

Поступила в редакцию 21.10.2013

ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ПРОРАСТАНИЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРЕЩИН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Шукевич Т.В., асп. Чигарева Ю.А., Ручан М.В.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Старение элементов приборов при эксплуатации вследствие накопления повреждений влияет на точность и достоверность измерительной техники. Одним из возможных процессов, влияющих на возникновение микроповреждений материала деталей приборов, являются циклические нагрузки типа вибраций. Разнообразие различных моделей, описывающих возникновение макротрещины в элементах приборов, позволяет выбрать адекватное представление для этого процесса.

Моделирование прорастания трещины алгоритмом Кантора

Образование магистральной трещины из множества распределенных по объему микротрещин часто моделируется как процесс активного роста одной из микротрещин, оказавшейся в условиях наиболее благоприятствующих ее продвижению и поглощению других трещин. При этом другие микротрещины выступают в роли пассивных жертв, поглощение которых лишь способствует росту одной изначально более активной трещины. Такой сценарий можно рассматривать как реализацию алгоритма типа эволюционного, присущего живым системам. Однако, как известно, в живых системах действуют и другие механизмы, регулирующие взаимодействие особей и образование определенных видов.

1. Пусть в пластине, растягиваемой вдоль оси y , имеются боковые выточки или разрезы, которые разделены между собой перемычкой.

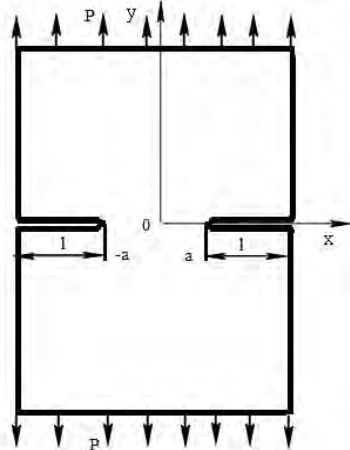


Рисунок 1.- Пластина с выточками под действием растягивающих усилий

В интервале $-a < x < a$ материал не содержит трещин конечной длины, но может содержать микротрещины типа канторовой «пыли» так, что ее размерность равна нулю или точнее меньше любого наперед заданного значения их общей длины.

Пусть приложенная нагрузка такова, что обеспечивает стабильность длины начальных разрезов, но в то же время допускает рост микротрещин в интервале $-a < x < a$, их слияние, результатом чего является удлинение начальных разрезов. Для данной задачи фрактал Кантора подходит наилучшим образом, т.к. известно, что повреждения накапливаются вблизи конца трещины. Положим, что $|a| = \frac{1}{2}$,

тогда длина перемычки вдоль оси x равна 1. Прямой ход алгоритма конструирования фрактала Кантора состоит, как известно, из деления отрезков на 3 и исключения из рассмотрения среднего отрезка. Визуализируем процесс с помощью графа типа бинарного дерева, причем вершинам графа (состояниям) будем приписывать длину соответствующих микротрещин (рисунок 2). Число микротрещин равно 2^n , длина каждой $(1/3)^n$, общая длина микротрещин $(2/3)^n$.

Таким образом, суммарная длина микротрещин стремится к нулю, т.е. мера Лебега и топологическая размерность множества микроповреждений равны нулю, т.е. в пределе имеем идеальный бездефектный материал. Хаусдорфова размерность множества Кантора равна 0,3609 [4], что более реально отображает состояние поврежденного материала. Если с шагами деления связать дискретное время или циклы, то прямой алгоритм Кантора дает модель залечивания начальной трещины длины 1 с помощью локальных соединений краев разреза так, что в пределе останется разрез $-1 < x < -1/6$ и сплошная среда в классическом смысле в интервалах $1/6 < x < 1/2$, $-1/2 < x < -1/6$.

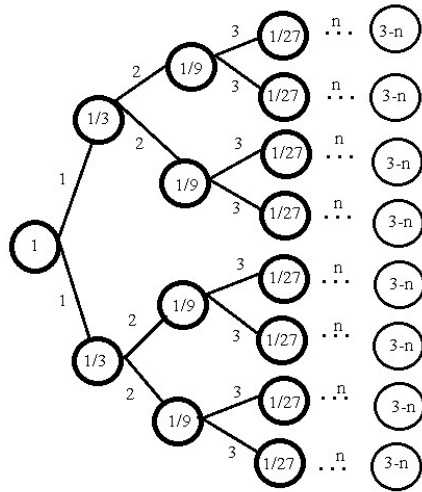


Рисунок 2. - Граф, отображающий прямой ход алгоритма Кантора

точки $-1/6$, $1/6$ соответственно. При этом хаусдорфова размерность D изменилась от $0,6309$ до 1 , если считать разрез за прямой отрезок или от $0,6309$ до 0 , если считать разрез пустым множеством.

В реальном теле микротрещины распределены не только по оси x , но и в окрестности оси. Обобщением данной модели будет модель рассеянных микроповреждений в областях, примыкающих к концам разреза. Эти повреждения можно получить, перемещая отрезок $[-0.5, 0.5]$ с рассеянными повреждениями параллельно оси x вверх и вниз детерминированным или случайным образом, а также с поворотами ее на углы вокруг середины отрезка t . 0 . Таким образом, может быть построено облако повреждений типа «пыли» Кантора. Ясно, что прорастание макротрещин в этом случае будет происходить не по оси x , а по более сложной траектории, например броуновской фрактальной кривой.

Моделирование прорастания трещины методом статического моделирования

2. Рассмотрим алгоритм построения траектории, прорастающей через перемычку и соединяющий концы разрезов. Разделим перемычку на n одинаковых интервалов, точки деления обозначим:

$$x_0 = 0, x_n = 1, x_j = j \cdot h, h = n^{-1}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Применим метод статистического моделирования [5], выбирая случайным образом число $0 < r < 1$ и определяя координаты правого конца микротрещины $M_k(x_k, y_k)$

$$x_k = \frac{k}{h}, y_k = (r_1 - 1/2) + (r_2 - 1/2) + \dots + (r_k - 1/2) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Тогда каждая следующая точка M_k на плоскости расположена выше или ниже (вдоль оси y) точки M_{k-1} . Соединяя полученные точки, находим траекторию магистральной трещины, которая флуктуирует около оси x случайным образом. Вероятностное описание броуновской фрактальной трещины может быть исследовано на основании уравнения ФПК (Фоккера-Планка-Колмогорова).

Модель прорастания трещины с флуктуирующей длиной

3. Рассмотрим теперь модель прорастания трещины, длина которой, начиная с некоторого значения, может флуктуировать около этого значения. Подобного рода модели описываются алгоритмами ограниченного роста популяции в биологии [6], логистике [7]. Обозначим l_n – длину прорастающей трещины на n -ом шаге. Трещины могут прорасти от начальных разрезов или из середины перемычки вдоль оси x .

Модель роста самотормозящейся трещины описывается алгоритмом:

$$l_{n+1} = a l_n (1 - l_n) \quad (3)$$

Параметр a изменяется в интервале $0 < a \leq 4$, результатом чего является то, что l_n не выходит за границы единичного отрезка, т.е. соответствует сохранению по крайней мере одной перемычки, а следовательно, пластина не разделяется на две части. Перенесем для определенности начало системы координат в т. $x = -0.5, y = 0$ и рассмотрим график функции

$$y = ax(1 - x), \quad (4)$$

изображенной на рисунке 3.

Процесс прорастания трещины моделируем обратным алгоритмам Кантора. Для этого задаемся большим значением n , выбираемого из соображений среднего размера дефектов, существующих в реальных телах. Например, линейный дефект длины 10^{-9} нм дает $n = 9 \frac{\ln 10}{\ln 3}$.

Процесс моделирования начинается с задания n и начального состояния перемычки, соответствующего выбранному n , когда в интервалах $1/6 < x < 1/2$ и $-1/2 < x < -1/6$ дефекты рассеяны на оси x , а их длины равны между собой 3^{-n} . Движение по графу идет от крайних ветвей в направлении корня. Процесс заканчивается в вершине, описывающей состояние, когда вершина каждого из начальных разрезов пришла в

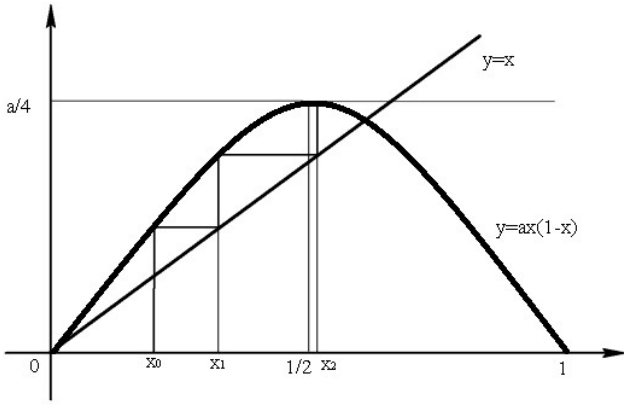


Рисунок 3.- График функции $y(x)$

Тогда длина прорастающей трещины $l=x$. Прямые $y=x$ и $y=ax(1-x)$ пересекаются в точках, которые являются неподвижными для отображения (4). Выбирая x_0 – длину начальной трещины, примыкающей к левому разрезу. Из соотношения $x=ax(1-x)$ находятся неподвижные точки, $x^{(0)} = 0, x^{(1)} = (a-1)a^{-1}$, если $1 < a \leq 4$ и одна $x^{(0)}$ в случае $a < 1$.

В зависимости от значения параметра a различают устойчивые и неустойчивые неподвижные точки.

Около устойчивой неподвижной точки последовательные приближения длины трещины осциллируют, т.е. устойчивая неподвижная точка является аттрактором.

В окрестности неподвижной точки отображение (3) может быть линеаризовано, тогда на $n+1$ шаге имеем в окрестности $x^{(0)} = 0$:

$$l_{n+1} = a \cdot l_n, \quad (6)$$

а в окрестностях $x^{(1)} = (a-1)a^{-1}$

$$l_{n+1} = a(1 - 2(a-1)a^{-1})(l_n - (a-1)a^{-1}). \quad (7)$$

При $0 < a < 1$ длина трещин флуктуирует около $x^{(0)} = 0$, приближаясь к нулю слева, т.е. описывает модель залечивания трещины. При $a=1$ неподвижная точка $x^{(0)} = 0$ теряет устойчивость, т.е. трещина начинает расти и при $1 < a < 3$ начинает флуктуировать около другой неподвижной точки (стационарной длины трещины $x^{(1)} = (a-1)a^{-1}$), причем при $1 < a < 2$, оставаясь все время меньше $l_{cm} = (a-1)a^{-1}$, а при $2 < a < 3$ асимптотически осциллируют около l_{cm} становясь то короче, то длиннее. Это можно интерпретировать как конкуренция двух процессов залечивания и разрушения.

При увеличении параметра $a > 3$ длина трещины начинает увеличиваться, т.е. неподвижная точка $x^{(1)}$ теряет устойчивость ($3 < a < 4$). представляет интерес для механики разрушения случай, когда начальная длина прорастающей трещины близка к стационарному значению, т.е. l_n приблизительно равно l_{cm} или в выбранной системе координат x_0 приблизительно равно $x^{(1)}$.

При $a=3$ логистическое отображение (4) на втором шаге теряет устойчивость в неподвижной точке $x^{(1)}$, которая распадается на две новые неподвижные точки $x^{(3)}$ и $x^{(4)}$, которые являются сателлитами точки $x^{(1)}$, причем при малых a устойчивыми, но при возрастании a они становятся неустойчивыми. Первый случай соответствуют тому, что существуют две стационарные длины трещины $l^{(3)}_{cm} < l_{cm} < l^{(4)}_{cm}$, которые определяют бифуркацию длины трещины и ее осцилляции около $l^{(3)}_{cm}$ или $l^{(4)}_{cm}$. При росте параметра a возникает бифуркация длины трещины в неустойчивые состояния.

Рассмотрим процесс прорастания трещины в осях aox рисунок 4.

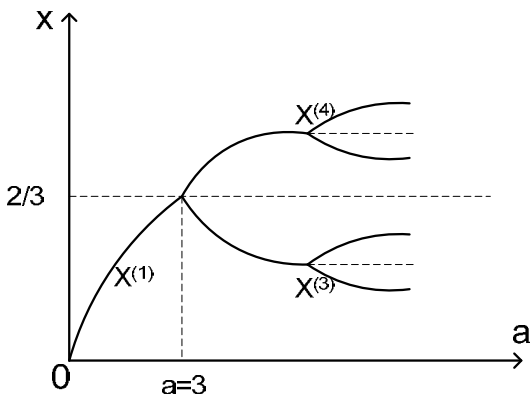


Рисунок 4.- Процесс прорастания трещины

С ростом $a > 3$ будут появляться пары неподвижных точек, которые, начиная со второй итерации, являются неустойчивыми. Этот процесс определяет 2-цикл, когда в каждом цикле имеет место бифуркация в неустойчивое состояние, причем таких бифуркаций происходит бесконечно много, а шаг изменения параметра бифуркации уменьшается.

В результате процесс изменения длины трещины стохастизируется. Последовательность бифуркационных a_j ($j=0, 1, \dots$) образуют последовательность

$$\begin{aligned} a_0 &= 3, a_1 = 3,449499, a_2 = 3,544090, a_3 = 3,564407, \\ a_4 &= 3,569692, a_5 = 3,569891, a_6 = 3,569934... \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) можно получить, что $a_{j \rightarrow \infty} \rightarrow a_B = 3,569946$, причем имеет место

$$\frac{a_{j-1} - a_j}{a_j - a_{j+1}} \approx 4,6692016, \quad (9)$$

где $F=4,6692016$ является константой Фейгенбаума.

Переход к хаотическому поведению длины трещины для $3 < a < a_B$ заканчивается при значении параметра $a = a_B$. В этом интервале прогнозирование (оценка) длины трещины может быть реализована вероятностными методами.

Для значений $a > a_B$ наблюдается чередование хаотического изменения длины трещины. Например, для $a \approx 3,83$ существуют устойчивые длины трещины третьей итерации, которые при $a \approx 3,841$ теряют устойчивость. Далее процесс удвоения периода тройных точек подобен описанному выше так, что на интервале (a_B , 4) существует бесчисленное множество интервалов существования устойчивых периодических точек. Рассматриваемая модель хорошо изучена в применении к ограниченному росту популяции [4,7]. В приложении к модели прорастания трещины модель фрактального роста представляет интерес с точки зрения повышения трещиностойкости материала. Управляя параметром a , возможно получить различные сценарии разрушения. Например, для значений a , когда существуют устойчивые стационарные значения длин трещин типа аттракторов, около которых флуктуирует длина трещины, для значений a для которых стационарные длины неустойчивы. Представляет интерес также вопрос об условиях, при которых происходит разрушение бифуркаций [9,10].

Модель циклического прорастания трещины

4. Рассмотрим модель циклического нагружения, хорошо описывающую экспериментальные наблюдения. Скорость роста трещины описывается формулой [11]

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dn} &= -\beta \left(\frac{K_{Imax}^2 - K_{Imin}^2}{K_C^2} + \ln \frac{K_C^2 - K_{Imax}^2}{K_C^2 - K_{Imin}^2} \right) + \\ &+ (2\pi / \omega) V_0 \exp[(\lambda / 2)(K_{Imax} + K_{Imin})] \cdot I_0[(\lambda / 2)(K_{Imax} - K_{Imin})] \\ l &= l_0 \text{ при } n = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь K_C, β, V_0, λ - константы, определяемые из эксперимента.

Конкретизируем модель для рассматриваемого случая, полагая

$$\begin{aligned} K_l &= 4,2\lambda\mu L^{-3/2} \sqrt{(1-l/L)^{-3} - (1-l/L)^3} \\ \lambda &= \begin{cases} 1,15 - 60(l/L)^2 & \text{при } 0 < l/L < 0,05 \\ 1 & \text{при } 0,05 < l/L < 1 \end{cases} \\ V_0 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

тогда уравнение для скорости имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dn} &= -\beta \left(A\lambda^2 \alpha(l/L) + \ln[1 - A\lambda^2 \alpha(l/L)] \right) \\ \alpha(l/L) &= (1-l/L)^{-3} - (1-l/L)^3 \\ A &= (4,2)^2 M_{\max}^2 / (L^3 K_C^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Запишем уравнение (12) в дискретном виде

$$l_{n+1} = l_n - \beta \left\{ A\lambda^2 \alpha(l_n/L) + \ln[1 - A\lambda^2 \alpha(l_n/L)] \right\} \quad (13)$$

Значению параметра $a = a_*$ ($1 < a_* < 3$) соответствует флуктуация l около $l^{(2)}$ так, что нет увеличения длины за любое конечное число циклов равное периоду флуктуаций. Приравнявая левые и правые части уравнения (4) и (13), получим условие на параметры задачи

$$a_* l_n^* (1 - l_n^*) = l_n^* - \beta \left\{ A\lambda^2 \alpha(l_n^*/L) + \ln[1 - A\lambda^2 \alpha(l_n^*/L)] \right\} \quad (14)$$

Соотношение (14) дает условие на параметры K_C, β, M_{\max} , выбирая которые подходящим образом получаем устойчивое флуктуирование длины трещины около значения $l^{(1)}$.

Заключение

1. Модель прорастания микротрещин в магистральную трещину на основе фрактала Кантора позволяет оценить время (количество циклов) необходимых для того, чтобы из «пыли» дефектов возникла магистральная трещина.

2. Модель логистического типа позволяет описать процессы стабилизации роста трещины около некоторых критических длин, причем модель позволяет описать случаи, когда критическая длина стабильна, а длина трещины может флуктуировать около нее, не приводя к разрушению детали, что характерно для некоторых материалов.

РЕЗЮМЕ

Для механики разрушения представляет интерес сценарий образования магистральной трещины как результата активного роста всех элементов множества микротрещин вплоть до образования ими кластера, пронизывающего тело и ведущего к его разрушению. В теории конструктивных и динамических фракталов разработано много различных моделей и соответствующих алгоритмов, которые могут быть применены в механике разрушения, на что указывал еще Мандельброт [1]. Представляет интерес рассмотреть процесс развития трещины из состояния деформируемого твердого тела, содержащего зародыши дефектов (повреждений), но никак не проявляющихся на микроскопическом уровне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelbrot B.V. The fractal geometry of nature - New York: Freeman, 1982.-342с. (Перевод на русский: Б. Мандельброт Фрактальная геометрия природы - РХД, Ижевск.-2002.-342с.)
2. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения.—М.: Наука, 1987.—80 с.
3. Качанов Л.М. Теория пластичности. – М.: Наука, 1969.—420 с.
4. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов - РХД, Москва-Ижевск.—2002.—159 с.
5. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы -- М.: Наука, 1971.—327с.
6. Берже П. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль – Меркурий-Пресс,—2000.—366 с.
7. Малинецкий Г.Г.. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г Малинецкий, А.Б. Потапов -- М.: Эдиториал УРСС, 2000. - 336 с.
8. Данилов Ю.А. Лекции по нелинейной динамике – Москва: Постмаркет, 2006. – 189 с.
9. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике – М.Мир, 1985.—254 с.
10. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций / Ж. Йосс, Д. Джозеф – М.Мир, 1963.—300 с
11. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения -- М.: Наука, 1974. – 640 с.

SUMMARY

For fracture mechanics is interesting scenario of the main crack as a result of strong growth of all elements of microcracks up to the formation of the cluster, which permeates the body and lead to its destruction. In theory, constructive and dynamic fractals developed many different models and corresponding algorithms that can be used in fracture mechanics, as was pointed more Mandelbrot [1]. It is interesting to consider the process of crack from the state of solids containing embryos defects (damage), but does not appear on the microscopic level.

Поступила в редакцию 26.09.2013

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ РЕЗЕРВУАР В ПОСТОЯННОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

д. ф.-м. н. Гурьянов Н.Г., к. ф.-м. н. Тюленева О.Н.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

В цилиндрической системе координат (α, β, γ) строится точное решение осесимметричной задачи пространственной теории упругости для полого цилиндра, внешний радиус которого R , внутренний - r , высота H . Резервуар заполнен жидкостью постоянной температуры, внешняя его поверхность теплоизолирована, через внутреннюю боковую поверхность осуществляется теплообмен с жидкостью. Если расстояние вдоль радиуса цилиндра обозначить x , вдоль его оси z , безразмерные координаты

$$\alpha = \frac{x}{R}, \quad \gamma = \frac{z}{H} \quad (1)$$

и область, занимаемая цилиндром, $t \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 2\pi, 0 \leq \gamma \leq 1$, где

$$t = \frac{r}{R}, \quad \varepsilon = \frac{H}{R}, \quad (2)$$

При достаточно хорошей теплопроводности стенок резервуара они практически мгновенно прогреваются до температуры жидкости $T = const$.

Уравнения осесимметричной задачи термоупругости относительно перемещений в силу постоянности температуры не отличаются от уравнений теории упругости и имеют вид [1]:

$$\Delta\theta = 0, \quad \Delta w = -\frac{R}{(1-2\nu)\varepsilon} \frac{\partial\theta}{\partial\gamma}, \quad \left(\Delta - \frac{1}{\alpha^2}\right)u = -\frac{R}{(1-2\nu)} \frac{\partial\theta}{\partial\alpha}, \quad (3)$$

при дополнительном условии

$$\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha} u + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial\gamma} \right). \quad (4)$$

Различие только в соотношениях, связывающих напряжения с перемещениями [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left[\theta - \frac{(1+\nu)}{\nu} \alpha_T T \right] \right\}, \\ \sigma_{\beta\beta} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{R\alpha} u + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left[\theta - \frac{(1+\nu)}{\nu} \alpha_T T \right] \right\}, \\ \sigma_{\gamma\gamma} &= \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{R\varepsilon} \frac{\partial w}{\partial\gamma} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left[\theta - \frac{(1+\nu)}{\nu} \alpha_T T \right] \right\}, \\ \sigma_{\alpha\gamma} &= \frac{E}{2(1+\nu)R} \left(\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial\gamma} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Введены следующие обозначения: u, w – перемещения точек резервуара вдоль его радиуса и оси, $\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\gamma\gamma}, \sigma_{\alpha\gamma}$ – напряжения в конструкции, E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона, ρ – плотность заполняющей жидкости, α_T – коэффициент линейного расширения материала обшивки.

Поскольку давление на стенки сосуда зависит от γ , решение системы уравнений (3) ищется в виде

$$\begin{aligned} \theta(\alpha, \gamma) &= \theta_0(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m(\alpha) \cos(m\pi\gamma), \quad w(\alpha, \gamma) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(\alpha) \sin(m\pi\gamma), \\ u(\alpha, \gamma) &= u_0(\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(\alpha) \cos(m\pi\gamma), \end{aligned} \quad (6)$$

тогда относительно коэффициентов рядов (6) получаются следующие системы уравнений: для $m=0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \theta_0 = 0, \quad \theta_0 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha} u_0 \right), \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) u_0 + \frac{R}{(1-2\nu)} \frac{\partial \theta_0}{\partial \alpha} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

при $m > 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - g_m^2 \right) \theta_m = 0, \quad \theta_m = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_m}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha} u_m + g_m w_m \right), \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - g_m^2 \right) w_m = \frac{g_m R}{(1-2\nu)} \theta_m, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha^2} - g_m^2 \right) u_m = -\frac{R}{(1-2\nu)} \frac{\partial \theta_m}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, общее решение первого уравнения системы (7)

$$\theta_0(\alpha) = C_{10} + C_{30} \ln \alpha.$$

Второе уравнение системы может быть записано следующим образом

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial(\alpha u_0)}{\partial \alpha} = R \theta_0.$$

В результате его интегрирования получаем

$$u_0 = \frac{R}{2} \left[C_{10} \alpha + C_{30} \alpha \left(\ln \alpha - \frac{1}{2} \right) + C_{20} \frac{1}{\alpha} \right].$$

После подстановки полученных соотношений в третье уравнение с учетом

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \alpha = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \frac{1}{\alpha} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) (\alpha \ln \alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} (\ln \alpha + 1) - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha = \frac{2}{\alpha}, \quad \frac{\partial \theta_0}{\partial \alpha} = \frac{C_{30}}{\alpha}, \end{aligned}$$

убеждаемся, что оно выполняется при $C_{30} = 0$. Тогда

$$\theta_0(\alpha) = C_{10}, \quad u_0 = \frac{R}{2} \left[C_{10} \alpha + C_{20} \frac{1}{\alpha} \right]. \quad (9)$$

Рассматривая первое уравнение системы (8), убеждаемся, что оно является одним из уравнений Бесселя, общее решение которого выражается через модифицированную функцию Бесселя $I_0(g_m \alpha)$ и функцию Бессе (Макдональда) $K_0(g_m \alpha)$ [3]:

$$\theta_m = C_{1m} I_0(g_m \alpha) + C_{2m} K_0(g_m \alpha).$$

Покажем, что общим решением третьего уравнения системы (8) является

$$w_m = \frac{R}{2(1-2\nu)} \left[\frac{C_{3m}}{g_m} I_0(g_m \alpha) + \frac{C_{4m}}{g_m} K_0(g_m \alpha) + C_{1m} \alpha I_1(g_m \alpha) - C_{2m} \alpha K_1(g_m \alpha) \right].$$

Для этого достаточно установить, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - g_m^2 \right) \left\{ \frac{R}{2(1-2\nu)} [C_{1m} \alpha I_1(g_m \alpha) - C_{2m} \alpha K_1(g_m \alpha)] \right\} \equiv \frac{g_m R}{(1-2\nu)} \theta_m$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - g_m^2 \right) [C_{1m} \alpha I_1(g_m \alpha) - C_{2m} \alpha K_1(g_m \alpha)] \equiv 2 g_m \theta_m.$$

С учетом формул

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_0(g_m \alpha)}{\partial \alpha} = g_m I_1(g_m \alpha), \quad \frac{\partial K_0(g_m \alpha)}{\partial \alpha} = -g_m K_1(g_m \alpha), \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha I_1(g_m \alpha)] = g_m \alpha I_0(g_m \alpha), \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha K_1(g_m \alpha)] = -g_m \alpha K_0(g_m \alpha), \end{aligned} \quad (10)$$

следующих из [3], вычислим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}[\alpha I_1(g_m \alpha)] &= g_m \frac{\partial}{\partial \alpha}[\alpha I_0(g_m \alpha)] = g_m \alpha \frac{\partial I_0(g_m \alpha)}{\partial \alpha} + g_m I_0(g_m \alpha) = \\ &= g_m^2 \alpha I_1(g_m \alpha) + g_m I_0(g_m \alpha) \\ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}[\alpha K_1(g_m \alpha)] &= -g_m \frac{\partial}{\partial \alpha}[\alpha K_0(g_m \alpha)] = -g_m \alpha \frac{\partial K_0(g_m \alpha)}{\partial \alpha} - g_m K_0(g_m \alpha) = \\ &= g_m^2 \alpha K_1(g_m \alpha) - g_m K_0(g_m \alpha),\end{aligned}$$

а затем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} - g_m^2\right)[C_{1m} \alpha I_1(g_m \alpha) - C_{2m} \alpha K_1(g_m \alpha)] &= \\ = C_{1m} [g_m^2 \alpha I_1(g_m \alpha) + g_m I_0(g_m \alpha) + g_m I_0(g_m \alpha) - g_m^2 \alpha I_1(g_m \alpha)] - \\ - C_{2m} [g_m^2 \alpha K_1(g_m \alpha) - g_m K_0(g_m \alpha) - g_m K_0(g_m \alpha) - g_m^2 \alpha K_1(g_m \alpha)] &= \\ = 2g_m [C_{1m} I_0(g_m \alpha) + C_{2m} K_0(g_m \alpha)] = 2g_m \theta_m,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Второе уравнение системы (8) запишем в виде

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d(\alpha u_m)}{d\alpha} = R\theta_m - g_m w_m.$$

После его интегрирования получаем

$$u_m = \frac{1}{\alpha} \int \alpha [R\theta_m - g_m w_m] d\alpha + \frac{RC_{5m}}{\alpha}.$$

С учетом формул для θ_m и w_m получаем

$$\begin{aligned}\frac{u_m}{R} &= \left[C_{1m} - \frac{C_{3m}}{2(1-2\nu)} \right] \frac{1}{\alpha} \int \alpha I_0(g_m \alpha) d\alpha + \left[C_{2m} - \frac{C_{4m}}{2(1-2\nu)} \right] \frac{1}{\alpha} \int \alpha K_0(g_m \alpha) d\alpha - \\ &- \frac{1}{2(1-2\nu)} \left[L_{1m} \frac{g_m}{\alpha} \int \alpha^2 I_1(g_m \alpha) d\alpha - L_{2m} \frac{g_m}{\alpha} \int \alpha^2 K_1(g_m \alpha) d\alpha \right] + \frac{C_{5m}}{\alpha}.\end{aligned}$$

Вычислим полученные интегралы, используя формулы

$$\begin{aligned}\int \alpha I_0(g_m \alpha) d\alpha &= \frac{1}{g_m} \alpha I_1(g_m \alpha), \quad \int \alpha K_0(g_m \alpha) d\alpha = -\frac{1}{g_m} \alpha K_1(g_m \alpha), \\ \int \alpha^2 I_1(g_m \alpha) d\alpha &= \frac{1}{g_m} \alpha^2 I_2(g_m \alpha) = \frac{1}{g_m} \alpha^2 \left[I_0(g_m \alpha) - \frac{2}{g_m \alpha} I_1(g_m \alpha) \right], \\ \int \alpha^2 K_1(g_m \alpha) d\alpha &= -\frac{1}{g_m} \alpha^2 K_2(g_m \alpha) = -\frac{1}{g_m} \alpha^2 \left[K_0(g_m \alpha) + \frac{2}{g_m \alpha} I_1(g_m \alpha) \right].\end{aligned}\tag{11}$$

В результате

$$\begin{aligned}\frac{u_m}{R} &= \left[C_{1m} - \frac{C_{3m}}{2(1-2\nu)} \right] \frac{1}{g_m} I_1(g_m \alpha) - \left[C_{2m} - \frac{C_{4m}}{2(1-2\nu)} \right] \frac{1}{g_m} K_1(g_m \alpha) - \\ &- \frac{1}{2(1-2\nu)} \left\{ C_{1m} \left[\alpha I_0(g_m \alpha) - \frac{2}{g_m} I_1(g_m \alpha) \right] + \right. \\ &\left. + C_{2m} \left[\alpha K_0(g_m \alpha) + \frac{2}{g_m} K_1(g_m \alpha) \right] \right\} + \frac{C_{5m}}{\alpha}\end{aligned}$$

или

$$u_m = \frac{R}{2(1-2\nu)g_m} \left\{ \frac{4(1-2\nu)g_m}{\alpha} C_{5m} + [4(1-\nu)C_{1m} - C_{3m}] I_1(g_m \alpha) - \right. \\ \left. - [4(1-\nu)C_{2m} - C_{4m}] K_1(g_m \alpha) - g_m \alpha [C_{1m} I_0(g_m \alpha) + C_{2m} K_0(g_m \alpha)] \right\}.$$

Нетрудно показать, что последнее уравнение системы (8) выполняется при условии $C_{5m} = 0$.

Итак

$$\theta_m = C_{1m} I_0(g_m \alpha) + C_{2m} K_0(g_m \alpha). \quad (12)$$

$$w_m = \frac{R}{2(1-2\nu)} \left[\frac{C_{3m}}{g_m} I_0(g_m \alpha) + \frac{C_{4m}}{g_m} K_0(g_m \alpha) + C_{1m} \alpha I_1(g_m \alpha) - C_{2m} \alpha K_1(g_m \alpha) \right],$$

$$u_m = \frac{R}{2(1-2\nu)g_m} \left\{ g_m \alpha [4(1-\nu)C_{1m} - C_{3m}] I_1(g_m \alpha) - \right. \\ \left. - [4(1-\nu)C_{2m} - C_{4m}] K_1(g_m \alpha) - g_m \alpha [C_{1m} I_0(g_m \alpha) + C_{2m} K_0(g_m \alpha)] \right\}.$$

Сформулируем краевые условия задачи. Пусть

$$w(\alpha, 0) = w(\alpha, 1) = 0, \quad \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 0) = \sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, 1) = 0, \quad (13)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}(1, \gamma) = \sigma_{\alpha\gamma}(1, \gamma) = \sigma_{\alpha\gamma}(t, \gamma) = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha}(t, \gamma) = \rho H(1-\gamma).$$

Из соотношений (5) с учетом (6) имеем, что необходимые для их выполнения напряжения имеют вид

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{\alpha\alpha m}(\alpha) \cos(m\pi\gamma), \quad \sigma_{\alpha\gamma} = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\gamma m}(\alpha) \sin(m\pi\gamma). \quad (14)$$

Тогда автоматически выполняются первые 4 граничные условия. Оставшиеся позволяют определить значения всех постоянных интегрирования. Но для этого необходимо представить в виде ряда по косинусам функцию $\rho H(1-\gamma)$.

На интервале $\gamma \in (0, 1)$ имеем

$$1-\gamma = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\pi\gamma), \quad (15)$$

$$A_0 = 2 \int_0^1 (1-\gamma) d\gamma = 2 \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1,$$

$$A_m = 2 \int_0^1 (1-\gamma) \cos(m\pi\gamma) d\gamma = -\frac{2}{(m\pi)^2} \cos(m\pi\gamma) \Big|_0^1 = \frac{2}{(m\pi)^2} [1 - \cos(m\pi)].$$

Проверено, что сумма первых 50 членов ряда, из которых половина равны нулю, приводит к погрешности задания функции менее 1%.

Выполняя оставшиеся граничные условия, устанавливаем, что

$$C_{10} = (1+\nu) \left[2\alpha_T T - \frac{\rho H(1-2\nu)t^2}{E(1-t^2)} \right], \quad C_{30} = -\frac{\rho H(1+\nu)t^2}{E(1-t^2)},$$

Остальные постоянные удовлетворяют следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$C_{1m} [g_m I_0(g_m) - 2(1-\nu) I_1(g_m)] + C_{2m} [g_m K_0(g_m) + 2(1-\nu) K_1(g_m)] + \\ + C_{3m} I_1(g_m) - C_{4m} K_1(g_m) = 0, \\ C_{1m} [g_m t I_0(g_m t) - 2(1-\nu) I_1(g_m t)] + C_{2m} [g_m t K_0(g_m t) + 2(1-\nu) K_1(g_m t)] + \\ + C_{3m} I_1(g_m t) - C_{4m} K_1(g_m t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& C_{1m} \left[(3-2\nu)I_0(g_m t) - \left(\frac{2}{g_m t} + g_m t \right) I_1(g_m t) \right] + \\
& + C_{2m} \left[(3-2\nu)K_0(g_m t) + \left(\frac{2}{g_m t} + g_m t \right) K_1(g_m t) \right] - \\
& - C_{3m} \left[I_0(g_m t) - \frac{1}{g_m t} I_1(g_m t) \right] - C_{4m} \left[K_0(g_m t) + \frac{1}{g_m t} K_1(g_m t) \right] = \\
& = \frac{4(1+\nu)(1-2\nu)\rho H}{E(m\pi)^2} [1 - \cos(m\pi)].
\end{aligned}$$

РЕЗЮМЕ

Построено точное решение трехмерной задачи теории упругости для цилиндрического резервуара, заполненного жидкостью и находящегося в температурном поле. Решение представлено в виде рядов из комбинаций тригонометрических функций и функций Бесселя. Для одного варианта краевых условий решение сведено к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурьянов Н.Г. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра / Н.Г. Гурьянов, О.Н. Тюленева – Казань: Издательство Казанского университета, 2008. – 207 с.
2. Коваленко А.Д. Избранные труды – Киев: Наукова думка, 1976. – 762 с.
1. 3. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Том 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи – Москва: Наука, 1974 – 296 с.

SUMMARY

There was precise solution worked out for three-dimensional problem of elasticity theory for cylindrical tank filled with fluid and located in temperature pattern. The solution is presented in the form of series from combinations of trigonometric functions and Bessel functions. For one variant of boundary conditions the solution was reduced to the system of four linear algebraic equations in relation to the constants of integration.

Поступила в редакцию 12.09.2013

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И TЕСPLOT ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

к.т.н. Хвисевич В.М., Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В.

Брестский государственный технический университет, Брест

Введение

Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [1], основанный на теории потенциала [2], имеет характерную особенность - возможность решения задач теории упругости с использованием дискретизации лишь границы области (в отличие от методов конечных элементов (МКЭ) и методов конечных разностей (МКР); применение которых требует дискретизации всей области). Естественно, что реализация такой возможности в методе ГИУ предусматривает предварительный переход от исходной краевой задачи для дифференциальных уравнений, описывающих некоторый процесс, к соотношениям, связывающим неизвестные функции на границе области (или ее части).

Особенность метода ГИУ состоит в том, что при его реализации дискретизации подлежат лишь границы изучаемых областей; это естественно ведет к существенному уменьшению числа дискретных элементов по сравнению с методами, требующими внутренней дискретизации всего рассматриваемого тела. Это позволяет снизить на единицу порядок решаемой системы алгебраических уравнений.

На основе метода ГИУ разработана компьютерная программа на алгоритмическом языке «FORTRAN». Программа предназначена для расчёта конструктивных элементов, находящихся в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации. Область может быть односвязной или многосвязной. По разработанной программе можно решать как внутренние, так и внешние краевые задачи. Для наглядного графического представления результатов расчета FORTRAN-программой производилась их обработка с помощью графического интерфейса Tecplot 360. С помощью разработанной программы решены ряд задач по исследованию напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов.

1. ФОРТРАН-программа для решения задач теории упругости и термоупругости

На основе алгоритма численного решения интегральных уравнений краевых задач [3] разработана компьютерная программа на алгоритмическом языке «FORTRAN». Программа предназначена для расчёта конструктивных элементов, находящихся в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации. Область, занятая телом, может быть односвязной или многосвязной. По разработанной программе можно решать как внутренние так и внешние краевые задачи. В этом случае на границе тела должна быть задана уравновешенная внешняя нагрузка. Для внешней задачи задаётся напряжение в бесконечно удалённой точке.

При разработке программы учитывается геометрическая и физическая симметрия (рассматриваемая область; нагрузка). Учёт осевой симметрии расширяет возможности программы, облегчает ввод исходной информации. В соответствии с алгоритмом процесс реализации задачи делится на три этапа (рисунок 1).

На первом этапе осуществляется ввод и обработка исходных данных. Результатом обработки являются координаты центров отрезков, их длины, радиусы кривизны и координаты вектора внешней нормали. На этом этапе формируется массив внешней нагрузки.

На втором этапе решается система линейных алгебраических уравнений, результатом которой являются значения плотностей потенциала в точках границы области. Алгебраическая система решается методом последовательных исключений Гаусса. Полностью матрицы в памяти не хранятся. Их обработка осуществляется по строкам. При формировании строк матрицы в зависимости от расстояния между параметрической точкой и отрезком интегрирования автоматически определяется число узлов точек квадратурной формулы Гаусса.

На 3-ем этапе вычисляются напряжения и перемещения на границе области в соответствующих внутренних точках области.

При построении расчётной области следует стремиться получать границу с кусочно-непрерывной, ограниченной кривизной. Если по каким либо причинам трудно привести задачу к гладкой границе, в программе предусматривается возможность реализации области с углами

(выступающие и входящие узлы). В этом случае решается задача для функционального уравнения, в котором контур L в каждой угловой точке расширяется двумя отрезками AB и BC до контура L' (рисунок 2).

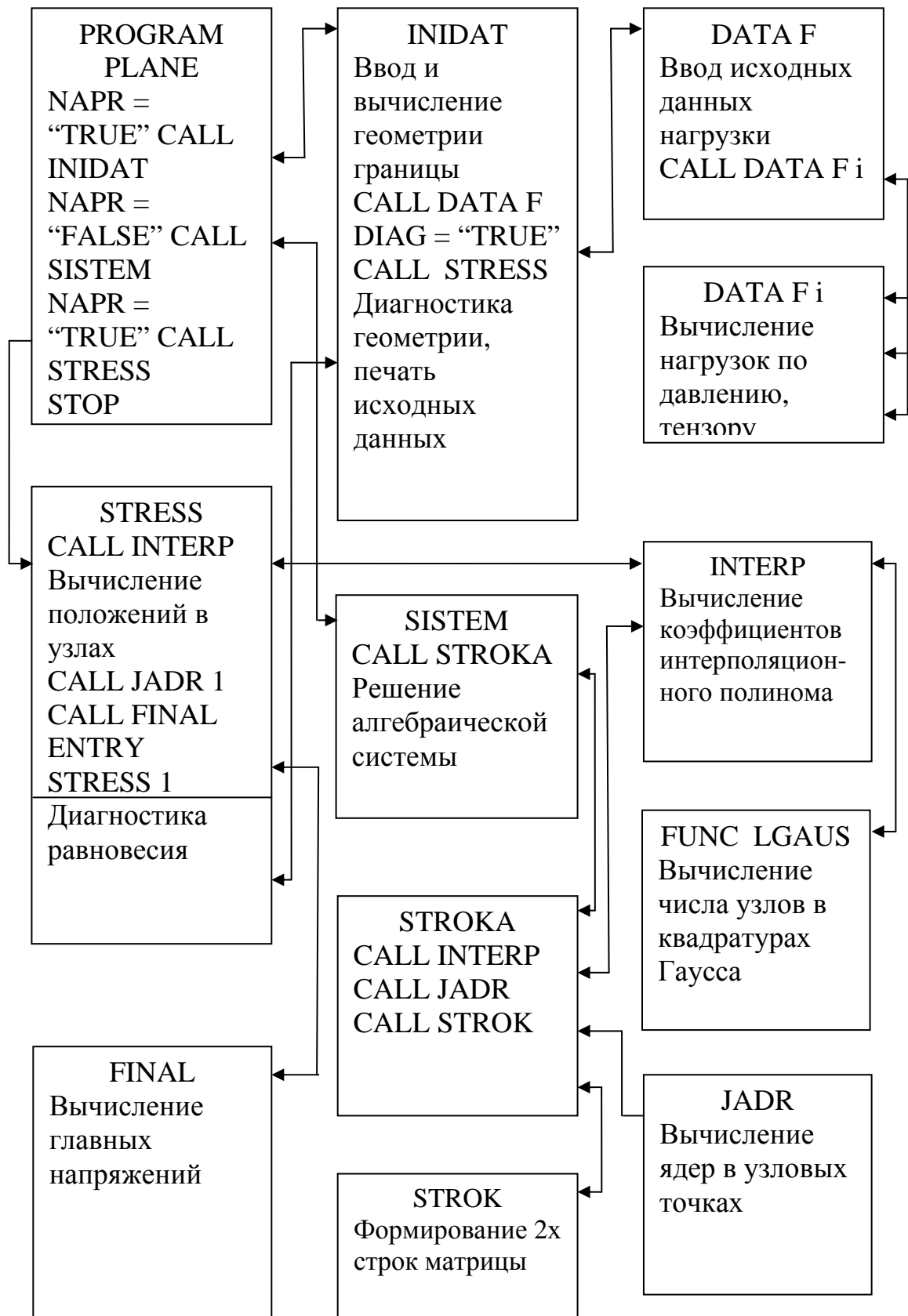


Рисунок 1 - Блок-схема программы

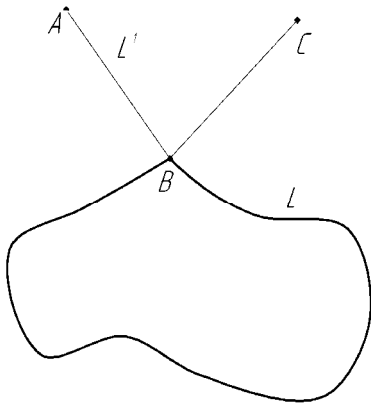


Рисунок 2 - Расширение области с углом

В стандартном режиме программа реализует задачи для областей, ограниченных отрезками прямых и окружностей. Рассматриваемая область может быть произвольной, заданной графически или аналитически. В связи с этим, изменения вносятся в подпрограмму ввода исходных данных и содержат подпрограммы или набор операторов по вычислению координат центров отрезков разбиения границы, радиусов кривизны, длин, векторов внешней нагрузки только для тех участков, которые нельзя заменить окружностью или прямой. В программе предусмотрена диагностика ввода и обработки исходных данных. При подготовке данных следует учитывать, что граничная точка или внутренняя не может быть ближе, чем на 0,5 длины отрезка разбиения границы Δl_K к параметрической точке.

Кроме использования естественных плоскостей симметрии часто вводится искусственная плоскость, не теряя при этом особенности решаемой задачи. Введение искусственных плоскостей в большинстве случаев может значительно облегчить действия по подготовке исходных данных.

2. Напряжённо-деформированное состояние длинного толстостенного цилиндра.

Область является двухсвязной, нагруженной внутренним давлением p_i , материал – сталь 3.

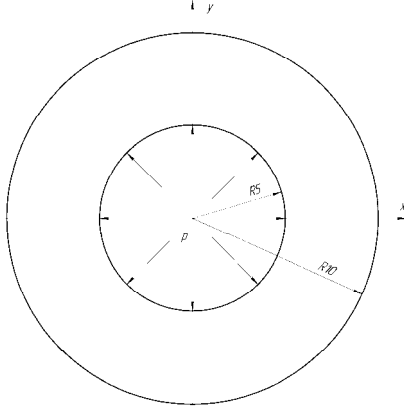


Рисунок 3 - Сжатие длинного толстостенного цилиндра.

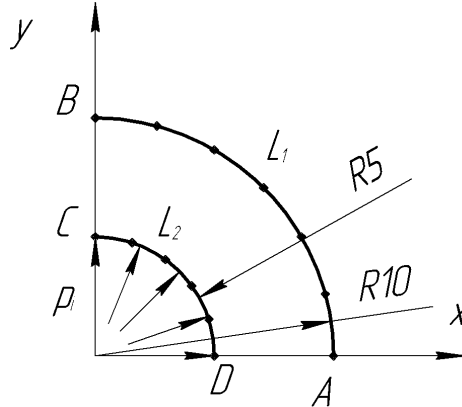


Рисунок 4 - Расчётная схема цилиндра

Область имеет две плоскости симметрии, проходящие через оси x и y . Учитывая свойства симметрии, построим расчётную схему в виде четверти кольца.

Расчётная область имеет 2 непрерывных участка, являющихся дугами окружностей. Для каждого участка назначается определённое число отрезков. При этом необходимо вводить ограничения на их длину. Центр P_K отрезка длиной Δl_K не должен находиться к противоположному участку границы ближе чем половина длины ближайшего отрезка разбиения. Каждый участок в порядке нумерации разбивался соответственно на 6; 5 участков.

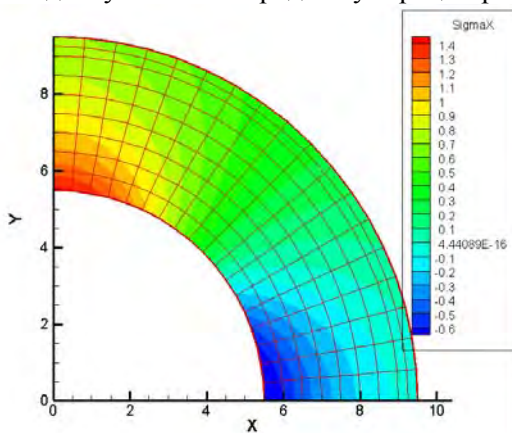


Рисунок 5 – Диаграмма распределения нормальных напряжений σ_x

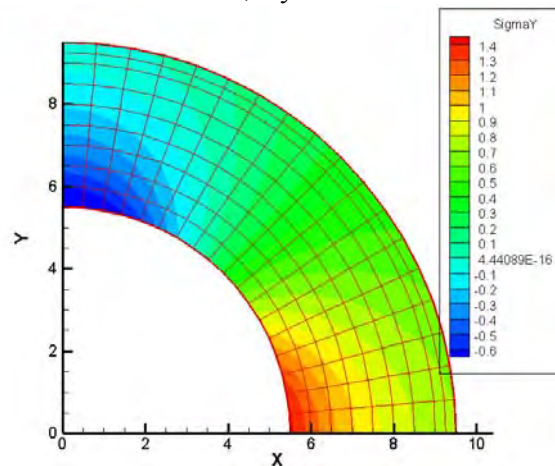


Рисунок 6 – Диаграмма распределения нормальных напряжений σ_y

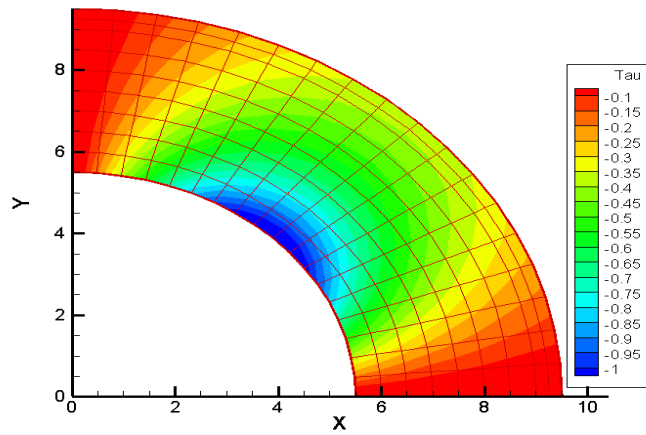


Рисунок 7 – Диаграмма распределения касательных напряжений τ_{xy} .

3. Расчет цилиндрического пуансона

Данная деталь используется для пробивки отверстий. Материал пуансона – сталь X12M. Область нагружена на пробивном конце равномерно распределённой контурной нагрузкой $100 \cdot 10^6$ Н/м, и имеет только внешний контур. Пуансон имеет плоскость симметрии. Напряжения на закрепляемом конце можно представить как равномерную контурную нагрузку. Учитывая свойства симметрии, расчётная схема для реализации этой задачи принимает вид, приведенный на рисунке 8.

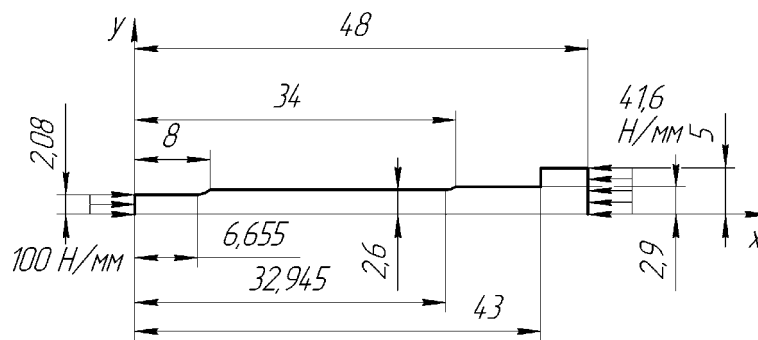


Рисунок 8 - Расчётная схема пуансона

Расчётная кусочно-гладкая область имеет 9 непрерывных участков, являющихся отрезками прямых и дугами окружностей. Для каждого участка назначается определённое число отрезков. При этом необходимо вводить ограничения на их длину. Центр P_K отрезка длиной Δl_K не должен находиться к противоположному участку границы ближе чем половина длины ближайшего отрезка разбиения. Каждый участок в порядке нумерации разбит соответственно на 15; 16; 15; 32; 10; 55; 10; 32; 15 участков.

В результате реализации задачи получено напряженное состояние в соответствующих точках области (рисунок 9).

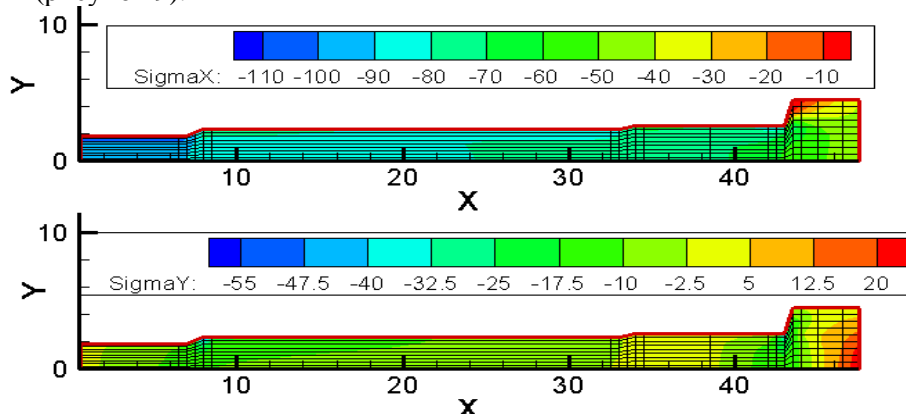


Рисунок 9 – Диаграммы распределения нормальных напряжений σ_x, σ_y

4. Напряжённо-деформированное состояние длинной полосы с отверстиями.

Эта многосвязная область нагружена распределённой по концам равномерной контурной нагрузкой 1 Н/м . Область имеет внешний и внутренний контуры. Здесь ставится 2-я внутренняя краевая задача теории упругости (рисунок 10).

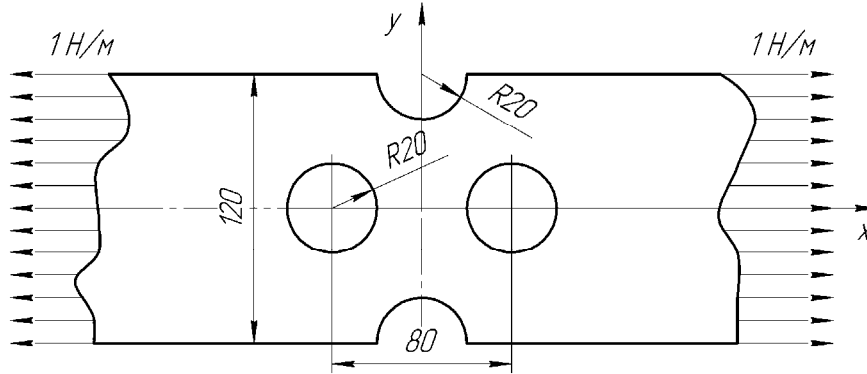


Рисунок 10 - Растяжение полосы с концентраторами напряжений

Область имеет две плоскости симметрии, проходящие через оси x и y . Вырежем элемент полосы длиной 210 мм в зоне ослабления. Учитывая свойства симметрии, построим расчётную схему для реализации этой задачи (рисунок 11).

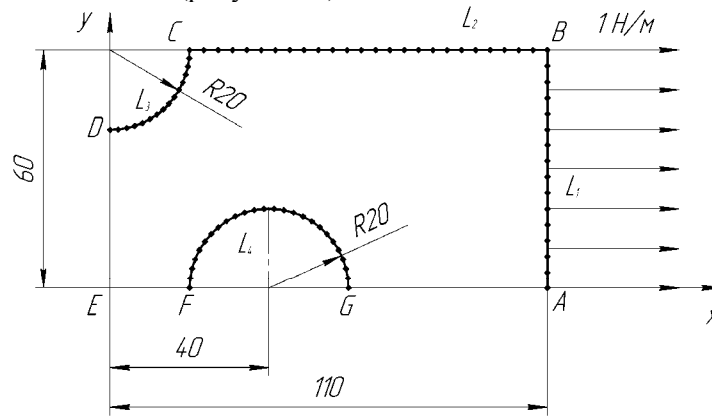


Рисунок 11 - Расчётная схема полосы.

Расчётная область имеет 4 непрерывных участка, являющихся отрезками прямых и дугами окружностей. Каждый участок в порядке нумерации разбит соответственно на 15; 25; 15; 25 участков. В результате реализации задачи получено напряженное состояние в соответствующих точках области (рисунок 12, 13).

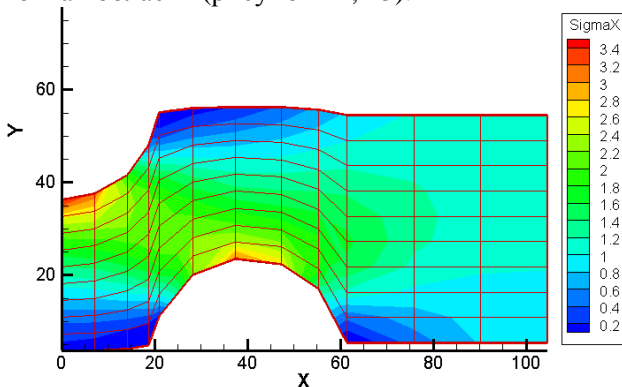


Рисунок 12 – Распределение нормальных напряжений σ_x

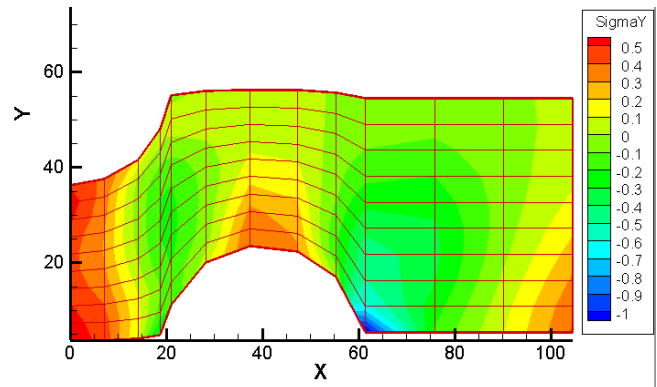


Рисунок 13 – Распределение нормальных напряжений σ_y

Ввиду отсутствия аналитических расчетов сравнение проводилось с результатами, полученными конечно-элементным вычислительным комплексом «ANSYS». На рисунке 14 приведено типичное распределение напряжений σ_x , полученное с помощью ANSYS.

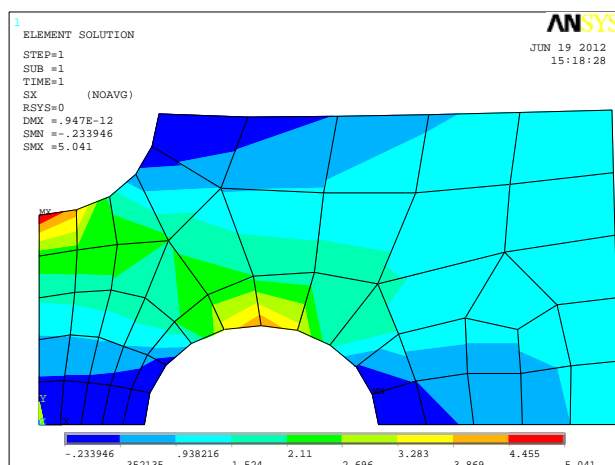


Рисунок 14 – Диаграмма распределения нормальных напряжений σ_x .

Заключение

В результате проведённых численных экспериментов по оценке напряжённо-деформированного состояния можно сделать вывод, что качественно поля напряжений в телах найденные с помощью пакета «ANSYS» по методу конечных элементов и по методу теории потенциала не отличаются. В местах изменения геометрической формы тела (разрывы функции плотности потенциала) наблюдается концентрация напряжений (рисунки 9, 12, 13). Количественная оценка напряжений показала, что результаты решений задач этими способами отличаются в допустимых пределах при проведении инженерных расчётов. В результате сравнения возможности этих методов следует заметить, что применение «FORTRAN» - программы существенно упрощает подготовку исходной информации.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается совместное решение задач теории упругости по исследованию напряженно-деформированного состояния упругих тел при механическом нагружении. Расчет производится с помощью разработанной FORTRAN-программы, построенной на базе метода граничных интегральных уравнений, обработка результатов – с применением графического интерфейса Tecplot 360. Решены некоторые тестовые задачи, проведено сравнение с решением конечно-элементного комплекса ANSYS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vanerjee P.K., Butterfield R. / Бенерджи П., Баттерфилд Р. Boundary Element Methods in Engineering Science / Методы граничных элементов в прикладных науках. — 1984. — 494 с.
2. Н. М. Гюнтер. Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. — М., 1953. — 415 с.
3. А.И. Веремейчик, В.М. Хвисевич Метод граничных интегральных уравнений в нестационарных термоупругих задачах механики твердого тела // Вестник БрГТУ. – 2008. – № 4: Машиностроение. – С. 37–41.

SUMMARY

In article the joint solution of tasks of the theory of elasticity on research intense the deformed condition of elastic bodies is considered at mechanical loading. Calculation is made by means of the developed FORTRAN program constructed on the basis of a method of the boundary integrated equations, processing of results – with use of the graphic Tecplot 360 interface. Some test tasks are solved, comparison with the solution of the final and element ANSYS complex is carried out.

Поступила в редакцию 27.12.2012

РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ТЕЛА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

к.т.н. ¹Миронов Д.Н., ¹Чигарев В.А., к.т.н. ²Гончаренко В.П.

¹Белорусский национальный технический университет, Минск

²УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск

Рассматривается решение термоупругой задачи для конечного полого кругового цилиндра длины l . В момент времени $t = 0$ температура среды на внутренних и внешних поверхностях цилиндра меняется согласно заданным законам, но температурное поле остается осесимметричным. На торцах также происходит теплообмен со средой, температура которой равна T_0 .

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T \quad (1)$$

Начальные условия:

$$T = T_0 \text{ в момент времени } t = 0, \quad (2)$$

Граничные условия:

$$a_{11}T + a_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = \theta_{(l)}(r, t) \text{ при } z = l, \quad (3)$$

$$b_{11}T + b_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = \theta_{(0)}(r, t) \text{ при } z = 0, \quad (4)$$

$$c_{11}T + c_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = \varphi_{(e)}(z, t) \text{ при } r = R_{(e)}, \quad (5)$$

$$d_{11}T + d_{12} \frac{\partial T}{\partial z} = \varphi_{(i)}(z, t) \text{ при } r = R_{(i)}. \quad (6)$$

Будем считать, что внешняя и внутренняя поверхности цилиндра свободны от напряжений.

Рассмотрим вначале определение температурного поля для чего задачу (2)-(6) разобьем на две. Для упрощения положим $T_0 = 0$ в (2), а решение T представим в виде суммы

$$T = T_1 + T_2. \quad (7)$$

Определение $T_1(r, z, t)$. Преобразуем уравнение (1) по Лапласу, тогда для изображения Лапласа $T_1^*(r, z, s)$, при начальном условии $T_1 = 0$, получим уравнение [1]

$$\Delta T_1^* - \frac{s}{a} T_1^* = 0, \quad (8)$$

где

$$T_1^*(r, z, s) = \int_0^\infty T_1(r, z, t) e^{-st} dt. \quad (9)$$

Решение уравнения (8) получим методом разделения переменных и запишем в виде

$$T_1^*(r, z, s) = \int_0^\infty A(s, \lambda) J_0(\lambda, r) e^{-\gamma z} d\lambda, \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + s/a}. \quad (10)$$

Заменим в (10) γ на $i\gamma$, λ на $i\lambda$, тогда можно $T_1^*(r, z, s)$ записать в виде

$$T_1^* = [AI_0(\lambda r) + BK_0(\lambda r)] [c_1 \cos \gamma z + c_2 \sin \gamma z] \quad (11)$$

Здесь I_0 , K_0 – модифицированные функции Бесселя, c_1 , c_2 – произвольные постоянные, $A(s, \lambda)$ – произвольная функция, которая должна быть определена из граничных условий.

Подставляя (11) в условия

$$a_{11}T_1 + a_{12} \frac{\partial T_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = l, \quad (12)$$

$$b_{11}T_1 + b_{12} \frac{\partial T_1}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, \quad (13)$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11}[c_1 \cos \gamma + c_2 \sin \gamma] + \dot{a}_{12}[-c_1 \sin \gamma + c_2 \cos \gamma] &= 0, \\ b_{11}[c_1] + b_{12}[c_2 \gamma] &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Система линейных алгебраических уравнений (14) относительно c_1, c_2 имеет ненулевые решения, если ее определитель равен нулю. Вычисляя определитель системы (14), получаем

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma \frac{a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11}}{a_{11}b_{11} + \gamma^2 a_{12}b_{12}}. \quad (15)$$

Счетное множество корней $\gamma_n (n = 1, 2, \dots)$ трансцендентного уравнения (15) при заданных $a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12}$ определяют собственные значения γ_n задачи Штурма-Лиувилля.

Определяем соответствующие собственные функции задачи используя равенство нулю системы (14). Это означает, что c_1, c_2 зависимы и позволяет выразить c_2 через c_1 , которая остается произвольной. Задавая соответствующим образом эту постоянную, запишем собственную функцию z_n , соответствующую γ_n в виде [2]

$$\begin{aligned} Z(\gamma_n z) &= c_1 \cos \gamma_n z + c_2 \sin \gamma_n z, \\ c_1 &= \gamma_n a_{12} \cos \gamma_n L + a_{11} \sin \gamma_n L, \quad c_2 = \gamma_n a_{12} \sin \gamma_n L - a_{11} \cos \gamma_n L. \end{aligned} \quad (16)$$

Собственные функции $Z(\gamma_n z)$ образуют полную ортогональную систему, т.к. являются решениями краевой задачи Штурма-Лиувилля. Соответственно получим γ_n, z_n заменим в (11) A, B, λ на A_n, B_n и λ_n . Тогда общее решение T_1^* имеет вид (обозначение сохраним тоже самое).

$$T_1^* = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n I_0(\lambda_n r) + B_n K_0(\lambda_n r)] Z(\gamma_n z) \quad \lambda_n = \sqrt{\gamma_n^2 + s/a}. \quad (17)$$

Произвольные постоянные A_n, B_n определяются из граничных условий

$$\tilde{n}_{11} T_1 + \tilde{n}_{12} \dot{O}_1 = \varphi_{(e)}(z, t) \quad \text{при } r = R_{(e)}, \quad (18)$$

$$d_{11} T_1 + d_{12} \dot{O}_1 = \varphi_{(i)}(z, t) \quad \text{при } r = R_{(i)}, \quad (19)$$

Для этого преобразуем (18), (19) по Лапласу, тогда получим изображения Лапласа $\varphi_{(e)}^*(z, s), \varphi_{(i)}^*(z, s)$, которые представим в виде рядов по собственным функциям $Z(\gamma_n z)$

$$\varphi_{(e)}^*(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(e)}(s) Z(\gamma_n z), \quad \varphi_{(i)}^*(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)}(s) Z(\gamma_n z). \quad (20)$$

Преобразуем интегральные условия (18), (19) по Лапласу

$$c_{11} T_1^* + c_{12} T_1^* = \varphi_{(e)}^*(z, s), \quad d_{11} T_1^* + d_{12} T_1^* = \varphi_{(i)}^*(z, s). \quad (21)$$

Подставим (17), (20) в (21) и приравняем коэффициенты при одинаковых $Z(\gamma_n z)$, тогда получим систему уравнений относительно A_n, B_n

$$\begin{aligned} &A_n [c_{11} I_0(\lambda_n R_{(e)}) + \lambda_n c_{12} I_0'(\lambda_n R_{(e)})] + \\ &+ B_n [c_{11} K_0(\lambda_n R_{(e)}) + \lambda_n c_{12} K_0'(\lambda_n R_{(e)})] = c_n^{(e)}, \\ &A_n [d_{11} I_0(\lambda_n R_{(i)}) + \lambda_n d_{12} I_0'(\lambda_n R_{(i)})] + \\ &+ B_n [d_{11} K_0(\lambda_n R_{(i)}) + \lambda_n d_{12} K_0'(\lambda_n R_{(i)})] = c_n^{(i)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $I_{(x)}', K_{(x)}'$ – производные по x .

Система линейных алгебраических уравнений (22) позволяет найти A_n и B_n . Т.к. $Z(\gamma_n z)$ образуют ортогональную систему, то коэффициенты $c_n^{(e)}, c_n^{(i)}$ вычисляются для заданных $\varphi_{(e)}^*(z, s), \varphi_{(i)}^*(z, s)$ по формулам

$$c_n^{(e)}(s) = \frac{1}{N_n} \int_0^L \varphi_{(e)}^*(z, s) Z(\gamma_n z) dz, \quad c_n^{(i)}(s) = \frac{1}{N_n} \int_0^L \varphi_{(i)}^*(z, s) Z(\gamma_n z) dz, \quad N_n = \int_0^L Z^2(\gamma_n z) dz. \quad (23)$$

Вычисление N_n с учетом (16) дает выражение

$$N_n = L \left\{ \frac{a_{11}^2 + \gamma_n^2 a_{12}^2}{2} + \left[(\gamma_n^2 a_{12}^2 - a_{11}^2) \cos \gamma_n l + 2\gamma_n a_{11} a_{12} \sin \gamma_n l \right] \frac{\sin \gamma_n l}{2\gamma_n l} \right\}. \quad (24)$$

Таким образом, выражение для образа Лапласа T_1^* дается выражениями (16), (17), (22), (23).

Определение T_2 . Решение T_2 позволяет оценить влияние условий на торцах. Рассмотрим цилиндр, длина которого значительно больше его диаметра $D \ll L$, тогда в силу принципа Сен-Венана влияние температуры на торце существенно на расстоянии D от торца, и поэтому для простоты рассмотрим полубесконечный цилиндр $0 \leq z \leq \infty$, причем вместо условия [3]

$$a_{11}T_2 + a_{12} \frac{\partial T_2}{\partial z} = \theta_{(e)}(r, t) \text{ при } z = l, \quad (25)$$

считаем, что температура на бесконечности должна быть конечной величиной. Представим образ Лапласа $T_1^*(r, z, s)$ в виде

$$T_1^*(r, z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\gamma_n z} U(\lambda_n r). \quad (26)$$

$$\gamma_n = \sqrt{\lambda_n^2 + s/a}, \quad U(\lambda_n r) = AJ_0(\lambda_n r) + BN_0(\lambda_n r), \quad (27)$$

где J_0, N_0 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка.

Подставим (26), (27) в

$$c_{11}T_2 + b_{12} \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R_{(e)}, \quad (28)$$

$$b_{11}T_2 + b_{12} \frac{\partial T_2}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R_{(i)}. \quad (29)$$

тогда получим систему уравнений для определения A и B :

$$\begin{aligned} & A[c_{11}J_0(\lambda R_{(e)}) - \lambda c_{12}J_1(\lambda R_{(e)})] + \\ & + B[c_{11}N_0(\lambda R_{(e)}) - \lambda c_{12}N_1(\lambda R_{(e)})] = 0, \\ & A[d_{11}J_0(\lambda R_{(i)}) - \lambda d_{12}J_1(\lambda R_{(i)})] + \\ & + B[d_{11}N_0(\lambda R_{(i)}) - \lambda d_{12}N_1(\lambda R_{(i)})] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Для существования ненулевых решений системы (30) определитель ее должен быть равен нулю, что дает трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений $\lambda_n (n=1, 2, \dots)$, которым соответствуют собственные функции $U(\lambda_n r)$. Из условия равенства нулю определителя следует, что коэффициенты A и B не являются независимыми и пусть например B выражается через A из какого-либо из уравнения (30).

Установлено, что собственные функции $U(\lambda_n r)$ в интервале $[R_{(i)}, R_{(e)}]$ образуют полную ортогональную систему функций с весовой функцией r , т.е. выполняется условие ортогональности [4]

$$\int_{R_{(i)}}^{R_{(e)}} r U(\lambda_n r) U(\lambda_m r) dr = 0 \quad (m \neq n) \quad (31)$$

Таким образом, задавая A подходящим образом удовлетворяем условиям (28), (29). Рассмотрим удовлетворение найденного решения граничному условию

$$b_{11}T_2 + b_{12} \frac{\partial T_2}{\partial z} = \theta_{(i)}(r, t) \text{ при } z = 0, \quad (32)$$

Для этого представим $\theta_{(i)}^*(r, s)$ в виде ряда по собственным функциям

$$\theta_{(i)}^*(r, s) = \sum_n h_n^0(s) U(\lambda_n r). \quad (33)$$

Коэффициенты разложения (33) вычисляются по формулам

$$h_n^0 = \frac{1}{N_n} \int_{R_{(i)}}^{R_{(e)}} r \theta_{(i)}^*(r, s) U(\lambda_n r) dr, \quad N_n = \int_{R_{(i)}}^{R_{(e)}} r U^2(\lambda_n r) dr. \quad (34)$$

Для вычисления N_n используются формулы

$$\int rJ_0^2(\lambda r) dr = \frac{r^2}{2} [J_0^2(\lambda r) + J_1^2(\lambda r)], \quad \int rN_0^2(\lambda r) dr = \frac{r^2}{2} [N_0^2(\lambda r) + N_1^2(\lambda r)], \quad (35)$$

$$\int rJ_0(\lambda r)N_0(\lambda r) dr = \frac{r^2}{2} [J_0(\lambda r)N_0(\lambda r) + J_1(\lambda r)N_1(\lambda r)].$$

Для нахождения коэффициентов A_n подставим (26) в условие (32), записанное для образов Лапласа и разложения (30), тогда получим

$$b_{11} \sum_{n=1}^{\infty} A_n U(\lambda_n r) = b_{12} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n U(\lambda_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^0(s) U(\lambda_n r). \quad (36)$$

Приравнявая коэффициенты при $U(\lambda_n r)$, находим $A_n = \frac{h_n^0}{b_{11} - \gamma_n b_{12}}$. (37)

Таким образом, $T^* = T_1^* + T_2^*$ найдена.

Для нахождения напряжений используем потенциал перемещений Φ , который удовлетворяет для квазистатического случая уравнению [5, 6] $\Delta \Phi = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha T$. (38)

Дифференцируя (38) по t и заменяя $\partial T / \partial t$ из уравнения теплопроводности, получим

$$\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1+\mu}{1-\mu} a \alpha \Delta T. \quad (39)$$

Интегрируем (39) по t , тогда получаем $\Phi = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha a \int_0^t T dt + \Phi_0 + t \Phi_1$,. (40)

где Φ_1 – произвольная гармоническая функция; $(\Delta \Phi_1 = 0)$, $\Phi_0 = \Phi(t=0)$ – потенциал перемещений, соответствующий начальной температуре $T_0(x, y, z)$, т.е. $\Delta \Phi_0 = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha T_0$. Если $T_0 = 0$, то $\Phi_0 = 0$.

При квазистатическом рассмотрении неустановившихся температурных напряжений время t является параметром, что позволяет непосредственно использовать решения соответствующих стационарных задач при условии, что при получении этих решений уравнение теплопроводности не используется.

Напряжения σ_{ij} , обусловленные полем $T = T_1 + T_2$, представим в виде $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$, соответственно функцию напряжений Ламе L представим в виде $L = L_1 + L_2$, где L_1 соответствует температурному полю T_1 , а L_2 температуре T_2 .

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено решение стационарной задачи термоупругости и термопластичности в приближении эффективной модели для тела цилиндрической формы

ЛИТЕРАТУРА

1. Сан К.Т. Прикладная механика, №4 1970
2. Бабичева Л.А., Вервейко Н.Д., Труды НИИМ ВГУ, вып. 4, 1971
3. Трофимов Н.И., Труды НИИМ ВГУ, вып. 2, 1971
4. Горшков А. Г., Медведский А. Л. Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 39 с.
5. Тихонов А.П., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие. - М.: Изд-во Московск. ун-та, 1999. - 798 с.
6. Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган - М.: Наука, 1979. - 830 с.

SUMMARY

In work the decision of the stationary problem of thermoelasticity and thermoplasticity in approach of effective model for the body of the cylindrical form.

Поступила в редакцию 11.10.2013

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ НАЧАЛЬНЫХ КОРПУСНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОРНЯ ЗУБА В ФОРМЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ГИПЕРБОЛОИДА

к. ф.-м. н. **Босяков С. М.**, асп. **Абдуфтах Фрхат Мселати**

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Прогнозирование начального и долговременного смещения зубов, в первую очередь их начальных перемещений, после приложения силы или момента является одной из основных целей ортодонтических исследований [1, 2]. Это обусловлено тем, что поля начальных перемещений являются первичными для перестройки костной ткани во время ортодонтического движения зубов [3, 4]. Начальные перемещения зуба возникают при кратковременном действии нагрузки, после снятия которой, зуб возвращается на прежнее место [5, 6]. Основываясь на высокой упругости тканей периодонтальной связки (расположенной между корнем зуба и костной тканью зубной альвеолы) по сравнению с костной тканью, цементом и дентином, большинство исследований указывают на то, что именно периодонт определяет начальные перемещения зуба [7–9]. В зависимости от направления действующей силы выделяют наклонно-вращательное, корпусное, вращательное относительно продольной оси перемещение зубов. Корпусное (поступательное) смещение зубов, к которому также относят вертикальное смещение, характеризуется тем, что некоторая ось зуба остается параллельной своему исходному положению или совпадает с ним [10]. Планирование корпусного перемещения зуба осуществляется с учетом положения центров сопротивления зуба и соответствующих соотношений момент/сила, а также осей сопротивления [11, 12]. В то же время, вопрос о приложении к зубу сосредоточенной нагрузки для его поступательного смещения, линия действия которой не проходит через центр сопротивления и не совпадает с осью сопротивления, не рассматривался. Настоящая работа посвящена определению условий приложения силы, позволяющих выполнить начальное корпусное перемещение однокоренного зуба в линейно упругой периодонтальной связке постоянной толщины.

Математическая модель. Внешняя поверхность корня зуба и прилегающая к нему внутренняя поверхность периодонтальной связки (считаем, что корень зуба является абсолютно твердым телом) описывается уравнением кругового гиперболоида

$$F(x, y, z) = y - \frac{h}{\sqrt{1+p^2} - p} \left(\sqrt{(1-e^2) \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2} + p^2 - p \right) = 0, \quad (1)$$

где h – высота корня зуба; $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ – эксцентриситет эллипса в поперечном сечении зуба на уровне альвеолярного гребня; a, b – полуоси эллипса в сечения корня зуба на уровне альвеолярного гребня; p – параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба.

Внешняя поверхность периодонтальной связки, прилегающая к костной ткани зубной альвеолы, смещена по нормали по отношению к поверхности корня зуба на величину δ (толщина периодонтальной связки постоянна). Ее уравнение имеет вид:

$$F_1(x, y, z) = y + n_y \delta - \frac{h}{\sqrt{1+p^2} - p} \times \left(\sqrt{(1-e^2) \left(\frac{1}{b}(x + n_x \delta)\right)^2 + \left(\frac{1}{b}(z + n_z \delta)\right)^2} + p^2 - p \right) = 0, \quad (2)$$

Здесь n_x, n_y, n_z – компоненты единичного вектора нормали к поверхности (1), $i = \overline{1, 3}$, которые с учетом уравнения (1) определяются следующим образом:

$$n_x = -\frac{1}{\Delta} \frac{h(1-e^2)x}{A}, n_y = \frac{1}{\Delta}, n_z = -\frac{1}{\Delta} \frac{hz}{A}, A = b \left(\sqrt{1+p^2} - p \right) \sqrt{(1-e^2)x^2 + z^2 + (bp)^2}, \quad (3)$$

$$\Delta = \sqrt{1 + \frac{h^2 \left((1-e^2)x^2 + z^2 \right)}{b^2 \left(\sqrt{1+p^2} - p \right) \left((bp)^2 + (1-e^2)x^2 + z^2 \right)}}.$$

При действии на зуб сосредоточенной силы $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$, точки периодонта, прилегающие к поверхности корня (1) зуба, получают перемещения, равные перемещению корня. Внешняя поверхность периодонтальной связки (2) является жестко закрепленной. Отметим, что согласно результатам работы [13] не выявлено существенных различий между результатами расчета моделей, учитывающих костную ткань и жесткую заделку внешней поверхности периодонтальной связки, а также указано, что при расчете начальных перемещений зубов в периодонте зубы и костная ткань могут задаваться как абсолютно твердые тела.

В соответствии с работами [14, 15], будем считать периодонт несжимаемым материалом с коэффициентом Пуассона равным 0,49. Это означает, что при смещении корня зуба к стенке зубной альвеолы, периодонт начинает растекаться вокруг поверхности корня зуба [14]. Поэтому компоненты тензора деформаций в системе координат, связанной с нормалью, образующей и направляющей к внешней поверхности корня зуба, можно представить в следующем виде [14, 15]:

$$\varepsilon_{nn} = -\frac{u_n}{\delta}, \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0, \gamma_{n\theta} = -\frac{u_\theta}{\delta}, \gamma_{nt} = -\frac{u_t}{\delta}, \gamma_{t\theta} = 0, \quad (4)$$

где u_n, u_t, u_θ – перемещения точек периодонта вдоль нормали, образующей и направляющей к поверхности корня зуба; δ – ширина периодонтальной связки в направлении нормали к поверхности (1). Нормаль, образующая и направляющая к поверхности корня зуба, а также его геометрические размеры показаны на рисунке 1.

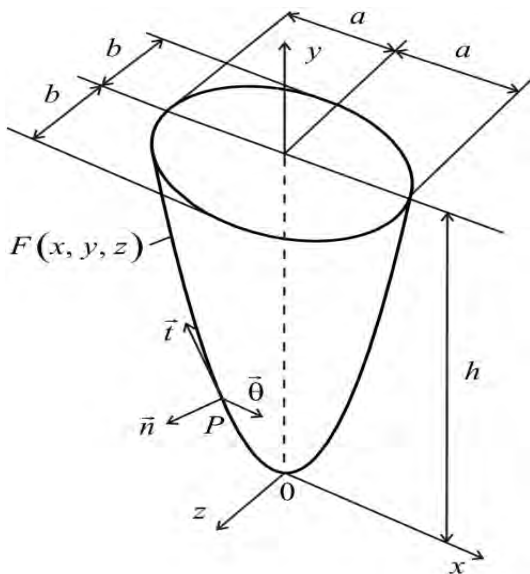


Рисунок 1. – Корень зуба в форме кругового гиперboloида: \vec{n} – нормаль, \vec{t} – образующая, $\vec{\theta}$ – направляющая к поверхности кругового гиперboloида в точке P

Условия равновесия корня зуба (равенство нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на зуб) представим в виде:

$$\iint_F (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{P} = 0, \iint_F \vec{r} \times (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{m} = 0, \quad (5)$$

где $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$ – главный момент внешних сил, $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ – главный вектор внешних сил, \vec{r} – радиус-вектор, $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ – единичный вектор нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$, σ – тензор напряжений.

На основании закона Гука для однородной изотропной среды компоненты тензора напряжений σ представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right), \tau_{xy} = \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\nu}, \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right), \tau_{xz} = \frac{E\varepsilon_{xz}}{1+\nu}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right), \tau_{yz} = \frac{E\varepsilon_{yz}}{1+\nu}, \end{aligned} \quad (6)$$

где E – модуль упругости тканей периодонтальной связки; ν – коэффициент Пуассона.

Моделирование периодонтальной ткани линейно упругой изотропной средой обусловлено тем, что линейно упругие свойства периодонта отражают те же жесткости, что и возникают на начальной стадии деформирования нелинейного периодонта [17]. К тому же тип движения зубов в периодонтальной связке не зависит от материальной нелинейности тканей периодонта [22].

Компоненты тензора деформаций в декартовой системе координат (x, y, z) выразим через компоненты тензора деформаций в системе координат (n, t, θ) следующим образом [20]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{mn} & \varepsilon_{m} & \varepsilon_{\theta n} \\ \varepsilon_{m} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{\theta n} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_1^T \cdot T_2^T, \quad (7)$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} \gamma_m, \quad \varepsilon_{\theta n} = \frac{1}{2} \gamma_{\theta n}.$$

Выполним преобразование вектора перемещения (u_n, u_θ, u_t) точки P , находящейся на внешней поверхности корня зуба (внутренней поверхности периодонтальной связки) из системы координат (n, t, θ) в систему координат (x, y, z) :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_t \\ u_\theta \end{pmatrix} = T_1^T \cdot T_2^T \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} H & 0 & -G \\ 0 & 1 & 0 \\ G & 0 & H \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$H = \frac{x(1-e^2)}{\sqrt{x^2(1-e^2)^2 + z^2}}, \quad G = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

где T_1 – матрица поворота относительно направляющей $\bar{\theta}$ на угол α ; T_2 – матрица поворота относительно оси Oz на угол φ ; T_1^T, T_2^T – транспонированные матрицы T_1 и T_2 соответственно. В матрице T_1 угол α между образующей к поверхности корня зуба t и плоскостью, параллельной плоскости xOz и проходящей через точку P , такой, что

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{h\sqrt{(1-e^2)^2 x^2 + z^2}}{b(\sqrt{1+p^2} - p)\sqrt{(bp)^2 + (1-e^2)x^2 + z^2}}.$$

Последовательно подставляя в выражение (7) соотношения (4) и (8), получим

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{H(G^2 + H^2)u_x \sin(\alpha)}{\delta}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{u_y \cos(\alpha)}{\delta}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{G(G^2 + H^2)u_z \sin(\alpha)}{\delta},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(G^2 + H^2)u_x \cos(\alpha) - Hu_y \sin(\alpha)}{2\delta}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{(G^2 + H^2)u_z \cos(\alpha) - Gu_y \sin(\alpha)}{2\delta}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{xz} = -\frac{(G^2 + H^2)(u_z H + Gu_x) \sin(\alpha)}{2\delta}.$$

Любое перемещение корня зуба может быть описано посредством комбинации поступательных перемещений u_{0x}, u_{0y} и u_{0z} вдоль соответствующих координатных осей и углами поворота вершины корня θ_x, θ_y и θ_z относительно этих же осей. Поскольку толщина периодонта очень мала (0,2 – 0,3 мм [1]), углы поворота очень малы. Это позволяет использовать следующие линеаризованные формулы [15]

$$u_x = u_{0x} + z\theta_y - y\theta_z, \quad u_y = u_{0y} - z\theta_x + x\theta_z, \quad u_z = u_{0z} + y\theta_x - x\theta_y. \quad (10)$$

Подставим выражения (3), (6), (9) и (10) в уравнения равновесия (5). В результате получим систему однородных алгебраических уравнений относительно поступательных перемещений и углов поворота корня зуба следующего вида

$$\begin{aligned} c_x u_{0x} + c_{\theta_{xy}} \theta_z &= f_x, \quad c_y u_{0y} = f_y, \quad c_z u_{0z} + c_{\theta_{yz}} \theta_x = f_x, \\ c_{\theta_z} u_{0z} + \mu_x \theta_x &= y_f f_z - z_f f_y, \quad \mu_y \theta_y = z_f f_x - x_f f_z, \\ c_{\theta_x} u_{0x} + \mu_z \theta_z &= x_f f_y - y_f f_x, \end{aligned} \quad (11)$$

где c_x, c_y, c_z – жесткости периодонтальной связки при поступательном перемещении корня зуба вдоль координатных осей; $c_{\theta_{xy}}, c_{\theta_{yz}}$ – статические моменты жесткостей; $c_{\theta_x}, c_{\theta_z}$ – жесткости периодонта при повороте корня зуба относительно оси Ox, Oz при действии силы вдоль этой коор-

динатной оси; μ_x, μ_y, μ_z – жесткости периодонта при поворотах корня зуба относительно координатных осей $0x, 0y, 0z$ соответственно; (x_f, y_f, z_f) – координаты точки приложения нагрузки.

Условия поступательного перемещения. Определим координаты точки $P_1(0, y_1, 0)$ приложения сосредоточенной нагрузки, действующей параллельно оси $0x$ таким образом, что зуб перемещается поступательно. В этом случае углы поворота относительно координатных осей $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$, поступательные перемещения корня $u_{0y} = u_{0z} = 0$, составляющая нагрузки $f_y = f_z = 0$ и система уравнений равновесия (11) принимает вид:

$$c_x u_{0x} = f_x, c_{\theta x} u_{0x} = -y_1 f_x.$$

Отсюда

$$y_1 = -c_{\theta x} / c_x. \quad (12)$$

Аналогично найдем координаты точки $P_2(0, y_2, 0)$, через которую проходит линия действия силы, обеспечивающая поступательное перемещение зуба вдоль оси $0z$. При этом в системе (11) следует задать равными нулю углы поворота $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$, поступательные перемещения $u_{0x} = u_{0y} = 0$, а также составляющие нагрузки $f_x = f_y = 0$. В результате получим

$$y_2 = -c_{\theta z} / c_z. \quad (13)$$

Формулы (12), (13) определяют положение центров сопротивления корня зуба в виде эллиптического гиперboloида при корпусном перемещении вдоль осей $0x$ и $0z$ соответственно. Выполним расчет координат y_1 и y_2 для корня зуба, высота которого составляет $h = 13$ мм, большая полуось $b = 3,9$ мм [14, 15]. Параметр, характеризующий закругление вершины корня примем равным $p = 0,4$. Упругие свойства периодонтальной связки описываются константами $E = 680$ кПа, $\nu = 0,49$ [5, 14, 15], толщина периодонта равна $\delta = 0,229$ мм [14, 15]. На рисунке 2 показана зависимость координат y_1 и y_2 центров сопротивления от эксцентриситета e , который принимает дискретные значения от 0 до 0,6 с шагом 0,1.

Из рисунка 2 видно, что при увеличении эксцентриситета (при уменьшении длины полуоси a) значение координаты y_1 возрастает, и центр сопротивления смещается от апекса (вершины корня) в сторону альвеолярного гребня. Координата y_2 центра сопротивления P_2 с возрастанием эксцентриситета увеличивается незначительно. При равенстве полуосей эллипса в поперечном сечении корня ($e = 0$) центры сопротивления P_1 и P_2 совпадают.

Определим угол α_1 между линией действия нагрузки, расположенной в плоскости $x0y$, и осью $0x$ из условия поступательного движения корня зуба вдоль координатной оси $0x$. Будем считать, что сила с составляющими $(f_{x1}, f_{y1}, 0)$ приложена в точке с координатами $(x_1, y_1, 0)$. С учетом этого, при $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ и отсутствии поступательного перемещения вдоль оси $0z$ из системы (11) получим

$$c_x u_{0x} = f_{x1}, c_y u_{0y} = f_{y1}, c_{\theta x} u_{0x} = f_{x1} y_1 - f_{y1} x_1. \quad (14)$$

Из системы уравнений (14) следует, что линия действия силы, которая приводит к корпусному перемещению корня, расположена под углом α_1 к оси $0x$ таким, что

$$\operatorname{tg}(\alpha_1) = \frac{c_{\theta x} + c_x y_1}{c_x x_1}. \quad (15)$$

Аналогично можно найти угол α_2 , под которым следует расположить сосредоточенную нагрузку в плоскости $y0z$ по отношению к оси координат $0z$, чтобы обеспечить поступательное смещение корня зуба. В этом случае будем считать, что точка приложения нагрузки с составляющими $(0, f_{y2}, f_{z2})$ имеет координаты $(0, y_2, z_2)$. Из системы (11) при равенстве нулю углов поворота и поступательного перемещения u_{0x} , получим

$$c_y u_{0y} = f_{y2}, c_z u_{0z} = f_{z2}, c_{\theta z} u_{0z} = f_{z2} y_2 - f_{y2} z_2.$$

Отсюда следует

$$\operatorname{tg}(\alpha_2) = \frac{c_z y_2 - c_{0z}}{c_z z_2}. \quad (16)$$

Выполним построение зависимостей углов α_1 и α_2 от эксцентриситета e для корня зуба с геометрическими размерами $h = 13$ мм, $b = 3,9$ мм [13, 14], $p = 0,4$. Упругие свойства периодонтальной связки и ее толщина прежние. Для определенности будем считать, что нагрузка прикладывается на уровне альвеолярного гребня и $x_1 = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}}$, $y_1 = y_2 = h$, $z_2 = b$. На рисунке 3 представлены зависимости α_1 и α_2 , полученные при изменении e от 0 до 0,6 с шагом 0,1.

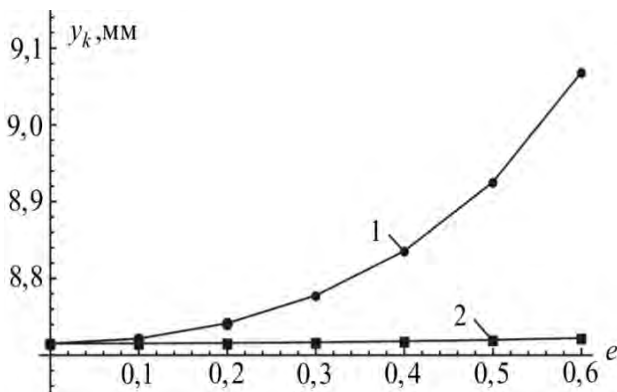


Рисунок 2. – Зависимость координат центров сопротивления от эксцентриситета эллипса в поперечном сечении зуба на уровне альвеолярного гребня: 1 – y_1 ; 2 – y_2

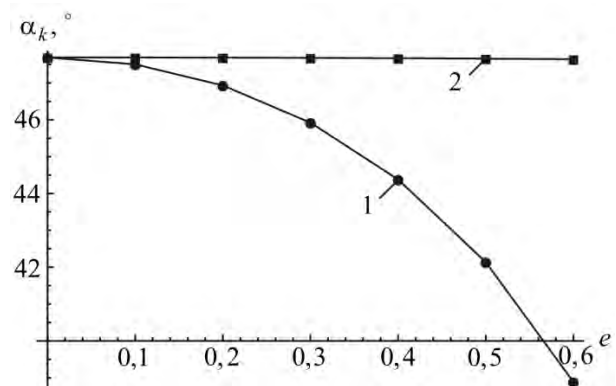


Рисунок 3. – Зависимости углов ориентации сосредоточенной силы по отношению к координатным осям: 1 – угол α_1 между линией действия нагрузки в плоскости xOy и осью Ox при поступательном перемещении вдоль оси Ox ; 2 – угол α_2 между линией действия нагрузки в плоскости yOz и осью Oz при поступательном перемещении вдоль оси Oz

Из рисунка 3 видно, что при увеличении эксцентриситета (что соответствует увеличению полуоси a) угол α_1 наклона линии действия силы к оси Ox уменьшается. Это можно объяснить существенным смещением центра сопротивления P_1 по отношению к положению, соответствующему $e = 0$, при возрастании эксцентриситета. Незначительным отклонением центра сопротивления P_2 при изменении эксцентриситета также обусловлено незначительное уменьшение угла α_2 при увеличении e .

Заключение. Постановка задачи о корпусном перемещении корня зуба при действии сосредоточенной нагрузки, линия действия которой расположена под углом к координатным плоскостям и определение такого угла наклона для корня зуба в форме эллиптического гиперboloида выполнены впервые. Рассмотренная геометрическая форма корня зуба имеет преимущество по сравнению с формой в виде параболоида вращения. В дополнение к анализу влияния размеров поперечного сечения и высоты корня, на основании предложенной модели, она позволяет выполнить исследование влияния закругления корня на начальные перемещения. В частности, анализ зависимостей координат центров сопротивления от закругления корня, показывает, что при приближении формы корня к конусу центры сопротивления начинают снижаться к апексу. Отметим, что полученные результаты указывают на отсутствие единого центра сопротивления у симметричного корня, что дополняет аналогичные выводы конечно-элементного исследования [12] о различных центрах сопротивления.

РЕЗЮМЕ

В работе проведен анализ условий корпусного перемещения однокоренных зубов. Внешняя поверхность корня описывается уравнением эллиптического гиперboloида. Корень зуба является абсолютно твердым телом. Внутренняя поверхность периодонтальной связки совпадает с внешней поверхностью корня зуба. Внешняя поверхность периодонта жестко зашцеplена и удалена от поверхности корня зуба по нормали на постоянную величину, равную толщине связки. Условия корпусного перемещения зуба формулируются на основании уравнений равновесия корня в перио-

донтальной связке при действии на зуб сосредоточенной нагрузки. При этом предполагается, что углы поворота корня равны нулю, корень зуба перемещается только поступательно вдоль одной из координатных осей. Показано, что не существует единого центра сопротивления для случая симметричного корня. Проведен анализ влияния эксцентриситета эллипса в поперечном сечении корня и закругления корня зуба на положение центров сопротивления корня, а также на ориентацию сосредоточенных сил, действие которых приводит к поступательному смещению зуба.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cronau, M. Biomechanical features of the periodontium: An experimental pilot study in vivo/ M. Cronau [et al.] // *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.*–2006.–Vol. 129.–P. 599.e13–599.e21.
2. Ren, Y. Optimum force magnitude for orthodontic tooth movement: a systematic literature review / Y. Ren, C. Jaap, A. Kuijpers-Jagtman // *Angle Orthod.*–2003.–Vol. 73.–P. 86–92.
3. Middleton, J. The role of the periodontal ligament in bone modeling: the initial development of a time dependent finite element model / J. Middleton, M. Jones, A. Wilson // *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.*–1996.–Vol. 109.–P. 155–162.
4. De Pauw, G. The value of the centre of rotation in initial and longitudinal tooth and bone displacement / G. De Pauw, L. Dermaut, H. De Bruyn // *Eur. J. Orthodont.*–2003.–Vol. 25.–P. 285–291.
5. Tanne, K. Patterns of initial tooth displacements associated with various root lengths and alveolar bone heights / K. Tanne [et al.] // *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.*–1991.–Vol. 100.–P. 66–71.
6. Ziegler A. Numerical simulation of the biomechanical behaviour of multi-rooted teeth / A. Ziegler [et al.] // *Eur. J. Orthodont.*–2005.–Vol. 27.–P. 333–339.
7. Bourauel, C. Simulation of orthodontic tooth movements – a comparison of numerical models / C. Bourauel [et al.] // *J. Orofacial Orthoped.*–1999.–Vol. 60.–P. 136–151.
8. Nägerl H. Discussion: A FEM study for the biomechanical comparison of labial and palatal force application on the upper incisors / H. Nägerl, D. Kubein-Meesenburg // *Fortschritte der Kieferorthopädie.*–1993.–Vol. 54.–P. 229–230.
9. Nikolai, R. J. Investigation of Root-Periodontium Interface Stresses and Displacements for Orthodontic Application / R. J. Nikolai, J. W. Schweiker // *Experimental Mechanics.*–1972.–P. 406–413.
10. Аболмасов, Н. Г. Ортодонтия / Н. Г. Аболмасов, Н. Н. Аболмасов. М.: МЕДпресс-информ, 2008.–424 с.
11. Cattaneo, P. M., Dalstra M., Melsen B. Moment-to-force ratio, center of rotation, and force level: a finite element study predicting their interdependency for simulated orthodontic loading regimens / P. M. Cattaneo, M. Dalstra, B. Melsen // *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.*–2008.–Vol. 133.–P. 681–689.
12. Viecilli R. F., Budiman A., Burstone C. J. Axes of resistance for tooth movement: Does the center of resistance exist in 3-dimensional space? / R. F. Viecilli, A. Budiman, C. J. Burstone // *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.*–2013.–Vol. 143.–P. 163–172.
13. Hohmann, A. Influence of different modeling strategies for the periodontal ligament on finite element simulation results / A. Hohmann [et al.] // *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.*–2011.–Vol. 139.–P. 775–783.
14. Provatidis, C. G. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation / C. G. Provatidis // *Int. J. Eng. Sci.*–2001.–Vol. 39.–P. 1361–1381.
15. Van Schepdael, A. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement / A. Van Schepdael, L. Geris, J. Vander Sloten // *Med. Eng. Phys.*–2013.–Vol. 35.–P. 403–410.

SUMMARY

In present paper the conditions of single-root teeth translation were analysed. The outer surface of the root is described by an elliptical hyperboloid. Root of the tooth is solid. The inner surface of the periodontal ligament coincides with the outer surface of the tooth root. The outer surface of periodontal fixed and removed from the surface of the tooth root is normal in an constant amount equal to the thickness of ligaments. Conditions of tooth translation are formulated on the basis of the equilibrium equations of the root in the periodontal ligament under a concentrated load. The angles of rotation equal to zero, and the root of the tooth only moves along one of the axes is assumed. It is shown that there is no single centre of resistance to the symmetric root of the tooth. Effect of ellipse eccentricity in cross section of the tooth root and rounding to the position of the centres of resistance of the root were analysed. The impact of rounding eccentricity and rounding on the orientation of the concentrated forces for translation of the tooth examined.

Поступила в редакцию 02.09.2013

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

к. ф.-м. н. ¹ Мартыненко Т.М., к. ф.-м. н. ² Скляр О.Н.

¹ ГУО «Командно-инженерный институт» МЧС Республики Беларусь, Минск

² Белорусский национальный технический университет, Минск

В теории оболочек различают две основные задачи, из которых первая, прямая, связана с определением безмоментной формы упругих оболочек при заданных на ее границах внешних нагрузках (т.е. определение такой ее срединной поверхности и внешних источников деформирования, которые не вызывают изгибной деформации). Вторая, обратная, заключается в определении геометрической формы гибкой мембраны, деформируемой внешними усилиями так, что они не вызывают в ней растяжений (искажения) срединной поверхности. Прямая задача наиболее часто используется в практической работе конструкторских и проектных организаций, при допущении в расчетах незначительных моментов или при расчете гибких оболочек, поскольку в них могут иметь место незначительные изгибы и растягивающие усилия. При этом, чтобы избежать возможности появления изгибных деформаций или значительных растягивающих усилий, требуется сопровождать их расчет соответствующей проверкой [1].

В настоящее время достигнут определенный прогресс и в решении обратных геометрических задач безмоментной теории упругости. В то же время теория обратных задач чистомоментного напряженно-деформированного состояния явно отстает от аналогичных задач безмоментной теории оболочечных конструкций.

При построении математической модели будем исходить из теории оболочек Кирхгофа-Лява, в силу которой разрешающая система уравнений записывается следующим образом [2].

Уравнения равновесия при больших перемещениях имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial A_1 S_2}{\partial \eta} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_{21}} - \frac{S_1}{\rho_1} - \frac{T_2}{\rho_2} + q_1 \right) &= 0, \\ \frac{\partial A_2 S_1}{\partial \xi} + \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \eta} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_1}{R_{12}} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{S_2}{\rho_2} + \frac{T_1}{\rho_1} + q_2 \right) &= 0, \\ \frac{\partial(A_2 Q_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 Q_2)}{\partial \eta} - A_1 A_2 \left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{S_1}{R_{12}} + \frac{S_2}{R_{21}} - q_n \right) &= 0, \\ \frac{\partial(A_2 H_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \eta} + A_1 A_2 \left(\frac{M_1}{\rho_1} + \frac{H_2}{\rho_2} - Q_2 + m_2 \right) &= 0, \\ \frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 H_2)}{\partial \eta} - A_1 A_2 \left(\frac{H_1}{\rho_1} + \frac{M_2}{\rho_2} + Q_1 - m_1 \right) &= 0, \\ S_1 - \frac{H_2}{R_2} - \frac{M_1}{R_{12}} &= S_2 - \frac{H_1}{R_1} - \frac{M_2}{R_{21}}. \end{aligned} \tag{1}$$

При малых перемещениях $\frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_{21}} = 0$, $\frac{1}{R_2} \approx \frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{\rho_1} \approx \frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2} \approx \frac{1}{\rho_2}$.

Соотношения упругости (неоднородной ортотропной оболочки):

$$\begin{aligned} T_1 &= B_1 \varepsilon_1 + B_v \varepsilon_2, \quad T_2 = B_2 \varepsilon_2 + B_v \varepsilon_1, \quad S = B_G \gamma; \\ M_1 &= D_1 \chi_1 + D_v \chi_2, \quad M_2 = D_2 \chi_2 + D_v \chi_1, \quad H = 2D_G \tau; \end{aligned} \tag{2}$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= B_1' T_1 - B_v' T_2, \quad \varepsilon_2 = B_2' T_2 - B_v' T_1, \quad \gamma = B_G' S; \\ \chi_1 &= D_1' M_1 - D_v' M_2, \quad \chi_2 = D_2' M_2 - D_v' M_1, \quad H = 2D_G' H. \end{aligned}$$

При асимметричной деформации оболочек вращения систему уравнений (2) можно записать в виде:

$$\frac{1}{b}(T_2 R)^\bullet + T_1 \frac{\varphi^*}{\varphi} \sin \alpha^* + Q_2 R \frac{\dot{\alpha}^*}{b} + q_2 R = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{b}(Q_2 R)^\bullet - T_1 \frac{\varphi^*}{\varphi} \cos \alpha^* - T_2 R \frac{\dot{\alpha}^*}{b} + q_n R = 0.$$

$$\frac{1}{b}(M_2 R)^\bullet + M_1 \frac{\varphi^*}{\varphi} \sin \alpha^* - Q_2 R + m_2 R = 0. \quad (4)$$

Уравнения (3) можно проинтегрировать введя: $T_z = T_2 \cos \alpha^* + Q_2 \sin \alpha^*$, $q_z = q_2 \cos \alpha^* + q_n \sin \alpha^*$, $q_2 = -q_2 \sin \alpha^* + q_n \cos \alpha^*$.

Из уравнения (3) следует:

$$\begin{aligned} (R(T_2 \cos \alpha^* + Q_2 \sin \alpha^*))^\bullet &= -Rb(q_2 \cos \alpha^* + q_n \sin \alpha^*), \\ (R(T_2 \sin \alpha^* - Q_2 \cos \alpha^*))^\bullet &= Rb\left(-q_2 \sin \alpha^* + q_n \cos \alpha^* - b \frac{\varphi^*}{\varphi} T_1\right). \end{aligned} \quad (5)$$

Из первого уравнения (5) можно определить $T_2 \cos \alpha^* + Q_2 \sin \alpha^*$, а из второго уравнения T_1 . Заметим, что в случае безмоментной теории $m_2 = 0$, $M_2 = M_1 = 0$, а из (4) следует, что $Q_2 = 0$. При $\varphi^* \neq \varphi$, $\cos \alpha^*$ и $\sin \alpha^*$ представляются в таком виде:

$$\begin{aligned} \sin \alpha^* &= \sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha + \theta \cos \alpha - \frac{1}{2} \theta^2 \sin \alpha + \dots \\ \cos \alpha^* &= \cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha + \theta \sin \alpha - \frac{1}{2} \theta^2 \cos \alpha + \dots, \end{aligned}$$

где $\theta = \alpha^* - \alpha$, α – угол касательный к меридиану с осью вращения.

Для замкнутой системы уравнений геометрически нелинейной теории оболочек рассмотрим упругие оболочки, для которых справедливы гипотезы Кирхгофа о неизменности нормального сечения (точки на нормали к срединной поверхности образуют нормаль и к деформированной срединной поверхности, причем находятся на тех же расстояниях, что и до деформации). Напряжения, направленные по касательной к срединной поверхности, пренебрежимо малы [3].

Деформация срединной поверхности характеризуется следующими величинами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{A_1 \partial \xi} + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \eta} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{A_2 \partial \eta} + \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi} + \frac{w}{R_2}, \\ \gamma &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{A_1} + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{1}{A_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\theta_1 = -\frac{\partial w}{A_1 \partial \xi} + \frac{u}{R_1}, \quad \theta_2 = -\frac{\partial w}{A_2 \partial \eta} + \frac{v}{R_2}, \quad 2\omega = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 u}{\partial \xi} - \frac{\partial A_1 v}{\partial \eta} \right). \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{\partial \theta_1}{A_1 \partial \xi} + \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \eta}, \quad \chi_2 = \frac{\partial \theta_2}{A_2 \partial \eta} + \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi}, \\ 2\tau &= \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{Q_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Q_2}{A_2} \right) + \frac{\gamma - 2\omega}{2R_1} + \frac{\gamma + 2\omega}{2R_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для поверхности вращения они принимают такой вид:

$$\xi = \varphi = \frac{S_1}{R}, \quad A_1 = R(\eta), \quad \eta = \frac{S_2}{A_2}, \quad A_2 = b = const. \quad (9)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{d\alpha}{dS_2} = \frac{1}{b} \frac{d\alpha}{d\eta}, \quad \sin \alpha = -\frac{1}{b} \frac{dR}{d\eta}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{b} \frac{dz}{d\eta}, \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} \cos \alpha, \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\sin \alpha}{R}. \quad (10)$$

Уравнения чистомоментной теории оболочек Кирхгофа – Лява получим из выше приведенных разрешающих систем при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \gamma = 0$, $T_1 = T_2 = S = 0$ [4]. Они имеют следующий вид:

$$\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_{21}} + q_1 = 0, \frac{Q_1}{R_{12}} + \frac{Q_2}{R_2} + q_2 = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial(A_2 Q_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 Q_2)}{\partial \eta} + q_n A_1 A_2 = 0.$$

$$\frac{\partial(A_2 H_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial \eta} + A_1 A_2 \left(\frac{M_1}{\rho_1} + \frac{H_2}{\rho_2} - Q_2 + m_2 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial(A_1 H_2)}{\partial \eta} - A_1 A_2 \left(\frac{H_1}{\rho_1} + \frac{M_2}{\rho_2} + Q_1 - m_1 \right) = 0, \quad (12)$$

$$S_1 - \frac{H_2}{R_2} - \frac{M_1}{R_{12}} = S_2 - \frac{H_1}{R_1} - \frac{M_2}{R_{21}}.$$

Из систем уравнений (11) и (12) следует, что оболочки с конечной жесткостью на изгиб, в отличие от абсолютно гибких оболочек, могут находиться в чистомоментном состоянии при наличии в них как растягивающих, так и сжимающих усилий. Они будут терять устойчивость лишь после того, когда сжимающие усилия превзойдут в них некоторое критическое значение. Для абсолютно гибких оболочек безмоментное напряженно - деформированное состояние является единственно возможным, поскольку они не обладают сопротивлением изгибу, в отличие от оболочек с конечной жесткостью, для которых такое напряженное состояние является только одним из возможных. При этом существование состояния конечной жесткости достигается при выполнении ряда условий, касающихся формы оболочки, характера действующей на нее нагрузки и закрепления краев. Если напряжения от моментов превосходят напряжения от усилий, то в оболочке могут появиться области безмоментного НДС, и его расчет потребует дополнительного рассмотрения. Характер упругого НДС определяется необходимостью удовлетворения граничным условиям. В случае безмоментного НДС граничные условия должны определяться на основании решения задачи теории оболочек в напряжениях. Если задать перемещения на границах оболочки, ее НДС определяется на основании задания вектора перемещений. При нормальной деформации происходит изменение формы поверхности. Получаемые при этом математические модели описываются системами дифференциальных уравнений разных порядков. К примеру, деформацию второго рода, определим одними только нормальными перемещениями $\omega = \omega(\alpha, \beta)$ прогибами оболочки в направлении нормалей к средней поверхности.

РЕЗЮМЕ

Проведено аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния тонких упругих оболочек. На основании которого можно сделать вывод, что оболочки с конечной жесткостью на изгиб, в отличие от абсолютно гибкой оболочки, может находиться в чистомоментном состоянии при наличии в них как растягивающих, так и сжимающих усилий. Она будет терять устойчивость лишь после того, когда сжимающие усилия превзойдут в них некоторое критическое значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Белов. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. / Н.Н. Белов, Д.Г. Компаница, О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов // Томск: СТТ, 2004.- 465с.
2. Bangash M. Y. H. Explosion-Resistant Building Structures / Design, Analysis, and Case Studies. // Bangash M. Y. H., Bangash T. Springer, Berlin, 2006. - 450 p.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек. – М.-Л.: Физматгиз, 1949. – 784 с.
4. Белкин А.Е., Гаврюшин С. С. Расчет пластин методом конечных элементов. – М., Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. – 232с.

SUMMARY

It is carried out analytical research of the is intense-deformed condition of thin elastic envelopes. On the basis of which it is possible to come to the conclusion, that envelopes with final rigidity on a bend, in difference from absolutely flexible envelope, can be in чистомоментном a condition at availability in them both stretching, and compressing efforts. It will lose stability only after when compressing efforts will surpass in them the some critical values.

Поступила в редакцию 12.09.2013

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕОДНОРОДНОСТИ НА СПЕКТР И ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПЛАСТИН.

Пронкевич С.А.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск.

Введение.

Большинство исследований собственных колебаний пластин посвящено исследованию прямоугольных или круглых пластин. В последнее время в связи с распространением пакетов конечно-элементных программ появилась возможность исследовать колебания пластин более сложной формы. В данной работе получен спектр и формы собственных колебаний правильных многоугольных пластин. Полученные значения форм и частот колебаний позволяют варьировать формой пластины и граничными условиями в зависимости от значений частот собственных колебаний.

Учет влияния неоднородности пластины рассмотрен на двух моделях. Первая модель учитывает неоднородность за счет перфорации. Сравниваются значения частот и форм собственных колебаний круглой пластины в зависимости от размера и положения отверстия.

Вторым вариантом неоднородности рассматривается влияние точечной массы на спектр и форму собственных колебаний пластины. Определяется влияние положения вдоль радиуса и величина сосредоточенной массы на значение частот собственных колебаний.

Рассмотрены особенности определения форм колебаний при моделировании с использованием программ, основанных на методе конечных элементов.

1. Определение частот и форм собственных колебаний правильных многоугольных пластин. Известно, что вид собственных форм колебаний определяется геометрией пластины, благодаря чему для круглой и прямоугольной пластин собственные формы легко указываются. Для пластин многоугольной даже правильной формы решение этой задачи неочевидно. Т.к. площадь пластины вписанного и описанного правильных многоугольников в пределе стремятся к площади круга, то согласно теореме, доказанной Вейлем и другими исследователями спектр собственных частот правильного многоугольника должен переходить непрерывно в спектр собственных частот круга и собственные колебания многоугольника в собственные колебания круга. Рассмотрим оценки погрешности приближения пластин в форме многоугольника круглыми пластинами (рисунок 1).

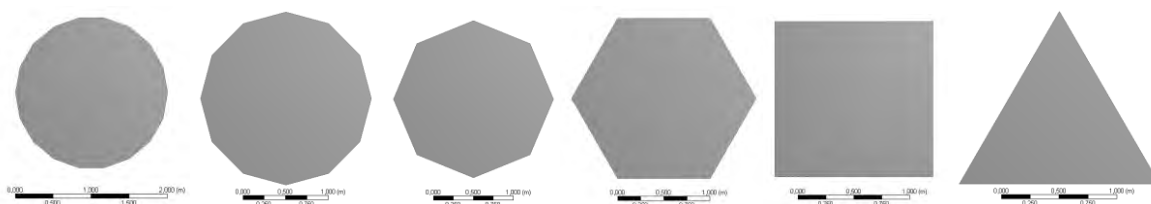


Рисунок 1. - Формы многоугольников, используемые при расчете.

Пусть пластина, выполненная в форме правильного N – угольника ($N=18, 12, 8, 6, 4, 3$), вписанного в круг единичного радиуса. Толщина составляет $th=0,01$ м, модуль Юнга $E=2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м³.

Пластина свободно оперта по своему контуру, т.е. на каждой грани должно выполняться граничное условие $\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} = 0$.

Аналитическое решение данной задачи можно привести только для случая $N=4$ [1]. Во всех же остальных случаях необходимо использовать численные методы для определения спектра частот и форм собственных колебаний. На рисунке 2 представлены формы колебаний N -угольных пластин, полученные в системе конечно-элементного моделирования ANSYS.

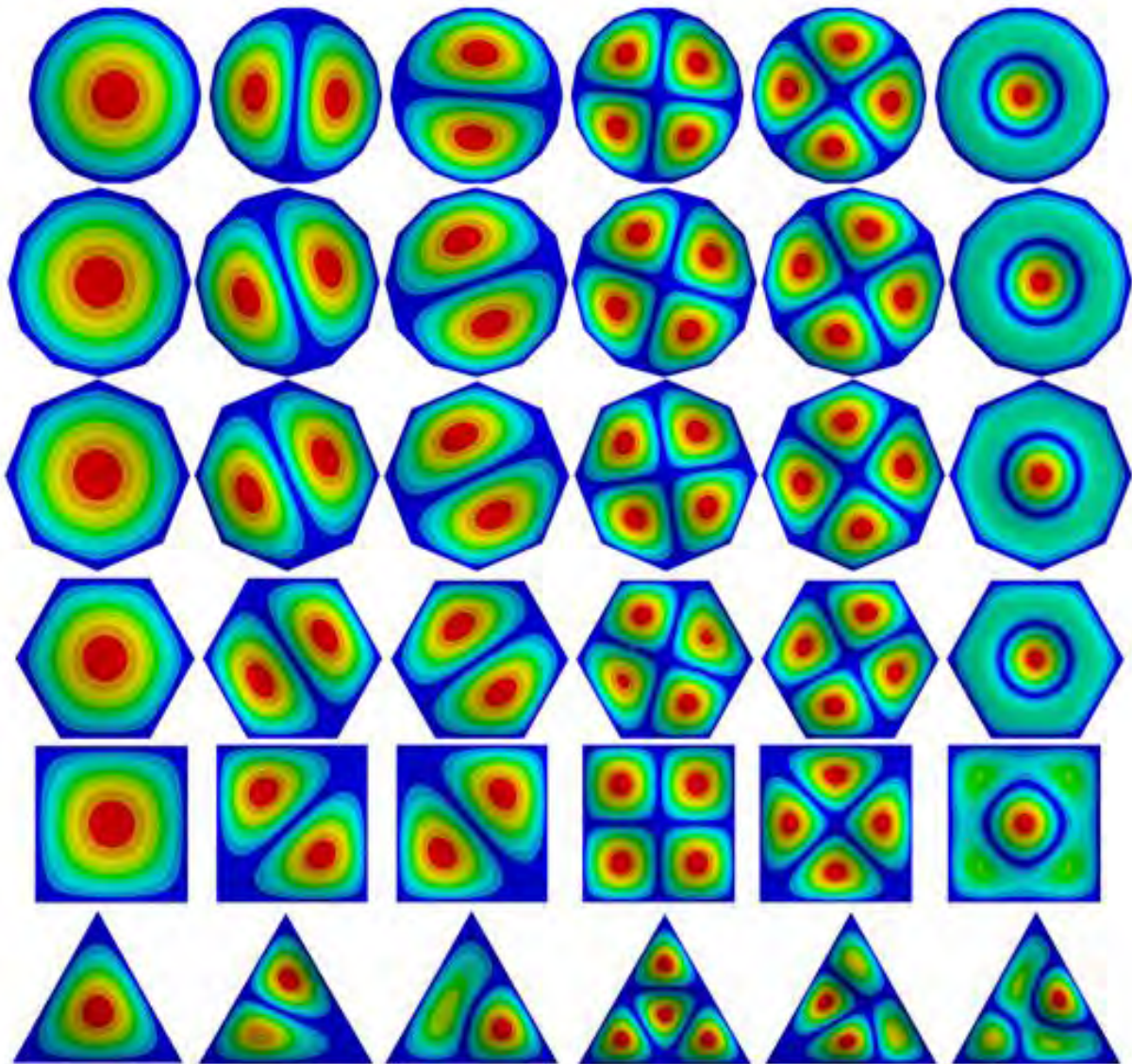
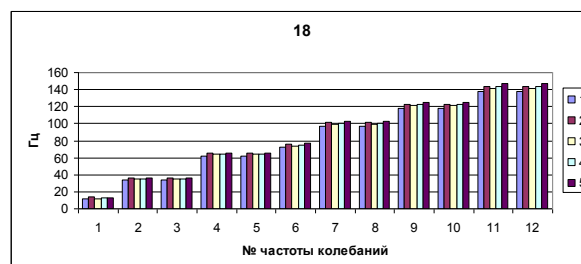


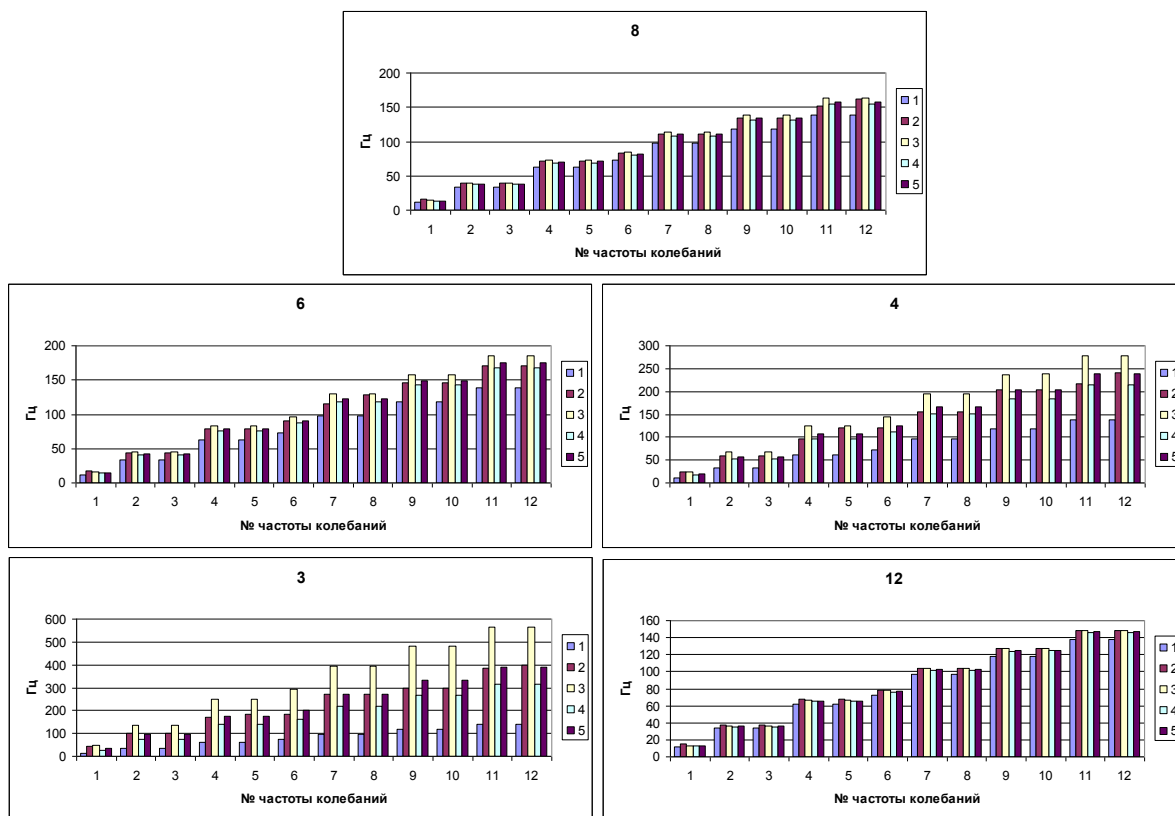
Рисунок 2. - Формы собственных колебаний пластин в форме правильных многоугольников

Как следует из рисунка 2, формы собственных колебаний пластин в форме правильных многоугольников визуально совпадают с формами собственных колебаний пластины в форме круга. Как и в случае форм собственных колебаний круглой пластины при расчете в системе ANSYS появляются дублирующие, практически совпадающие по значению, частоты и формы колебаний, повернутые на 90 градусов относительно исходной формы.

На рисунке 3 приведено сравнение значений частот собственных колебаний N-угольных пластин с частотами описанной и вписанной в них окружностями, а также эквивалентной окружности, радиус которой равен $\rho = (4r + R)/5$, где r – радиус вписанной в многоугольник окружности, R – радиус описанной окружности.

Из графиков видно, что наилучшее приближение многоугольника дает окружность, радиус которой равен $\rho = (4r + R)/5$





1 – описанная окружность, 2 – многоугольник, 3 – вписанная, 4 – радиус равен $\rho = (r + R) / 2$,
5 – радиус равен $\rho = (4r + R) / 5$

Рисунок 3. - Сравнения значений первых 12 частот собственных колебаний N-угольных пластин, а также вписанной, описанной и эквивалентной окружностей.

В таблице 1 приведено усредненное значение погрешности приближения многоугольной пластины круглой пластиной с радиусом описанной, вписанной и подобранной окружности.

Таблица 1 – Оценки погрешности приближения частот собственных колебаний многоугольных пластин частотами построенных окружностей.

Пластина	Описанная окружность, %	Вписанная окружность, %	Окружность радиуса $\rho = (4r + R) / 5$, %
18	5,04	1,97	2,1
12	8,08	1,92	2,99
8	12,82	3,37	2,52
6	19,99	6,4	3,34
4	41,59	17,40	6,13
3	64,5	43,81	6,28

Очевидно, что наилучшее приближение к частотам собственных колебаний многоугольной пластины дает пластина с радиусом $\rho = (4r + R) / 5$, погрешность которой не превышает 7%.

2. Влияние отверстия на частоту и форму собственных колебаний круглой пластины.

Рассмотрим круглую пластину единичного радиуса $R=1$ с отверстием радиусом $r=0,1..0,5R$ (рисунок 4)

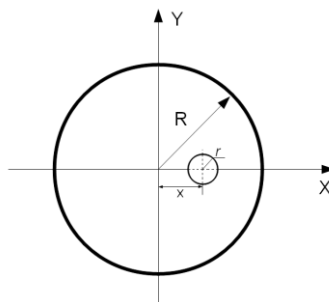


Рисунок 4. - Расчетная схема определения частот и форм собственных колебаний пластины с отверстием
Введем в рассмотрение отношение

$$N^* = \frac{N_x^d}{N_0} - \text{коэффициент колебаний неоднородной пластины,}$$

где N_x^d – критическая нагрузка для пластины, имеющей перфорацию с отношением диаметра к ширине пластины равным d ; N_0 – частота колебаний сплошной пластины.

Графики зависимости N^* от положения и размера отверстия показаны на рисунок 5

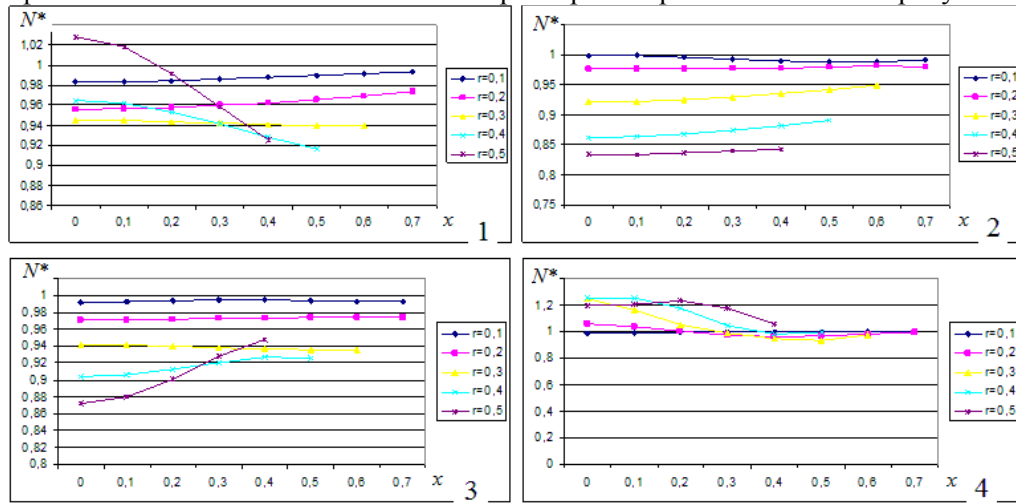


Рисунок 5. - Графики изменения N^* для первых четырех частот собственных колебаний круглой пластины с отверстием

На рисунке 6 показано изменение первых четырех форм колебаний при смещении отверстия $r=0,1R$ (а, б, в) и $r=0,4R$ (г, д, е) вдоль радиуса.

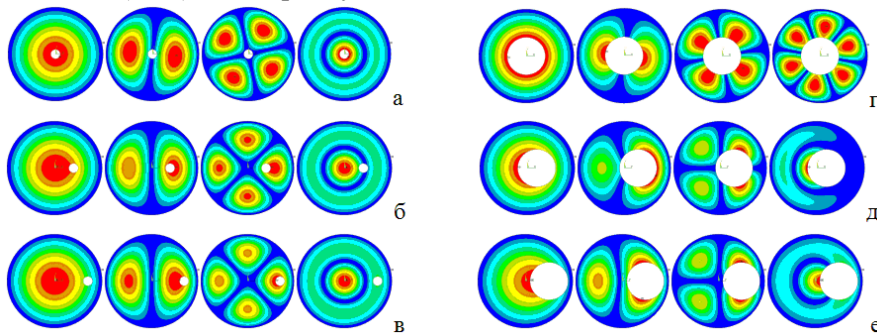


Рисунок 6. - Изменение первых четырех форм колебаний круглой пластины при изменении положения отверстия $r=0,1R$ (а, б, в) и $r=0,4R$ (г, д, е) вдоль радиуса при $x=0$ (а, г); $x=0,4R$ (б, д); $x=0,7R$ (в); $x=0,5R$ (е)

Как видно из графиков и рисунка 6 отверстия малого радиуса ($r=0,1R - 0,3R$) мало влияют на частоту собственных колебаний сплошной круглой пластины и не оказывают какого-либо значительного влияния на форму колебаний. Данное численное решение подтверждает полученные К.Г. Чижевским результаты [2]. Отличия наблюдаются для пластин с отверстием большого радиуса ($r \geq 0,4R$), при смещении его к краю пластины. Но и при этом формы колебаний в общих чертах повторяют форму колебаний пластины без отверстия.

3. Влияние сосредоточенной массы на частоту и форму собственных колебаний круглой пластины. Рассмотрим влияние сосредоточенной массы форму колебаний круглой пластины. Расположение сосредоточенной массы варьируется вдоль радиуса от $0R$ (центр пластины) до $0,8R$ (рисунок 7). Масса варьируется от 25% до 300% массы пластины.

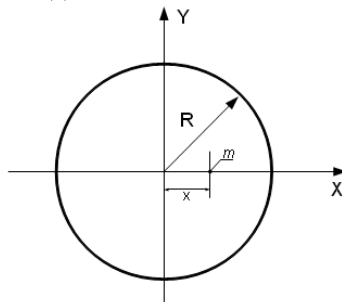


Рисунок 7. - Расчетная схема модели с сосредоточенной массой

Введем в рассмотрение отношение

$$N^{**} = \frac{N_x^m}{N_0} - \text{коэффициент колебаний неоднородной пластины,}$$

где N_x^m – критическая нагрузка для пластины, имеющей сосредоточенную массу m ; лежащую на расстоянии x от центра пластины; N_0 – частота колебаний сплошной пластины.

На рисунке 8 показаны графики зависимости N^{**} от величины массы и ее расположения.

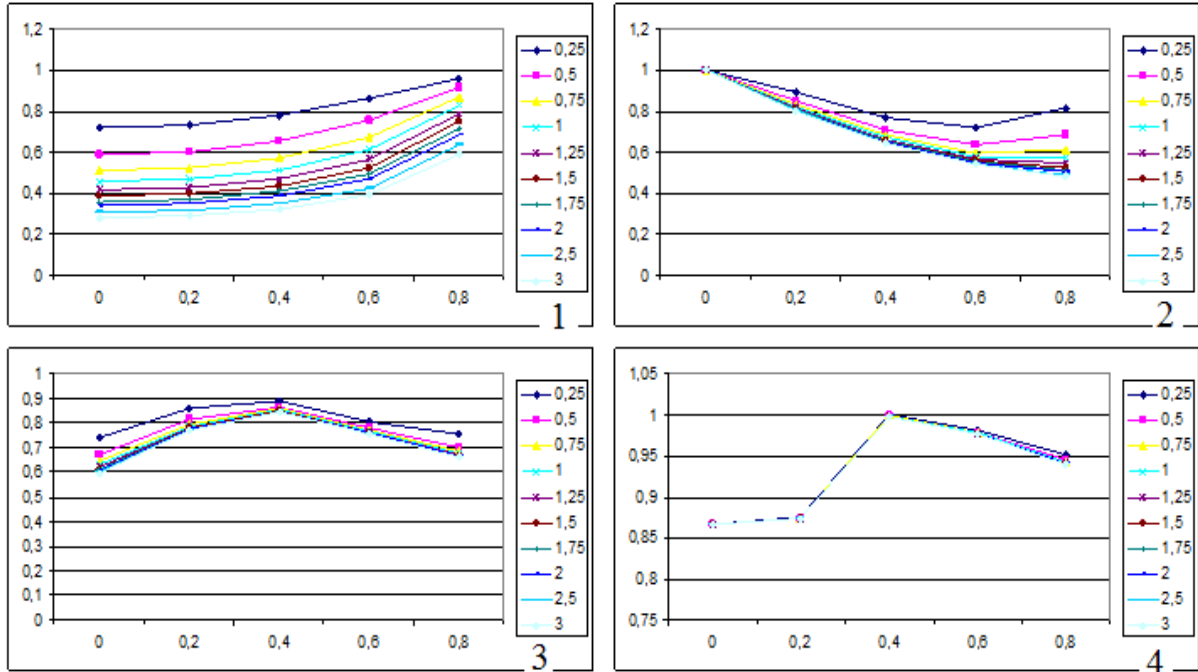


Рисунок 8. - Графики изменения первых четырех частот собственных колебаний круглой пластины с отверстием

На рисунке 9 показано изменение первых четырех форм собственных колебаний при смещении сосредоточенной массы вдоль радиуса. На рисунках 9а), 9б) и 9в) величина сосредоточенной массы составляет 25% от массы пластины, на рисунках 9г), 9д) и 9е) масса составляет 200% от массы пластины.

Как видно из рисунка 9, в случае сосредоточенной массы, расположенной в центре (9а и 9г), формы колебаний практически не отличаются от форм собственных колебаний круглой пластины при отсутствии сосредоточенной массы. Незначительное отличие наблюдается лишь в осесимметричном случае формы собственных колебаний, когда уменьшается амплитуда колебаний. Во всех же остальных случаях сосредоточенная масса, расположенная в центре пластины, находится на узловых линиях и не влияет на форму собственных колебаний, а лишь приводит к уменьшению частоты.

При сдвиге сосредоточенной массы вдоль радиуса наблюдается образование узловых линий в области приложения сосредоточенной массы (рисунок 9б, в, д, е).

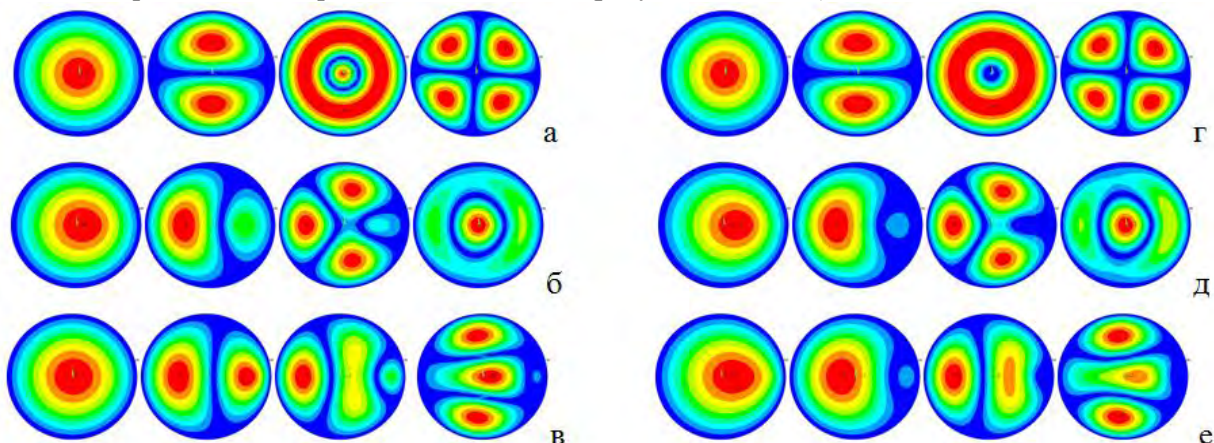


Рисунок 9. - Изменение первых четырех форм колебаний круглой пластины при изменении положения сосредоточенной массы в 25% (а, б, в) и 200% (г, д, е) от массы пластины вдоль радиуса при $x=0$ (а, г); $x=0,4R$ (б, д); $x=0,8R$ (в, е)

Выводы.

1. Формы собственных колебаний пластин в форме правильных многоугольников визуально совпадают с формами собственных колебаний пластины в форме круга. При численном определении частот собственных колебаний многоугольных пластин правильную многоугольную пластину можно принять за окружность с радиусом, равным $\rho = (4r + R)/5$.

2. Отверстия малого радиуса ($r=0,1R \div 0,3R$) мало влияют на частоту собственных колебаний сплошной круглой пластины и не оказывают какого-либо значительного влияния на форму колебаний. При этом частота собственных колебаний снижается по сравнению с соответствующими частотами сплошной пластины. Внесение отверстий большего радиуса ($r \geq 0,4R$) при смещении вдоль радиуса приводит к изменению форм колебаний и увеличению, начиная с четвертой, значений частот собственных колебаний.

3. При смещении сосредоточенной массы вдоль радиуса возникают несимметричные формы колебаний; в местах расположения сосредоточенной массы наблюдается возникновение узловых линий, не свойственных колебаниям пластины без сосредоточенной массы.

4. Расположение сосредоточенной массы в центре пластины приводит к изменению частот колебаний только для осесимметричной формы колебаний (в частности, первая и четвертая). Во всех остальных случаях сосредоточенная масса располагается на узловой линии и не приводит к изменению форм.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается динамика круглых пластин при наличии неоднородности в виде отверстия или сосредоточенной массы. Определяется влияние величины и положения неоднородности на частоты и формы собственных колебаний круглой пластины. Также рассматривается приближение частот и форм колебаний правильных многоугольных пластин круглыми пластинами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки / Биргер И.А. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, Москва: Наука, 1992. - 390 с.
2. Чижевский К. Г. Расчёт круглых и кольцевых пластин / К. Г. Чижевский Л: «Машиностроение» Ленинградское отделение, 1977. - 184 с.

SUMMARY

In this paper we consider the dynamics of circular plates in the presence of heterogeneity in the form of holes or concentrated mass. Determined by the influence of the size and position of heterogeneity in the frequency and form of natural oscillations of a circular plate. We also consider the approximation of frequencies and mode shapes of regular polygonal plates platters.

Поступила в редакцию 12.09.2013

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ ПРОНИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ НА РЕЛАКСАЦИЮ ПРИ СЖАТИИ

н.с. Гавриленко С.Л., к. т. н. Шилько С.В.

ГНУ «Институт механики металлополимерных систем НАН Беларуси им. В.А. Белого», Гомель

Введение. Полимерные материалы и композиты на их основе обладают выраженными реономными свойствами, что в процессе эксплуатации проявляется в постепенном накоплении деформаций ползучести и необратимом изменении геометрической формы элементов конструкций и деталей машин. Существующие аналитические решения, полученные в рамках теории вязкоупругости, пригодны для анализа деформирования элементов конструкций относительно простой конфигурации. С другой стороны, прикладные прочностные расчеты реальных конструкций методом конечных элементов, некритичным к геометрии деформируемой области, как правило, сводятся к упругому решению и не позволяют прогнозировать кинетику ползучести и релаксации.

Для получения корректного конечноэлементного решения вязкоупругих задач необходимо выполнить этап идентификации используемой реологической модели материала по имеющимся экспериментальным данным, полученным из испытаний стандартных образцов. В частности, в настоящей работе описана методика определения параметров вязкоупругой модели Прони на примере распространенного в технике полимерного материала Фторопласт-4.

Методика определения вязкоупругих констант материала. К настоящему времени для описания процессов ползучести и релаксации полимерных материалов отечественными и зарубежными исследователями предложен ряд вязкоупругих моделей [1-4]. Поскольку в распространенных программных продуктах конечноэлементного анализа, например, ANSYS, используется модель Прони, в целях определения реологических констант материала по результатам стандартных испытаний запишем определяющие соотношения указанной модели [5]:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t 2G(t-\tau) \frac{e_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau + \delta_{ij} \int_0^t K(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (1)$$

$$\text{здесь } G(\xi) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{-\frac{\xi}{\lambda_i^G}}, \quad K(\xi) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{-\frac{\xi}{\lambda_i^K}},$$

$$G(0) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i = \mu, \quad K(0) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i = K.$$

Согласно [2] имеем зависимости для упругих констант:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Далее вводим упрощающее предположение о постоянстве коэффициента Пуассона материала $\nu = \text{const}$. В этом случае имеют место следующие зависимости:

$$\begin{aligned} ER_E(t-\tau) &= 2(1+\nu)G'_\tau(t-\tau); \\ K'_\tau(t-\tau) &= \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}G'_\tau(t-\tau). \end{aligned}$$

Тогда соотношение (1) запишется в виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon(t) \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}(t) \right] - \frac{E}{1+\nu} \int_0^t R_E(t-\tau) \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon(\tau) \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}(\tau) \right] d\tau.$$

После математических преобразований получим аналитическую зависимость силы от времени в опыте на релаксацию при сжатии цилиндрического образца:

$$P(t) = E\varepsilon_0 S_0 \left(1 - \frac{2(1+\nu)}{E} \left(\sum_{i=1}^{n_G} G_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}} \right) \right) \right).$$

Апробация методики. Для определения по вышеизложенной методике вязкоупругих параметров полимерного материала Фторопласт-4 на машине Instron 5567 были проведены механические испытания стандартных цилиндрических образцов на кратковременную релаксацию при сжатии. Полученные зависимости приведенного усилия от времени для различных уровней деформации при модуле Юнга $E = 600$ МПа представлены на рисунке 1.

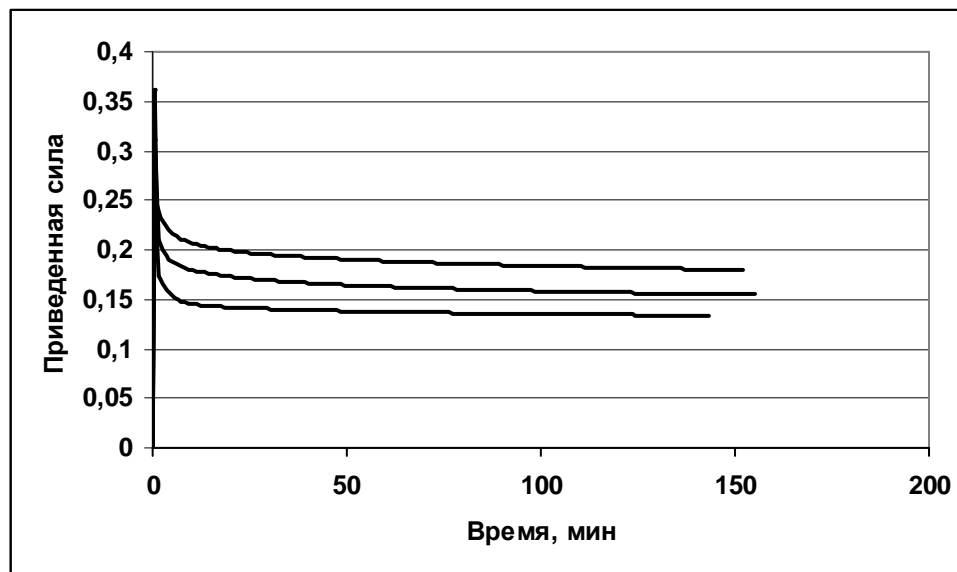


Рисунок 1. - Кривые приведенного усилия $\left(\frac{P(t)}{E\varepsilon S_0}\right)$ для материала Фторопласт-4.

Нижняя кривая соответствует $\varepsilon = -0,142$, срединная кривая – $\varepsilon = -0,111$, верхняя кривая – $\varepsilon = -0,079$. Расхождение не превышает 20 %.

Для вычисления параметров модели использовалась силовая характеристика при $\varepsilon = -0,111$ в виде 4-х пар значений времени и приведенной силы (таблица 1).

Таблица 1.

Значения приведенной силы для 4-х моментов времени

t_i , мин	1,36	20,36	80,36	100,36
$\frac{P}{E\varepsilon_0 S_0}$, $E=600$ МПа	0,210	0,172	0,160	0,158

Для квадратичного отклонения (невязки) Δ записывалось выражение:

$$\Delta = \sum_{i=1}^4 \left(P_{прив}^i - 1 + \frac{2(1+\nu)}{E} \left(\sum_{i=1}^{n_G} G_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda_i^G}} \right) \right) \right)$$

Минимизируя невязку, находим константы G_∞, G_1, λ_1 в зависимости от модуля Юнга в предположении известного коэффициента Пуассона (далее принято $\nu = 0,4$). Результаты для $n_G = 1$ представлены в Таблице 2.

Таблица 2.

Параметры функции сдвига в модели Прони ($n_G = 1$) в зависимости от модуля Юнга

E , МПа	150	200	250	300	400	500	600
G_∞ , МПа	35,1	35,2	35,1	34,9	34,8	35,2	34,6
G_1 , МПа	18,5	36,3	54,2	72,2	108,1	143,4	179,7
λ_1 , мин	2,2	1,0	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5

$\Delta_{\dot{\theta}_i}$, %	2,8	3,0	2,8	3,0	3,0	3,0	3,2
-------------------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Аналогично находим константы $G_\infty, G_1, G_2, \lambda_1, \lambda_2$ в зависимости от величины модуля Юнга при $n_G = 2$ (таблица 3).

Таблица 3.

Параметры функции сдвига в модели Прони ($n_G = 2$) в зависимости от модуля Юнга

E , МПа	150	200	250	300	400	500	600
G_∞ , МПа	34,5	34,5	34,5	34,4	34,4	34,6	34,4
G_1 , МПа	18,4	36,1	54,0	71,8	107,6	142,8	178,9
G_2 , МПа	0,641	0,851	0,830	0,947	0,894	1,22	1,01
λ_1 , мин	2,0	0,95	0,75	0,65	0,55	0,45	0,45
λ_2 , мин	40	40	40	50	50	30	50
$\Delta_{\dot{\theta}_i}$, %	2,0	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,4

Для моделирования напряженно-деформированного состояния цилиндрического образца из ПТФЭ при сжатии были проведены испытания со скоростью движения траверсы машины 5 мм/мин, 100 мм/мин, 300 мм/мин. Экспериментальные зависимости представлены на рисунках 2,3.

Для моделирования сжатия цилиндрического образца с различными скоростями движения траверсы найдены параметры модели Прони ($n_G = 1$), ($n_G = 2$) в зависимости от модуля Юнга при постоянном коэффициенте Пуассона ($\nu = 0,4$). По найденным значениям определены аналитические зависимости усилия от времени и вычислена средняя относительная погрешность при 3 различных скоростях нагружения. Результаты представлены в таблицах 4,5.

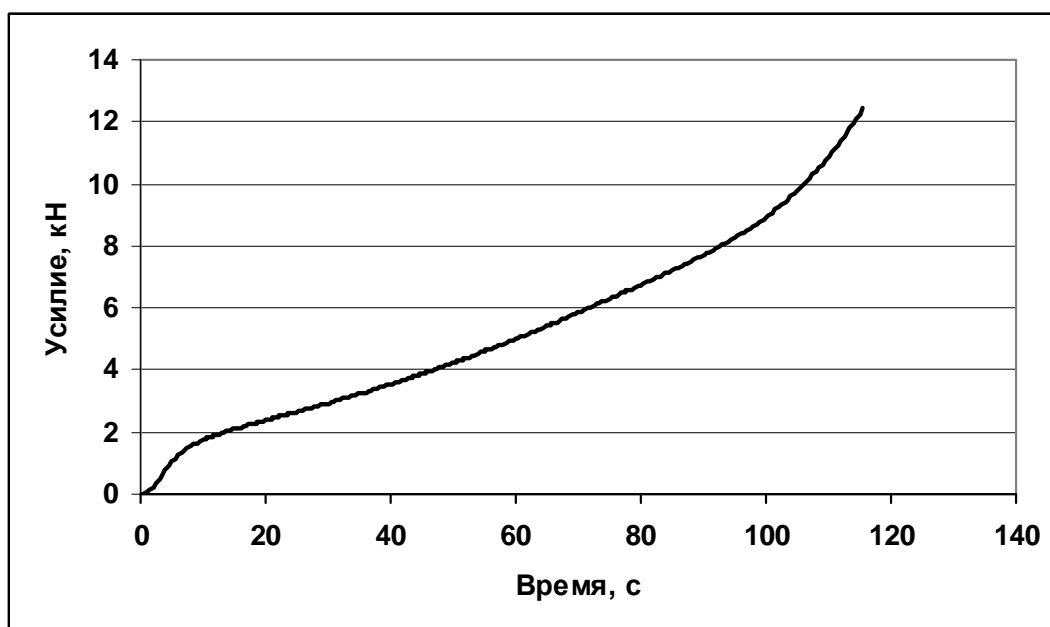


Рисунок 2. - Зависимости «Усилие (Н) – Время (мин)», полученные из испытаний на сжатие цилиндрического образца со скоростью 5 мм/мин.

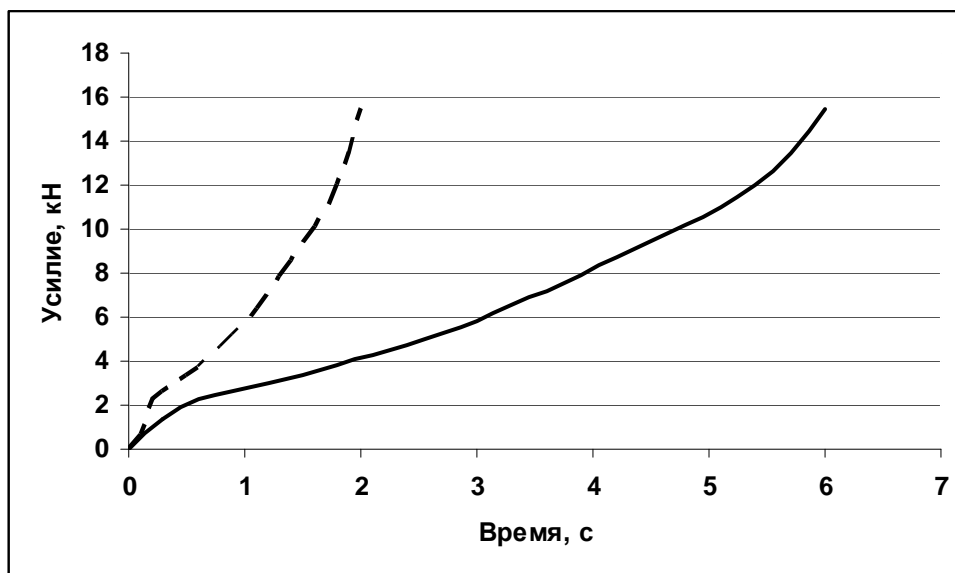


Рисунок 3. - Зависимость усилия от времени при сжатии со скоростью 100 мм/мин (сплошная линия) и 300 мм/мин (пунктирная линия).

Таблица 4.

Значения средней относительной погрешности определения усилия ($n_G = 1$) в зависимости от величины модуля Юнга.

E , МПа	150	200	250	300	400	500	600
$\Delta_{\text{иді}}$, %	25	47	74	101	158	213	272

Таблица 5.

Значения средней относительной погрешности определения усилия ($n_G = 2$) в зависимости от модуля Юнга.

E , МПа	150	200	250	300	400	500	600
$\Delta_{\text{иді}}$, %	26	48	73	100	164	210	268

Максимальное значение модуля Юнга при определении параметров вязкоупругой модели, взято априори достоверным (600 МПа), что было подтверждено значением средней относительной погрешности определения усилия, а его минимальное значение выбиралось из условия физической достоверности.

Результаты идентификации. При идентификации модели Прони ($n_G = 1$) для материала Фторопласт-4 при $E = 150$ МПа, $\nu = 0,4$ были получены следующие ядра объемной и сдвиговой релаксации соответственно:

$$K(\xi) = 163,7 + 86,3 \times e^{-\frac{\xi}{2,2}},$$

$$G(\xi) = 35,1 + 18,5 \times e^{-\frac{\xi}{2,2}}.$$

Здесь $K_\infty = 163,7$ МПа, $\hat{E}_1 = 86,3$ МПа, $\tau_1^K = 2,2$ мин, $G_\infty = 35,1$ МПа, $G_1 = 18,5$ МПа, $\tau_1^G = 2,2$ мин. Согласно описанию программы ANSYS [5], вводятся дополнительные параметры: $G_0 = G_\infty + G_1$, $K_0 = K_\infty + K_1$, $\alpha_1^G = \frac{G_1}{G_0}$, $\alpha_1^K = \frac{K_1}{K_0}$, которые для полученных данных равны

соответственно: $G_0 = 53,6$ МПа, $K_0 = 250$ МПа, $\alpha_1^G = 0,345$, $\alpha_1^K = 0,345$. К ним следует добавить упругие параметры: $E = 150$ МПа, $\nu = 0,4$.

При идентификации модели Прони ($n_G = 2$) для материала Фторопласт-4 были получены следующие ядра объемной и сдвиговой релаксации ($E = 150$ МПа, $\nu = 0,4$):

$$K(\xi) = 161,3 + 85,7 \times e^{-\frac{\xi}{2,0}} + 2,98 \times e^{-\frac{\xi}{40,0}},$$

$$G(\xi) = 34,5 + 18,4 \times e^{-\frac{\xi}{2,0}} + 0,641 \times e^{-\frac{\xi}{40,0}}.$$

Здесь $K_\infty = 161,3$ МПа, $\hat{E}_1 = 85,7$ МПа, $\hat{E}_2 = 2,98$ МПа, $\tau_1^K = 2,0$ мин, $\tau_2^K = 40,0$ мин, $G_\infty = 34,5$ МПа, $G_1 = 18,4$ МПа, $G_2 = 0,641$ МПа, $\tau_1^G = 2,0$ мин, $\tau_2^G = 40,0$ мин. Согласно описанию программного продукта ANSYS, вводятся дополнительные параметры: $G_0 = G_\infty + G_1 + G_2$, $K_0 = K_\infty + K_1 + K_2$, $\alpha_1^G = \frac{G_1}{G_0}$, $\alpha_2^G = \frac{G_2}{G_0}$, $\alpha_1^K = \frac{K_1}{K_0}$, $\alpha_2^K = \frac{K_2}{K_0}$, которые для полученных исходных данных принимают следующие значения: $G_0 = 53,6$ МПа, $K_0 = 250$ МПа, $\alpha_1^G = 0,343$, $\alpha_2^G = 0,012$, $\alpha_1^K = 0,343$, $\alpha_2^K = 0,012$.

Заключение. Представленная методика идентификации может быть использована в инженерных расчетах для определения области применимости и значений параметров вязкоупругой модели Прони. Для полимерного материала Фторопласт-4 выполнено моделирование одноосного сжатия и определена область применимости модели Прони с погрешностью, не превышающей 25 %. Параметры упругой модели, полученные при идентификации модели Прони, соответствуют параметрам, полученным из одноосных испытаний и рассчитанным по известным методикам определения модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

РЕЗЮМЕ

Представлена методика идентификации вязкоупругой модели Прони в предположении постоянства коэффициента Пуассона. По результатам испытаний полимерного материала Фторопласт-4 на релаксацию при сжатии получена оценка точности линейной модели. Установлено, что методика является устойчивой к вариации экспериментальных данных без использования процедуры регуляризации. Проведена верификация предложенной вязкоупругой модели на основании соотношений Прони с оценкой погрешности входных данных

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравчук А.С. Механика полимерных и композиционных материалов: учебное пособие / А.С. Кравчук, В.П. Майборода, Ю.С. Уржумцев – М.: Наука, 1985. – 303 с.
2. Старовойтов Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости: учебное пособие / Э.И. Старовойтов – Гомель: Белгут, 2001. – 344 с.
3. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация: учебное пособие / М.А. Колтунов – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.
4. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости: учебное пособие / Р. Кристенсен – М.: Мир, 1974. – 340 с.
5. ANSYS Revision 10-12.

SUMMARY

This papers considers the problem of identification technique of Prony's viscoelastic model for constant Poisson's on relaxation under compression for polymer material Ftoroplast-4.

Поступила в редакцию 24.10.2013

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Шукевич Т.В., д. ф.-м. н. Чигарев А.В.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Рассмотрим упругую неоднородную среду, находящуюся в начальном напряженном докритическом состоянии. В момент времени $t=0$ на некоторой поверхности Σ_0 возникает скачок напряжений от σ^0 до 0, связанный с образованием микротрещины (микropоры), который для $t>0$ распространяется в виде волны (волна разгрузки). Поверхность Σ_0 - свободная поверхность образовавшейся трещины.

Под волной скачка напряжений понимается изолированная однопараметрическая поверхность $\Sigma(t)$, распространяющаяся в среде, на которой перемещения непрерывны, а напряжения, скорости перемещений и начальные напряжения терпят разрыв. Параметры $\lambda(\bar{x})$, $\mu(\bar{x})$ и их градиенты непрерывны, плотность $\rho(\bar{x})$ может терпеть разрыв.

Распространение волн описывается соотношениями[1]:

$$\sigma_{im,i} - u_{m,ni}\sigma_{in}^0 - u_{m,n}\sigma_{in,i}^0 = \rho \frac{dv}{dt} \quad (m \neq n), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda(\bar{x})u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(\bar{x})(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

где σ_{in} - компоненты тензора напряжений; u_i - перемещения; σ_{in}^0 - компоненты тензора начальных напряжений.

На волновой поверхности $\Sigma(t)$ с учетом начальных напряжений должны выполняться:

1) геометрические условия совместности

$$\left(\frac{\partial z}{\partial a^k} \right) = B v_k + g^{\alpha\beta} \frac{\partial [z]}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial a^k}{\partial u^\beta}, \quad B \equiv \left[\frac{\partial z}{\partial a^i} \right] v^i, \quad (3)$$

где $[z] \equiv z_2 - z_1$ (z_1, z_2 - значения величин, характеризующих состояние среды по обе стороны от фронта), a^k - координаты фронта волны, v_k - ковариантные компоненты внешней единичной нормали в метрике пространства $a^1 a^2 a^3$ перед волной, $g^{\alpha\beta}$ - компоненты метрического тензора внутренней геометрии фронта волны, u^α, u^β - криволинейные координаты внутренней геометрии фронта волны;

2) кинематические условия совместности первого порядка

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) + GB = \frac{\delta [z]}{\delta t}, \quad (4)$$

где G - нормальная скорость движения поверхности; символ $\delta / \delta t$ означает изменение вдоль луча;

3) динамические условия совместности, которые определяют изменение количества движения на $\Sigma(t)$

$$\rho G = \rho^+ (G - v_n^+), \quad (5)$$

$$[\sigma_{im}] \cdot v^i = -\rho G [v_m] - G^{-1} [v_m \sigma_{in}^0] \cdot v^i \cdot v^n = \rho^+ G v_m^+ - G^{-1} v_m^+ [\sigma_{in}^0] \cdot v^i \cdot v^n, \quad (6)$$

где v^i - компоненты единичной нормали к поверхности $\Sigma(t)$; ρ^+, v^+ - значение плотности и компонент скорости на передней стороне поверхности $\Sigma(t)$. Скобки $[f]$ обозначают разность значений функции f на разных сторонах поверхности $\Sigma(t)$.

Продифференцировав (1) по времени и записав его в разрывах с учетом динамических соотношений (5), (6) и условий совместности первого порядка на поверхности $\Sigma(t)$, получим

$$(\lambda + \mu)[v_k] \cdot v^k v^m + \mu[v_m] - [v_m \sigma_{in}^0] v^i v^n = \rho G^2 [v_m]. \quad (7)$$

Предполагая $[v_k] \cdot v^k \neq 0$ на поверхности $\Sigma(t)$, умножим (5) на v_m и просуммируем по повторяющемуся индексу, получим

$$\rho G_l^2 = \lambda + 2\mu - [\sigma_{in}^0] \cdot v^i \cdot v^n. \quad (8)$$

С другой стороны, если $[v_k] \cdot v^k = 0$ на $\Sigma(t)$, то из соотношений (7) следует

$$\rho G_t^2 = \mu - [\sigma_{in}^0] \cdot v^i \cdot v^n. \quad (9)$$

Таким образом, в рассматриваемой неоднородной упругой среде с начальными напряжениями существует два типа волн: безвихревые (7) и эквиволноминальные (9), которые в каждой точке среды имеют скорости продольных и поперечных волн.

Записывая закон Гука (2) и уравнения движения (1) в разрывах с учетом условий совместности первого и второго порядков [2], получим дифференциальное уравнение для изменения интенсивности распространения волн

$$\frac{d \ln \omega^p}{ds} = \Omega_p - \frac{1}{2} \frac{d \ln G_p}{ds} + (\rho G_p^2)^{-1} [\sigma_{in}^0] \cdot v^i \cdot v^n \cdot \Omega_p \quad (p = l, t), \quad (10)$$

где s – расстояние вдоль траектории луча; Ω_p – средняя кривизна волны; $[v_i] \cdot v^i = \omega$.

Для общих случаев, в которых средняя кривизна $\Omega_p(\bar{s})$ изменяется в процессе распространения поверхности $\Sigma(t)$, уравнения (10) являются не замкнутыми. Для замыкания уравнений (10) необходимо получить уравнения средней кривизны $\Omega_p(\bar{s})$.

Средняя кривизна Ω связана с первой $g^{\alpha\beta}$ и второй $b_{\alpha\beta}$ квадратичными формами поверхности $\Sigma(t)$ соотношением [3]

$$2\Omega = b_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (11)$$

Проведя δ -дифференцирование по времени в соотношении (4.2.11) и учитывая, что параметры внутренней геометрии волновых поверхностей удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial s} &= -2b_{\alpha\beta}; \quad \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial s} = 2b^{\alpha\beta}; \\ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial s} &= (\gamma_p c_p)_{,\alpha\beta} + \ln(\gamma_p c_p)_{,\alpha} \cdot \ln(\gamma_p c_p)_{,\beta} - g^{\eta\delta} b_{\alpha\eta} b_{\beta\delta}; \\ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial s} &= g^{\alpha\eta} g^{\beta\delta} (\ln(\gamma_p c_p)_{,\eta\delta} + \ln(\gamma_p c_p)_{,\eta} \ln(\gamma_p c_p)_{,\delta}) + 3g_{\eta\delta} b^{\alpha\eta} b^{\beta\delta}; \\ \gamma_p &= (1 - \lambda_p)^{1/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

получим уравнение для средней кривизны в виде

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = 2\Omega^2 - K + \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 - R_1), \quad (13)$$

где K – гауссова кривизна поверхности, которая находится из формулы

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 2\Omega K + 2\Omega(Q_1 - Q_2 - R_1) - P_1 + P_2 + R_2. \quad (14)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} Q_1 &= (c_p \gamma_p^2)^{-1} g^{\alpha\beta} c_{p,\alpha\beta}; \quad Q_2 = (c_p \gamma_p^2)^{-1} g^{\alpha\beta} \lambda_p^{1/2} (\lambda_p^{1/2} c_p)_{,\alpha\beta}; \\ R_1 &= \gamma_p^{-4} g^{\alpha\beta} \lambda_p (\ln \lambda_p^{1/2})_{,\alpha} (\ln \lambda_p^{1/2})_{,\beta}; \quad P_1 = (c_p \gamma_p^2)^{-1} b^{\alpha\beta} c_{p,\alpha\beta}; \\ P_2 &= (c_p \gamma_p^2)^{-1} b^{\alpha\beta} \lambda_p^{1/2} (\lambda_p^{1/2} c_p)_{,\alpha\beta}; \quad c_p^2 = \Lambda_p \rho^{-1}; \\ R_2 &= \gamma_p^{-4} b^{\alpha\beta} \lambda_p (\ln \lambda_p^{1/2})_{,\alpha} (\ln \lambda_p^{1/2})_{,\beta}; \\ \Lambda_l &= \lambda + 2\mu; \quad \Lambda_t = \mu; \quad \lambda_p = [\sigma_{in}^0] v_i v_n \Lambda_p^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

В уравнения (13), (14), определяющие изменение средней и гауссовой кривизн волновой поверхности $\Sigma(t)$ в упругой среде с начальными напряжениями с переменной скоростью $G_p = c_p (1 - \lambda_p)^{1/2}$ вдоль луча, входят члены $g^{\alpha\beta} c_{p,\alpha\beta}$; $b^{\alpha\beta} c_{p,\alpha\beta}$, являющиеся инвариантами поверх-

ности $\Sigma(t)$. Первый называется дифференциальным параметром Бельтрами и связан с кривизной луча, а второй зависит еще и от кручения луча.

Уравнение лучей определяются из принципа минимума функционала Ферма [4] и имеют вид

$$\frac{\partial v^i}{\partial s} = -(\ln G)_{,\alpha} g^{\alpha\beta} x_\beta^j; \quad \frac{\partial x^i}{\partial s} = v^i. \quad (16)$$

Вектор $\{x_\beta^i\} = \bar{t}_\beta$, касательный к поверхности $\Sigma(t)$, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \bar{t}_\alpha}{\partial s} = (\ln c_p \gamma_p)_{,\alpha} \bar{v} - g^{\delta\gamma} b_{\delta\alpha} \bar{t}_\gamma. \quad (17)$$

Рассмотрим несколько случаев изменения параметров внутренней геометрии поверхности волны.

1. Плоская волна

Рассмотрим упругую неоднородную среду, в которой скорость распространения волны равна $G(\bar{x})$, плотность ρ и начальные напряжения σ_{ij}^0 . В момент времени $t=0$ происходит разгрузка. Волна разгрузки распространяется вдоль оси Ox .

Для случая плоской волны $\Omega_p = 0$, тогда из уравнения (10) следует

$$\frac{\partial \omega^l}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln(G(\bar{x})) \cdot \omega^l, \quad (18)$$

Из уравнения (4.2.16) находим зависимость интенсивности волны от скорости:

$$\frac{\omega^l}{\omega_0^l} = \left(\frac{G(x)}{G_0} \right)^{-1/2}, \quad (19)$$

где ω_0^l , G_0 - значения функций ω^l , $G(x)$ при $x=x_0$.

Рассмотрим случай неоднородности для функции распространения волны:

$$\frac{G(x)}{G_0} = \frac{x}{x_0}. \quad (20)$$

Начальная скорость распространения волны G_0 принимает следующие значения: а)1, б)10, с)100, д)1000.

На рисунке 1 приведена зависимость интенсивности волны от переменной x при различных начальных скоростях распространения волны

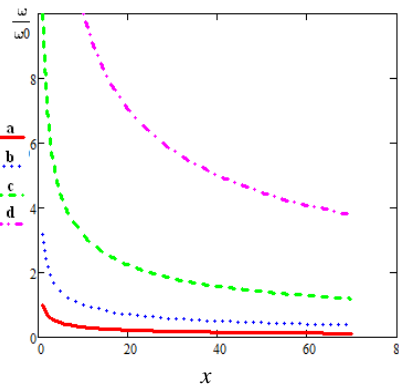


Рисунок 1 - Зависимость интенсивности плоской волны ω / ω_0 , распространяющейся перпендикулярно слоям в микрослоистой среде от переменной x

2. Сферическая волна

Пусть в бесконечном неоднородном пространстве имеется сферическая полость радиуса r_0 , находящаяся в начальном напряженном состоянии σ_{ij}^0 , плотность среды - ρ .

Скорость распространения волны в среде примем равной $G_p = G_0 - a \cdot t$, где a – постоянное ускорение.

Для случая сферической волны $\Omega_p = -\frac{1}{2(r_0 + G_p \cdot t)}$, тогда из уравнения (10) следует

$$\frac{\partial \ln \omega^p}{\partial r} = \Omega_p - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln G_p}{\partial r} + (\rho G_p^2)^{-1} [\sigma_{ij}^0] \cdot v^i \cdot v^j \cdot \Omega_p, \quad (21)$$

Из уравнения (10) находим зависимость интенсивности волны от скорости:

$$\frac{\omega^l}{\omega_0^l} = \left(\frac{G_p}{G_o} \right)^{\frac{1}{2}} + e^{\int_{r_0}^r \Omega_p dr} + e^{\frac{[\sigma_{ij}^0] v^i v^j}{\rho} \int_{r_0}^r \frac{\Omega_p}{G_p^2} dr}, \quad (22)$$

где ω_0^l , - значения функции ω^l при $r=r_0$.

Перейдем в выражении для интенсивности (22) от переменной r к переменной t

$$\frac{\omega^l}{\omega_0^l} = \left(\frac{G_p}{G_o} \right)^{\frac{1}{2}} + e^{\int_{G_p}^t \Omega_p dt} + e^{\frac{[\sigma_{ij}^0] v^i v^j}{\rho} \int_{G_p}^t \frac{\Omega_p}{G_p} dt}, \quad (23)$$

где ω_0^l , G_o - значения функции ω^l , G_p при $t=t_0$.

Начальная скорость распространения волны G_0 принимает следующие значения: а)1, б)10, с)100, д)1000.

Зависимость интенсивности сферической волны от переменной t при различных скоростях распространения волны представлена на рисунке 2.

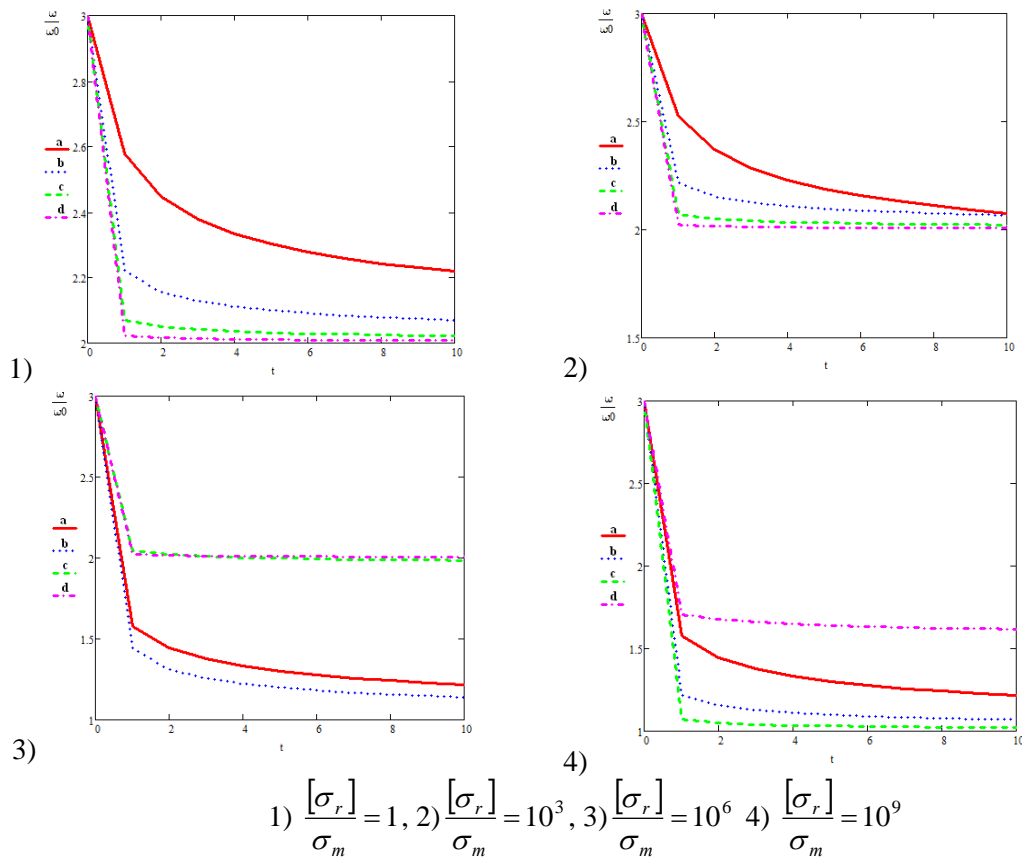


Рисунок 2 - Зависимость интенсивности сферической волны ω / ω_0 от переменной t

3 Цилиндрическая волна

Для случая цилиндрической волны $\Omega_p = -\frac{1}{r_0 + 2G_p \cdot t}$, тогда согласно уравнению (23) полу-

чим следующие зависимости для интенсивности волны.

Начальная скорость распространения волны G_0 принимает следующие значения: а)1, б)10, с)100, д)1000.

Зависимость интенсивности цилиндрической волны от переменной t при различных скоростях распространения волны представлена на рисунке 3.

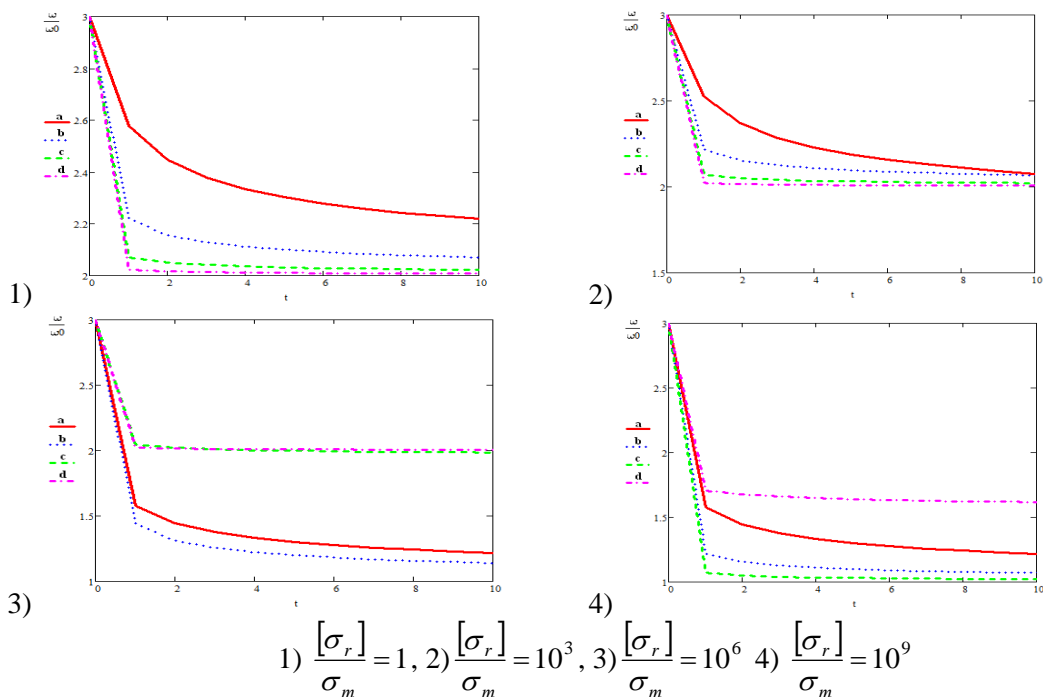


Рисунок 3 - Зависимость интенсивности цилиндрической волны ω/ω_0 от переменной t

Полученная система уравнений (10), (12) - (17) определяет изменение интенсивности волны в неоднородной упругой среде с начальными напряжениями в зависимости от параметров внутренней геометрии фронта волны. Следовательно, изменение начального напряженного состояния позволяет управлять направлением распространения лучей и параметрами внутренней геометрии фронта волны, а полученная зависимость интенсивности волны от неоднородности (через скорость) и начальных напряжений дает возможность оценить величину совместного и раздельного влияния неоднородности и начальных напряжений на интенсивность.

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрена упругая неоднородная среда, находящаяся в начальном напряженном докритическом состоянии. В момент времени $t=0$ на некоторой поверхности возникает скачок напряжений от σ^0 до 0, связанный с образованием микротрещины (микropоры), который для $t>0$ распространяется в виде волны (волна разгрузки). Определена интенсивность волны разгрузки, в зависимости от параметров внутренней геометрии фронта волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Payton R.G. Elastic wave propagation in homogeneous - rod. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1966.- 91c.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями.— Киев.: Наук. думка, 1986.-535 с.
3. Чигарев А.В. К геометрии волновых фронтов в неоднородных средах.- Акуст. журнал, 1980. – 912 с.
4. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. - Мн: УП «Технопринт», - 2000. – 426 с.

SUMMARY

The article considers the heterogeneous elastic medium in the initial voltage sub-critical. At time $t = 0$ on the surface there is a surge of σ^0 to 0, associated with the formation of cracks (microvoids) that for $t > 0$ applies to the form of waves (wave discharge). Defined wave intensity discharge, depending on the parameters of the internal geometry of the wave front.

Поступила в редакцию 04.10.2013

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ КОНСОЛИДАЦИИ СОЛЕННЫХ ГРУНТОВ

к. ф.-м. н. Алтынбеков Ш.А.

Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, г. Шымкент

Введение. В строительстве промышленных, гражданских и гидротехнических сооружений, как известно, возникают задачи о прочности и увеличения срока эксплуатации этих сооружений. Решение этих задач во многом зависит от правильной оценки и определений осадки грунтовых оснований во времени, обусловленной консолидацией грунтов.

В настоящее время теория фильтрационной консолидации многокомпонентных грунтов, основанная на модели К.Терцаги-В.А.Флорина, признана достаточно разработанной. Однако, несмотря на это, в этой области исследования достаточно много нерешенных вопросов. Один из них, процесс осадки соленых грунтов недостаточно изучен. А ведь некоторые области Молдавии, России, Украины, Средней Азии и Казахстана состоят из соленых грунтов. Этот вопрос в свое время поднял академик НАН РК Ш.М.Айтиалиев.

В данной работе приводится решение поставленной проблемы. Получено основное уравнение и сформулирована математическая постановка начально-краевой задачи консолидации соленых грунтов, исследованы свойства и решение этой задачи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим процесс уплотнения соленых грунтов в виде параллелепипеда под действием распределенной нагрузки q , приложенной к части наружной площади (рисунок 1).

Для изучения этого процесса допустим:

- Соленый грунт состоит из твердой, жидкой и газообразной фаз.
- Движение жидкости, заполняющей поры грунта, достаточно хорошо согласуется с обобщенным законом Дарси-Герсеванова.
- Растворимость газа подчинена закону Генри.
- Растворенная соль (солевой раствор) движется с водой, а пена газа и нерастворенная соль движется с твердой фазой.
- НДС скелета соленого грунта описывается уравнением вида [1]

$$\varepsilon(t) = \alpha_1 - \frac{1}{1 + (n-1)\alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}} \times$$

$$\times \left\{ (\alpha_4 + \alpha_5 e^{-\alpha_6 x_3}) a_0(t + \rho(x), \theta(t)) \theta(t) - \int_{\tau_1}^t \theta(\tau) K(t + \rho(x), \tau + \rho(x), x, \theta(\tau)) d\tau \right\}, \quad (1)$$

$$K(t + \rho(x), \tau + \rho(x), x, \theta(\tau)) = (\alpha_4 + \alpha_5 e^{-\alpha_6 x_3}) \cdot \frac{\partial a_0(\tau + \rho(x), \theta(\tau))}{\partial \tau} +$$

$$+ (\alpha_{12} + \alpha_{13} e^{-\alpha_{14} x_3}) \cdot \frac{f(\tau + \rho(x), \theta(\tau))}{\theta(\tau)} \cdot \frac{\partial C(t + \rho(x), \tau + \rho(x), \theta(\tau))}{\partial \tau}. \quad (2)$$

Здесь $a_0(t, x, \rho(x), \theta(t))$, $f(\tau + \rho(x), \theta(\tau))$ и $C(t + \rho(x), \tau + \rho(x), \theta(\tau))$ – функции, характеризующие физико-механические свойства грунта.

Функция $\rho(x)$, характеризующая закон изменения возраста материала в зависимости от координат, аппроксимирована в виде [2]

$$\rho(x) = \rho(x_n) = \tau_1(x_n(\tau)) - \tau_1(0) = \frac{\alpha_{39}}{h \frac{\tau_{\max} - \tau}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} - \alpha_{40}} + \frac{\alpha_{39}}{\alpha_{40}}; \quad (3)$$

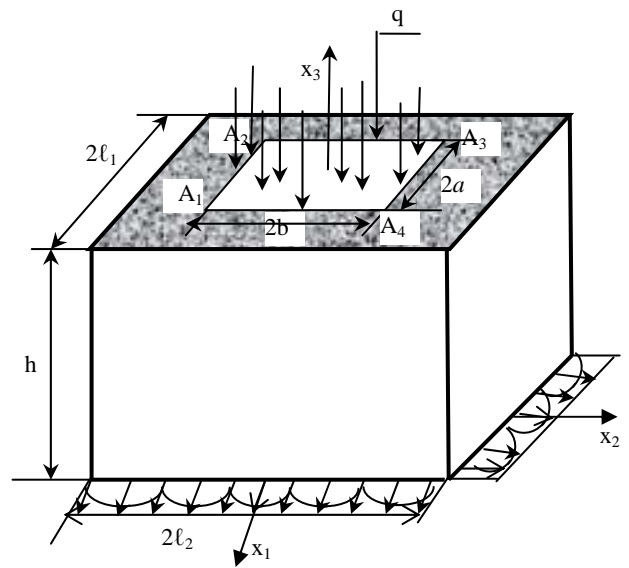


Рисунок 1

$$x_n(\tau) = h \frac{\tau_{\max} - \tau}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau = \tau_{\max}, \\ h & \text{при } \tau = \tau_{\min}, \end{cases}$$

$$\rho(x_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau = \tau_{\max}, \\ \frac{\alpha_{39}}{h - \alpha_{40}} + \frac{\alpha_{39}}{\alpha_{40}} & \text{при } \tau = \tau_{\min}, \alpha_{39} \geq 1, 0 < \alpha_{40} < h; \end{cases}$$

$$\rho(x) = \rho(x_n) = \tau_1(x_n(\tau)) - \tau_1(0) = \frac{\alpha_{39}}{h \frac{e^{\tau_{\max}} - e^{\tau}}{e^{\tau_{\max}} - e^{\tau_{\min}}} - \alpha_{40}} + \frac{\alpha_{39}}{\alpha_{40}}; \quad (4)$$

$$x_n(\tau) = h \frac{e^{\tau_{\max}} - e^{\tau}}{e^{\tau_{\max}} - e^{\tau_{\min}}} = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau = \tau_{\max}, \\ h & \text{при } \tau = \tau_{\min}, \alpha_{40} \geq 1, 0 < \alpha_{43} < h. \end{cases}$$

• Соленые грунты по водопроницаемости являются анизотропной средой. При этом коэффициент фильтрации может быть аппроксимирован функцией вида [3]

$$K(\varepsilon(t)) = K_0 \left(\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon_k}{\varepsilon_0 - \varepsilon_k} \right)^{n_k}, \quad n_k \geq 1, \quad (5)$$

где $K_0, \varepsilon_0, \varepsilon_k$ и n_k – опытные данные.

• Процесс уплотнения соленых грунтов подчинен модели К.Терцаги - В.А.Флорина [4,5].

• Во всех поверхностях консолидируемого слоя грунта (рисунок 1) происходит свободный водообмен с окружающей средой.

Тогда, присоединяя к (1) основное уравнение консолидации соленых грунтов [6]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \beta_v(\varepsilon, H)(3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1)\gamma \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$(3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1) \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(K_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(K_2 \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_3 \frac{\partial H}{\partial x_3} \right) \right\}$$

и гипотезы В.А.Флорина [5]

$$\theta(t) = n\gamma \left\{ \left(\frac{\theta^*}{n\gamma} + H^* \right) - H \right\},$$

нетрудно задать начально-краевую задачу в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_{vm}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)L(H) - C_{1n}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H) \times$$

$$\times \left\{ \int_{\tau_1}^t f(\tau + \rho(x), \theta^*, H^*, H) \cdot K_1(x, t + \rho(x), \tau + \rho(x), \theta^*, H^*, H) d\tau + \right.$$

$$\left. + f(t + \rho(x), \theta^*, H^*, H) \cdot K_2(x, t + \rho(x), t + \rho(x), \theta^*, H^*, H) \right\} +$$

$$+ C_{2n}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H) = -\tilde{L}(H); \quad (6)$$

$$H(x, \tau_1) = H_0(x), \quad x \in D; \quad (7)$$

$$\pm \chi_s^{(\alpha)} \frac{\partial H}{\partial n} + \chi_s^{(\alpha+1)} H \Big|_{\Gamma} = \psi(x, t) \Big|_{\Gamma}, \quad (x, t) \in D \times [\tau, T], \quad (8)$$

Где

$$K_1(x, t + \rho(x), \tau + \rho(x), \theta^*, H^*, H) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial C(x, t + \rho(x), \tau + \rho(x), \theta^*, H^*, H)}{\partial \tau} \right), \quad (9)$$

$$K_2(x, t + \rho(x), t + \rho(x), \theta^*, H^*, H) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial C(x, t + \rho(x), \tau + \rho(x), \theta^*, H^*, H)}{\partial \tau} \right) \Big|_{\tau=t}, \quad (10)$$

$$L(H) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_s} \left(K_{\phi_s}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H) \frac{\partial H}{\partial x_s} \right). \quad (11)$$

Вид функций $C_{vn}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $C_{ln}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $f(t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $C_{2n}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $C(x, t + \rho(x), \tau + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $K_{\Phi S}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$ в (6), (9), (10) и (11) обусловлен зависимостями (1), (2), ... (4) и коэффициента объемной сжимаемости [6]

$$\beta_v(\varepsilon, H) = \frac{2 - \eta^* - \mu_1 + \mu\varepsilon}{3 + \varepsilon - \eta^* - \mu_1} \cdot \frac{1}{\gamma(H - x_3 - H_0)}.$$

Здесь: θ_0^* и H_0^* обозначают сумму главных напряжений в скелете грунта и напоров поровой жидкости, соответствующие граничным значениям непосредственно после приложения нагрузки в предположении мгновенной стабилизации; μ – растворимость газа; η^* – коэффициент водонасыщенности уплотняемой среды ($\eta^* = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu = 0$); μ_1 – коэффициент растворимости соли ($0 \leq \mu_1 \leq 1$); γ – удельный вес жидкой солевой смеси; ε – коэффициент пористости, которая определена уравнением (1).

Коэффициенты водоотдачи $\chi_s^{(\alpha)}, \chi_s^{(\alpha+1)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$; $s = 1, 2, 3$) в (8) удовлетворяют условиям: $\chi_s^{(\alpha)} \geq 0$, $\chi_s^{(\alpha+1)} \geq 0$; $(\chi_s^{(\alpha)})^2 + (\chi_s^{(\alpha+1)})^2 \neq 0$, $\psi(x, t)$ – известная функция, характеризующая напор некоторого водоносного слоя, примыкающий к рассматриваемому участку.

2. Вопросы существования и единственности

Теорема 1. Пусть $C_{vn}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $C_{ln}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $C_{2n}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$, $K_{\Phi S}(x, t + \rho(x), \theta^*, H^*, H)$ – функции класса $C^2(x \in D, 0 \leq \tau_1 \leq t \leq T < \infty) \cap C(\Pi_T)$ и положительны, функция $H(x, t)$ удовлетворяет (6) в Π и $\tilde{L}(H) \geq 0$ ($\tilde{L}(H) \leq 0$) в Π , а функция $H_0 = H(x, \tau_1)$ содержится в области определения оператора L . Тогда существует единственное решение задачи (6)-(8).

Доказательство теоремы приводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 в [8].

3. Методы решения

3.1 Метод итерации. Изложим в виде теоремы метод итерации для решения краевой задачи (12)-(14).

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и $H(x, t)$ есть решение краевой задачи (6)-(8), а $H_k(x, t)$ ($k = 1, 2, \dots$) – решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_k}{\partial t} = & C_{vn}(x, t + \rho(x), H_{k-1})L(H_k) - C_{ln}(x, t + \rho(x), H_{k-1}) \times \\ & \times \left\{ \int_{\tau_1}^t f(\tau + \rho(x), H_{k-1})K_1(t + \rho(x), \tau + \rho(x), H_{k-1})d\tau + f(t + \rho(x), H_{k-1})K_1(t + \rho(x), t + \rho(x), H_{k-1})d\tau \right\} + \\ & + C_{2n}(x, t + \rho(x), H_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

удовлетворяющее начально-краевым условиям (7), (8), причем $H > H_1$. Тогда последовательность $\{H_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) сходится к единственному решению $H(x, t)$ задачи (6)-(8) при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы основано на принципе максимума и теореме сравнения и проводится так же, как и в [9].

3.2 Локально-одномерный метод. Пользуясь идеями этого метода [10] и метода итерации [9] к задаче (6)-(8), ставим в соответствие следующую конечно-разностную задачу ($n = 3$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{Y^{j+\alpha/3} - Y^{j+(\alpha-1)/3}}{\Delta t} = & C_{vn}^{j+\alpha/3} \Lambda_\alpha Y^{j+\alpha/3} + \\ & + n\gamma \left\{ C_{ln}^{j+\alpha/3} \left[\frac{\Delta t}{2} \left[\beta_1^{j+(\alpha-1)/3} Y^{j+(\alpha-1)/3} K_1^{j+(\alpha-1)/3} + \beta_1^{j+(\alpha-1)/3} Y^{j+\alpha/3} K_1^{j+\alpha/3} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta_1^{j+\alpha/3} Y^{j+\alpha/3} K_2^{j+\alpha/3} \right\} \right\}_\alpha + \Phi_{3n\alpha}^{j+\alpha/3}, \quad x \in \omega_n, \quad \alpha = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (12)$$

$$Y_i^0 = H_0, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{-N_1}^{j+1/3} &= \mu_1^{(1)} Y_{-N_1+1}^{j+1/3} + v_{11}^{(1)}, \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \\ Y_{N_1}^{j+1/3} &= \mu_1^{(2)} Y_{N_1-1}^{j+1/3} + v_{11}^{(2)}, \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{-N_2}^{j+2/3} &= \mu_2^{(1)} Y_{-N_2+1}^{j+2/3} + v_{22}^{(1)}, \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \\ Y_{N_2}^{j+2/3} &= \mu_2^{(2)} Y_{N_2-1}^{j+2/3} + v_{22}^{(2)}, \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_0^{j+1} &= \mu_3^{(1)} Y_1^{j+1} + v_{33}^{(1)}, \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \\ Y_{N_3}^{j+1} &= \mu_3^{(2)} Y_{N_3-1}^{j+1} + v_{33}^{(2)}, \quad x \in \gamma_{h,\alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $\varphi_{3n\alpha}^{j+\alpha/3}$, $\mu_\alpha^{(1)}$, $\mu_\alpha^{(2)}$, $v_{\alpha\alpha}^{(1)}$, $v_{\alpha\alpha}^{(2)}$ ($\alpha=1,2,3$) – известные функции и величины $\Delta t_\alpha = \frac{\Delta t}{3}$. Здесь разностный оператор имеет вид

$$\Lambda_\alpha Y_{(\alpha)} = \left(a_\alpha(x, \bar{t}, 0, 5(Y_{(\alpha-1)} + Y_{(\alpha-1)}^{(-1_\alpha)})Y_{\bar{x}_\alpha}) \right), \quad \bar{t} = t_{j+1/2}.$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1 и 2, и существуют в Ω непрерывные и ограниченные производные

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 H}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 H}{\partial t \partial x_\alpha^2}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq n, \quad \frac{\partial^2 K_S}{\partial H^2}, \frac{\partial^2 K_S}{\partial x_\alpha \partial H}, \frac{\partial^2 K_S}{\partial x_\alpha^2}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения относительно задачи (12)-(16).

1°. Локально-одномерная схема (12) обладает суммарной аппроксимацией $O(\Delta t + (h)^2)$ в регулярных узлах сетки ω_n .

2°. Если $\varphi_{3n\alpha}(U_\alpha) \leq 0$ ($\varphi_{3n\alpha}(U_\alpha) \geq 0$), то при

$$\Delta t < \frac{1}{n\gamma \frac{\Delta t_\alpha}{2} C_{1ni_\alpha}^{j+\alpha/n} \beta_{1i_\alpha}^{j+(\alpha-1)/n} \cdot |K_{1i_\alpha}^{j+(\alpha-1)/n}|} \quad (17)$$

сеточная функция $Y(U_\alpha)$, заданная на Ω , отличная от константы, не может принимать наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение во внутренних узлах $U_\alpha \in \Omega$.

3°. Локально-одномерная схема (12) равномерна в метрике, устойчива по начальным и граничным данным (13)-(16) и по правой части, так что для решения задачи (12)-(16) при любых h и Δt , удовлетворяющих (17), справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|Y^j\|_C &\leq \left\| \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\theta_0^*}{n\gamma} + H_0^* \right) \right\|_C + \max_{0 < \tau_1 \leq t' \leq j\Delta t} \|\hat{U}(x, t')\|_{C_\tau} + \max_{0 < \tau_1 \leq t' \leq j\Delta t} h^2 \frac{\|\Phi_{3n\alpha}^{*j+\alpha/n}\|_{C^*}}{\|C_{1ni_\alpha}^{j+\alpha/n} K_{Si_\alpha}^{j+\alpha/n}\|_{C^*}} + \\ &+ \sum_{j=0}^{j_0-1} \sum_{\alpha=1}^n \left\| \frac{\frac{1}{n} + \gamma \frac{(\Delta t)^2}{2} C_{1vi_\alpha}^{j+\alpha/n} \beta_{1i_\alpha}^{j+(\alpha-1)/n} K_{1i_\alpha}^{j+(\alpha-1)/n}}{\frac{1}{n} - \gamma C_{1vi_\alpha}^{j+\alpha/n} \beta_{1i_\alpha}^{j+\alpha/n} \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot K_{1i_\alpha}^{j+\alpha/n} + \Delta t K_{2\alpha}^{j+\alpha/n}} \right\|_C + \\ &+ \sum_{j=0}^{j_0-1} \sum_{\alpha=1}^n \left\| \frac{\varphi K_{3v\alpha}^{j+\alpha/n}}{\frac{1}{n} - \gamma C_{1vi_\alpha}^{j+\alpha/n} \beta_{1i_\alpha}^{j+\alpha/n} \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot K_{1i_\alpha}^{j+\alpha/n} + \Delta t K_{2\alpha}^{j+\alpha/n}} \right\|_C. \end{aligned}$$

где $h = \max_{t \leq \alpha \leq n} h_\alpha$, $\|Y\|_C = \max_{x \in \omega_h} |Y|$, $\|Y\|_{C_\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} |Y|$, $\|\varphi\|_{C^*} = \max_{x \in \omega_h} |\varphi|$, $\|\varphi\|_C = \max_{x \in \omega_h} |\varphi|$,

$K_{Si_2}^{j+\alpha/n} = \min_\alpha (K_{Si_2i_{\alpha+1}}^{j+\alpha/n} K_{Si_2i_\alpha}^{j+\alpha/n})$, $t' = t_{j+\alpha/n}$.

4°. Схема (12)-(16) равномерно сходится со скоростью $O(h^2 + \Delta t)$, так что

$$\|Y^j - H_k^j\|_C \leq M(h^2 + \Delta t), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $M = const > 0$ не зависит от Δt и h .

Доказательство теоремы приводится также как и в [11].

3.3 Метод прогонки. Применяя метод правой прогонки к задаче (12)-(16), имеем

$$\alpha_{i_{\alpha+1}}^{(\rightarrow)j+\alpha/3} = \frac{B_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3}}{C_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3} - A_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3} \alpha_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3}}, \quad (18)$$

$$\alpha_{-N_1+1}^{j+1/3} = \mu_1^{(1)}, \quad \alpha_{-N_2+1}^{j+2/3} = \mu_2^{(1)}, \quad \alpha_1^{j+1} = \mu_3^{(1)}, \quad \beta_{i_{\alpha+1}}^{(\rightarrow)j+\alpha/3} = \frac{A_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3} \beta_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3} + F_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3}}{C_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3} - A_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3} \alpha_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3}}; \quad (19)$$

$$\beta_{-N_1+1}^{j+1/3} = v_{11}^{(1)}, \quad \beta_{-N_2+1}^{j+2/3} = v_{22}^{(1)}, \quad \beta_1^{j+1} = v_{33}^{(1)}, \quad i_{\alpha} = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N_{\alpha} - 1);$$

$$(\alpha = 1, 2), \quad i_3 = 1, 2, 3, \dots, N_3 - 1, \quad Y_{N_{\alpha}}^{j+\alpha/3} = \frac{v_{\alpha\alpha}^{(2)} + \mu_{\alpha}^{(2)} \beta_{N_{\alpha}}^{j+\alpha/3}}{1 - \mu_{\alpha}^{(2)} \alpha_{N_{\alpha}}^{j+\alpha/3}}, \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$Y_{N_{\alpha}}^{(\leftarrow)j+\alpha/3} = \alpha_{i_{\alpha+1}}^{j+\alpha/3} Y_{i_{\alpha+1}}^{j+\alpha/3} + \beta_{i_{\alpha+1}}^{j+\alpha/3},$$

$$i_{\alpha} = \pm(N_{\alpha} - 1), \pm(N_{\alpha} - 2), \dots, \pm 1, 0, \quad (\alpha = 1, 2), \quad i_3 = N_3 - 1; N_2 - 1; \dots; 1, 0,$$

где $A_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3}, B_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3}, C_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3}, F_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/3}$ – известные величины.

Здесь стрелки наверху указывают направление счета (\rightarrow) – от i_{α} к $i_{\alpha} + 1$; (\leftarrow) – от $i_{\alpha} + 1$ к i_{α} .

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда справедливы следующие утверждения относительно задачи (12)-(16).

1°. При выполнении условия (17) или при выполнении условий:

$$\left| C_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/n} \right| \geq \left| A_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/n} \right| + \left| B_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/n} \right|,$$

$$i_{\alpha} = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N_{\alpha} - 1), \quad \alpha = 1, 2, \quad i_3 = 1, 2, 3, \dots, N_3 - 1,$$

$$\left| \mu_{\alpha}^{(1)} \right| \leq 1, \quad \left| \mu_{\alpha}^{(1)} \right| + \left| \mu_{\alpha}^{(2)} \right| < 2, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

задача (12)-(16) имеет единственное решение, определяемое по формулам (18), (19).

2°. Если выполнены условия

$$\left| A_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/n} \right| > 0, \quad \left| C_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/n} \right| \geq \left| A_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/n} \right| + \left| B_{i_{\alpha}}^{j+\alpha/n} \right|,$$

то при $\chi_1^{(1)} = \chi_1^{(3)} = \chi_2^{(1)} = \chi_2^{(3)} = \chi_3^{(1)} = \chi_3^{(3)} = 0$ для решения задачи (12)-(16) справедлива оценка

$$\left\| Y_{i_{\alpha}} \right\| \leq \max \left(\left| \beta_{-N_{\alpha}+1} \right|, \left| Y_{N_{\alpha}} \right| \right) + \sum_{i_{\alpha}=1}^{N_{\alpha}-1} \frac{1}{\left| B_{i_{\alpha}} \right|} \sum_{k=1}^{i_{\alpha}} \left| F_{k_{\alpha}} \right|, \quad (-N_3 = 0).$$

Доказательство теоремы проводится так же, как и в [11].

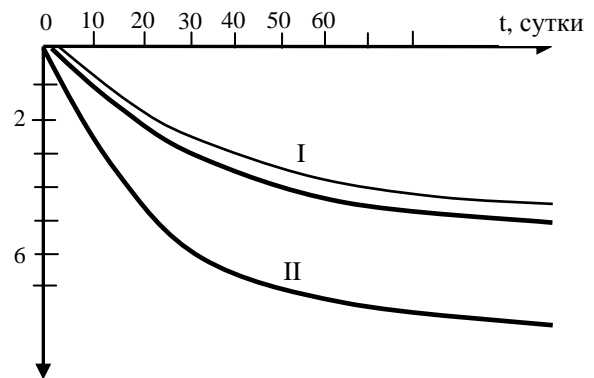
4. Результаты предварительных расчетов

Предварительные расчеты показали:

- осадок слоя соленых грунтов в зависимости от растворимостей солей существенно (не существенно) отличаются от осадки несолёных грунтов (рисунок 2);

- при незначительном модуле мгновенной деформации вертикальное перемещение верхней поверхности уплотняемого массива не зависит от времени;

- учет неоднородности соленых грунтов, неоднородность которых обусловлена переменностью возраста их скелета в зависимости от пространственных координат, достаточно заметно влияет на характер осадки грунтовых оснований во времени. Это влияние может быть незначительным только при $\alpha_{39} \rightarrow 0$.



s_t , (см) I – при $\mu_5 = 0,05$; II – при $\mu_5 = 0,9$
— для соленых грунтов;
— для несолёных грунтов.

Рисунок 2. – Изменение осадки s_t по μ_1 от равномерно распределенной нагрузки $q = 2 \text{ кГ/см}^2$.

РЕЗЮМЕ

Сформулировано математическая постановка начально-краевой задачи консолидации солевых грунтов. Исследованы вопросы существования и единственности для нее. Обоснованы методы ее решения. Пользуясь идеями метода суммарной аппроксимации и метода итерации, она сведена к конечно-разностной краевой задаче, и для нее исследованы погрешность аппроксимации, устойчивость и сходимость локально-одномерной схемы (ЛОС). Даны априорные оценки и ее решение. Приведены результаты предварительных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алтынбеков Ш. Нелинейное определяющее уравнения состояния грунта и методика определения его параметров /Ш. Алтынбеков //PROCEEDINGS The international scientific-technical conference dedicated to the 20-th anniversary of National Engineering Academy of Republic of Kazakhstan. Part I.-Aktobe, 2010.-С.24-29.
2. Алтынбеков Ш. О некоторых современных вопросах фильтрационной теории консолидации неоднородных грунтов / Ш. Алтынбеков //Механика и моделирование процессов технологии.- Тараз: Изд. ТарГУ, 2006, №2.- С.328-329.
3. Цытович И.А. Прогноз скорости осадок оснований сооружений / И.А.Цытович, Ю.К. Зарецкий, М.В.Мальшев, М.Ю.Абелеев, З.Г.Тер-Мартirosян - М.: Стройиздат, 1967.- 238 с.
4. Терцаги К. Механика грунтов в инженерной практике /К.Терцаги, Р.Пак.-М.: Гос. изд-во лит. по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1958.- 607 с.
5. Флорин В.А. Основы механики грунтов /В.А.Флорин.- М.: Стройиздат, 1961.- Т.2.- 543 с.
6. Алтынбеков Ш. Основное уравнение консолидации засоленных земляных сред / Ш.Алтынбеков// Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 28: Международный научно-технический сборник /Под ред. А.В.Чигарева.-Минск: БНТУ, 2013.- С.234-236.
7. Алтынбеков Ш. К решению задачи фильтрационной теории консолидации анизотропных по водопроницаемости неоднородных грунтов при деформации ползучести, зависящим от НДС среды / Ш. Алтынбеков // Известия НАН РК. Серия физико - математическая.- Алматы, 2008, №1 (257).- С.21-25.
8. Алтынбеков Ш. Вопросы существования, единственности и корректности для нелинейной краевой задачи механики уплотняемых сред /Ш.Алтынбеков//Деп. в ВИНТИ, №3297.- М.,1985.- 16 с.
9. Алтынбеков Ш. Об одном итерационном методе нелинейных краевых задач консолидации грунтов // Ш. Алтынбеков, Т.Ш. Ширинкулов //ДАН РУз., Математика. Технические науки. Естественное.- Ташкент, 1996, №1-2.-С.25-27.
10. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем /А.А. Самарский.-М.: Наука, 1971.- 550 с.
11. Алтынбеков Ш. О применении локально-одномерного метода к решению краевой задачи механики уплотняемых сред / Ш. Алтынбеков//Деп. в ВИНТИ, №3298.-М, 1985.

SUMMARY

Formulated mathematical formulation of the initial boundary value problem of consolidation of salty soils ground. Research of many questions of developing existence and uniqueness for her. Basically method of its solutions. Using the ideas of summary approximation method and the method of iteration, it is introduced to finite - difference boundary value problem, and she studied the error of approximation, stability and convergence locally a one-dimensional scheme (LOC). Given a priori estimates on the solution. The given out to results of the pre accountants.

Поступила в редакцию 12.10.2013

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КУБИЧЕСКИ-АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

д.ф.-м.н. ¹Журавков М.А., к.ф.-м.н. ¹Босяков С.М., ²Мартыненко И.М., к.ф.-м.н. ²Скляр О.Н.

¹УО «Белорусский государственный университет», Минск

²УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Проблемы, связанные с упругим равновесием твердых деформируемых тел, постоянно находятся в поле зрения механиков и математиков, занимающихся исследованием поведения реальных объектов в сложных условиях их деформирования, стремлением уточнения пределов применимости существующих теорий расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) твердых деформируемых тел, внедрением новых композитных материалов и т.д. Возникающие при этом новые задачи, как правило, не имеют точного решения.

Возможности и средства современной вычислительной техники делают доступным решение новых классов граничных задач механики деформированного твердого тела с использованием современных технологий и подходов. Собственно процедура исследования закономерностей деформирования реальных анизотропных тел к настоящему времени разработана достаточно полно, но тем не менее, процедуры численной реализации соответствующих гранично-краевых математических задач приводят к мало исследованным и трудно реализуемым расчетным схемам.

В качестве объекта исследования выбраны кубически анизотропные упруго-деформируемые тела, численный расчет которых строится с помощью компьютерной системы *Mathematica* и пакета ANSYS.

Рассмотрим задачу деформирования кубически анизотропных упругих тел, т.е. тел, в которых процессы деформирования описываются следующим законом Гука [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= (A_{11} - A_{12})\varepsilon_{ii} + A_{12}\theta, \\ \sigma_{ij} &= 2A_{44}\varepsilon_{ij}, \end{aligned} \quad i \neq j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Уравнения равновесия в перемещениях для кубически анизотропных тел получим подстановкой этих выражений в систему уравнений Навье–Коши:

$$\sum_{\alpha=1}^3 \partial_{\alpha} \sigma_{\alpha\beta} + X_{\beta} = 0, \quad \beta = \bar{1}, \bar{3}. \quad (2)$$

В случае действия на тело массовых сил $\rho \vec{F}_{\beta}$, $\beta = 1, 2, 3$, уравнения кинестатики примут вид [3]:

$$[A_{44}\Delta + (A_{11} - A_{12} - 2A_{44})\partial_{\alpha}^2]u_{\alpha} + (A_{12} + A_{44})\partial_{\alpha}\theta + \rho F_{\beta} = \rho \frac{\partial^2 u_{\beta}}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Будем рассматривать силы \vec{F} , которая изменяется во времени t по закону:

$$\vec{F}(x, t) = \vec{\Phi}^1(x) \cos \omega t + \vec{\Phi}^2(x) \sin \omega t,$$

где $\omega = const$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, тогда вектор смещений $\vec{v}(x, t)$ представляется в виде:

$$\vec{v}(x, t) = \vec{v}^{(1)}(x) \cos \omega t + \vec{v}^{(2)}(x) \sin \omega t.$$

Введем такие комплексные функции:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}^{(1)} + i\vec{\Phi}^{(2)}, \quad \vec{u} = \vec{v}^{(1)} + i\vec{v}^{(2)}, \quad i = \sqrt{-1},$$

где \vec{u} есть вектор с компонентами u_1, u_2, u_3 :

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3).$$

Тогда

$$\vec{F}(x, t) = \text{Re}(\vec{\Phi}(x)e^{-i\omega t}), \quad \vec{v}(x, t) = \text{Re}(\vec{u}(x)e^{-i\omega t})$$

Здесь Re обозначает действительную часть стоящего в скобках соответствующего выражения. Внося эти значения \vec{F} и \vec{v} в уравнения движения (3), получаем для нахождения $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ следующую систему уравнений:

$$[\Delta + \varepsilon \partial_\alpha^2] u_\alpha + \lambda \partial_\alpha \theta + k^2 u_\alpha + \rho_1 X_\alpha = 0, \alpha = \overline{1,3}. \quad (4)$$

Левая часть формулы (4) определяет следующую матрицу M [3]:

$$Mu = A_{44} \begin{pmatrix} \Delta + (\varepsilon + \lambda) \partial_\alpha^2 + k^2 & \lambda \partial_\beta \partial_\alpha & \lambda \partial_\gamma \partial_\alpha \\ \lambda \partial_\beta \partial_\alpha & \Delta + (\varepsilon + \lambda) \partial_\beta^2 + k^2 & \lambda \partial_\beta \partial_\gamma \\ \lambda \partial_\gamma \partial_\alpha & \lambda \partial_\beta \partial_\gamma & \Delta + (\varepsilon + \lambda) \partial_\gamma^2 + k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \end{pmatrix}.$$

Решением системы (4) будет являться каждый столбец матрицы $M\Phi$:

$$\Phi \varphi = Eu. \quad (5)$$

где $\varphi(x)$ является решением уравнения $F(\partial_1, \partial_2, \partial_3, k^2) \varphi(x) = 0$,

$$\begin{aligned} F(\partial_1, \partial_2, \partial_3, k^2) &= (\Delta + k^2)^3 + (\varepsilon + \sigma) f_1 (\Delta + k^2)^2 + \varepsilon (\varepsilon + 2\sigma) f_2 (\Delta + k^2) + \\ &+ \varepsilon^2 (\varepsilon + 3\sigma) f_3 = \\ &= (\Delta + k^2)^3 + \lambda f_1 (\Delta + k^2)^2 + (\lambda^2 - \sigma^2) f_2 (\Delta + k^2) + (\lambda - \sigma)^2 (\lambda + 2\sigma) f_3. \end{aligned}$$

$$\Phi(\partial_1, \partial_2, \partial_3, k^2) =$$

$$= \begin{pmatrix} (\Delta^*)^2 + \lambda \Delta^* (\partial_2^2 + \partial_3^2) + (\lambda^2 - \sigma^2) \partial_2^2 \partial_3^2 & -\sigma \partial_1 \partial_2 [\Delta^* + (\lambda - \sigma) \partial_3^2] & -\sigma \partial_1 \partial_3 [\Delta^* + (\lambda - \sigma) \partial_2^2] \\ -\sigma \partial_1 \partial_2 [\Delta^* + (\lambda - \sigma) \partial_3^2] & (\Delta^*)^2 + \lambda \Delta^* (\partial_1^2 + \partial_3^2) + (\lambda^2 - \sigma^2) \partial_1^2 \partial_3^2 & -\sigma \partial_2 \partial_3 [\Delta^* + (\lambda - \sigma) \partial_1^2] \\ -\sigma \partial_1 \partial_3 [\Delta^* + (\lambda - \sigma) \partial_2^2] & -\sigma \partial_2 \partial_3 [\Delta^* + (\lambda - \sigma) \partial_1^2] & (\Delta^*)^2 + \lambda \Delta^* (\partial_1^2 + \partial_2^2) + (\lambda^2 - \sigma^2) \partial_1^2 \partial_2^2 \end{pmatrix}$$

E – единичная матрица.

Выполним расчеты для тел, представленных такими материалами, как вольфрам и кварц со следующими характеристиками [1]:

материал вольфрам: $A_{11} = 50.110^{10}$, $A_{12} = 19.810^{10}$, $A_{44} = 15.1410^{10}$, $\rho = 18600$

материал кварц: $A_{11} = 7.8510^{10}$, $A_{12} = 1.6110^{10}$, $A_{44} = 3.1210^{10}$, $\rho = 2070$.

При расчетах использовались функциональные возможности компьютерной системы *Mathematica*, в частности, функции численного интегрирования, функции работы со списками, а также стандартные графические функции.

Компоненты вектора u находятся из уравнения (5). На основании данных формул были построены графики перемещений точек упругого полупространства $x_3 \leq 0$ при действии на его границе нормально приложенной сосредоточенной силы $P = 50H$.

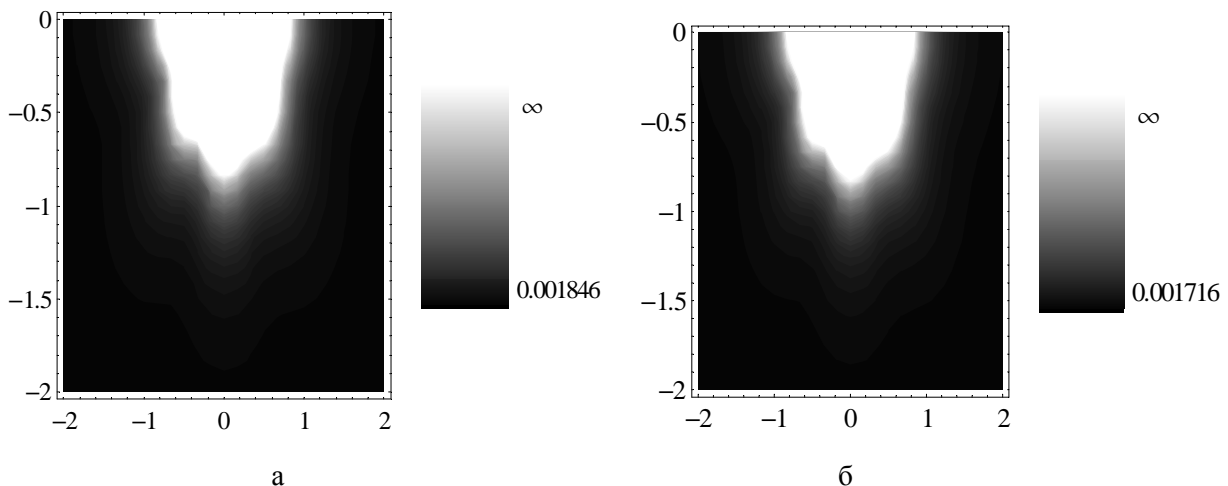


Рисунок 1 – Материал вольфрам: а – распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси x_2, x_3 , б – распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси x_1, x_3

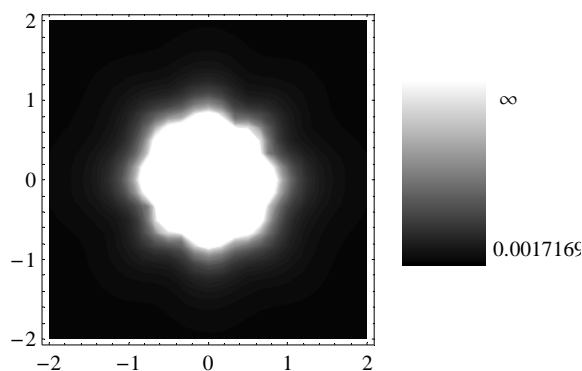


Рисунок 2 – Материал вольфрам: а – распределение компонентов вектора перемещения вдоль осей x_1, x_2

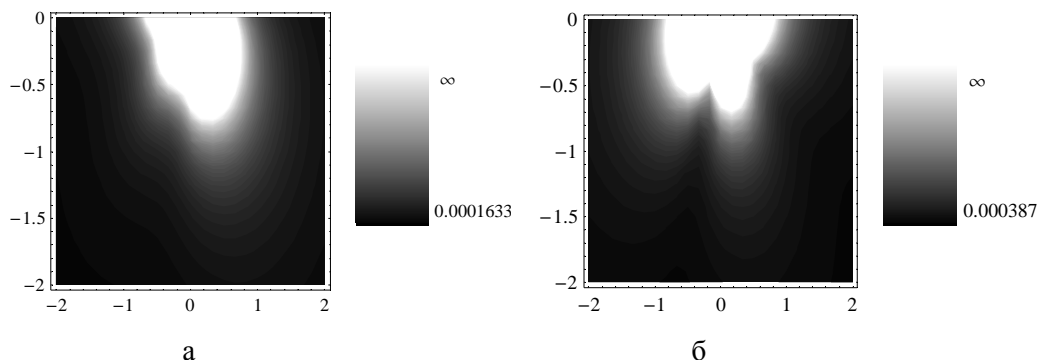


Рисунок 3 – Материал кварц: а – распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси x_2, x_3 , б – распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси x_1, x_3

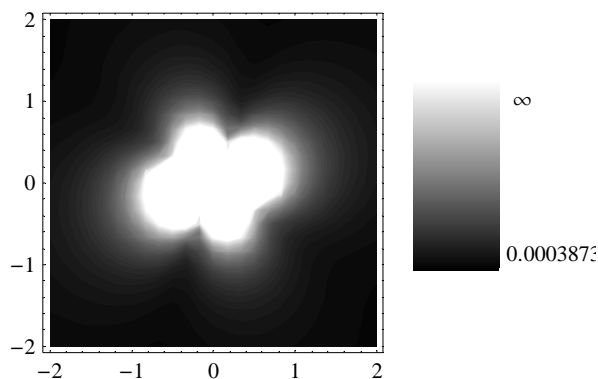


Рисунок 4 – Материал кварц: а – распределение компонентов вектора перемещения вдоль осей x_1, x_2

Аналогичная задача о действии нормально приложенной сосредоточенной силы $P = 50H$ на границе полупространства $x_3 \leq 0$, представленного материалами вольфрам и кварц, была решена в пакете ANSYS.

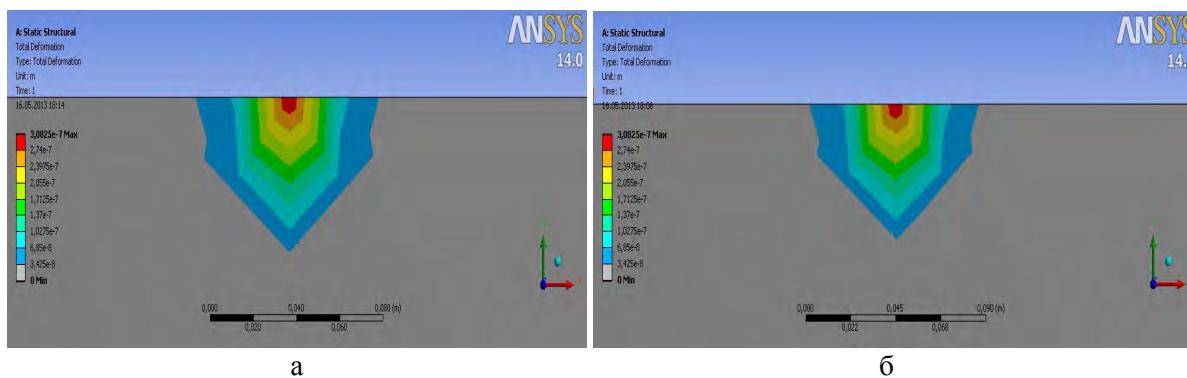


Рисунок 5 – Материал вольфрам: а – распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси X, Y , б – распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси Y, X

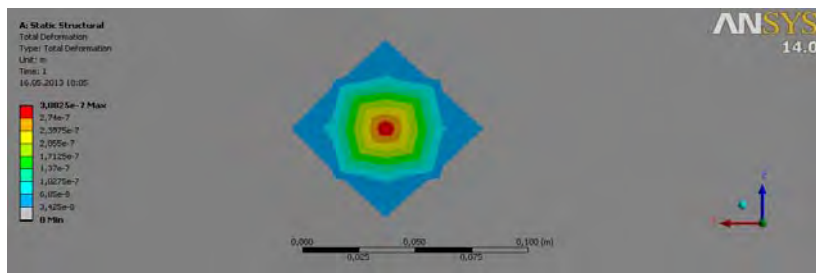
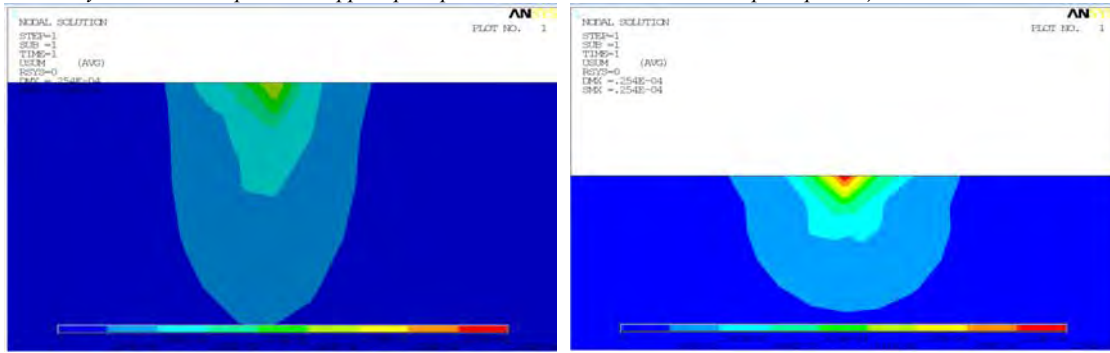


Рисунок 6 – Материал вольфрам распределение компонентов вектора перемещения вдоль осей Z,X



а

б

Рисунок 7 – Материал вольфрам: а – распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси Y, Z, б – распределение компонентов вектора перемещения вдоль оси X,Z

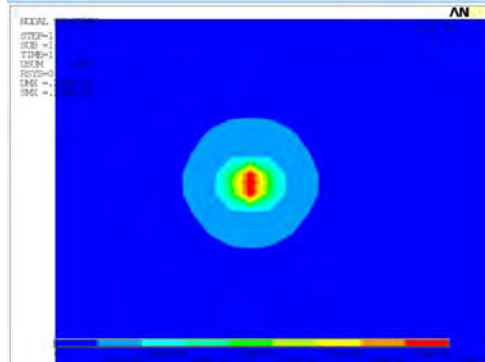


Рисунок 8 – Материал кварц распределение компонентов вектора перемещения вдоль осей X,Y

Из представленных рисунков видно, что картины полей перемещений и количественные значения перемещений, полученные с применением пакета ANSYS и на основании соотношений следующих из формулы(5) с использованием компьютерной системы *Mathematica*, практически не отличаются друг от друга. Максимальная разность конечно-элементного расчета по сравнению с результатами расчетов, основанных на методах математической физики, составляет менее 10%.

РЕЗЮМЕ

Получено численно–аналитическое решение одной задачи кубически–анизотропной теории упругости. Продемонстрировано применение пакета ANSYS и использование компьютерной системы *Mathematica*, при расчете полей перемещений для материалов вольфрам и кварц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кларк С. Справочник физических констант горных пород.– М.: Наука, 1969.– 543с.
2. Лифшиц И. М., Л.Н. Розенцвейг. //ЖЭТФ. 1947. т. 17, вып. 9. 783-791с.
3. Мартыненко, И.М. Волновые движения в кубически анизотропных телах / И.М. Мартыненко // Теоретическая и прикладная механика. Минск: Технопринт.– 2004.– Вып 17.– С.99–102.

SUMMARY

This article demonstrates the use of ANSYS package and use the computer system Mathematica, when calculating the displacement fields for materials tungsten and quartz. It is shown that the maximum difference of the finite element calculation as compared with the results of calculations based on the methods of mathematical physics is less than 10 %.

Поступила в редакцию 12.10.2013

АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ РОТОРА ЦЕНТРИФУГИ С КОНСОЛЬНЫМ ВАЛОМ

асп. Петровский А.Л.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Введение. Роторы и роторные системы являются основой многих видов оборудования – центрифуг, дробилок, мельниц, испытательных машин и других конструкций технологического оборудования с широким диапазоном скоростей вращения и геометрических размеров. Причем, вращающиеся конструкции могут быть представлены не только осесимметричными роторами, состоящими в основном из гладких оболочек и дисков, но и роторами более сложной формы, что связано с необходимостью обеспечения технологических процессов.

Традиционные методы определения жесткостных параметров, в частности перемещений и собственных частот, разработаны в основном для роторов в виде оболочек вращения простой геометрической формы или приведенной к ней с грубыми приближениями [1,2]. В такой ситуации весьма сложно на этапе проектирования достоверно рассчитывать технологические перемещения и зазоры. Это ведет к необходимости введения дополнительных регулировок и усложнению конструкции. Грубое, с большим разбросом определение собственных частот колебаний элементов может привести к возникновению резонансных режимов работы роторов, когда рабочие частоты вращения практически совпадают с собственными. В этом случае резко возрастают нагрузки на опорные элементы и подшипники, что ведет к необходимости, ужесточать конструкцию, что влечёт за собой её(конструкции) усложнение и увеличением веса.

Определение критической скорости центрифуги с консольным валом.

В данной статье представлен метод проведения модального анализа простейшей центрифуги с ротором в виде гладкой оболочки и консольным валом, закреплённым на двух подшипниковых опорах.

На рисунке 1 представлена расчётная схема ротора центрифуги с консольным валом.

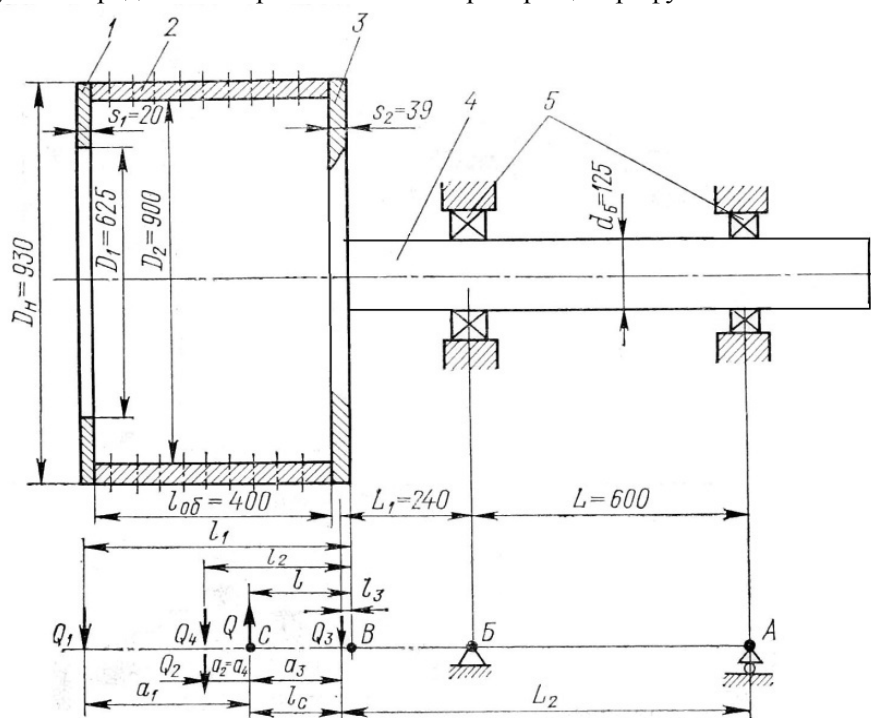


Рисунок 1. - Расчётная схема ротора центрифуги с консольным валом: 1 – плоский диск; 2 – обечайка; 3 – днище; 4 – вал; 5 – подшипник

Исходные данные. В расчёте не учитывается собственный вес вала и его сечение принято постоянным с диаметром $d=0.125$ мм. Размеры барабана и вала показаны на рисунке 1. Материал вала и барабана – сталь с характеристиками:

- модуль упругости $E=2 \cdot 10^{11}$ Па;

- плотность $\rho=7850$ кг/м³;

- коэффициент Пуассона $\mu=0,3$.

При проверке выполнения условия виброустойчивости ротора центрифуги и оценки влияния на критическую скорость ($\omega_{кр}$) вылета его центра массы относительно центра ступицы днища барабана используем методику изложенную в [3].

Определение масс:

$$- \text{Масса плоского кольцевого диска } m_1 = \pi(D_n^2 - D_1^2)s_1\rho/4 = 58\text{кг}; \quad (1)$$

$$- \text{Масса цилиндрической обечайки } m_2 = \pi(D_n^2 - D_2^2)l_{об}\rho/4 = 134,5\text{кг}; \quad (2)$$

$$- \text{Масса диска (днища) барабана } m_3 = \pi D_n^2 s_2 \rho / 4 = 206,5\text{кг}; \quad (3)$$

$$- \text{Общая масса ротора } m = \sum m_i = 400\text{кг}. \quad (4)$$

$$\text{Сила тяжести: } Q_i = m_i g, \quad Q = mg \quad (5)$$

Расстояния от центра масс деталей до точки В (рисунок 1):

$$l_1 = \frac{1}{2} s_1 + l_{об} + s_2 = 0,449\text{м}; \quad (6)$$

$$l_2 = \frac{1}{2} l_{об} + s_2 = 0,239\text{м}; \quad (7)$$

$$l_3 = \frac{1}{2} s_2. \quad (8)$$

Расстояние от центра массы барабана до края днища из условия равенства нулю суммы моментов относительно точки В:

$$l = (Q_1 l_1 + Q_2 l_2 + Q_3 l_3) / Q = 0,155\text{м}. \quad (9)$$

Расстояние от центра массы барабана до центров масс деталей:

$$a_1 = l_1 - l = 0,293\text{м} \quad (10)$$

$$a_2 = l_2 - l = 0,083\text{м} \quad (11)$$

$$a_3 = l - l_3 = 0,136\text{м} \quad (12)$$

Вылет центра массы барабана

$$l_c = a_3 = 0,136\text{м} \quad (13)$$

Моменты инерции вращающихся масс:

Осевые:

$$J_{z1} = m_1 (D_n^2 + D_1^2) / 8 = 9,1\text{кг} \cdot \text{м}^4$$

$$J_{z2} = m_2 (D_n^2 + D_2^2) / 8 = 28,16\text{кг} \cdot \text{м}^4 \quad (14)$$

$$J_{z3} = m_3 \cdot D_n^2 / 8 = 22,34\text{кг} \cdot \text{м}^4$$

Окружные:

$$J_{x1} = m_1 ((3D_n^2/4 + D_1^2/4 + s_1^2)/12 + a_1^2) = 8,6\text{кг} \cdot \text{м}^4$$

$$J_{x2} = m_2 ((6D_n^2/4 + l_{об}^2)/12 + a_2^2) = 17,26\text{кг} \cdot \text{м}^4 \quad (15)$$

$$J_{x3} = m_3 ((3D_n^2/4 + s_2^2)/12 + a_3^2) = 15,04\text{кг} \cdot \text{м}^4$$

Моменты инерции всего барабана:

$$J_z = \sum J_{zi} \quad (16)$$

$$J_x = \sum J_{xi} \quad (17)$$

Критическая скорость вала при условии, что вся масса барабана сосредоточена в точке В его крепления к валу:

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{3E\pi d^4}{64L_2 L_1^2 m}} = 610\text{с}^{-1} \quad (18)$$

Критическая скорость вала при учёте вылета l_c центра массы барабана от точки В крепления его на валу и с учётом массы барабана ($L'_1 = L_1 + l_c$; $L'_2 = L_2 + l_c$):

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{3E\pi d^4}{64L_2(L_1)^2 m}} = 184.4c^{-1} \quad (19)$$

В ряде важных практических случаев формулы (18), (19) даёт лишь первое грубое приближение. Во избежание опасных резонансных явлений, расчёт $\omega_{кр}$ необходимо проводить, используя более точные формулы или методы расчёта, учитывающие вылет центра массы барабана относительно точки его крепления на валу, упругость опорных подшипников, собственная масса вала, изменение его поперечного сечения.

Как видно по результатам расчёта, пренебрежение одним или несколькими параметрами, при создании расчётной модели, ведёт к значительной погрешности расчётов. Поскольку представленный метод не позволяет учесть собственную массу вала, собственные частоты самого барабана, податливость опор и внешние воздействия на систему (усилия от натяжения ремней, дисбалансы ротора и т.д.) возникает необходимость применения более совершенных методов расчёта (численные методы).

Определение собственных частот вала с использованием МКЭ

Используя МКЭ, появляется возможность учесть геометрию, собственный вес и податливость всех деталей модели, а также применить граничные условия, отражающее реальное закрепление единичной детали или системы.

При расчёте с применением МКЭ использовались следующие входные параметры:

Материал вала и барабана – сталь с аналогичными характеристиками.

В качестве опор моделировались подшипники с различными жесткостями:

- Опора А: в соевом направлении – свободно, в радиальном – жесткость составляет $3 \cdot 10^9$ Н/м.

- Опора Б (рисунок 1): в соевом направлении – жесткость составляет $3 \cdot 10^7$ Н/м, в радиальном – жесткость составляет $3 \cdot 10^8$ Н/м.

На рисунке 2 представлена расчётная модель, соответствующая предыдущей.

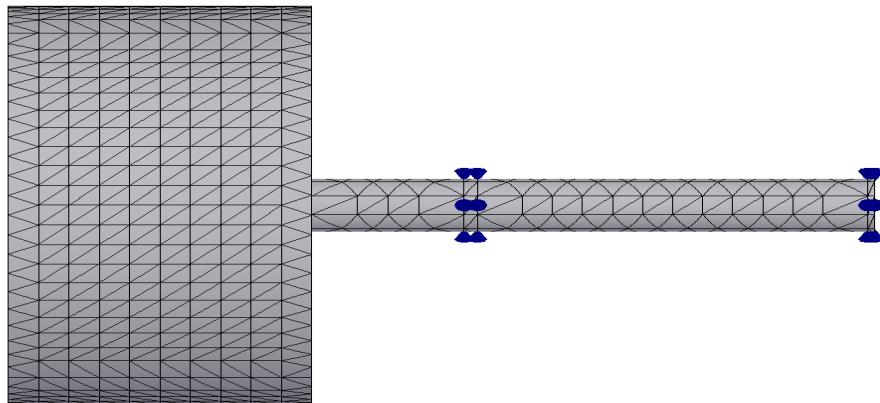


Рисунок 2. - Расчётная модель

Результат расчёта представляет собой графическое отображение форм частот и их значения в различных единицах измерения. Количество форм частот задаются пользователем.

В таблице 1 представлены значения частот для пяти форм собственных частот центрифуги с консольным валом.

Таблица 1 - Значения частот для пяти форм собственных частот центрифуги с консольным валом

Формы частот	Характер колебаний	Частоты		Период
		с ⁻¹	Герц	с
1	Игибные	220.99	35.172	0.028432
2	Игибные	221.15	35.196	0.028412
3	Осевые	343.02	54.593	0.018317
4	Радиальные	777.85	123.8	0.0080776
5	Волнообразующая	1037.9	165.18	0.0060539

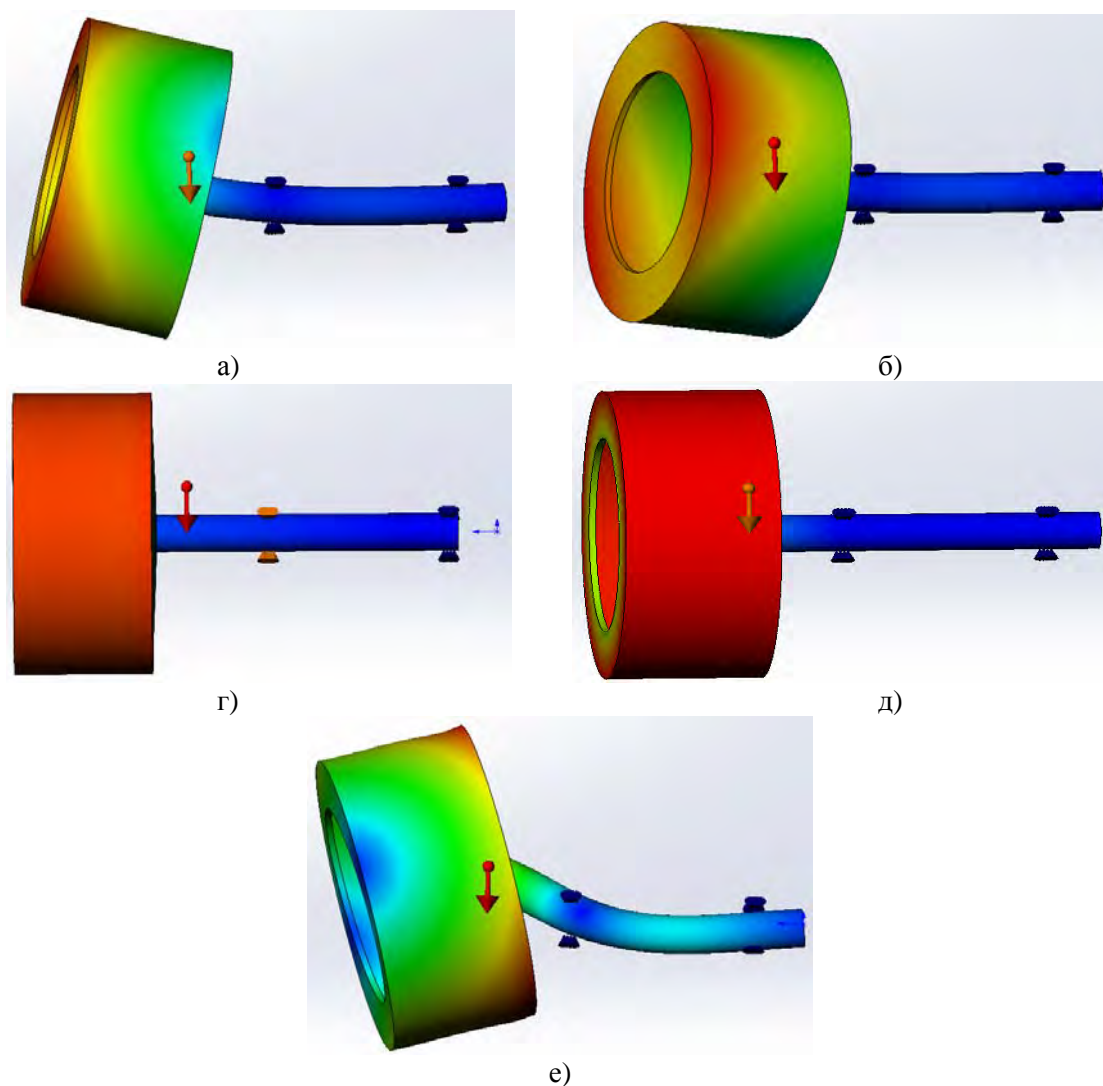


Рисунок 3. – Графическое отображение форм собственных частот центрифуги с консольным валом: а) – 1-я форма, б) - 2-я форма, г) - 3-я форма, д) - 4-я форма, е) - 5-я форма

Полученный результат с большой точностью отображает форму колебаний, и их значения. Значения критических скоростей, полученных с учётом вылета и МКЭ, достаточно близки, что подтверждает соответствие моделей. Однако, результат расчёта критической скорости с учётом вылета определён без учёта собственной массы вала и податливости опор, что дало погрешность по отношению к МКЭ $100(220-184)/220=16\%$. Таким образом, прибегая к МКЭ расчет критических скоростей, получен с большей точностью.

Влияние центробежной нагрузки на значения собственных частот.

Влияние центробежной нагрузки на собственные частоты определим по изменению значения первой собственной частоты центрифуги. Для каждого шага по времени задаётся скорость вращения, при которой определялось значение первой формы собственной частоты ротора. Скорость вращения и собственные частоты приводим к одним единицам измерения (рад/с) для их сопоставления. В таблице 2 приведены значения первых форм частот для различных скоростей вращения.

Таблица 2 - Значения первых форм частот для различных скоростей вращения

Время t,с	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Скорость вращения ротора	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
Собственная частота ротора	254	257	261	264	267	271	275	278	282	286	290

На графике (Рисунок 4) представлены зависимости скорости вращения ротора измеряемая в герцах и его критических скоростей (значением первой формы собственных частот) от времени.

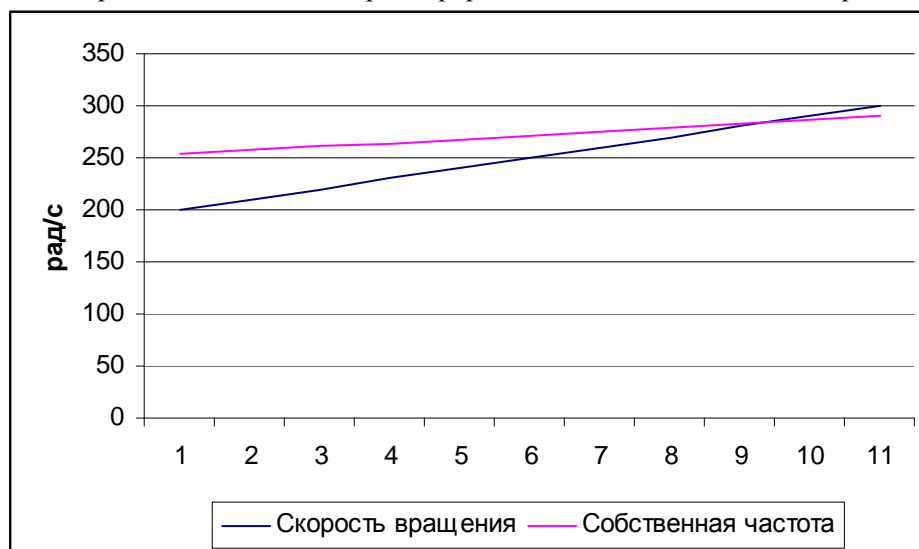


Рисунок 4 - Зависимости скорости вращения ротора и его критических скоростей от времени

График наглядно отражает приближение собственных частот конструкции ротора к резонансной с увеличением его скорости вращения, а также резонансную частоту, которая определяется точкой пересечения графиков. Таким образом, при частоте вращения 284 рад/с система войдёт в резонанс.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается методика проведения модального анализа простейшей центрифуги с консольным валом. Получены 5 форм собственных частот и проанализировано влияние нагрузки на значение первой собственной частоты центрифуги.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович З. Б. Основы расчёта химических машин и аппаратов. - М.: Машиностроение, 1960. 744с
2. Михалёв М.Ф. Расчёт и конструирование машин и аппаратов химических производств. - М.: Машиностроение, 1984. - 304с
3. Агамиров В.Л., Амелянчик А.В. Справочник машиностроителя. Т.33 - М.: Машгиз, 1962. - 655с.
4. А.А. Алямовский, COSMOSWorks. Основы расчёта конструкций на прочность в среде SolidWorks. - М.: ДКМ Пресс, 2010. - 784с.

SUMMARY

In this paper we consider the methodic of modal analysis of a simple centrifuge cantilever shaft. Received five forms of natural frequencies and analyzed the influence of the load on the value of the first natural frequency of the centrifuge.

Поступила в редакцию 11.11.2013

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО-И МАССОБМЕНА В МНОГОСЛОЙНЫХ ДЫМОВЫХ ТРУБАХ В УСЛОВИЯХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

к. ф.-м. н. Конон П.Н., маг. Поддубная М.А.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. По мере возрастания в энергосистемах суммарной мощности атомных электростанций возникает потребность в маневренных энергоблоках на тепловых и гидроэлектростанциях. Эта проблема будет актуальна и для Беларуси в связи со строительством АЭС. Дальнейшее развитие энергетики связано с созданием надежных энергетических аппаратов, в том числе дымовых труб ТЭС, ГРЭС, в условиях пусков и остановок котельного оборудования [1]. Поэтому в отличие от используемого в настоящее время стационарного расчетного режима необходимо рассматривать нестационарные условия тепло- и массообмена с фазовыми переходами. Многократные циклы «нагрев-выдержка-охлаждение» оказывают наиболее существенное влияние на параметры напряженно-деформированного состояния конструкции, что указывает на актуальность исследования нестационарных температурно-влажностных полей.

Постановка задачи. Рассмотрим полную постановку задачи для двухслойной конструкции трубы при нестационарной работе в условиях фазовых переходов. Особенности постановки задачи для многослойной конструкции также будут отмечены в работе. В [6] рассмотрена постановка задачи для двухслойной конструкции без учета сушки футеровки, проведены расчеты температурных, влажностных полей и пленки конденсата. Многие вопросы о промышленных и вентиляционных трубах рассмотрены в книге [4], однако нестационарным процессам внимание практически не уделяется.

В силу того, что радиус трубы достаточно большой, и температура дымовых газов в пределах одной зоны (порядка 25м по высоте) меняется незначительно на $2-3^\circ \text{N}$ процессы тепло- и массообмена будем рассматривать в декартовой прямоугольной системе координат OXY , что показано на рисунке 1. Аналитические расчеты конденсации серной кислоты показали, что потоки этого агрессивного компонента через поверхность футеровки составляют незначительную величину по сравнению с потоками конденсирующихся водяных паров, и их влияние на температурно-влажностный режим не учитывается. Также считается, что при конденсации водяных паров на поверхности охлаждения жидкая фаза выпадает в виде сплошной пленки. Образующийся конденсат частично проникает в поры футеровки, основная же часть стекает по вертикальной, достаточно длинной стенке. В верхней части пленки, когда ее толщина и соответственно скорость течения невелики, имеет место чисто ламинарное течение с плоской границей раздела фаз. В дальнейшем на поверхности пленки начинают возникать волны, приводящие к некоторому уменьшению средней толщины пленки конденсата. Под влиянием волнообразования и общего увеличения скорости течения пленки в последней начинают развиваться турбулентные пульсации. Термическим сопротивлением пленки конденсата пренебрегаем. Процессы конденсации происходят при температуре дымовых газов ниже точки росы, то есть когда давление водяных паров превышает давление насыщения на внутренней поверхности футеровки. В дальнейшем начинается процесс испарения-сушка увлажненной части трубы [3].

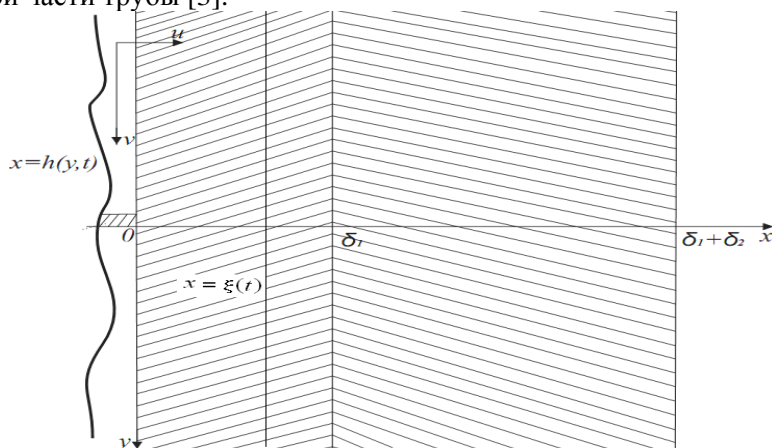


Рисунок 1 – К модели двухслойной конструкции трубы

Температура и давление дымовых газов считаются известными функциями времени. В [5,6] проведена постановка задачи с учетом движения пленки конденсата и расчеты толщины пленки при конденсации водяных паров на внутренней поверхности футеровки. Ее толщина оказалась небольшой около 2-4 мм. и в рассматриваемой модели ее не учитываем. Рассматривается диффузия жидкости через скелет тела, а также капиллярное впитывание.

Определим удельное влагосодержание U как количество жидкости в единице объема скелета пористого тела. Массу воздуха и пара, которые присутствуют в капиллярах и порах пористого тела, считаем бесконечно малой по сравнению с массой жидкости.

Учитывая высказанные соображения и предположения, модель тепло- и массообмена в двухслойной трубе можно представить следующей системой уравнений в частных производных параболического типа с переменными коэффициентами[2]:

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T, U) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \lambda(T, u) = \begin{cases} \lambda_1(T, U), & 0 \leq x \leq \delta_1 \\ \lambda_2(T), & \delta_1 \leq x \leq \delta_1 + \delta_2 \end{cases},$$

$$c\gamma = \begin{cases} c_1 \gamma_1, & 0 \leq x \leq \delta_1 \\ c_2 \gamma_2, & \delta_1 \leq x \leq \delta_1 + \delta_2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \right], \quad 0 \leq x \leq \delta_1. \quad (2)$$

На границе $x = 0$ задаются граничные условия третьего рода с учетом конденсации на свободной поверхности:

$$-\lambda_1(T, U) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 [T_{\bar{a}}(t) - T(0, t)] + g_{\bar{e}}(t)r, \quad T_{\bar{a}}(t) = T_{\bar{a}} + kt. \quad (3)$$

Интенсивность конденсации $g_k(t)$ определяется формулой:

$$g_{\bar{e}}(t) = g_k(T(0, t)) = \beta \{P_{\bar{a}}(t) - P_i[T(0, t)]\}, \quad P_{\bar{a}}(t) = P_0 + kt. \quad (4)$$

Для определения давления насыщения $P_u(T)$ на стенке в мм. рт. ст. при $x = 0$ использовалась эмпирическая формула:

$$P_u(T) = \begin{cases} 165914 \times e^{\frac{7.331 \times (T-374)}{T+273}}, & T > 100^\circ C \\ 760 \times e^{\frac{13.963 \times (T-100)}{T+273}}, & T < 100^\circ C \end{cases}. \quad (5)$$

Если давление насыщения на стенке $x = 0$ сравняется с давлением паровоздушной смеси $P_{\bar{a}}$, то конденсация заканчивается. Из этого условия можно определить время конденсации t_k .

На поверхности соприкосновения двух слоев (или более слоев для многослойных труб) ставится условие равенства температур и потоков тепла:

$$\left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=\delta_1} = 0, [T]_{x=\delta_1} = 0. \quad (6)$$

В (6) прямые скобки [] означают скачок потока тепла и температуры на границах слоев.

На границе внешней границе трубы $x = \delta_1 + \delta_2$ задаются условия третьего рода:

$$-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1+\delta_2} = \alpha_2 [T(\delta_1 + \delta_2, t) - T_e]. \quad (7)$$

Считаем, что поле влаги распределяется в области футеровочного слоя толщиной δ_1 . Если поток влаги не превосходит интенсивности конденсации $g_k(t)$, то на границе $x = 0$ задается значение влагосодержания, соответствующее полному насыщению. Если же поток влаги больше интенсивности конденсации, то на границе ставится условие равенства потока влаги и интенсивности конденсации. При $x = \delta_1$ значения влагосодержания равно равновесному U_{δ} . Тогда граничные условия для определения влажностного поля имеют вид

$$\begin{cases} U(0,t) = u_{ri}, & -a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} \leq g_{\varepsilon}(t) \\ -a_m(u) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = g_{\varepsilon}(t), & -a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} > g_{\varepsilon}(t) \end{cases}, \quad (8)$$

$$U \Big|_{x=\delta_1} = U_p.$$

Кроме того, задаются начальные условия

$$T(x,0) = T_a, \quad U(x,0) = U_0. \quad (9)$$

При $t > t_k$, где t_k – время конденсации, процесс конденсации прекращается и начинается сушка увлажненной футеровки. Модель этого процесса описывается на основе теории углубления фронта фазового превращения свободной влаги [3]. Пусть $\xi = \xi(t)$ – граница неизвестного фронта, разделяющего сухую и увлажненную границу в футеровке, причем $\xi(0) = 0$. При температуре на границе фазового перехода $T(\xi) < 100^\circ \text{Ñ}$ имеем следующую начально-краевую задачу тепло-и массобмена:

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \varphi_t(x,t), \quad 0 < x < \delta_1 + \delta_2, \quad \lambda_t = \begin{cases} \lambda_1(T,U), & 0 \leq x \leq \delta_1 \\ \lambda_2 = const, & \delta_1 \leq x \leq \delta_1 + \delta_2 \end{cases}. \quad (10)$$

$$-\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_1 [T_a(t) - T(0,t)], \quad x = 0, \quad (11)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_2 [T(\delta_1 + \delta_2, t) - T_a], \quad x = \delta_1 + \delta_2. \quad (12)$$

$$T(x, t_{\varepsilon i}) = T(x), \quad 0 \leq x \leq \delta_1 + \delta_2.$$

$$\varphi_t(x,t) = \begin{cases} rc_m(T, P_n) \frac{\partial P_n}{\partial t}, & 0 \leq x < \xi \\ r \left\{ q_m - \lambda_m [U(\xi)] \frac{\partial P_n [T(\xi)]}{\partial x} \right\}, & x = \xi \\ r \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_m(U) \frac{\partial P_n}{\partial x} \right], & \xi < x \leq \delta_1 \\ 0, & \delta_1 < x \leq \delta_2, \end{cases} \quad (13)$$

$$q_m = \begin{cases} \frac{P_a(t) - P_i [T(\xi)]}{\xi} \lambda_{m \text{ н\o o}}, & 0 \leq \xi \leq \delta_1 \\ \{P_a(t) - P_i [T(\xi)]\} \beta, & \xi = 0. \end{cases} \quad (14)$$

$$c_m(T, P_n) \frac{\partial P_n}{\partial t} = \lambda_m(U) \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq \xi, \quad P_n = P_i(T), \quad \xi \leq x \leq \delta_1. \quad (15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a_m(U) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_m(U) \frac{\partial P_n}{\partial x} \right], \quad \xi < x < \delta_1, \quad (16)$$

$$a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} = q_m, \quad x = \xi; \quad a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad x = \delta_1. \quad (17)$$

$$-a_m [U(\xi)] \frac{\partial U}{\partial x} \geq -\{P_a(t) - P_n [T(\xi)]\} \beta + \lambda_m [U(\xi)] \frac{\partial P_i [T(\xi)]}{\partial x}, \quad \xi = 0. \quad (18)$$

$$\frac{d\xi}{dt} \{U(\xi, t) - U [T(\xi)]\} = \lambda_{m \text{ н\o o}} \frac{\partial P_n}{\partial x} - \lambda_m [U(\xi)] \frac{\partial P_n [T(\xi)]}{\partial x}, \quad 0 < x < \delta_1. \quad (19)$$

Если $T(\xi) \geq 100^\circ\text{C}$ тепло-и массообмен в конструкции и граница фазового раздела $\xi = \xi(t)$ определяется следующими уравнениями:

$$\tilde{n}_1 \gamma_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) + r \lambda_p [P_i(T_1, t) - P_1(x, t)], \quad 0 < x < \xi; \quad (20)$$

$$\tilde{n}_2 \gamma_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \right), \quad \xi < x < \delta_1; \quad (21)$$

$$\tilde{n}_3 \gamma_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} \right), \quad \delta_1 < x < \delta_1 + \delta_2. \quad (22)$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \alpha_1 [T_a(t) - T_1(0, t)], \quad x = 0; \quad (23)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = r \frac{d\xi}{dt} [U(\xi, t) - U_0(\xi, t)]; \quad (24)$$

$$T(\xi, t) = T[P(\xi)], \quad x = \xi; \quad (25)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x}, \quad x = \delta_1; \quad (26)$$

$$-\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial x} = \alpha_2 [T_3(\delta_1 + \delta_2, t) - T_a], \quad x = \delta_1 + \delta_2; \quad (27)$$

$$T(x, t_{\text{эи}}) = T(x), \quad 0 \leq x \leq \delta_1 + \delta_2. \quad (28)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} \right], \quad \xi < x < \delta_1; \quad (29)$$

$$\frac{d\xi}{dt} [U(\xi, t) - U_0(\xi, t)] = k_\phi \frac{P_i [T(\xi)] - P_{\text{ади}}}{2 \frac{P_i}{\mu_n} \xi RT}; \quad (30)$$

$$a_m(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad x = \delta_1; \quad (31)$$

$$U(x, t_{\text{эи}}) = U(x), \quad 0 \leq x \leq \delta_1; \quad (32)$$

$$P_1 = P_{\text{ади}}, \quad 0 \leq x < \xi; \quad P_2 = P_i [T(\xi)], \quad \xi < x \leq \delta_1. \quad (33)$$

В соотношениях (1)–(33) δ_1, δ_2 – толщины футеровки и железобетонного ствола соответственно, m ; $\lambda(T, U)$ – коэффициент теплопроводности, вообще говоря, функция температуры T ($^\circ\text{C}$) и влагосодержания U ($\text{кг}/\text{м}^3$), $\text{ккал}/(\text{м ч}^\circ\text{C})$; c – теплоемкость материала, $\text{ккал}/(\text{кг}^\circ\text{C})$; γ – объемная масса, $\text{кг}/\text{м}^3$; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи, соответственно, от газа к внутренней поверхности трубы и от наружной поверхности трубы к воздуху, $\text{ккал}/(\text{м}^2 \text{ч}^\circ\text{C})$; r – теплота фазового перехода, $\text{ккал}/\text{кг}$; $a_m(U)$ – коэффициент диффузии влаги, функция влагосодержания, $\text{м}^2/\text{ч}$; $U_p = U_0$ – равновесное значение влагосодержания, $\text{г}/\text{г}$; T_a, P_a – соответственно температура в $^\circ\text{C}$ и давление дымовых газов в мм.рт.ст. ; T_a, P_0 – соответственно температура наружного воздуха в $^\circ\text{C}$ и начальное давление дымовых газов в мм.рт.ст. ; $g_\kappa(t)$ – массовая скорость конденсации, $\text{кг}/(\text{м}^2 \text{ч})$; β – коэффициент массоотдачи, $\text{кг}/(\text{м}^2 \text{ч мм.рт.ст.})$; P_n – парциальное давление пара, мм.рт.ст. ; $P_n [T(0, t)]$ – давление насыщения, известная функция температуры, мм.рт.ст. ; $P_{\text{ади}}$ – атмосферное давление, мм.рт.ст. ; k – скорость подъема температур дымовых газов, $^\circ\text{C}/\text{ч}$; ξ – граница фронта фазового перехода; λ_m – коэффициент диффузионной теплопроводности, $\text{кг}/(\text{м}^3 \text{ч мм.рт.ст.})$; c_m – коэффициент теплопроводности, $\text{ккал}/(\text{м ч мм.рт.ст.})$; λ_p – коэффициент диффузии давления, $\text{кг}/(\text{м ч мм.рт.ст.})$, k_ϕ – коэф-

фициент фильтрации, $кг/(м \cdot мм.рт.ст.)$, μ_n – молярная масса пара; R – газовая постоянная; $t_{кон}$ – время выхода на стационарный режим, ч.

Система (1)–(33) описывает процессы тепло- и массопереноса в двухслойной системе в период конденсации и сушки влаги. Граница фазового перехода определяется условиями (19), (24) подобно задаче Стефана. При постановке задачи для многослойной конструкции необходимо учесть равенство потоков тепла и влаги на границе слоев.

Результаты численных расчетов для многослойных труб. Приведем результаты расчетов температурных полей для многослойных труб. Расчеты выполнены численным методом с использованием консервативных неявных разностных схем методом прогонки.

В качестве исходных данных использовались геометрические размеры четырехслойной дымовой трубы Ярославской ГРЭС высотой 120 м и диаметром 9,6 м. Четыре слоя – это футеровка, два слоя изоляции и железобетонный ствол. В качестве материала футеровки рассматривалась кладка из кислотоупорного кирпича. Первый слой теплоизоляции – это плиты теплоизоляционные полужесткие из минеральной ваты на синтетическом связующем; второй слой – плиты перлитцементные на цементно - глиняном растворе. Несущий железобетонный ствол – бетон марки 300.

На границе всех слоев при постановке задачи использовалось условие равенства температур и потоков тепла. Коэффициент теплоотдачи можно определять по критериальным соотношениям. В расчетах он предполагался равным $\alpha = 20 \text{ ккал}/(м^2 \cdot ч \cdot ^\circ\text{C})$ на внутренней и наружной стенках. Рассчитывалось 6 сечений по высоте трубы. Проведем расчеты для сечения № 3 трубы: отметка от низа основания сечения трубы – 90 м; толщина футеровки $\delta_1 = 0,23 \text{ м}$; толщины плит перлитных и теплоизоляционных $\delta_2 = 0,075 \text{ м}$ и $\delta_3 = 0,04 \text{ м}$ соответственно; толщина железобетонного ствола $\delta_4 = 0,20 \text{ м}$. Теплофизические характеристики взяты для указанных выше материалов многослойной конструкции.

Рассматриваемый нестационарный режим соответствует работе многослойных труб, подключенных к котлам ТП – 90, ТП – 230. При расчете он был задан следующим образом: подъем температуры дымовых газов T_g от $T_g = -20^\circ\text{C}$ до $T_m = 160^\circ\text{C}$ по линейному закону со скоростью $k = V = 10^\circ\text{C}/ч$, выдержка до стационарного режима при $T_g = T_m$, охлаждение от $T_g = T_m$ до T_g линейно со скоростью $k = V = 10^\circ\text{C}/ч$, дальнейшее охлаждение трубы при $T_g = T_g$.

На рисунках 2-6 приведены результаты численных расчетов в сечении № 3 для многослойной трубы Ярославской ГРЭС, работающей в указанном выше пульсирующем тепловом режиме. Графики снабжены подробными подрисуночными комментариями. На рисунках 2, 3б изображена зависимость температуры $T (^\circ\text{C})$ от поперечной координаты $x(м)$ многослойной трубы соответственно в периоды пуска, устойчивой работы и останова. Точность численных расчетов подтверждена выходом температурного поля на стационарный вид при больших временах эксплуатации трубы при постоянной температуре дымовых газов, что показано на рисунке 3а. Изменение температуры на внутренней границе футеровки трубы в зависимости от времени $t(ч)$ при полном цикле ее работы показано на рисунке 4. Численный анализ температурных полей четырехслойных труб при указанных режимах работы позволил заключить, что наличие теплоизоляции резко снижает температуру в железобетонном стволе. Максимальный перепад температуры в нем в течение всего рассматриваемого цикла составляет не более 18°C .

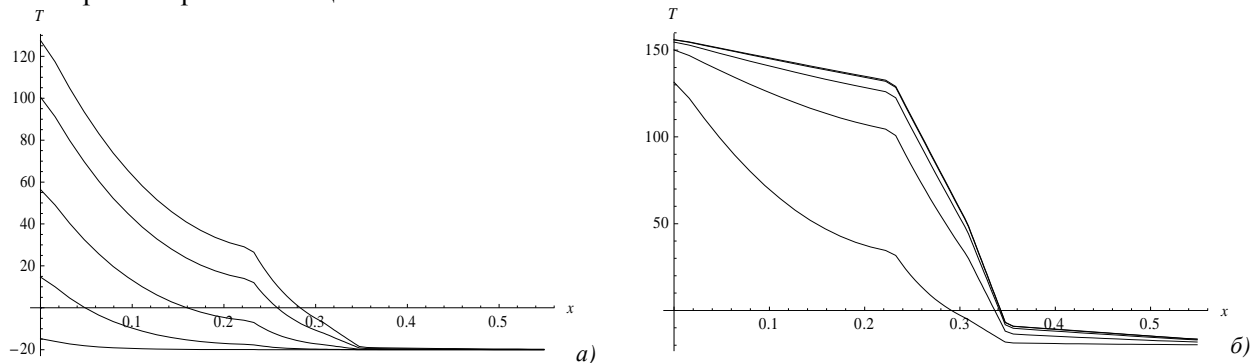


Рисунок 2 – Температурное поле многослойной трубы: а) в моменты времени $t=1ч$ (нижний график), $t=5ч$, $t=10ч$, $t=15ч$, $t=18ч$ с начала подъема температуры дымовых газов; б) в моменты времени $t=1ч$ (нижний график), $t=20ч$, $t=40ч$, $t=65ч$ с начала выдержки температуры дымовых газов до стационарного режима

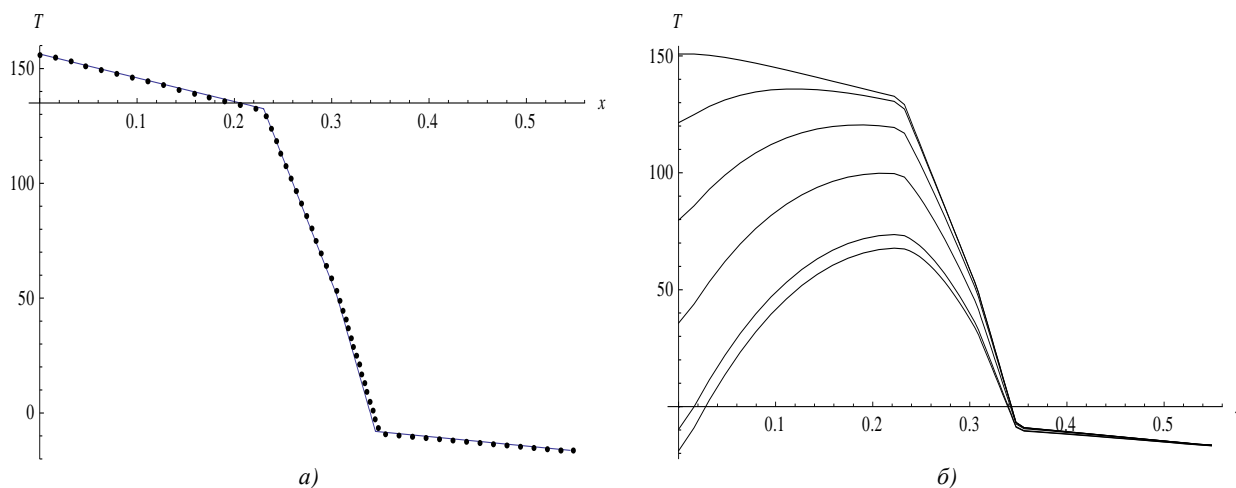


Рисунок 3 –а) Сравнение результатов температурного поля двухслойной трубы в период постоянной температуры дымовых газов в течение 65 часов (сплошная линия) со стационарным распределением температур в конструкции; б) – Температурное поле многослойной трубы в моменты времени $t=1\text{ч}$ (верхний график), $t=5\text{ч}$, $t=10\text{ч}$, $t=15\text{ч}$, $t=20\text{ч}$, $t=21\text{ч}$ с начала охлаждения температуры дымовых газов

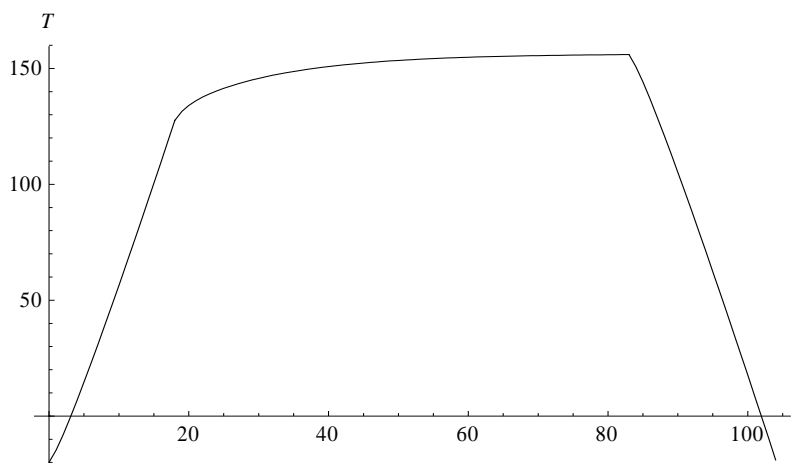


Рисунок 4 – Температура на внутренней границе $x=0$ футеровки многослойной трубы

Наибольший перепад в футеровке наблюдается при росте температуры дымовых газов и при указанных выше данных равен 96°C , что существенно, хотя и на несколько часов, превышает допустимое значение в 80°C . При выходе на стационарный режим работы перепад составляет 24°C , а в период останова его максимальное значение равно 81°C . Можно сделать вывод, что только в период пуска или останова дымовой трубы могут возникнуть условия, нарушающие на некоторое время рекомендуемый режим эксплуатации. В целом же наличие многослойности оказывает положительное влияние на надежность труб в эксплуатации.

В настоящее время при разработке проектов дымовых труб с целью повышения их надежности и долговечности перепад температур по футеровке из кислотоупорного кирпича рекомендуется принимать равным 80°C , согласно инструкциям института Теплопроект (г.Москва). При этом температура внутренней поверхности железобетонного ствола не должна превышать 100°C . Как показывает анализ численных расчетов для достижения этих целей режим разогрева должен быть достаточно плавным и медленным с промежуточной выдержкой температуры газов. При этом рекомендуемый температурный режим – подъем температуры газов не должен превышать скорости $5^\circ\text{C}/\text{ч}$, а в зимнее время должна быть выдержка в стационарном режиме в течение суток при температуре 100°C . Только проведя сушку трубы, приступают к ее эксплуатации.

- Работа выполнена в рамках НИР Госпрограммы «Энергоэффективность», № госр. 20115452

РЕЗЮМЕ

Проведено моделирование в реальном времени нестационарных процессов тепло-и массообмена в многослойных дымовых трубах в условиях фазовых переходов. Численным расчетом исследованы поля температур в многослойной конструкции в период пуска, устойчивой работы и остановки дымовой трубы. Проведены рекомендации по выбору благоприятных эксплуатационных режимов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров-Денисов В.Г., Конон П.Н. Процессы тепло- и массообмена в стволах дымовых труб в нестационарном режиме. Всесоюзная конф. «Современные проблемы разработки, проектирования, возведения и эксплуатации монолитных железобетонных труб». -М.:1983, с.66-68.
2. Кутателадзе С.С. Основные теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979. 659 с.
3. Петров-Денисов В.Г. К теории углубления фронта фазового перехода свободной влаги и образования избыточного давления при нагреве влажностных тел. – Химическая промышленность, 1979, №6.
4. Дужих Ф.П, Осмоловский В.П., Лагидычев М.Г. Промышленные дымовые и вентиляционные трубы.- Теплотехник, М.: 2004
5. Конон П.Н. и др. Отчет по НИР «Нестационарный тепло-и массоперенос в конструкциях многослойных труб и труб с вентилируемым зазором. Постановка начально-краевых задач, аналитические и численные методы решения», № госр. 20115452, Минск , 2013.
6. Конон П.Н., Докукова Н.А. Исследования нестационарных процессов тепло- и массопереноса в двухслойных дымовых трубах // Международный научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2013г, вып.28.

SUMMARY

The simulation of real-time non-stationary processes of heat and mass transfer in multi-layer stacks in terms of phase transitions. Investigated by numerical calculation of the temperature field in a multilayer structure during start-up, steady work and stop the chimney. Carried out guidelines for choosing the favorable operating conditions.

Поступила в редакцию 01.11.2013

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ СОСТАВНЫХ БАЛОК ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

д. т. н. Дудяк А.И., асп. Гурковская О.И.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

В данной статье описывается определение перемещений при изгибе составных балок из неоднородных материалов методом начальных параметров.

Если рассматривать чистый изгиб консольной балки прямоугольного сечения составленного из двух неоднородных материалов, обладающих различными значениями модулей упругости (E_1, E_2) и неравными площадями их сечений (A_1, A_2) (рис.1), то уравнение кривизны нейтрального слоя имеет вид:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E_1 I_{x1} + E_1 I_{x2} + E_2 I_{x3}} \quad (1)$$

где ρ - кривизна нейтрального волокна, I_{x1}, I_{x2}, I_{x3} - момент инерции частей поперечного сечения балки, относительно ее нейтральной оси; E_1, E_2 - модули упругости материала; $E_1 I_{x1} + E_1 I_{x2} + E_2 I_{x3}$ - жесткость сечения балки при изгибе.

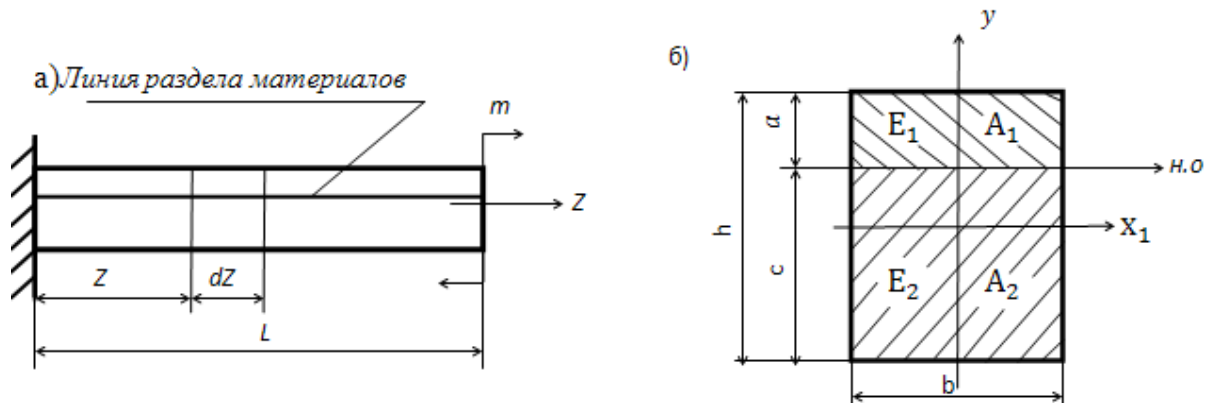


Рисунок 1. – Схема нагружения (а) и форма сечения балки (б)

Тогда, если консольная балка прямоугольного сечения составленного из n неоднородных материалов, обладающих различными значениями модулей упругости ($E_1, E_2 \dots E_n$) и неравными площадями сечений ($A_1, A_2 \dots A_n$) подвергается чистому изгибу, то уравнение кривизны нейтрального слоя можно представить в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{\sum_{i=1}^n E_i I_{xi}} \quad (2)$$

Изгиб балки сопровождается искривлением ее оси. При поперечном изгибе ось балки принимает вид кривой, расположенной в плоскости действия поперечных нагрузок. При этом точки оси получают поперечные перемещения, а поперечные сечения совершают повороты относительно своих нейтральных осей. Углы поворота поперечных сечений принимаются равными углам наклона φ , касательной к изогнутой оси балки (рис. 2).

Прогибы и углы поворотов в балках являются функциями координаты z и их определение необходимо для расчета жесткости. Рассмотрим изгиб стержня в одной из главных плоскостей например, в плоскости yz . Как показывает практика, в составе реальных сооружений стержни испытывают весьма малые искривления ($\frac{y_{\max}}{l} = 10^{-2} - 10^{-3}$, где y_{\max} - максимальный прогиб; l - пролет балки).

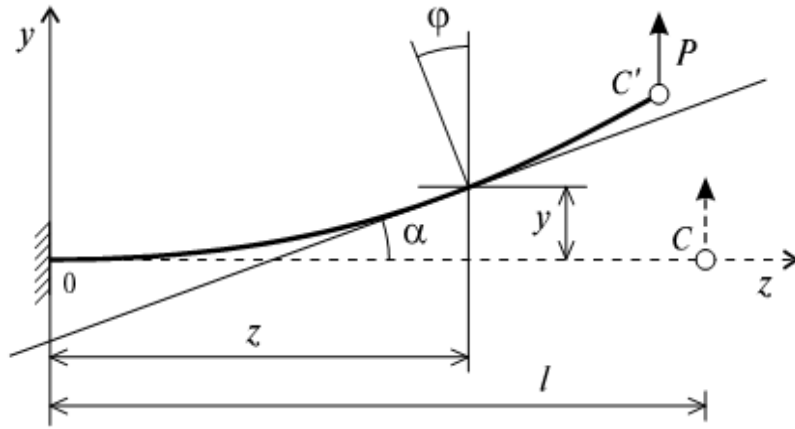


Рисунок 2. – Схема искривления оси балки при изгибе.

В этом случае неизвестными функциями, определяющими положение точек поперечных сечений балки являются $y(z)$ и $\varphi(z) = \alpha(z)$ (рис.2). Совокупность значений этих параметров по длине балки образуют две функции от координаты z - функцию перемещений $y(z)$ и функцию углов поворота $\varphi(z)$. Из геометрических построений (рис. 2) наглядно видно, что угол наклона касательной к оси z и угол поворота поперечных сечений при произвольном z равны между собой. В силу малости углов поворота можно записать:

$$\varphi(z) \approx \text{tg } \alpha(z) = \frac{dy}{dz} \quad (3)$$

Из курса математического анализа известно, что кривизна плоской кривой $y(z)$ выражается

следующей формулой:
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} \right]^3}$$

В связи с малостью величины $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$ по сравнению с единицей последнее выражение можно существенно упростить, и тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dz^2} \quad (4)$$

Учитывая (2) и (4), получим следующее важное дифференциальное соотношение

$$\sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \frac{d^2y}{dz^2} = M_{\sigma(z)} \quad (5)$$

Введем еще одно упрощение, связанное с углом поворота поперечного сечения. Если изогнутая ось балки является достаточно пологой кривой, то углы поворота сечений с высокой степенью точности можно принимать равными первой производной от прогибов. Отсюда следует, что прогиб балки принимает экстремальные значения в тех сечениях, где поворот равен нулю.

В общем случае, для того, чтобы найти функции прогибов $y(z)$ и углов поворота $\varphi(z)$, необходимо решить уравнение (5), с учетом граничных условий между смежными участками.

Если момент и жесткости являются непрерывными по всей длине балки функциями $M_x(z)$ и $E_i I_{xi}(z)$, то решение может быть получено, как результат последовательного интегрирования уравнения (5) по всей длине балки:

$$\sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \frac{dy}{dz} = \varphi_{(z)} \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} = \int_z^l M_{x(z)} dz + C_1 \quad (6)$$

интегрируя один раз, получаем закон изменения углов поворота:

$$\varphi_{(z)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n E_i I_{xi}} \int_z^l M_{x(z)} dz + C_1 \quad (7)$$

Интегрируя (13), получаем:

$$\sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{(z)} = \int_z^l dz \int_z^l M_{x(z)} dz + C_1 z + D_1 \quad (8)$$

Тогда функция прогибов будет иметь вид:

$$y_{(z)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n E_i I_{xi}} \left(\int_z^l dz \int_z^l M_{x(z)} dz + C_1 z + D_1 \right) \quad (9)$$

Здесь C_1 и D_1 произвольные постоянные интегрирования могут быть определены из граничных условий.

Для нахождения C_1 , рассмотрим балку в координате $z = 0$, получим:

$$\int_z^l M_{x(z)} dz = 0 \text{ и } \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_0 = C_1 \quad (10)$$

Из (10) определим C_1 как угол поворота сечения в начале координат умноженный на приведенную жесткость сечения балки.

Для нахождения D_1 , рассмотрим балку при $z = 0$, учитывая (10), получим:

$$D_1 = \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \cdot y_0 \quad (11)$$

Из (11) определим D_1 как перемещение сечения по оси y в начале координат умноженное на приведенную жесткость сечения балки.

Если балка имеет постоянное поперечное сечение по длине, то для определения функций прогибов и углов поворота удобно применить *метод начальных параметров*, суть которого в следующем.

Рассмотрим балку (рис. 3) с постоянным поперечным сечением, нагруженную взаимоуравновешенной системой положительных силовых факторов (т.е., вызывающих вертикальные перемещения сечений балки в положительном направлении оси y). Начало системы координат поместим на левом конце балки так, чтобы ось z проходила вдоль оси балки, а ось y была бы направлена вверх. На балку действуют: момент M , сосредоточенная сила P и равномерно распределенная на участке бруса нагрузка интенсивностью q (рис. 3).

Определим особенности, вносимые в уравнение упругой линии, различными типами внешних силовых факторов. Для этого составим выражение изгибающих моментов для каждого из пяти участков заданной системы.

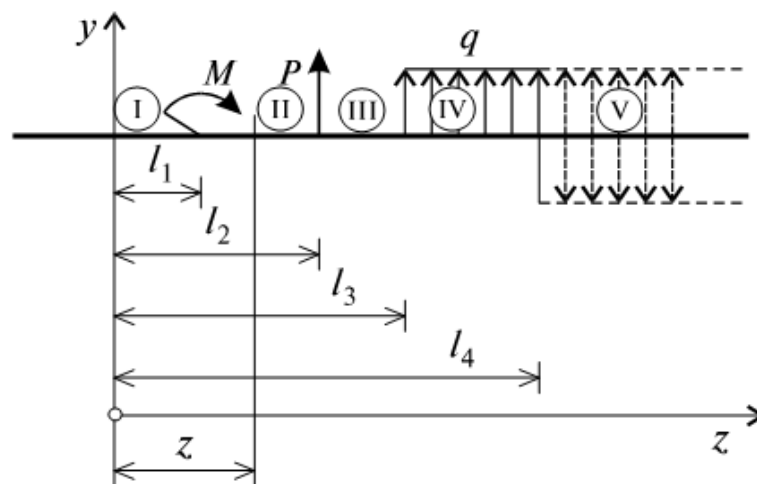


Рисунок 3. – Балка, нагруженная взаимоуравновешенной системой положительных силовых факторов

Участок I ($0 < z < l_1$)

$$M_{x(z)} = 0$$

Участок II ($l_1 < z < l_2$)

$$M_{x(z)} = M$$

Участок III ($l_2 < z < l_3$)

$$M_{x(z)} = M + P(z - l_1)$$

$$\text{Участок IV } (l_3 < z < l_4) \quad M_{x(z)} = M + P(z - l_2) + \frac{q(z - l_3)^2}{2} \quad (12)$$

$$\text{Участок V } (l_4 < z < L) \quad M_{x(z)} = M + P(z - l_2) + \frac{q(z - l_3)^2}{2} - \frac{q(z - l_4)^2}{2}$$

На участке V, где распределенная нагрузка отсутствует, при выводе выражения для изгибающего момента, с целью сохранения рекуррентности формул для разных участков была приложена взаимоуравновешенная распределенная нагрузка.

Интегрируя (12), получим выражения для углов поворотов сечений балки:

$$\begin{aligned} \text{Участок I } (0 < z < l_1) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{z1} = C_1 \\ \text{Участок II } (l_1 < z < l_2) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{z2} = M(z - l_1) + C_2 \\ \text{Участок III } (l_2 < z < l_3) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{z3} = M(z - l_1) + P \frac{(z - l_2)^2}{2} + C_3 \\ \text{Участок IV } (l_3 < z < l_4) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{z4} = M(z - l_1) + P \frac{(z - l_2)^2}{2} + q \frac{(z - l_3)^3}{6} + C_4 \\ \text{Участок V } (l_4 < z < L) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{z5} = M(z - l_1) + P \frac{(z - l_2)^2}{2} + q \frac{(z - l_3)^3}{6} - q \frac{(z - l_4)^3}{6} + C_5 \end{aligned} \quad (13)$$

Определим постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5 , из граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } z = l_1, \quad & \varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow C_1 = C_2 \\ \text{при } z = l_2, \quad & \varphi_2 = \varphi_3 \rightarrow C_2 = C_3 \\ \text{при } z = l_3, \quad & \varphi_3 = \varphi_4 \rightarrow C_3 = C_4 \\ \text{при } z = l_4, \quad & \varphi_4 = \varphi_5 \rightarrow C_4 = C_5 \end{aligned}$$

Учитывая выражение (16) получаем: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_{(0)}$

Интегрируя (19), получим выражения для прогибов:

$$\begin{aligned} \text{Участок I } (0 < z < l_1) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{z1} = C_1 z + D_1 \\ \text{Участок II } (l_1 < z < l_2) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{z2} = M \frac{(z - l_1)^2}{2} + C_2 z + D_2 \\ \text{Участок III } (l_2 < z < l_3) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{z3} = M \frac{(z - l_1)^2}{2} + P \frac{(z - l_2)^3}{6} + C_3 z + D_3 \\ \text{Участок IV } (l_3 < z < l_4) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{z4} = M \frac{(z - l_1)^2}{2} + P \frac{(z - l_2)^3}{6} + q \frac{(z - l_3)^4}{24} + C_4 z + D_4 \\ \text{Участок V } (l_4 < z < L) \quad & \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{z5} = M \frac{(z - l_1)^2}{2} + P \frac{(z - l_2)^3}{6} + q \frac{(z - l_3)^4}{24} - q \frac{(z - l_4)^4}{24} + C_5 z + D_5 \end{aligned} \quad (14)$$

Определим постоянные интегрирования D_1, D_2, D_3, D_4 и D_5 , из граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } z = l_1, \quad & y_1 = y_2 \rightarrow D_1 = D_2 \\ \text{при } z = l_2, \quad & y_2 = y_3 \rightarrow D_2 = D_3 \\ \text{при } z = l_3, \quad & y_3 = y_4 \rightarrow D_3 = D_4 \\ \text{при } z = l_4, \quad & y_4 = y_5 \rightarrow D_4 = D_5 \end{aligned}$$

Учитывая выражение (17) получаем $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{(0)}$

Тогда формула для углов поворотов сечений балки примет следующий окончательный вид:

$$\sum_{i=1}^n E_i I_{xi} \varphi_z = \varphi_0 \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} + \sum_{i=1}^n M_i (z - l_1) + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(z - l_2)^2}{2} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{(z - l_3)^3}{6} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{(z - l_4)^3}{6} \quad (15)$$

Соответственно, формула для прогибов примет окончательный вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} y_{(z)} = & y_0 \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} + \varphi_0 z \sum_{i=1}^n E_i I_{xi} + \sum_{i=1}^n m_i \frac{(z - l_1)^2}{2} + \\ & + \sum_{i=1}^n P_i \frac{(z - l_2)^3}{6} + \sum_{i=1}^n q_i \frac{(z - l_3)^4}{24} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{(z - l_4)^4}{24} \end{aligned} \quad (16)$$

Как видно, для определения прогибов и углов поворота балок данным методом начальных параметров достаточно знание лишь значений прогиба y_0 , угла поворота φ_0 в начале системы координат.

РЕЗЮМЕ

В данной статье описывается определение перемещений при изгибе консольной балки прямоугольного сечения составленного из n неоднородных материалов, обладающих различными значениями модулей упругости ($E_1, E_2 \dots E_n$) и неравными площадями сечений ($A_1, A_2 \dots A_n$) методом начальных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Издательство «Наука», 1972. – 541с.
2. Писаренко Г.С., Агарёв В.А., Квитка А.Л. и др. Сопротивление материалов. – Издательство «Техника», Киев, 1967. – 783с.
3. Тимошенко С.П., Дж. Гудьер. Теория упругости. - М.: Издательство «Наука», 1972 – 559с.
4. Дудяк А.И., Хмелев А.А., Сахнович Т.А., Гурковская О.И.. Особенности расчета на прочность составных балок из неоднородных материалов. – Минск, БНТУ, 2013 – 25с.

SUMMARY

This article describes the determination of the bending motion cantilever beam of rectangular cross-section composed of n heterogeneous materials with different values of the elastic moduli ($E_1, E_2 \dots E_n$) and uneven areas of sections ($A_1, A_2 \dots A_n$) by initial parameters method.

Поступила в редакцию 21.10.2013

ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ И РЕЖИМОВ РАБОТЫ НА ПОТЕРИ МОЩНОСТИ ВО ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ПАРАХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

к.т.н. Авсиевич А.М., Пронкевич С.А., студ. Балышева Н.О., студ. Михальков С.Л.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Снижение потерь механической энергии приводит не только к повышению общей энергоэффективности машинного агрегата, но и существенно повысит ресурс его узлов ввиду уменьшения интенсивности изнашивания поверхностей пар трения. В качестве критериев, определяющих потери энергии и относительную износостойкость элементов кинематических пар, можно принять работу или мощность трения, выделяемую на элементарном участке поверхности, во всей паре трения и в машинном агрегате в целом за один цикл его работы.

Согласно проведенному нами ранее анализу [1] работа трения, совершаемая в i -й момент цикла на j -м элементе поверхности, пропорциональна произведению напряжения на элементарный угловой путь $A_{трj} \cong \sigma_j \Delta\varphi_{21i}$, а мощность соответственно $P_{трj} \cong \sigma_j \omega_{21i}$, где $\Delta\varphi_{21i}$ – элементарный путь трения для данного i -го момента цикла работы, ω_{21i} – относительная угловая скорость звеньев 1 и 2 в i -й момент цикла. Для оптимизации конструкции и режимов работы необходимо рассчитывать работу или мощность трения во всех подвижных сопряжениях механизма, что является весьма трудоемкой задачей, реализуемой только с помощью специального программного обеспечения.

В данной работе предлагается методика сравнительной оценки потерь мощности и расчета распределения интенсивности изнашивания поверхностей трения на примере шатунных шеек коленчатого вала двигателя Д-242. В результате динамического анализа рычажного механизма с определением ориентацией векторов сил реакции относительно подвижных звеньев согласно [2] нашли, что характерные нагрузки на шатунные шейки при разных режимах работы находятся в пределах от 10 до 100 кН. При решении задачи Штаермана о поиске контактных напряжений при внутреннем контакте цилиндра с круговой полостью по методике [3] определили, что зона контакта, испытывающая давления более 1 МПа, находится в диапазоне от 15 до 25 градусов и практически не зависит от зазора в паре трения. При таком изменении углов контакта для разных значений сил реакций и выполнении динамического анализа за весь цикл с малым шагом расчетов по обобщенной координате в качестве характеристики потерь мощности на трение допустимо принять произведение силы реакции в паре трения на относительную угловую скорость звеньев $F_{12} \cdot \omega_{21}$. На графиках (рис. 1) показаны результаты расчета данного параметра в зависимости от обобщенной координаты механизма – угла поворота коленчатого вала. В четырехтактном двигателе обобщенная координата изменяется от 0 до 720 градусов. Внизу иллюстраций на рис. 1 приведено суммарное значение показателя $F_{12} \cdot \omega_{21}$ за полный цикл работы.

Анализ результатов показывает, что нагруженность шатунных шеек при скоростях вращения коленчатого вала до 200 рад/с определяется изменением давлений в двигателе, а суммарный показатель $F_{12} \cdot \omega_{21}$ увеличивается пропорционально росту угловой скорости начального звена ω_1 . С дальнейшим увеличением ω_1 он увеличивается в виде квадратичной зависимости, что обусловлено ростом сил инерции и их определяющим влиянием на величину реакции в паре трения. Также с ростом ω_1 увеличивается количество положений механизма, в которых показатель $F_{12} \cdot \omega_{21}$ достигает пиковых значений, при этом различия в нагруженности шатунной шейки в разных положениях уменьшаются.

Для определения наиболее нагруженных участков поверхности шатунных шеек необходимо знать, под каким углом к оси звена приложена сила реакции. Направление силы, приложенной к шатунной шейке отсчитывалось против часовой стрелки относительно оси X1. При динамическом анализе угол наклона реакции задается относительно звена, к которому реакция приложена, а при расчете напряжений должна быть указана координата точки приложения силы к цилиндрической поверхности вала (рис. 2). Поэтому для расчета контактных давлений на шатунной шейке коленчатого вала ОА необходимо с соответствующими значениями силы реакции указывать расчетные углы φ_{F21} , а не φ_{F12} . Графики координат точки приложения реакции приведены на рис. 3.

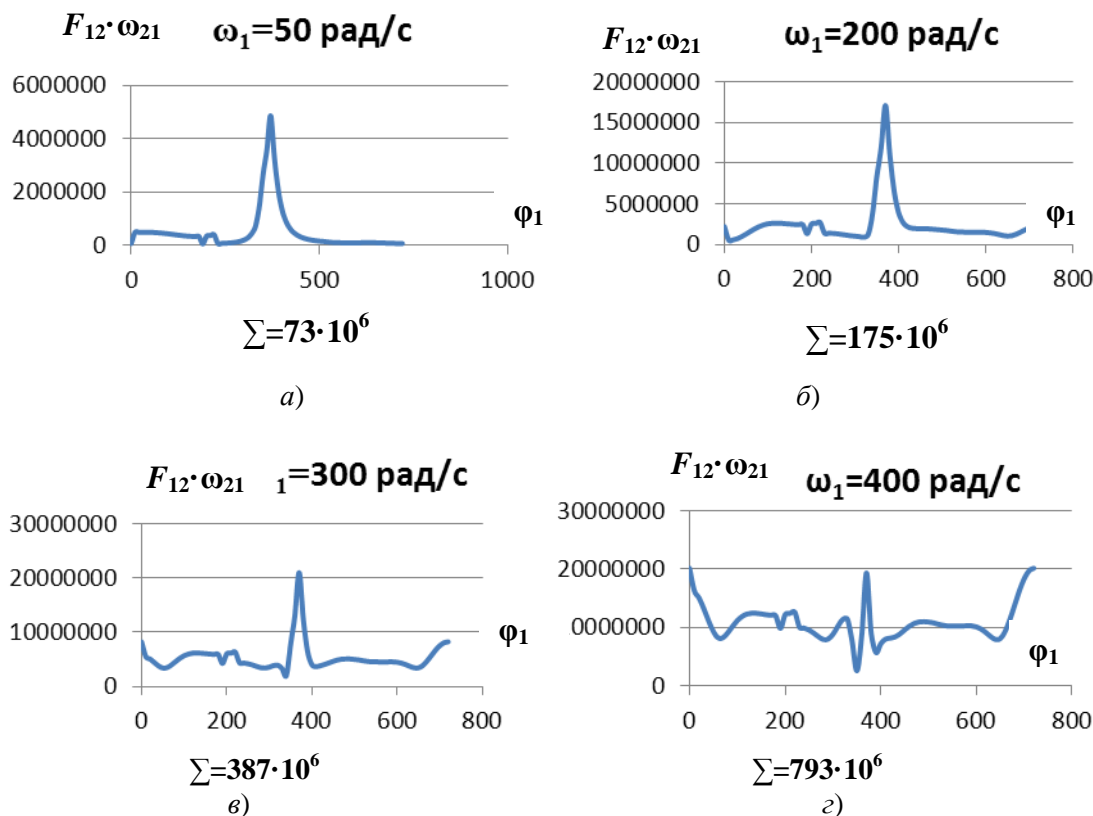


Рисунок 1. – Зависимость характеристики нагруженности пары трения «шатунная шейка коленчатого вала – вкладыш» от обобщенной координаты механизма при средних скоростях вращения коленчатого вала: а) 50 рад/с; б) 200 рад/с; в) 300 рад/с; з) 400 рад/с

Из рисунка 3 видно, что при разных скоростях вращения коленчатого вала наиболее нагруженными являются участки поверхности шатунных шеек в интервале координат $150^{\circ} - 200^{\circ}$. Для них характерен наибольший путь трения. Сопоставляя графики на рис. 1 и 3, видим, что при скорости вращения 200 рад/с максимальные мгновенные нагрузки испытывает участок поверхности с координатами около $0^{\circ} - 20^{\circ}$, что соответствует моменту детонации топливной смеси в начале такта расширения. С увеличением скорости вращения коленчатого вала на величину сил реакции большее значение оказывают силы инерции. В результате почти на всем отрезке цикла работы машины нагрузку воспринимает участок шатунной шейки с координатами $180 \pm 20^{\circ}$.

Изменение конструктивных параметров механизма – соотношения длин кривошипа и шатуна, а также смещение центра масс шатуна относительно оси шатунной шейки – не сказывается существенно на форме зависимостей $F_{12} \cdot \omega_{21}(\varphi_1)$ и $\varphi_{F_{21}}(\varphi_1)$. Суммарные показатели нагруженности за цикл $F_{12} \cdot \omega_{21}$ увеличиваются при приближении центра масс шатуна к оси шатунной шейки, что связано с увеличением в данном случае моментов сил инерции шатуна и его влиянием на величину реакции.

Полученные данные позволяют в дальнейшем разработать конструктивные решения, обеспечивающие повышение ресурса и уменьшение потерь на трение в двигателе. Предлагаемые методики расчета могут быть применены для исследования нагруженности кинематических пар не только рычажных, но и зубчатых, кулачковых и иных видов механизмов.

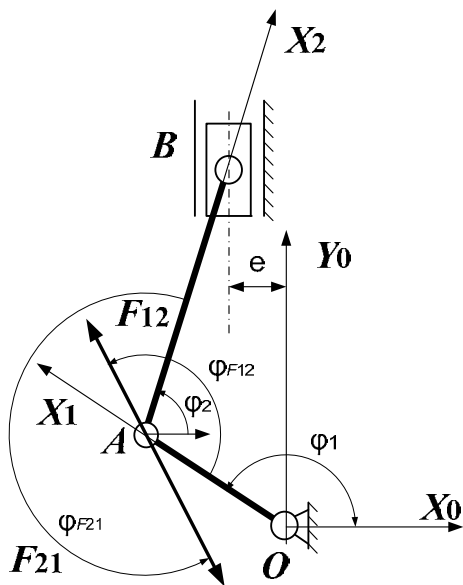


Рисунок 2. – Привязка сил реакций во вращательной паре A к звеньям кривошипно-ползунного механизма

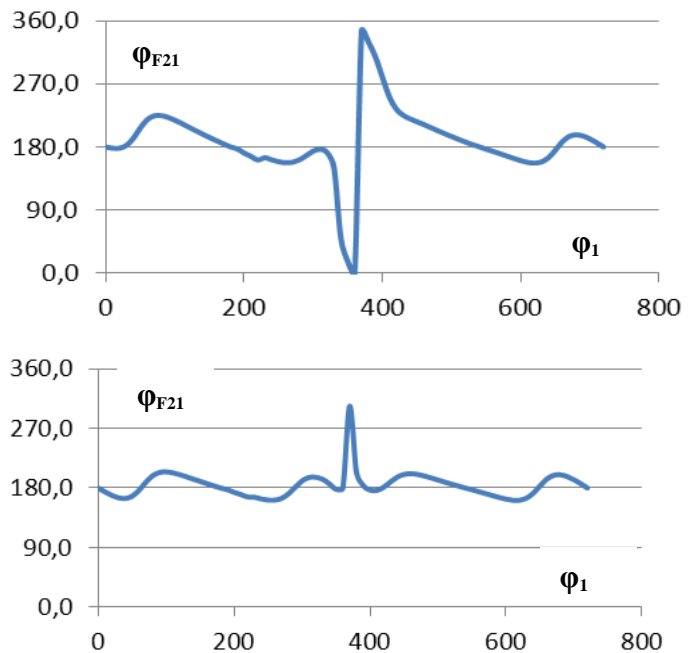


Рисунок 3 – Значения угловой координаты приложения силы реакции к шатунной шейке в зависимости от обобщенной координаты механизма при средних угловых скоростях коленчатого вала: а) 200 рад/с; б) 400 рад/с

РЕЗЮМЕ

Показателем, определяющим распределение по поверхности интенсивности изнашивания и потерь на трение за цикл работы можно принять произведение силы реакции на относительную скорость звеньев. С увеличением скорости вращения начального звена рычажного механизма показатель нагруженности увеличивается в квадратичной зависимости, что обусловлено ростом сил инерции и их влиянием на силы реакции. При этом зона нагружения для шатунных шеек коленчатого вала локализуется на участке вблизи линии, проходящей через оси шеек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авсиевич А.М., Пронкевич С.А., Балышева Н.О., Хват А.В., Иванов А.Ю. Моделирование нагруженности элементов вращательных кинематических пар Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Вып. 28. Мн.: БНТУ, 2013. – С. 173 – 177.
2. Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. К вопросу об определении износа во вращательных кинематических парах рычажных механизмов // Теоретическая и прикладная механика. Межведомственный сборник научно-методических статей. Вып. 23. – Мн.: БНТУ, 2008 – С. 178 – 181.
3. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении / В.М. Александров, Б.Л. Ромалис – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.

SUMMARY

The indicator loading distribution and friction losses on surface for the cycle of works is the product of reaction forces at relative speed links. With increase of leverage main link rotation speed it increases in the square-law dependence, due to the rising forces of inertia. Area of loading for the connecting rod crankshaft is localized to the area near to a line passing through the axis of necks.

Поступила в редакцию 03.06.2013

ИНТЕГРАЦИЯ САПР МОДЕЛЕЙ ЭНДОПРОТЕЗОВ ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА В КРОССПЛАТФОРМНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

студ. ¹ Мирейко Е.В., к.т.н. ¹ Громыко О.В.

Белорусский государственный университет, Минск

Внедрение моделей, построенных с помощью САПР (систем автоматизированного проектирования), в кроссплатформные приложения (т.е. приложения, работающие более чем на одной аппаратной платформе и/или операционной системе) является совершенно новой практикой. Проблема необходимости использования результатов построения, выполненных в САПР программах, в иных приложениях и сферах явно проявилась и нуждалась в решении. Поэтому новый этап развития САПР характеризуется динамичным расширением предметных областей их применения.

В широком круге задач существенную роль играет создание новых проблемно-ориентированных систем проектирования средств коррекции и замещения функций органов и систем для травматологии и ортопедии, а именно эндопротезов.

Требования повышения возможностей хирургического лечения и его эффективности привели к резкому росту и усложнению технического оснащения хирургов, включая сложнейшие робототехнические и компьютерные системы. В результате перед хирургами возникла проблема решения множества достаточно сложных технических задач, возникающих при использовании всего множества современного хирургического инструментария. Так как квалификация хирургов не включает в себя знание программ САПР, то при необходимости использования результатов проектирования возникают определенные трудности. Поэтому ставится задача создания прежде всего интуитивно понятного приложения, предоставляющего возможность хирургам без специализированных знаний программ САПР и без необходимости установки этих программ использовать спроектированные модели шаблонов эндопротезов.

Разработка необходимого приложения в таких условиях – довольно трудоемкий процесс, включающий в себя следующие этапы, причем каждый этап разработки включает в себя еще несколько задач и подзадач:

1. Корректное создание чертежей эндопротезов в программе САПР (в данном случае в программе AutoCAD) на основе которых базируется технология производства эндопротезов с помощью компьютерного моделирования и фрезерования на станках с числовым программным управлением (ЧПУ).
2. Адаптация шаблонов моделей эндопротезов для их дальнейшего использования без привязки к программе AutoCAD без потери информации.
3. Разработка централизованного банка адаптированных моделей эндопротезов, содержащего в себе различные виды эндопротезов и позволяющего подобрать необходимый экземпляр в соответствии со спецификой заболевания, травмы и иных критериев физического состояния пациента.
4. Непосредственно разработка кроссплатформного приложения, предназначенного для хирургов-ортопедов, занимающихся эндопротезированием тазобедренных суставов.

Для начала предоставим необходимые сведения об эндопротезировании тазобедренных суставов. Общая замена тазобедренного сустава является хирургической операцией, посредством чего пораженные болезнью хрящи и кости сустава замещаются искусственными материалами. Нормальный тазобедренный сустав можно представить шарниром, где головка выполняет роль шара, а вертлужная впадина роль розетки. Одновременная замена всех структур сустава включает хирургическое удаление и пораженной головки бедренной кости, и розетки с одновременной заменой специальным эндопротезом, имитирующим шарнир тазобедренного сустава. Он состоит из металлического искусственного шара и искусственной впадины, в которой он скользит. Эндопротез устанавливается с помощью специального костного цемента. Кроме того, возможно проведение протезирования без использования цемента. В этом случае костная ткань прорастает из прилегающих участков в микропоры эндопротеза, Данный вариант дает лучшие результаты, большую долговечность, он предпочтителен у молодых пациентов. На Рисунке 1 представлен эндопротез тазобедренного сустава и его компоненты



Рисунок 1. – Эндопротез тазобедренного сустава и его компоненты

Создание чертежей эндопротезов в программе AutoCAD производится на основе имеющихся табличных данных, которые получены в результате экспериментальных исследований, проведенных медиками. Для примера возьмем один из видов эндопротезов тазобедренных суставов. Размерные параметры для него указаны в Таблице 1.

Таблица 1. – Размерные параметры для бедренного компонента эндопротеза

Размер (мм)	Длина эндопротеза (мм)	Угол наклона (град)	Горизонтальный сдвиг			Вертикальный сдвиг			Длина шейки		
			-3	0	3	-3	0	3	-3	0	3
7	115	140	37,1	39	40,9	28,9	31,2	33,5	31,4	34,4	37,4
8	120	140	37,4	39,3	41,2	29	31,3	33,6	31,4	34,4	37,4
9	125	135	37,5	39,6	41,7	29,3	31,5	33,6	31,8	34,8	37,8
10	130	135	37,8	39,9	42	29,4	31,6	33,7	31,8	34,8	37,8
11	135	130	44,9	47,2	49,5	29,9	31,8	33,7	36,7	39,7	42,7
12	140	130	45,2	47,5	49,8	30	32	33,9	36,7	39,7	42,7

Где параметры «горизонтальный сдвиг», «вертикальный сдвиг», «угол наклона», «длина шейки» обозначены на Рисунке 2.

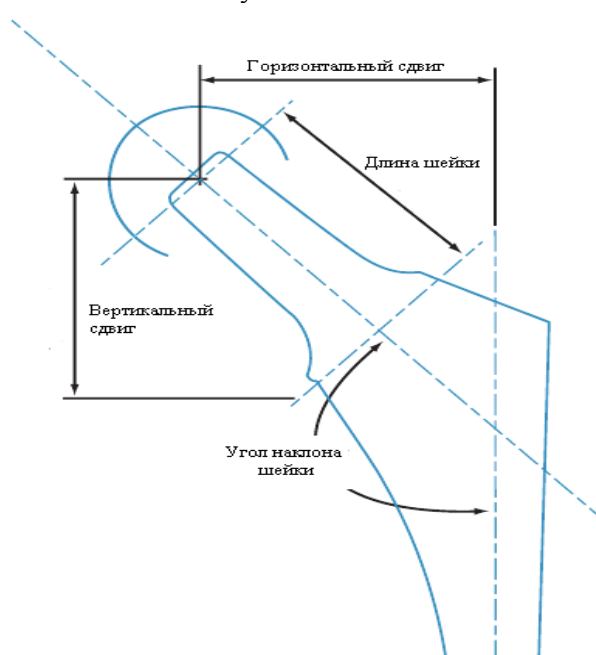


Рисунок 2. – Изменяемые параметры бедренной части эндопротеза

Для создания полноценной трехмерной модели эндопротеза требуется сначала создать двухмерную модель. Она представляется на чертеже в двух видах: в виде AP (Anterior-Posterior), т.е. вид спереди-сзади, и в виде LAT (Lateral), т.е. в виде сбоку. Для корректного создания модели, т.е. с соблюдением всех анатомических свойств, требуется точный подбор функций моделирования. При создании чертежа использовались такие объекты как разомкнутые сплайны (созданные функцией Spline), линии (функция Line), полилинии (функция Polyline), дуги (функция Arc), окружности (функция Circle). Следующий этап – создание трехмерной модели на основе чертежа и дополнительного рисунка с указанием формы в третьем направлении и толщины. Далее трехмерную модель используем для создания управляющих программ для станка с ЧПУ, как и чертеж в формате .dxf, содержащий в себе все необходимые допуски и контуры.

На Рисунке 3 можно увидеть чертеж шаблона модели и полученную трехмерную модель.

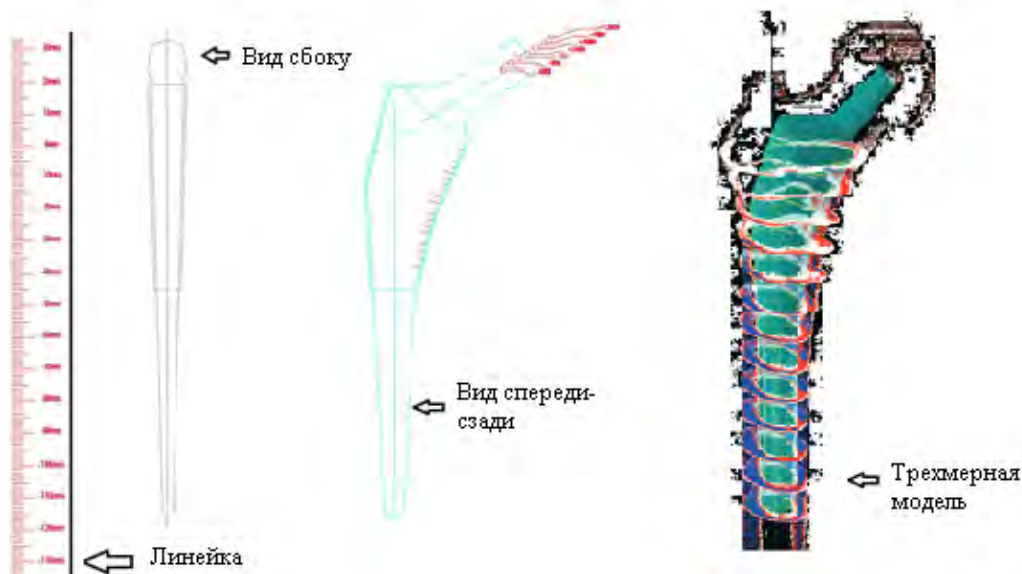


Рисунок 3. – Чертеж шаблона модели и полученная трехмерная модель

Непосредственно для нашей дальнейшей работы необходим чертеж в формате .dxf, который нужно адаптировать таким образом, чтобы в дальнейшем не возникали привязки к программе AutoCAD. Так как все САПР программы создают векторные изображения (объекты векторной графики являются графическими изображениями математических функций), это дает преимущество в том, что любое перемещение, масштабирование, вращение не ухудшает качества изображения. И для обработки чертежа используем векторный графический редактор Adobe Illustrator. В нем у нас есть возможность преобразовать наш чертеж формата .dxf в векторное изображение другого формата, который будем использовать для формирования базы данных шаблонов. Также в Adobe Illustrator надо создать объекты и символы, которыми можно управлять во время использования разрабатываемого приложения, а именно ось модели и точки, вокруг которых можно вращать модель.

Для упрощения работы был написан файл команд событий, который значительно упрощает работу. Он создает необходимые пользовательские «горячие клавиши», которые используются на этой стадии обработки. Создание пользовательского управления позволяет объединить несколько команд в одну (например, комбинация клавиш «Shift + F2» создает background и symbol для него) или использовать алгоритм поиска похожих элементов для их удаления или блокировки.

Используя необходимые инструменты программы Adobe Illustrator, создаются символы-окружности, которые предназначены для вращения моделей и расположения стрелок, обозначающих, каким образом происходит вращение. Далее создается ось модели и линейка, которая позволяет соблюсти масштаб. Управляемыми символами становятся все изображенные на чертеже объекты, это позволит отображать только необходимые в том или ином случае объекты, а остальные скрыть. Т.е. каждый вид чертежа (AP и LAT) содержит следующие управляемые символы: точки вращения модели, стрелки, обозначающие вращение, ось, линейка, точки отступа на шейке, основа и заливка.

После такой обработки чертежа полученное векторное изображение сохраняется в формате .ai. Такое векторное изображение занимает в среднем 1.5 Мб, что является довольно большим изображением, ведь при создании централизованного банка моделей эндопротезов например в количестве 50 штук, т.е. при наличии двух видов для каждой модели, занимаемое ими на сервере место будет равно 150 Мб. А при несомненном росте количества моделей в базе данных на сервере потребуется много места, что приводит к его перегруженности. Поэтому возникла необходимость уменьшения размера шаблона модели без потери свойств векторных изображений. Для этих целей используем программу Adobe Flash Professional, которая позволяет импортированные изображения в формате .ai преобразовать в формат .fla, а затем экспортировать в формате .swf без потери качества и с сжатием каждого изображения до размера в среднем 2.5 КБ, что в среднем в 600 раз меньше исходного. Также этот формат обладает свойством кроссбраузерности, т.е. может воспроизводиться на устройствах с различными операционными системами. Полученный файл формата .swf является конечным этапом создания адаптированного шаблона модели эндопротеза.

Следующий этап – создание приложения, написанного на следующих языках и технологиях программирования: Flex (используется для организации работы визуальной части, связанной с изображением шаблонов), PHP (описывает интерфейс и функциональную часть приложения), SQL (создание баз данных для хранения шаблонов и взаимодействие с ней), XML (используется для написания правил взаимодействия шаблонов между собой). Работа приложения происходит следующим образом: сначала хирург запускает приложение, открывает полученный рентгеновский снимок пациента, с помощью совмещения программного маркера с рентгеновским маркером на снимке получает рабочую область, далее хирург может из предложенного списка шаблонов эндопротезов подобрать необходимый по размеру, форме, характеру повреждений и физических особенностей пациента. Затем с помощью простейших средств рисования и измерения расстояния может оставить заметки и сохранить процедуру, чтобы потом использовать ее для подготовки к операционному вмешательству. Данное приложение было реализовано и теперь успешно используется в реальной практике хирургов. Оно позволяет хирургам выполнять срочные консультации в экстренных случаях до прибытия в больницу, а также оказывать помощь коллегам из других стран.

Разработанная общая схема внедрения созданных моделей САПР в кроссплатформные приложения с использованием новых написанных модулей позволяет хирургам-ортопедам использовать созданное приложение вне зависимости от уровня технических знаний и своего местоположения, имея под рукой только свой компьютер и доступ в Интернет.

РЕЗЮМЕ

В данной работе представлен метод интеграции созданных САПР моделей в кроссплатформное приложение, разработанное для хирургов ортопедов, применение которого позволяет хирургам без особых знаний технических наук проводить предоперационное планирование. Приложение позволяет на основе рентгеновских снимков подобрать размер эндопротеза, провести позиционирование и необходимые измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Янсон, Х. А. Биомеханика нижней конечности человека / Х. А. Янсон. -Рига: Зинатне, 1975.
2. Бегун, П. И. Биомеханические системы человека: Учеб. пособие / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын, Ю. А. Шукейло- СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2000.-188 с.
3. Безгодков Ю. А. Оптимизация эндопротезирования тазобедренного сустава на основании медико-технической оценки различных видов эндопротезов. дисс. докт. мед. наук. - СПб., 1999.
4. Ли, К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE) / К. Ли. СПб.: Питер, 2004. - 560
5. Буланже, Г. В., Инженерная графика. Проецирование геометрических тел / Г. В. Буланже, И. А. Гуштин, В. А. Гончарова. М.: Высшая школа, 2003. -184 стр.
6. Гультяев, А. К. Проектирование и дизайн пользовательского интерфейса / А. К. Гультяев, В. А. Машин. СПб.: Корона-Принт, 2000. - 352 с.
7. Коннолли, Т. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение: Теория и практика: Пер. с англ. / Т. Коннолли, К. Бегг, А. Страчан. 3-е изд. -М.: Вильямс, 2003. 1440 с.
8. Бин, Дж. XML для проектировщиков. Повторное использование и интеграция / Дж. Бин. М.: КУДИЦ-Образ, 2004. - 256 с.

SUMMARY

This paper presents a method of integration of CAD-based models of hip implants into cross-platform application developed for orthopedic surgeons, the usage of which helps surgeons with no technical knowledge to do pre-operative planning of orthopedic surgery. The application allows for overlaying of prosthesis on radiological images, and includes tools for performing measurements and for positioning of templates.

Поступила в редакцию 11.09.2013

УСТАНОВЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИМИ ПРОЦЕССЫ ДРОБЛЕНИЯ КАЛИЙНОЙ РУДЫ

асп. Шпургалова М.Ю., д. ф.-м. н. Василевич Ю.В.
УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Как было установлено в работе [2], большинство прикладных оптимизационных задач горного производства могут быть формализованы в классическом представлении в виде выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_j(\bar{X}_N, \bar{A}, t) \rightarrow \text{extr}, \\ \Phi_r(\bar{X}_N, \bar{A}, t) \leq 0 \quad r \in [1, R], \\ Q_s(\bar{X}_N, \bar{A}, t) = 0 \quad s \in [1, S], \\ \bar{X}_N \in \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \\ x_i \in [x_{i\min}, x_{i\max}] \quad i \in [1, N], \\ \bar{A} \in \{a_1, a_2, \dots, a_A\} \end{array} \right. \quad (1)$$

где выражение $F_j(\bar{X}_N, \bar{A})$ формализует достижение экстремальных значений критериями задачи; $\Phi_r(\bar{X}_N, \bar{A})$ и $Q_s(\bar{X}_N, \bar{A})$ - соответственно R ограничений и S условий, которым должны удовлетворять переменные параметры модели, \bar{X}_N - неизвестные переменные, полно и однозначно характеризующие процесс измельчения.

Применительно к процессу измельчения целевая функция в выражении (1) в общем случае будет иметь вид

$$F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_N) \rightarrow \text{extr}, \quad (2)$$

где $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_N$ - группы параметров, полно и однозначно характеризующие процесс измельчения.

Ранее были определены группы параметров [2], характеризующие процесс измельчения. Это технические показатели дробильных установок, характеристики режима процесса обогащения и физико-механические характеристики горной породы. Тогда выражение (2) будет переписано в виде

$$F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3) \rightarrow \text{extr}. \quad (3)$$

При конкретных испытаниях дробилки было установлено, что

$$F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \dots, \bar{X}_N) \approx K_1 f(\bar{X}_1) + K_2 f(\bar{X}_2) + K_3 f(\bar{X}_3),$$

где \bar{X}_1 - технические показатели дробильных установок, \bar{X}_2 - характеристики режима процесса обогащения, \bar{X}_3 - физико-механические характеристики горной породы, $K_i, i = 1..3$ - поправочные коэффициенты, рассчитанные опытным путём в соответствии с конкретными показателями. Так же была установлена связь между техническими параметрами дробильной установки: количеством оборотов ротора дробилки, величиной загрузки и удельной потребляемой мощностью.

Следующей группой параметров, характеризующих процесс измельчения, между которыми будет установлена зависимость – это физико-механические параметры измельчаемого материала и энергия, затраченная на измельчение данного материала.

Затраты энергии на измельчение (разрушение) материала зависят от производительности размольной машины, а также от следующих характеристик:

1. физико-механических свойств твёрдого материала (предел прочности материала σ_B , его модуль упругости E);
2. геометрических параметров разрушаемого куска (его объём или линейный размер);
3. степени измельчения z_n – отношения диаметра D исходных кусков, поступающих на дробление, к диаметру d наиболее крупных кусков, прошедших дробление, т.е. $z_n = D/d$;
4. выбранного способа измельчения – этот фактор чаще всего является определяющим.

Каждому способу измельчения отвечает своя физическая модель разрушения куска и соответствующее ей математическое описание.

В настоящее время в оценке затрат энергии при разрушении твёрдого материала при измельчении способами раздавливания, раскалывания, удара затраты энергии A на разрушение куска до конечного размера d_k при степени измельчения z_n следуют гипотезе Кирпичёва, согласно которой:

$$A = \frac{\pi \sigma_B^2 d_k^3}{12E} (z_n^3 - 1) \text{ Дж.} \quad (4)$$

Однако, оценивая практические результаты, полученные на основе данной гипотезы, необходимо учитывать следующие обстоятельства.

1. Прочностные характеристики конкретного твердого материала, подлежащего измельчению (минерала, породы и т.п.), бывают различными для разных месторождений и размеров куска: сказываются структурные дефекты в материале (плохо воспроизводимые по величине и распределению в куске), влияющие на прочность материала и затраты энергии на его разрушение.
2. Даже в случае абсолютной строгости модели разрушения твердого материала и её математического описания для каждого способа измельчения в силу комбинированного воздействия рабочего органа размольной машины на материал невозможно количественно оценить вклад различных способов измельчения, присущих конкретной размольной машине; отсюда – невозможность точного расчёта затрат энергии на измельчение в реальной размольной установке.

Цель настоящего исследования заключается в том, чтобы в теоретические формулы внести корректирующие эмпирические поправки, которые будут отражать реальные затраты энергии. Предлагается следующий подход: теоретические фрагменты формул учитывают влияние основных факторов, а согласие с реальными затратами энергии достигается за счёт эмпирических поправочных коэффициентов (так как теоретические фрагменты не всегда базируются на основных эффектах реального процесса разрушения твердого материала).

Основываясь на предыдущих расчётах, полученных в работе [1], и опытных данных [3], выведем зависимость, отражающую практическую суть гипотезы Кирпичёва, применительно к процессу дробления калийной руды на установке ударно-центробежной дробилки ДЦ-1,6.

Рассмотрим состав, количество и параметры калийной руды, поступающей на обогащение. В результате обработки данных, исследуя состав 1 т руды (занимаемый объём 2 м^3) различного состава класса крупности от 0,1 до 0,7 м, составим следующую таблицу

Таблица 1 – Количество и объём руды различного состава, поступающей на обогащение.

Диаметр образцов, поступающих на дробление $D_N, \text{м}$	Объём образца заданного диаметра, поступающих на дробление V_N	Количество образцов данного размера N	Общий объём образцов заданного диаметра, поступающих на дробление	Процентное содержание данного класса в выбранном объёме %
0,1	0,000523	5	0,002617	0,13
0,2	0,004187	6	0,02512	1,23
0,3	0,01413	9	0,12717	6,22
0,4	0,033493	18	0,60288	29,50
0,5	0,065417	10	0,654167	32,01
0,6	0,11304	4	0,45216	22,13
0,7	0,179503	1	0,179503	8,78
Суммарный объём выборки			2,043617	

Таблица 2 – Результаты испытания процесса дробления сильвинитовой руды в открытом цикле с использованием дробилки СМ-170В.

Обороты ротора, об/мин	Производительность цикла, т/ч	Гранулометрический состав, % по фракциям, мм			
		+10	+5	+1	-1
450	272	3,3	12,0	45,3	39,4
	380	4,6	12,3	45,4	37,7
	736	10,9	16,3	39,5	33,3
550	224	2,1	12,9	43,6	41,4
	441	4,5	14,1	41,7	41,7
	599	4,9	14,0	42,1	39,0
650	336	1,3	11,0	41,3	46,4
	446	2,3	13,8	41,5	42,4
	638	3,4	14,9	48,3	33,4
750	137	2,3	9,9	40,1	50,0
	301	1,9	11,1	42,0	46,9
	395	1,2	10,2	45,5	43,1

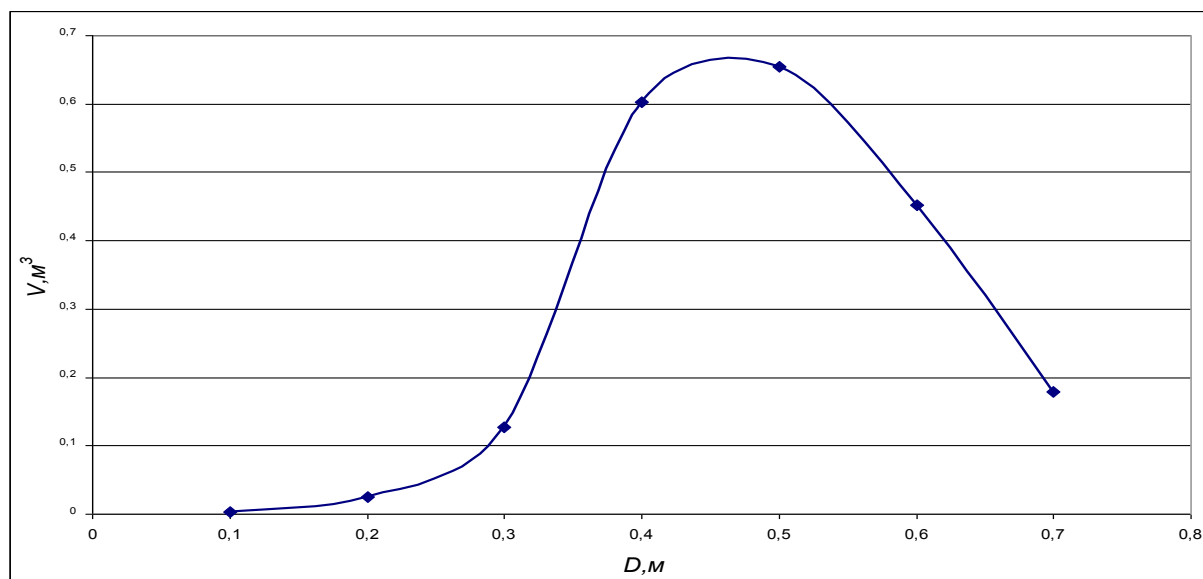
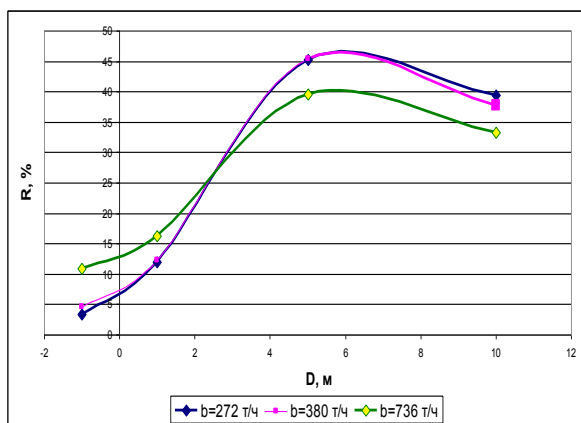
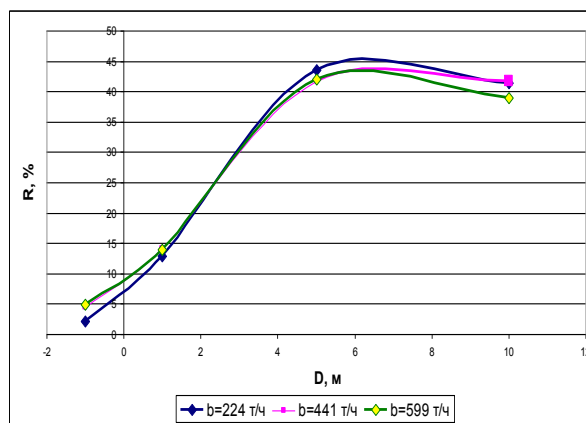


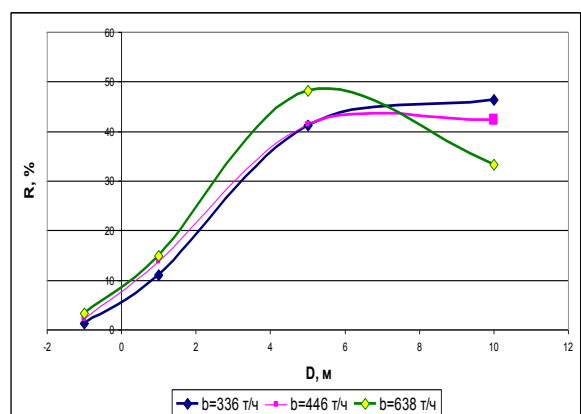
Рисунок 1. - Изменение состава руды в зависимости от объема соответствующих образцов на дробление



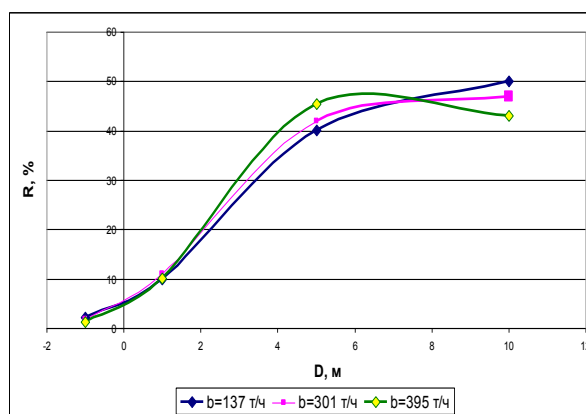
Гранулометрический состав дробленого продукта при количестве оборотов ротора $n=450$



Гранулометрический состав дробленого продукта при количестве оборотов ротора $n=550$



Гранулометрический состав дробленого продукта при количестве оборотов ротора $n=650$



Гранулометрический состав дробленого продукта при количестве оборотов ротора $n=750$

Рисунок 2. - Зависимость между процентным соотношением руды различного гранулометрического состава.

Как видно из графических зависимостей, построенных выше, распределение руды, поступающей на обогащение, и руды на выходе различного гранулометрического состава, класса крупности от -1 мм до $+10$ мм имеет нормальное распределение. Кроме того, известен химический состав образцов, поступающих на измельчение: 95-98% сильвина и галита и 2-5% нерастворимого остатка. Поэтому формула (4) в отношении процесса обогащения калийной руды будет более достоверной, если её переписать в виде суммы отдельных компонент – составляющих калийной руды:

$$A = \frac{\pi P_{KCl} \sigma_{KCl}^2}{12 E_{KCl}} \cdot \sum_{k=1}^K d_k^3 P_k \cdot \sum_{n=1}^N P_n \left[\left(\frac{D}{d} \right)_n^3 - 1 \right] + \frac{\pi P_{NaCl} \sigma_{NaCl}^2}{12 E_{NaCl}} \cdot \sum_{k=1}^K d_k^3 P_k \cdot \sum_{n=1}^N P_n \left[\left(\frac{D}{d} \right)_n^3 - 1 \right] + (1 - P_{KCl} - P_{NaCl}) \cdot A_{NO} \quad (5)$$

где P_{KCl}, P_{NaCl} – процентное содержание сильвина и галита в исходном образце руды, $\sigma_{KCl}, \sigma_{NaCl}$ – предел прочности материала соответствующих компонент, E_{KCl}, E_{NaCl} – модули Юнга, A_{NO} – энергия, затраченная на разрушение компонента нерастворимого остатка в образце.

Практическая значимость формулы (5) состоит в том, что изначальный продукт дробления был разбит на 7 классов крупности, от 10 см до 70 см в диаметре, а так же рассчитано процентное соотношение, занимаемое ими в общем объеме поступающей на дробление руды. Поскольку куски руды, поступающие на измельчение, имеют нормальное распределение, то, очевидно, что с наименьшей погрешностью можно рассчитать значение энергии, идущей на разрушение образцов, если представить каждый класс в виде суммы соотношений $\frac{D_{k+1}}{d_k}$, умноженное на процентное

содержание данного класса в исходном объёме. Где $D_{k+1} - d_k = 0,1$. Кроме того, поскольку исходная руда имеет сложный химический состав, то энергия идущая на разрушение образца, состоит из суммы энергий, затраченных на разрушение основных компонент, его составляющих.

Таким образом, основываясь на фундаментальной теории разрушения, в соответствии с гипотезой Кирпичёва, была выведена зависимость между энергией, идущей на разрушение образца калийной руды и его физико-механическими, а так же химическими параметрами.

РЕЗЮМЕ

Установлена зависимость между физико-механическими параметрами процесса обогащения калийной руды. Была выведена формула, отражающая связь между прочностью, линейными размерами и количеством содержащегося вещества в исходной руде, поступающей на обогащение и энергией, необходимой для разрушения данного образца до предельных размеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Василевич, Ю.В. Оптимизационная модель процесса дробления калийных руд/ Ю.В. Василевич, М.Ю. Шпургалова, В.В. Сапешко // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2013г, вып.28. – С.216-218.
2. Шпургалов Ю.А. Компьютерное моделирование принятия решений в производственных задачах: монография/ Ю.А. Шпургалов. – Минск: БНТУ, 2009. – 217 с.
3. Выполнить исследования и провести опытно-промышленные испытания замкнутого цикла дробления калийной руды на 4 РУ с использованием различных типов дробилок и модернизированного грохота ГИТ-71М с целью улучшения грансостава дробленого продукта: отчет о НИР/ОАО «Белгорхимпром»; рук. В.В. Сапешко. – Минск, 2007. – 56 с. - №ГР 400.В.2005-2006.

SUMMARY

In this work, the dependence between the physical and mechanical parameters of potash ore beneficiation process. On the basis of existing theory of destruction was a formula that reflects the relationship between the strength of linear dimensions and amount of a substance contained in the original ore coming to the enrichment and energy- it necessary to break up the sample size limits. Just it was shown that the derived formula, compared with the existing hypothesis gives more reliable values as based on practical results.

Поступила в редакцию 12.09.2013

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЕМКОСТЕЙ ПОЖАРНЫХ АВТОМОБИЛЕЙ

к. ф.-м. н. ¹ Мартыненко Т.М., ² Пранкевич С.А., к. т. н. ¹ Кулаковский Б.Л.

¹ ГУО «Командно-инженерный институт» МЧС Республики Беларусь, Минск

² УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Оболочками в теории упругости называют пространственные упругие тела, одно измерение которых мало по сравнению с двумя другими. Они часто применяются в качестве перекрытий, куполов в различных строительных сооружениях, а также в машино-, авиа-, судостроении и других отраслях народного хозяйства в качестве высокопрочных элементов машин и приборов общего и специального назначения. Теоретические основы расчета оболочек на прочность, колебания и устойчивость заложены в работах таких ученых, как В.З. Власов, И.Н. Векуа, И.И. Ворович, А.Л. Гольденвейзер, Г.И. Михасев, А.Н. Гузь, А.И. Лурье, Н.А. Кильчевский, В.В. Новожилов, Х.М. Муштари, А. Ляв, В. Флюгге, С.П. Тимошенко, Э. Рейснер, Л. Доннел и др., которые в своих трудах вывели разрешающие системы уравнений общей, безмоментной и моментной теорий, выполнили решение многочисленных задач при различных предположениях относительно законов деформирования оболочек по толщине и т.д. Эти основополагающие уравнения используются и в настоящее время при решении различных задач расчета оболочек на прочность, исследовании их колебаний и устойчивости.

В частности огромное практическое значение имеет применение выше названных теорий в решении задач оптимального проектирования конструкций, таких как, например, емкостей пожарных автомобилей.

Форма поперечного сечения и размерно-весовые параметры ёмкости во многом зависят от компоновки и назначений пожарных аварийно-спасательных автомобилей (ПАСА). На вооружении подразделений по чрезвычайным ситуациям находятся разнообразные ПАСА для перевозки огнетушащих веществ: воды, пенообразователя, порошка. Эти вещества перевозятся в ёмкостях различной формы:

- прямоугольного и эллиптического сечения, которые применяются на пожарных автоцистернах;
- цилиндрического сечения – на автомобилях порошкового пожаротушения.

При проектировании ПАСА эллиптические оболочки применяются наравне с цилиндрическими и прямоугольными, однако обладают более сложными геометрическими параметрами и их расчет представляет определенных интерес.

Зададим эллиптическую оболочку произвольного поперечного очертания. Линиями главной кривизны в данном случае будут направляющие S и образующие X цилиндра, которые и примем в качестве криволинейных ортогональных координат поверхности. При этом криволинейная координата X будет измеряться вдоль образующих от одного из оснований цилиндра, а криволинейная координата S - вдоль направляющих от одной из образующих цилиндра.

Для решения такой задачи привлечем общую теорию тонких оболочек. При этом имеется в виду, что конструкция оболочки удовлетворяет условиям существования безмоментного напряженного состояния, согласно которым эллиптическая оболочка должна быть достаточно короткой, иметь поперечное сечение плавного очертания с плавно изменяющимися толщиной, радиусом кривизны сечения и плавным изменением нагрузки, действующей на оболочку.

Перемещения u , v и w отсчитываются по направлениям касательных к криволинейным координатам X , S и по нормали \bar{e}_n . Если длина оболочки L , тогда ее торцевые сечения будут определяться координатами $x = 0$ и $x = L$. Обозначим радиус кривизны поперечного сечения оболочки через $r(s)$. Этот радиус будет функцией только криволинейной координаты s . Оболочка нагружена равномерным давлением p . Под действием этого давления в оболочке возникают усилия, T_1 – направлено вдоль по образующей, а усилие T_2 – по касательной к направляющей, $S(x; s)$ – обобщённые растягивающие и касательные силы.

Для определения возникающих в оболочке усилий воспользуемся системой дифференци-

альных уравнений равновесия элемента оболочки, находящейся в безмоментном напряженном состоянии. Подставим в эту систему дифференциальных уравнений значения параметров Ляме срединной поверхности некруговой цилиндрической оболочки $A_1 = A_2 = 1$, а также значения главных радиусов кривизны $R_1 = \infty$, $R_2 = r(s)$.

В результате приходим к следующей системе уравнений [1]:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + q_1 = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial s} + q_2 = 0; \quad T_2 = q_n r(s). \quad (1)$$

Полученная система интегрируется в замкнутом виде. При этом одно из основных усилий безмоментной оболочки T_2 дается в явном виде. Это усилие не зависит от x , т. е. по длине оболочки не меняется.

Сделав аналогичную подстановку A_1 , A_2 и R_1 , R_2 в систему, получим систему дифференциальных уравнений для определения перемещений безмоментной цилиндрической оболочки [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E\delta} (T_1 - \mu T_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\omega}{r(s)} = \frac{1}{E\delta} (T_2 - \mu T_1); \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E\delta} S. \end{aligned} \quad (2)$$

Полученная система также интегрируется в замкнутом виде.

Поскольку на оболочку действует только равномерное давление, в полученных уравнениях (1) и (2) следует положить $q_1 = q_2 = 0$; $q_n = p$. Тогда вместо системы (1) будем иметь:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial s} = 0; \quad T_2 = q_n r(s). \quad (3)$$

Рассмотрим статически определимый вариант граничных условий на торцевых сечениях некруговой оболочки, прежде чем производить интегрирование полученных систем дифференциальных уравнений (2) и (3) примем:

$$T_1 = 0, \quad v = 0, \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = L \quad (4)$$

Теперь произведем интегрирование системы (3). Из третьего уравнения системы (3) усилие T_2 уже определено и равно:

$$T_2 = pr(s). \quad (5)$$

Подставляя (5) во второе уравнение (3), получим $\frac{\partial S}{\partial x} + p \frac{dr}{ds} = 0$.

Проинтегрировав полученное равенство по x , приходим к следующему выражению для касательного усилия S , $S = -px \frac{dr}{ds} + f_1(s)$ где $f_1(s)$ неизвестная функция.

В силу симметрии оболочки, граничных условий и нагрузки относительно среднего сечения $x = \frac{L}{2}$, касательные усилия в этом сечении должны отсутствовать, что дает основание записать $-p \frac{L}{2} \frac{dr}{ds} + f_1(s) = 0$.

Таким образом, функция $f_1(s)$ определена, и касательное усилие будет равно:

$$S = p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{dr}{ds}. \quad (6)$$

Взяв производную по s от (6) и подставив ее в первое уравнение (3), получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{d^2 r}{ds^2} = 0.$$

Проинтегрировав последнее равенство по x , будем иметь:

$$T_1 = -p \left(x \frac{L-x}{2} \frac{d^2 r}{ds^2} + f_2(s) \right) \quad (7)$$

где $f_2(s)$ - вторая неизвестная функция.

Используя граничные условия (4), из выражения (7) находим $f_2(s) = 0$, и усилие T_1 оказывается равным:

$$T_1 = -px \frac{L-x}{2} \frac{d^2 r}{ds^2} \quad (8)$$

Таким образом, при данном варианте граничных условий мы определили все усилия, не прибегая к определению перемещений оболочки. Однако это не всегда оказывается возможным. Выпишем окончательные формулы для усилий цилиндрической оболочки при статически определенном варианте граничных условий:

$$T_1 = -px \frac{L-x}{2} \frac{d^2 r}{ds^2}; \quad T_2 = pr(s); \quad S = p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{dr}{ds}. \quad (9)$$

Формулы (9) при заданной форме поперечного сечения и размерах оболочки дают возможность определить усилия в любой точке оболочки.

Примем следующие обозначения: a – большая полуось эллипса, b – малая полуось эллипса; φ – угол, образуемый нормалью к эллипсу с его малой осью, $r(\varphi)$ – радиус кривизны эллипса, ε – эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}$, F – фокус эллипса (рис. 1).

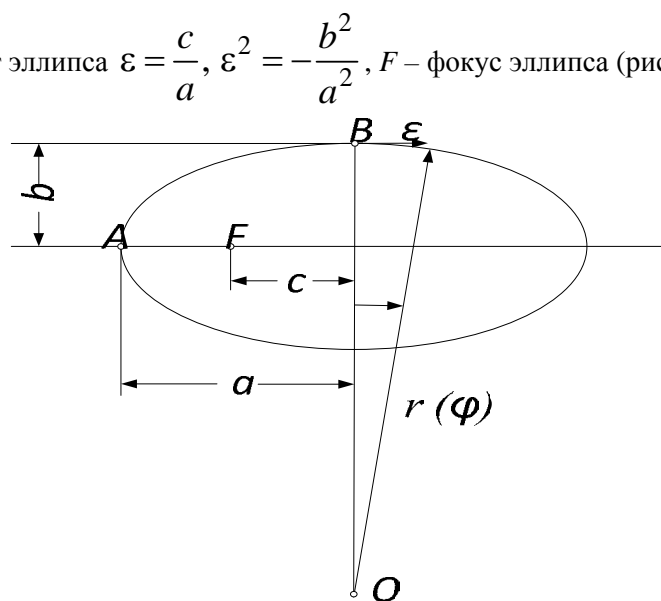


Рисунок 1. - Эллиптическая оболочка произвольного поперечного очертания

Радиус кривизны эллипса $r(\varphi)$ определяется по выражению, известному из аналитической геометрии [3]:

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a} \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (10)$$

Продифференцируем выражение (10) от радиуса кривизны r по s до четвертого порядка включительно, принимая во внимание соотношение $ds = rd\varphi$. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{\sin 2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}; \quad \frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{3a}{b^2} \varepsilon^2 \frac{\cos 2\varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}; \\ \frac{d^3 r}{ds^3} &= -\frac{6a^2}{b^4} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) \cos^2 \varphi \right) \sin 2\varphi; \\ \frac{d^4 r}{ds^4} &= -\frac{6a^3}{b^6} \varepsilon^2 \left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi \right)^{\frac{3}{2}} \left(\left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \right) \cos 2\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив соотношения (11) в зависимости (9), придем к следующим формулам для усилий:

$$\begin{aligned} T_1 &= -px \frac{L-x}{2} \frac{3a}{b^2} \varepsilon^2 \frac{\cos 2\varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}; \\ T_2 &= p \frac{b^2}{a} \frac{1}{\left(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi \right)^{\frac{3}{2}}}; \\ S &= -p \left(\frac{L}{2} - x \right) \frac{3}{2} \varepsilon^2 \frac{\sin 2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как при расчетах нас интересуют наибольшие значения усилий, напряжений и перемещений, то и произведем их определение.

Усилие T_2 достигает максимума при наибольшем значении r , т. е. в концах малой полуоси эллипса $\varphi = 0$, $T_2 = p \frac{b^2}{a}$.

Касательное усилие достигает наибольшего значения в торцевых сечениях оболочки $x = 0$ и $x = L$. Определим, в какой точке направляющей этих сечений касательное напряжение имеет максимальное значение. Поскольку усилие S пропорционально $\frac{dr}{ds}$ то и максимум S соответ-

ствует максимуму $\frac{dr}{ds}$. Взяв производную по s от $\frac{dr}{ds}$ и приравняв ее нулю, определим значение φ , при котором усилие S имеет максимум. Получим

$$\cos 2\varphi - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi = 0. \quad \text{Откуда } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2 - \varepsilon^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\sqrt{2 - \varepsilon^2}}.$$

Подставляя эти значения в третью формулу (12), находим $S_{\max} = -\frac{3}{4} pL \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)$. Что касает-

ся усилия T_1 , то оно достигает наибольшего значения в среднем поперечном сечении оболочки $x = \frac{L}{2}$. По длине направляющей эллипса усилие T_1 четырежды меняет свой знак при значениях угла φ , лежащих между 0 и 2π . При этом экстремальные значения усилия принимает в концах

(точка *A*) и (точка *B*) полуосей, оказываясь при этом равным $T_{1_{\max}} = \frac{3}{8} \frac{paL^2}{b^2} \varepsilon^2$,

$$T_{1_{\min}} = -\frac{3}{8} \frac{paL^2}{b} \varepsilon^2.$$

Из перемещений наибольший интерес представляет перемещение ω (прогиб оболочки). Это перемещение можно определить, подставив зависимости (11) в выражение (9). В результате получим

следующие значения этого перемещения в конце большой $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и малой $\varphi = 0$ полуосей:

$$\begin{aligned} \omega_a &= \frac{pa^4}{E\delta b^2} \left(-\frac{b^6}{a^6} + \frac{3}{4} \frac{L^2 b^2}{a^4} \varepsilon^2 + \frac{5}{32} \frac{L^4}{a^2 b^2} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon^2 \right) \right); \\ \omega_b &= -\frac{pa^4}{E\delta b^2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{L^2}{a^2} \varepsilon^2 + \frac{5}{32} \frac{L^4}{a^4} \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Из формул (13) видно, что под действием внутреннего давления большая полуось увеличивается, а малая укорачивается, т. е. поперечное сечение превращается в эллипс большего эксцентриситета. Таким образом полученные зависимости позволяют предусмотреть соответствующие инженерные решения при конструировании эллиптических оболочек повышенной прочности как например применение вертикальных ребер жесткости из композитных материалов. (См. рис)

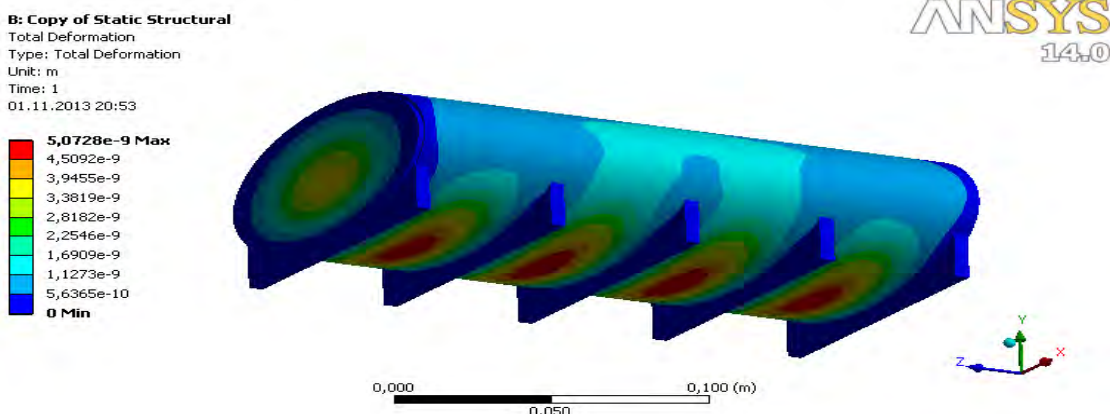


Рисунок 2. - Распределение деформации в эллиптической оболочке.

Расчет показал, что для упрочнения конструкций оболочки заданной длины необходимо предусмотреть пять ребер жесткости.

РЕЗЮМЕ

Проведено математическое исследование напряженно-деформированного состояния эллиптической оболочки с использование программного комплекса ANSYS. Из которого видно, что под действием внутреннего давления большая полуось увеличивается, а малая укорачивается, т. е. поперечное сечение превращается в эллипс большего эксцентриситета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Белов. Расчет железобетонных конструкций на взрывные и ударные нагрузки. / Н.Н. Белов, Д.Г. Компания, О.Г. Кумпяк, Н.Т. Югов // Томск: STT, 2004.- 465с.
2. Bangash M. Y. H. Explosion-Resistant Building Structures / Design, Analysis, and Case Studies. // Bangash M. Y. H., Bangash T. Springer, Berlin, 2006. - 450 p.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек. – М.-Л.: Физматгиз, 1949. – 784 с.
4. Белкин А.Е., Гаврюшин С. С. Расчет пластин методом конечных элементов. – М., Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008. – 232с.

SUMMARY

A mathematical study hard- exponential status An elliptic shell with the use of software package ANSYS. From which it appears, That under the action of high pressure shaft increases, A low is shortened, i.e. side-to-side cross section becomes a ellipse with eccentricity.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И СОСТОЯНИЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ТРИБОФАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РОЛИК/ВАЛ

асп. Мармыш Д.Е.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. При изучении моделей, используемых в трибофатике, одной из основных задач является определение и анализ напряженно-деформированного состояния систем, в которых одновременно реализуется контактное взаимодействие твердых тел и неконтактное нагружение [2].

Рассмотрим систему ролик/вал (рисунки 1 а и 1 б), которая является одной из практически наиболее важных трибофатических систем [4].

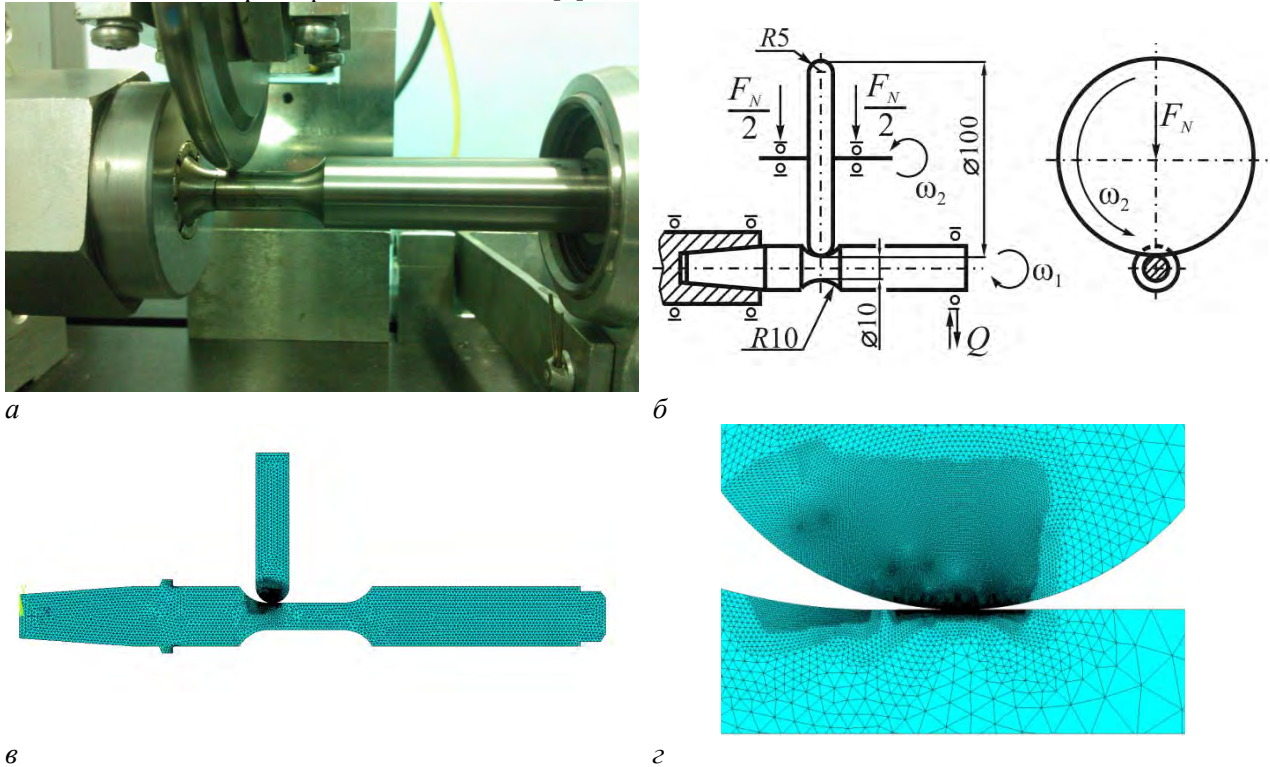


Рисунок 1 – Система ролик/вал для комплексных износоусталостных испытаний (а), ее конструктивная схема (б) и конечно-элементная модель (в, г)

Область контакта ролика и вала является наиболее нагруженной. Принципиальная особенность рассматриваемой системы в сравнении с контактной парой состоит в том, что в зоне взаимодействия вала с роликом напряженное состояние обусловлено как полем контактных напряжений, так и полем напряжений вследствие изгиба.

Таким образом, при построении механико-математической модели для исследования напряженно-деформированного состояния трибофатической системы ролик/вал будем учитывать действие как распределенных усилий $p(S)$ по области контакта, так и воздействие неконтактных нагрузок (M, Q, N) .

В рассматриваемой модели к ролику прикладывалась контактная нагрузка F_N , а к валу – изгибающая нагрузка Q , и, следовательно, полное напряжение в области контакта будет обусловлено взаимодействием полей напряжений возникающих от действия нагрузки F_N и силы Q , т.е.

$$\sigma_{ij}(F_N, Q) = \sigma_{ij}^N + \sigma_{ij}^Q, \quad (1)$$

где σ_{ij}^N – поле напряжений, возникающее за счет действия нагрузки F_N ,

σ_{ij}^Q – поле напряжений, возникающее за счет действия нагрузки Q .

Граничное условие в области контакта имеет вид:

$$\sigma_{nm}|_S = p(F_N, Q), \quad (2)$$

где $n \perp S$.

Конечно-элементное моделирование. Компьютерное моделирование и исследование напряженно-деформированного состояния трибофатической системы ролик/вал проводилось в двумерной постановке для несогласованного контактного взаимодействия (первоначальный контакт в точке) с помощью пакета ANSYS.

Для построения геометрической модели системы использовались размеры стандартных образцов используемых для комплексных износоусталостных испытаний на машинах серии СИ [3]. Значения для контактной F_N и изгибающей Q нагрузок также принимались характерными для данного вида испытаний. Линия действия силы F_N лежит на оси, которая проходит через точку первоначального контакта. На рисунке 1 *в* показан общий вид рассматриваемой модели после разбиения на конечные элементы. Так как размеры площадки контакта имеют малые по сравнению со всей длиной вала размеры, то целесообразно конечно-элементную сетку детализировать в области контакта ролика и вала (рисунок 1 *з*).

Правильность построенной модели системы ролик/вал и адекватность результатов полученных при расчете оценивалась путем сравнения нормального напряжения σ_y , полученного при конечно-элементном расчете в случае отсутствия объемного деформирования, т.е. при $Q=0$, с рассчитанным аналитически для случая плоской деформации [1].

Расчет проводился для следующих величин: контактная сила F_N приложенная к ролику принималась равной 30 кН, изгибающая нагрузка Q – 3 кН.

Из рисунка 2 *а* видно небольшое расхождение аналитического и конечно-элементного решений. Данное явление обусловлено тем, что численное решение получено для модели образца, которая имеет конечные размеры, а аналитическое решение из работы [1] получено для полуплоскости. Из рисунка 2 *б* видно, что при форма контактного давления хорошо аппроксимируется при конечно-элементном моделировании.

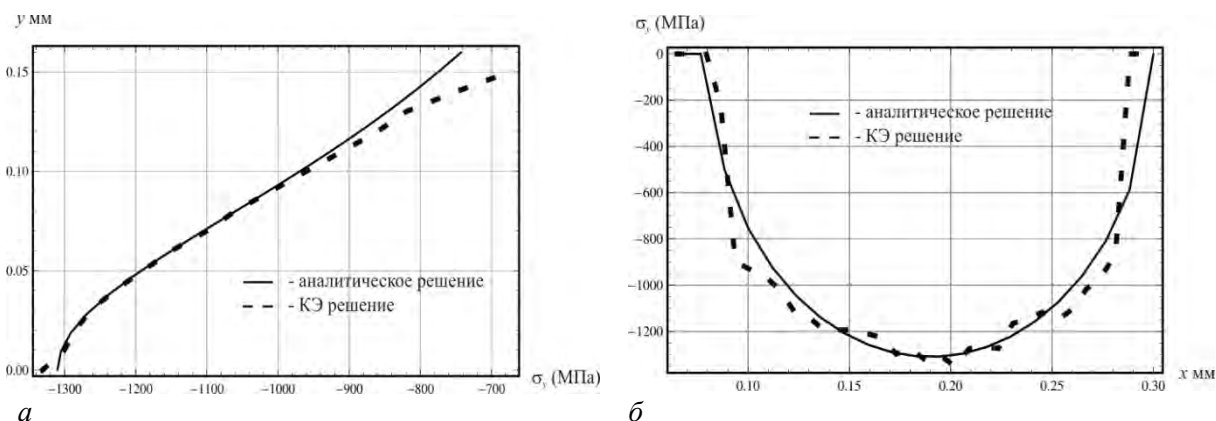


Рисунок 2 – Численное и аналитическое решения для нормального напряжения σ_y вдоль нормали к поверхности контакта, проходящей через его центр (а), и вдоль линии контакта (б)

В результате проведенного в ANSYS конечно-элементного анализа было определено напряженно-деформированное состояние контактирующих тел (ролик и вал) при различном направлении изгибающей нагрузки Q (см. рисунок 3). Из характерных картин распределения нормального напряжения σ_x и интенсивности напряжений σ_{int} в области контакта, представленных рисунком 3 видны значительные отличия напряженного состояния вала вследствие неконтактного изгиба. При этом напряженное состояние ролика остается практически неизменным.

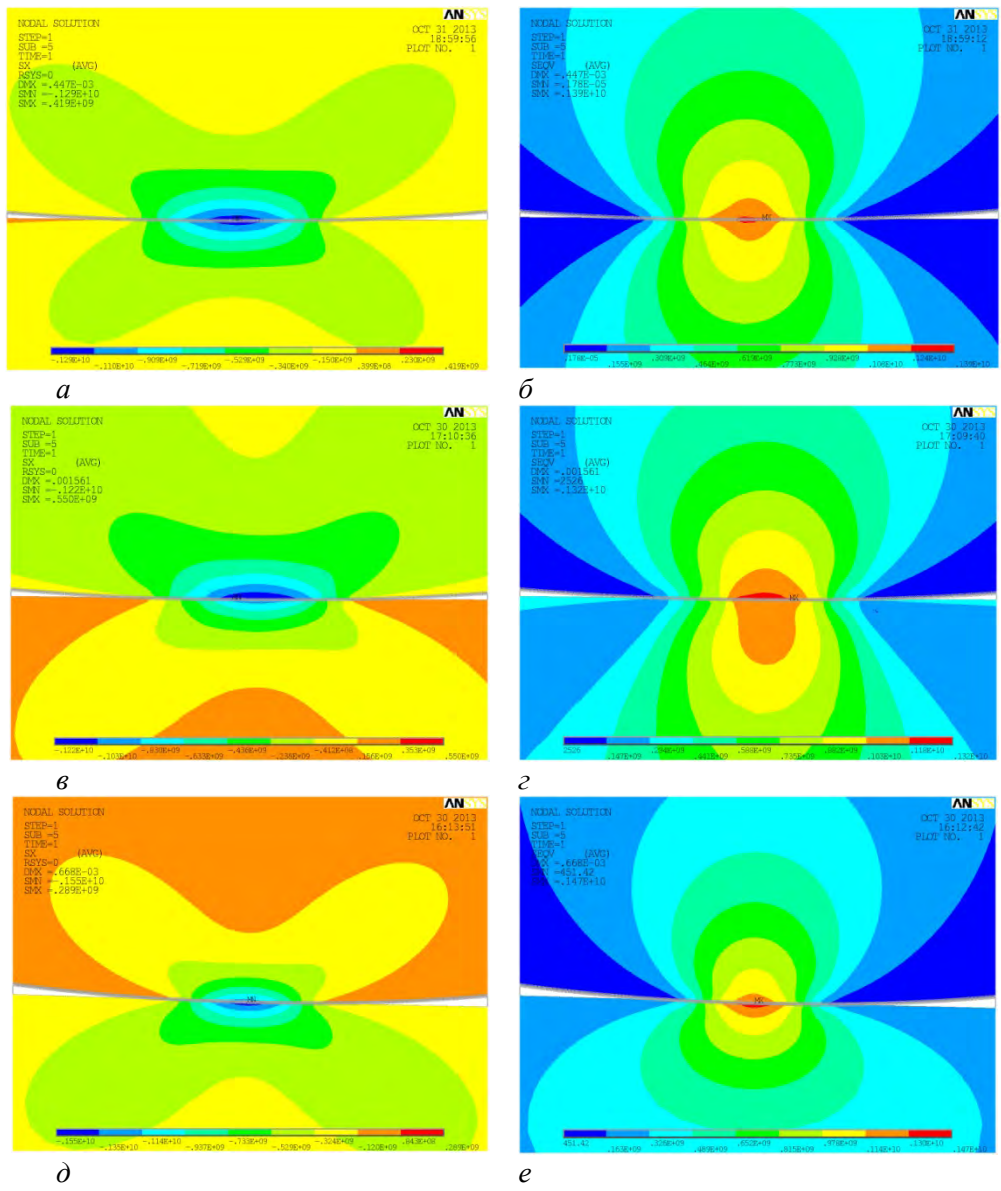


Рисунок 3 – Распределение нормального напряжения σ_x и интенсивности напряжений σ_{int} в случае отсутствия изгибающей нагрузки (а, б), изгибающей нагрузки направлена вверх, реализуя сжатие контактной области (в, г), изгибающая нагрузка направлена вниз, реализуя растяжение контактной области (д, е)

Опасные объемы и состояние поврежденности. В рамках построенной модели трибофатической системы ролик/вал, также был проведен анализ повреждаемости системы контактирующих тел по интенсивности напряжений в соответствии с методикой описанной в [4, 5]. Следует отдельно отметить, что в плоском случае опасные объемы трансформируются в опасные площади.

В общем случае при действии на однородную изотропную трибофатическую систему предельной нагрузки F_{*lim} для деформируемого элемента системы определим предельные значения для интенсивности $\sigma_{int}^{(*lim)}$:

$$\sigma_{int}^{(*lim)} = \max_{dV} \left[\sigma_{int} (F_{*lim}, dV) \right]. \tag{3}$$

где dV – элементарный объем нагруженного тела.

Тогда условие для ограничения октаэдрического опасного объема по интенсивности будет иметь вид

$$V_{int} = \left\{ dV / \sigma_{int} \geq \sigma_{int}^{(*lim)}, dV \subset V_k \right\} \tag{4}$$

Функция повреждаемости опасного объема определяется как интеграл по опасному объему, в котором подынтегральной функцией выступает отношение действующей интенсивности к предельной, т.е. имеет вид [4]

$$\Psi_{\text{int}} = \int_{\sigma_{\text{int}} \geq \sigma_{\text{int}}^{(*\text{lim})}} \frac{\sigma_{\text{int}}}{\sigma_{\text{int}}^{(*\text{lim})}} dV \quad (5)$$

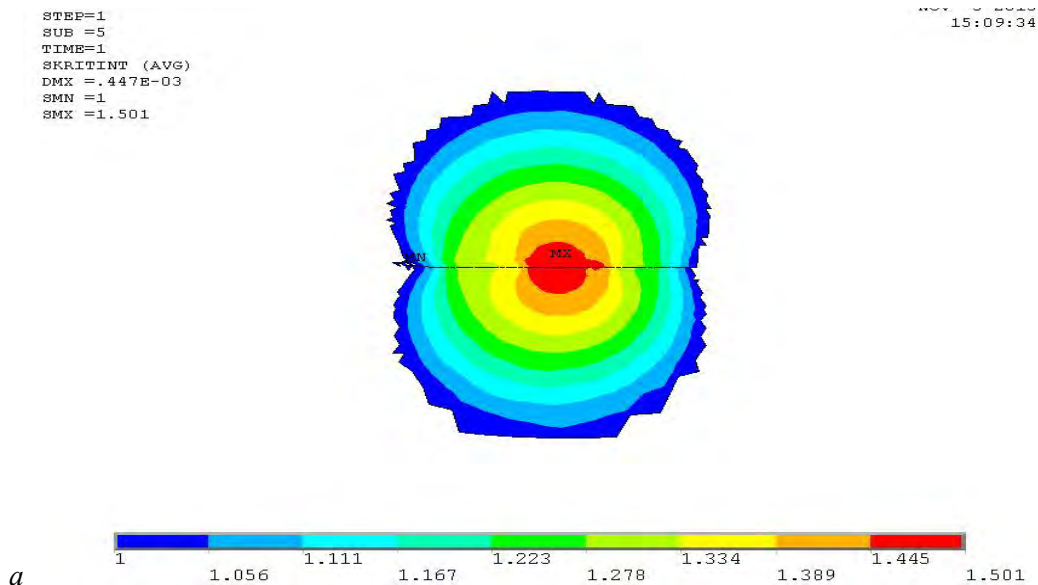
Рассмотрим изменение повреждаемости в зависимости от соотношения контактного давления и неконтактной нагрузки для рассматриваемой модели трибофатической системы ролик/вал. На рисунке 4 показаны изменения величин и форм опасных объемов, рассчитанных по (3)–(4). Величина предельного напряжения бралась как предел контактной усталости $\sigma_{\text{int}}^{(*\text{lim})} = F_{*\text{lim}} = 888$ МПа.

Из рисунка 4 видно, что величина опасного объема ролика остается неизменной во всех трех случаях нагружения и равна $0,026 \text{ мм}^2$, что составляет $0,006 \%$ от рабочей площади системы. Что же касается опасного объема вала, то в случае только контактного взаимодействия тел, величина опасного объема вала равна $0,026 \text{ мм}^2$, т.е. в данном случае ролик и вал имеют одинаковые величины опасных объемов (рис. 4 а). Повреждаемость системы рассчитанная по формуле (5) в данном случае одинакова для вала и ролика и равна $0,032 \text{ мм}^2$.

При нагружении вала изгибающей нагрузкой направленной вверх происходит сжатие контактной области. В этом случае величина опасного объема вала равна $0,031 \text{ мм}^2$, что составляет $0,006 \%$ от рабочей площади системы и что на $19,2 \%$ больше, чем в случае только контактного взаимодействия. Из рисунка 4 б также видно, что повреждаемость вала имеет более широкие границы, чем повреждаемость ролика. Повреждаемость системы в данном случае равна: ролика – $0,032 \text{ мм}^2$, вала – $0,038 \text{ мм}^2$.

При нагружении вала изгибающей нагрузкой направленной вниз происходит растяжение контактной области. В этом случае величина опасного объема равна $0,045 \text{ мм}^2$, что составляет $0,01 \%$ от рабочей площади системы и что на $73,1 \%$ больше, чем в случае только контактного взаимодействия. Также из рисунка 4 в видно, что опасный объем имеет вытянутую вдоль оси y форму. Повреждаемость системы в данном случае равна: ролика – $0,032 \text{ мм}^2$, вала – $0,051 \text{ мм}^2$.

Заключение. В работе представлены результаты компьютерного моделирования в среде ANSYS напряженно-деформированного состояния трибофатической системы ролик/вал. Построена геометрическая модель системы, которая соответствует реальным размерам образцов используемых при комплексных испытаниях на контактно-механическую усталость. Получены картины распределения полей напряжений в окрестности контакта твердых тел при различном соотношении контактной и изгибающей нагрузок. При исследовании повреждаемости системы построен октаэдрический опасный объем и проанализировано изменение его размеров и форм при растяжении-сжатии области контакта вследствие неконтактного изгиба.



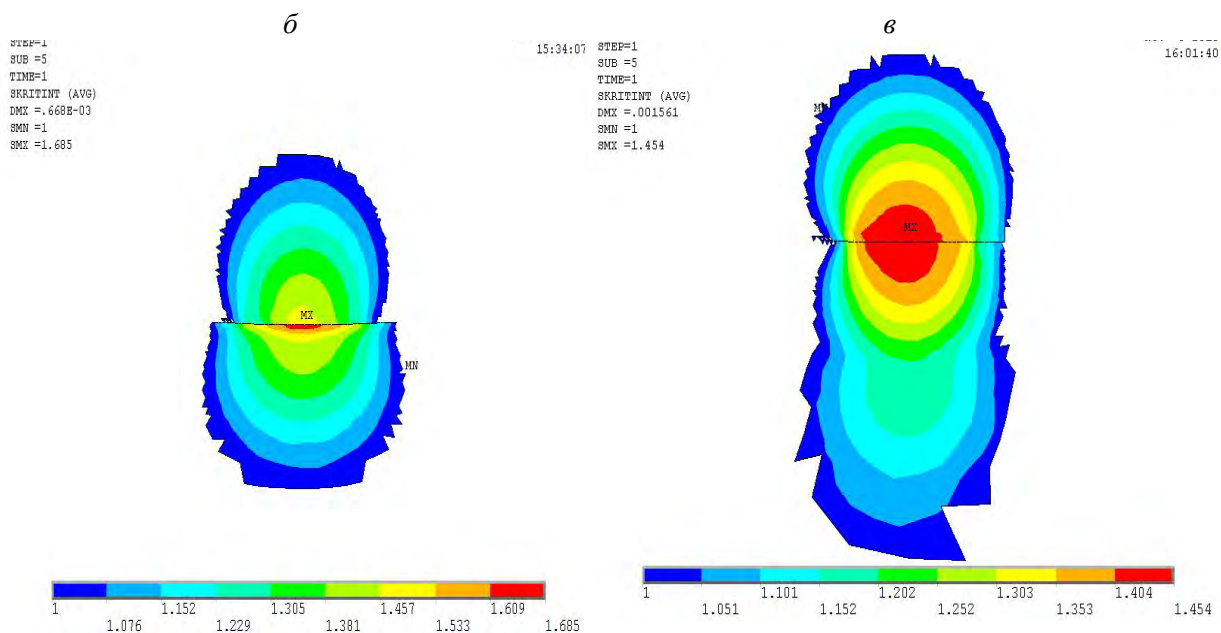


Рисунок 4 – Опасные объемы в системе ролик/вал в случае отсутствия изгибающей нагрузки (а), изгибающей нагрузки направлена вверх, реализуя сжатие контактной области (б), изгибающая нагрузка направлена вниз, реализуя растяжение контактной области (в)

РЕЗЮМЕ

В работе рассмотрены результаты конечно-элементного моделирования трибофатической системы ролик/вал в плоской постановке. Представлены картины распределения полей напряжений в окрестности области контакта ролика и вала. Проведено исследование объемной повреждаемости системы. Показано значительное изменение форм и размеров октаэдрического опасного объема в зависимости от характера приложения изгибающей нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Макушин, В.М. Упругие перемещения и напряженное состояние деталей в местах силового контакта деталей / В.М. Макушин // Расчеты на прочность в машиностроении / С.Д. Пономарев [и др.]; под ред. С.Д. Пономарева. – М.: 1958. Т. 2. – 547 с.
2. Сосновский, Л.А. Основы трибофатики/ Л.А. Сосновский. – Гомель: БелГУТ, 2003. Т. 1. – 246 с.; Т. 2. – 234 с.
3. СТБ 1066–97. Трибофатика. Методы износоусталостных испытаний. Испытания на контактно-механическую усталость (Стандарт Беларуси). – Минск: Госстандарт, 1997. – 58 с.
4. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. – Минск: БГУ, 2011. – 407 с.
5. Щербаков, С.С. Моделирование напряженно-деформированного состояния трибофатической системы ролик/кольцо // С.С. Щербаков, С.М. Бородако / Механика машин, механизмов и материалов. – 2012. № 1 (18). – С. 80–85.

SUMMARY

Results of two-dimensional computer simulation of Tribo-Fatigue roller/shaft system are considered. Pictures of stress distribution in the neighbourhood of the area of contact of roller and shaft are given. Study of the damageability of Tribo-Fatigue system is made. Significant change in the shape and size of the octahedral dangerous volume due to the nature of the bending force application is shown.

Поступила в редакцию 29.10.2013

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МИКРОКОМПОЗИТА НА ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ

Ручан М.В., асп. Чигарева Ю.А., Шукевич Т.В.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Деградация физико-механических свойств композитных материалов, из которых изготовлены многие детали современных приборов предшествует процессом появления повреждений в виде микро-нанотрещин. На стадии деградации (скрытой фазе разрушения) идет процесс изменения свойств материала под действием нагрузок различного тепла, например, температурных. Изменение физико-механических свойств приводит к снижению эксплуатационных характеристик прибора, в частности точность измерения.

Рассмотрим стационарную задачу теплопроводности для микронеоднородной среды, в которой температура удовлетворяет уравнению теплопроводности [1]

$$\nabla_j (\lambda_{ij}^{(r)} \nabla_j T) = 0, \quad (1)$$

где $T = T(\vec{r})$ – температура, $\lambda_{ij}(\vec{r})$ – тензор теплопроводности неоднородной среды, $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор.

Как известно, средняя температура $\langle T \rangle$ удовлетворяет уравнению [1]

$$\nabla_j (\lambda_{ij}^* \nabla_j \langle T \rangle) = 0 \quad (2)$$

где λ_{ij}^* – эффективный тензор теплопроводности.

Вычислению λ_{ij}^* посвящено много работ, в которых разработаны различные методы [1].

Одним из наиболее эффективных методов является метод самосогласованного поля [1], развитый для расчета различных физико-математических эффективных коэффициентов идеальных композитов, в которых имеется четко определенное количество компонент, с четко заданными свойствами и концентрацией. Плотность распределения λ , принимающего значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и имеющие объемные концентрации C_1, \dots, C_n ($C_1 + \dots + C_n = 1$) имеет вид

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n C_i \delta(\lambda - \lambda_i) \quad (3)$$

Распределение (3) имеет математическое ожидание $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i$, дисперсию $D\lambda = 0$. Для того, чтобы описать разброс свойств в процессе эксплуатации необходимо, чтобы $D\lambda = \psi(t)$, математическое ожидание в общем случае также изменялось во времени $\langle \lambda \rangle = \varphi(t)$. Плоскость вероятности в этом случае имеет вид $f(t, \lambda, \psi(t), \varphi(t))$, если f имеет симметричный вид, для несимметричных распределений f зависит от моментов третьего и четвертого порядка.

Известно, что плотность распределения (3) обычно используется как начальное условие для плотности распределения, удовлетворяющее уравнению типа ФПК

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial (af)}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (bf)}{\partial \lambda^2} \quad (4)$$

с начальным условием (3).

Как известно, уравнению (4) можно поставить в соответствие стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\lambda}{dt} = g(\lambda) + N(t) \quad (5)$$

На основе уравнений (5), (4) рассматриваются модели изменения коэффициента теплопроводности на коэффициент концентрации напряжений в микро композитных телах.

Согласно формуле Оделевского [3], эффективный коэффициент теплопроводности λ_0 n -компонентной среды находится из уравнения

$$\sum_{i=1}^n c_i \gamma_i = \langle \gamma \rangle = 0, \quad \gamma_i = \frac{\lambda_i - \lambda_0}{\lambda_i + 2\lambda_0}, \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda + 2\lambda_0}, \quad \sum_{i=0}^n c_i = 1.$$

Для изотропно неоднородной среды можем считать, что $\lambda = \lambda(x)$ и $\gamma = \gamma(x)$, причем на множестве возможных реализаций компонент $\lambda(x)$ – случайная функция. В каждой точке n -компонентной среды случайная величина, принимающая значения λ_i с вероятностью c_i (концентрация i -го компонента).

Формулу (6) можно рассматривать как вычисление среднего $\gamma = \gamma(\lambda)$ с плотностью распределения $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_i \delta(\lambda - \lambda_i)$:

$$\langle \gamma \rangle = \int \gamma(\lambda) f(\lambda) d\lambda. \quad (7)$$

Обобщение формулы (6) на случай n -компонентной среды, обладающей разбросом теплопроводных свойств компонентов, получим вычисляя $\langle \gamma \rangle$ в (7) с плотностью распределения $f(\lambda)$, учитывающей разброс λ от λ_i .

Рассмотрим n -компонентную изотропную среду, разброс компонентов которой определяется n -треугольным распределением:

$$f(\lambda) = \begin{cases} S_i \left(1 + \frac{\lambda - \lambda_i}{\varepsilon_{i1}} \right), & \lambda \in [\lambda_i - \varepsilon_{i1}, \lambda_i] \\ S_i \left(1 - \frac{\lambda - \lambda_i}{\varepsilon_{i2}} \right), & \lambda \in [\lambda_i, \lambda_i + \varepsilon_{i2}] \\ 0 & \text{для остальных } \lambda, \end{cases} \quad (8)$$

$$S_i = \frac{2c_i}{\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2}}, \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь $f(\lambda)$ – плотность распределения коэффициента теплопроводности λ , λ_i – основное значение коэффициента теплопроводности i -го компонента, $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}$ – значение разбросов коэффициента теплопроводности от основного значения λ_i i -го компонента. Каждая из компонент материала представляет собой однородную изотропную среду. Вычисляя $\langle \gamma \rangle$, согласно формуле (7), с плотностью распределения (8) и полагая $\langle \gamma_i \rangle = 0$, согласно (6), получим

$$L = \sum_{i=1}^n S_i \sum_{\beta=1}^2 \frac{A_{0i} + (-1)^\beta \varepsilon_{i\beta}}{\varepsilon_{i\beta}} \ln \frac{A_{0i} + (-1)^\beta \varepsilon_{i\beta}}{A_{0i}}, \quad (9)$$

$$A_{0i} = \lambda_i - \lambda_0 + \frac{1}{L}, \quad L = (3\lambda_0)^{-1}, \quad A_{0i} = 2\lambda_0 + \lambda_i.$$

При $\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$ плотность (8) $f(\lambda)$ переходит в распределение $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_i \delta(\lambda - \lambda_i)$, а уравнение (9) – в уравнение (6). Условие (6) представляет собой условие самосогласования, а полученное λ_i решение уравнения (9) будет самосогласованно (8).

Расчет зависимости эффективной теплопроводности λ_0 от c_i согласно уравнению (9), обладает тем недостатком, что при $\varepsilon_{ij} \rightarrow 0$ правая часть представляет собой неопределенность типа $0/0$, поэтому при малых ε_{ij} решение неустойчиво. При относительном разбросе $\varepsilon_{ij} \lambda_i^{-1} \leq 10^{-3}$ рас-

чет λ_0 удобно вести на основе уравнения, получим из (9) разложением правой части в ряд Маклорена. Для двухкомпонентной среды получим из (9) в безразмерном виде

$$1 = 3x \left[(1-c) \left(\frac{1}{B_{01}} + \frac{\delta_{11} - \delta_{12}}{3B_{01}^2} \right) + c \left(\frac{1}{B_{02}} + \frac{\alpha(\delta_{21} - \delta_{22})}{3B_{02}} \right) \right] \quad (10)$$

$$\alpha = \lambda_2 \lambda_1^{-1}, x = \lambda_0 \lambda_1^{-1}, B_{0i} = A_{0i} \lambda_1^{-1}, c = c_2.$$

Как следует из формулы (10), на зависимость x от c влияет несимметричность разброса, т.е. величина $\delta_{i1} - \delta_{i2}$. На рисунке 1 изображены зависимости λ_0 от c для медэпоксида (эксперимент [3]). Кривая 1 получена при $\delta_{12} = 0,1, \delta_{21} = 0,05$; 2 – при $\delta_{12} = 0,05, \delta_{21} = 0,1$, 3- при $\delta_{11} = 0,1, \delta_{21} = 0,05$; 4 - при $\delta_{11} = 0,05, \delta_{21} = 0,1$. Кривая 5 соответствует случаю, когда нет разброса свойств компонентов: $\delta_{ij} = 0$. При $\delta_{ij} = 0$ уравнение переходит в уравнение (6). Из рисунка 1 видно, что существует концентрация c , при которой наличие разброса не влияет на значение коэффициента теплопроводности.

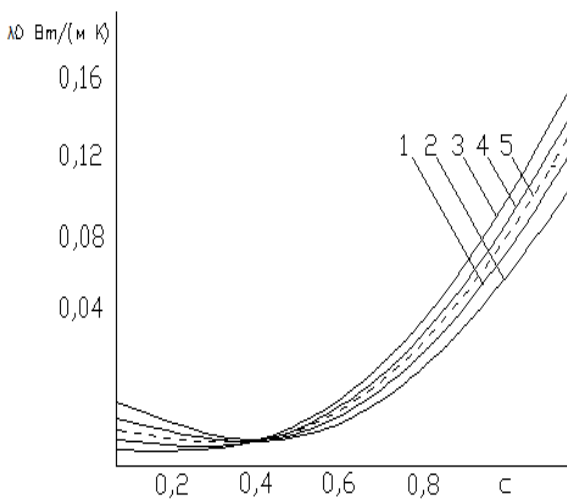


Рисунок 1 Зависимость коэффициента теплопроводности λ_0 медэпоксида от концентрации c меди

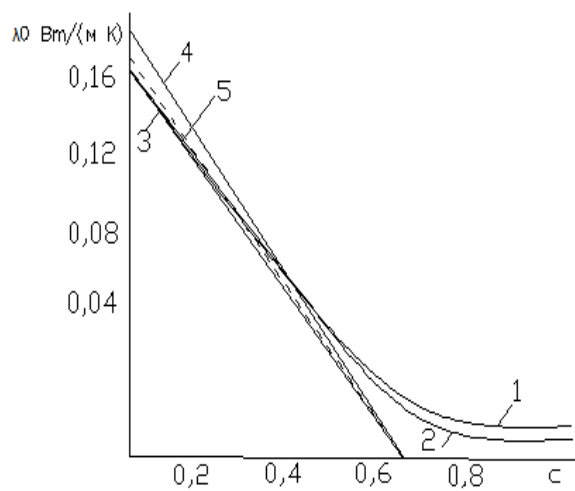


Рисунок 2 - Зависимость коэффициента теплопроводности λ_0 пористой эпоксидной смолы от концентрации c пор

Эффективный коэффициент теплопроводности пористой среды удовлетворяет уравнению (10), если положить в нем $\lambda_2 = 0, \delta_{21} = 0, \alpha = 0$. На рисунке 2 изображена зависимость λ_0 от c - концентрации пор для эпоксидной смолы: 1- при $\delta_{11} = 0,1, \delta_{22} = 0,1$; 2 – при $\delta_{11} = 0,1$; 5 – при $\delta_{ij} = 0$. Как следует из рисунка 2 (кривые 1,2), наличие разброса δ_{22} дает зависимость коэффициента теплопроводности λ_0 от пористости c для всех значений $0 \leq c \leq 1$. Для пористой среды при отсутствии разброса δ_{22} самосогласованный метод обращение λ_0 в нуль при $c_* = 0,63$ причем разбросы δ_{11}, δ_{12} компоненты λ_1 при этом практически не сказываются на значениях c_* .

Формулы (9), (10), связывающие значения эффективного коэффициента λ_0 , компонентов λ_i , концентраций c_i , разбросов ε_{ij} , могут быть использованы для решения задачи определения разброса ε_{ij} по измерению и заданным значениям $\lambda_0, \lambda_i, c_i$. Эта задача по отношению к задаче вычисления эффективных коэффициентов по заданным $\lambda_i, c_i, \varepsilon_{ij}$ является обратной, позволяя получить оценку разброса свойств в реальных композитах. Отметим, что на основе условия самосогласования $\langle \gamma \rangle = 0$ можно получить уравнение для эффективного коэффициента теплопроводности λ_0 неоднородных сред, распределение материальных коэффициентов которых подчиняется любым другим законам распределения. При этом, если в пределе взятое распределение переходит

в комбинацию функций $f(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_i \delta(\lambda - \lambda_i)$, то уравнения (9), (10) в известные уравнения n -компонентной среды, получаемые методом самосогласования или эквивалентным ему (формула Одоевского (6)).

Заключение. Предлагаемый подход позволяет учесть влияние разброса значений компонент в композите на его эффективные свойства не только в теплопроводности, но и в электропроводности, упругости, диффузии. Непосредственно из формул (2)-(5) следует, что он применим для композитов естественного происхождения с непрерывным распределением физико-механических свойств типа горных пород, грунтов, почв.

РЕЗЮМЕ

В процессе эксплуатации в композитных материалах под действием термосиловых воздействий идут процессы деградации их свойств, проявляющиеся в изменении их коэффициентов, теплопроводности, упругости, пластичности и т.д. Как правило, процессы старения в штатных режимах эксплуатации происходят сравнительно медленно так, что можно считать, поле температур квазистационарным, по крайней мере на начальном этапе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микрооднородных сред – М.: Наука, 1976. –450с.
2. Малинецкий Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.П.Платонов – Москва: УРСС, 2000.—335с.
3. Rosenberg H.M. Low temperature thermal conduction in particle dispersed polyethylene / H.M. Rosenberg, J. Phys, F.F.T Araujo - D Appl. Phys 1976.- p. 665 –675.

SUMMARY

During the operation in composite materials under the influence of thermopower effects are processes of degradation of their properties, manifested in changes in their coefficients, thermal conductivity, elasticity, plasticity, etc. As a rule, the aging process in-house operating conditions occur relatively slowly, so that it can be assumed quasi-stationary temperature field, at least at the initial stage.

Поступила в редакцию 09.09.2013

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ РЕКОНСТРУИРОВАННОГО СРЕДНЕГО УХА ПРИ ТИМПАНОПЛАСТИКЕ И СТАПЕДОТОМИИ

Славашевич И. Л., к. ф.-м. н. Юркевич К. С.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение.

Перфорация барабанной перепонки может возникнуть в результате хронической инфекции или, реже, из-за травмы. Ограниченная подвижность звукопроводящей цепи слуховых косточек или отосклеротический анкилоз, может привести к частичной или полной фиксации одной из косточек и, в частности, стремени. Для лечения таких патологических заболеваний в клинической практике прибегают к хирургической реконструкции среднего уха. Данная процедура подразделяется на тимпаноластику, оссикулопластику и стапедотомию. Тимпаноластика - это хирургическая операция, выполненная для восстановления барабанной перепонки (ТМ) после перфорации или разрыва. Стапедотомия подразумевает перфорацию подножной пластины стремени, если оно абсолютно зафиксировано. Чтобы устранить разрыв в полностью разрушенной цепи косточек используется протез типа TORP (рисунок 1а). В этом случае основание протеза TORP размещается на реконструированной ТМ, а конец ствола вводится через отверстие в основании стремени в улитку внутреннего уха [1, 2]. Особенностью этого метода реконструкции является то, что функциональный результат сильно зависит от выбора места перфорации подножной пластины стремени [3]. Кроме того, одним из негативных последствий стапедотомии является снижение общей жесткости всей системы, а также искажение спектра собственных частот колебательной системы реконструированного среднего уха (PCY) [4].

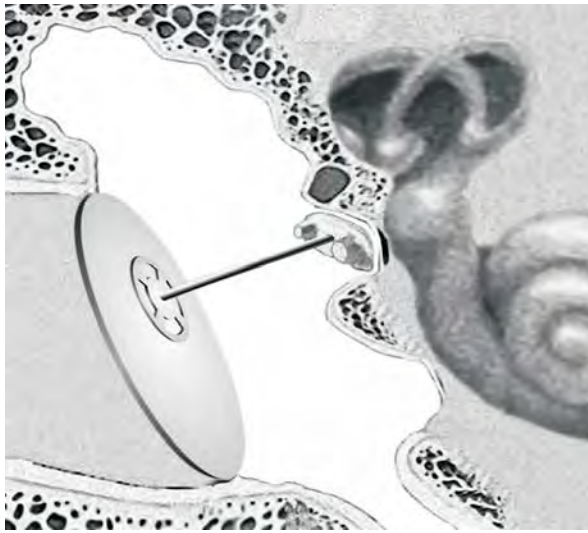
Основной целью настоящей работы является исследование влияния нормальных и тангенциальных перемещений барабанной перепонки на напряженно-деформированное состояние реконструированного среднего уха, разработка конечно-элементной модели реконструированной тимпанальной мембраны, анатомическая форма которой близка к эллипсу, а также сравнительный анализ результатов полученных аналитическим методом и методом конечных элементов.

Постановка задачи. Разрешающие уравнения.

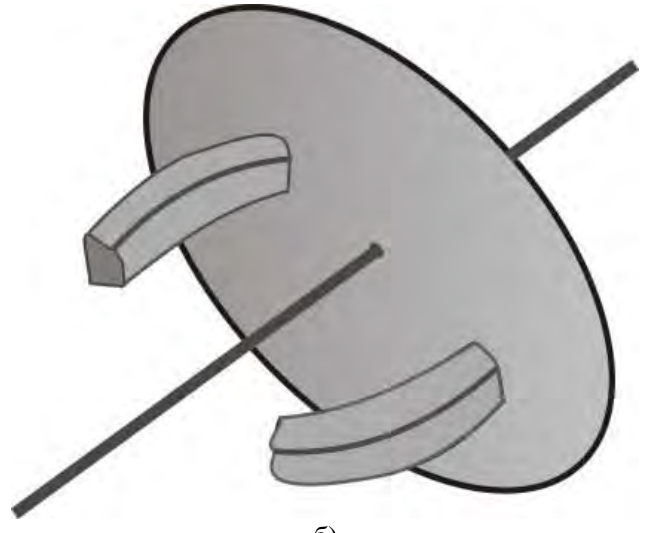
ТМ будем моделировать как круглую упругую изотропную пластинку радиуса a , изготовленную из хрящевого трансплантата [5]. Протез типа TORP состоит из круглой недеформируемой пластинки (основания) радиуса b и жестко сопряженного с ней под некоторым углом γ стержня длиной l . Обозначим через l_0 расстояние от центра основания протеза (точки O) до подножной пластинки стремени. Пусть $\Delta l = l - l_0$ - положительное приращение длины стержня, наличие которого необходимо для устойчивого положения протеза. Также на стволе протеза TORP установим усиливающий элемент в виде пружинки, изготовленной из титана. Длина пружинки выбирается чуть большей расстояния от точки ее фиксации на стволе протеза до головки ствола. При этом шаг винта, толщина и длина пружины берутся такими, чтобы коэффициент жесткости пружины равнялся жесткости связки овального окна $k_{st} = 27.8c_{ref}$, где коэффициент $0.035 \leq c_{ref} \leq 0.05 \text{ Н мм}^{-1}$ определяет общую жесткость связки овального окна [6]. Пусть центры восстановленной ТМ и основания протеза совпадают.

Выводы, сделанные в работе [3], показали, что наиболее предпочтительной технологией установки протеза, обеспечивающей минимальный уровень потенциальной энергии преднапряженной системы, является технология, когда основание протеза размещается к центру ТМ настолько близко, насколько это позволяет индивидуальная архитектура среднего уха. Будем считать, что основание протеза и хрящевой имплантат жестко склеены, тогда ТМ можно рассматривать как кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами b и a соответственно (рисунок 2а).

В данной работе рассмотрим вариант техники стапедотомии, когда перфорация выполнена в месте, где толщина подножной пластины максимальна, тогда протез имеет одну степень свободы (рисунок 1б).



а)



б)

Рисунок 1. – а) Колебательная система среднего уха, подвергнутого тотальной реконструкции;
б) Ствол протеза с одной степенью свободы, введенный в отверстие перфорации.

Малые нормальные деформации упругой изотропной кольцевой пластины, моделирующей реконструированную ТМ, описываются системой дифференциальных уравнений в отношении нормальных и касательных перемещений [7].

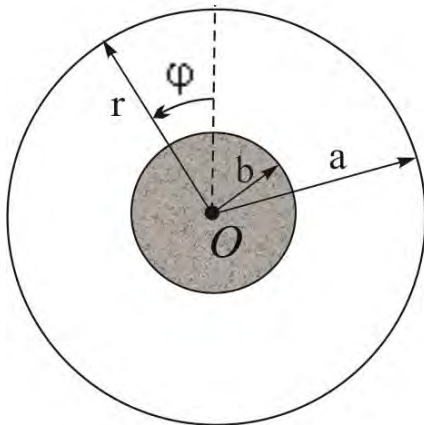
$$D\Delta^2 w + P_s = 0, r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

где

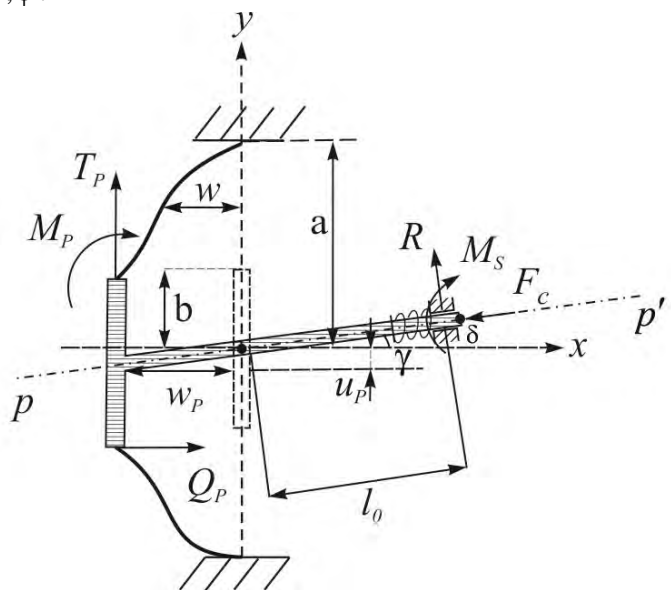
$$T_1 = K \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu}{r} u + \frac{\nu}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \quad T_2 = K \left(\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} u + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right),$$

$$S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} v + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right).$$

Здесь D , K – жесткости пластины, E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона пластинки (хряща) соответственно, h – толщина пластины, w, u, v – нормальное, радиальное и касательное перемещения точек пластины, T_1, T_2, S мембранные усилия в ТМ, вызванные установкой протеза, P_s – разность статического атмосферного давления и давления в полости среднего уха, Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат r, φ .



а)



б)

Рисунок 2. – а) Полярная система координат r, φ на поверхности пластины, моделирующей ТМ;
б) Деформации пластины в плоскости Oxy движения протеза, силы действующие на протез.

При установке протез совершит некоторое поступательное перемещение, определяемое направляющей pp' перфорации (рисунок 2б), что приведет к деформации пружины, упирающейся своим концом в подножную пластинку стремени, и, в конечном счете, к увеличению жесткости всей колебательной системы. Место фиксации верхнего конца пружины на стволе протеза может изменяться с целью коррекции жесткости системы.

Принимая во внимание жесткое склеивание основания протеза с ТМ, граничные условия на внутреннем контуре в случае жесткой заделки примут вид:

$$w|_{r=b} = w_p, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=b} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{r=b} = -u_p \cos \varphi, \quad v|_{r=b} = u_p \sin \varphi.$$

где w_p , $u_p = w_p \tan \gamma$ – перемещение основания протеза (то есть внутреннего контура ТМ) вдоль осей Ox , Oy соответственно.

На внешнем контуре (тимпанальном кольце) восстановленной ТМ рассмотрим условия упругой заделки [8]:

$$(k_l w + Q)|_{r=a} = 0, \quad \left(k_t \frac{\partial w}{\partial r} + M_1 \right) \Big|_{r=a} = 0, \quad (3)$$

$$u|_{r=a} = 0, \quad v|_{r=a} = 0,$$

где k_l, k_t – коэффициенты линейной и торсионной жесткости тимпанального кольца [8]. Здесь, согласно [7], введены следующие обозначения:

$$Q = Q_1, \quad (4)$$

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \quad M_1 = D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right),$$

где Q_1, M_1 – перерезывающая сила, изгибающий момент, действующие в срединной поверхности пластинки.

Уравнения равновесия присоединенного стержня, моделирующего протез, запишутся в виде:

$$Q_p \cos \gamma - F_c - T_p \sin \gamma = 0. \quad (5)$$

Здесь Q_p, T_p – равнодействующие перерезывающих и мембранных сил, возникающих вдоль внутреннего контура $r = b$ со стороны ТМ, $F_c = (k\delta + k_{st}\delta)$ – сила, являющаяся мерой взаимодействия с внутренним ухом и возникающая в результате деформации мембраны круглого окна, $\delta = \Delta l - w_p / \cos \gamma$ – длина части ствола протеза, вошедшей в кохлеарную жидкость, $k = 8\pi T_0 (S / S_0)^2$ – коэффициент «жесткости» системы «кохлеарная жидкость - мембрана круглого окна» [9], $S_0 = \pi R_0^2$ – площадь круглого окна, T_0 – ее сила натяжения, k_{st} – жесткость усиливающей пружины.

Определим равнодействующие сил, действующих на протез со стороны ТМ. Данные величины находятся путем интегрирования обобщенных перерезывающих сил и соответствующих моментов по всему внутреннему контуру ТМ:

$$Q_p = \int_0^{2\pi} [Q_1 b]_{r=b} d\varphi, \quad T_p = b \int_0^{2\pi} [T_1 \cos \varphi + S \sin \varphi]_{r=b} d\varphi. \quad (6)$$

Решение краевой задачи.

Решение краевой задачи (1), (2) и (3) будем искать в виде:

$$w = w_0(r),$$

$$u = u_0(r) + u_0^c(r) \cos \varphi + u_0^s(r) \sin \varphi, \quad (7)$$

$$v = v_0(r) + v_0^c(r) \cos \varphi + v_0^s(r) \sin \varphi.$$

Подставляя (7) в уравнение (1), находим:

$$w_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln r + D_0 r^2 \ln r - \frac{P_s}{64D} r^4,$$

$$\begin{aligned}
u_0(r) &= C_{0,1}r + C_{0,2}\frac{1}{r}, & v_0(r) &= C_{0,3}r + C_{0,4}\frac{1}{r}, \\
u_0^c(r) &= (1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1-\nu^2) - C_{1,4}, \\
v_0^c(r) &= (5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4}, \\
u_0^s(r) &= (1-3\nu)C_{1,5}r^2 + C_{1,6}\frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,7}(1-\nu^2) - C_{1,8}, \\
v_0^s(r) &= -(5+\nu)C_{1,5}r^2 - C_{1,6}\frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r + 2C_{1,7}(1+\nu) - C_{1,8}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя соотношения (8) в граничные условия (2), (3), получим значения неизвестных постоянных, которые в силу громоздкости здесь не приводятся; отметим лишь, что $C_{0,1} = C_{0,2} = C_{0,3} = C_{0,4} = 0$.

Подстановка соотношений (6) в уравнения (5) с учетом (7), (8) приводит к уравнению относительно параметра w_p , характеризующего ориентацию протеза в полости среднего уха и напряженно-деформированное состояние реконструированной ТМ. Вычислив перемещения w_p , u_p , можно найти и напряжения в восстановленной барабанной перепонке.

Конечно-элементная модель.

Для верификации построенной математической модели реконструированного среднего уха, разработана конечно-элементная модель.

Расчеты были выполнены для модели с параметрами $a = 5$ мм, $b = 1$ мм, $E = 3.4$ Н мм⁻², $\gamma = 5\pi/18$, $\nu = 0.4$, $k_l = 0.15$ Н мм⁻², $k_t = 10^{-4}$ Н, $R_0 = 1$ мм, $k_{st} = 1.719$.

На рисунке 3 представлены графики для нормальных перемещений. Результаты, полученные аналитически, обозначены сплошной линией, а результаты, полученные методом конечных элементов - точками.

Из рисунка 3 видно, что имеет место достаточно хорошее совпадение результатов расчета, перемещений реконструированной тимпанальной мембраны, имеющей круговую форму. Различие в результатах составляет менее 1%.

Также разработана конечно-элементная модель реконструированной тимпанальной мембраны в форме близкой к эллипсу с полуосями 5 и 4.8 мм [6]. Анатомически тимпанальная мембрана делится на две части: верхняя часть, называемая мембраной Шрапнеля, является ненатянутой; нижняя натянута, за счет чего мембрана немного вогнута внутрь среднего уха. Тогда на внешнем контуре ($r = a$) рассмотрим условия упругой заделки восстановленной ТМ, согласно которой тимпанальное кольцо заменяется системой распределенных линейных и торсионных пружин с переменными коэффициентами жесткости k_l, k_t для верхней и нижней частей соответственно [8]. Данная задача не может быть решена аналитически, поэтому соответствующие расчеты проведены с помощью метода конечных элементов.

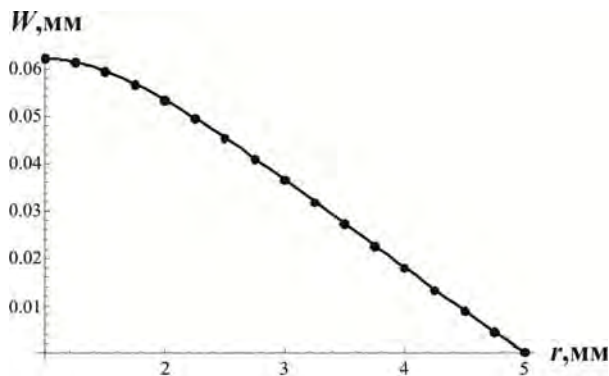


Рисунок 3. – Перемещения пластины w .

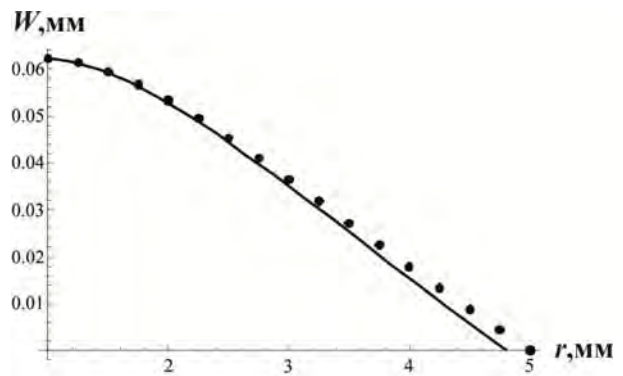


Рисунок 4. – Перемещения пластины w .

Расчеты были выполнены для модели с параметрами $a_1 = 5$ мм, $a_2 = 4.8$ мм, $b = 1$ мм, $E = 3.4$ Н мм⁻², $\gamma = 5\pi/18$, $\nu = 0.4$, $R_0 = 1$ мм, $k_{st} = 1.719$; $k_l = 310^{-3}$ Н мм⁻², $k_t = 310^{-5}$ Н для верхней части тимпанального кольца; $k_l = 0.15$ Н мм⁻², $k_t = 10^{-4}$ Н для нижней части тимпанального кольца соответственно.

На рисунке 4 представлены графики для нормальных перемещений полученных методом конечных элементов для тимпанальной мембраны, имеющей круговую и овальную форму. Результаты, полученные для эллипса, обозначены сплошной линией, а для круговой пластины – точками. Из графика видно, что расхождение результатов наблюдается ближе к внешнему контуру тимпанального кольца, в силу изменения граничных условий на нем.

РЕЗЮМЕ

Предложена биомеханическая модель реконструированного среднего уха, подвергнутого тимпанопластике и стапедотомии. Основной целью данного исследования является изучение влияния нормальных и тангенциальных перемещений барабанной перепонки на напряженно-деформированное состояние реконструированного среднего уха. Реконструированная тимпанальная мембрана моделируется как изотропная упругая кольцевая пластина, а также как пластина, имеющая форму эллипса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hüttenbrink, K.-B. Mechanical aspects of middle ear reconstruction / K.-B. Hüttenbrink // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 165-168.
2. Wullstein, H. Operationen zur Verbesserung des Gehöres. Stuttgart: Georg Thieme – 1968.
3. Mikhasev, G. On the strain–stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus–incus prosthesis / G. Mikhasev, S. Ermochenko, M. Bornitz // Mathematical Medicine and Biology. – 2010. –Vol. 27(4). – P. 289-312.
4. Михасев, Г.И. Собственные частоты колебательной системы среднего уха при тотальной реконструкции / Г.И. Михасев, И.Л. Славашевич // Вестник СПбГУ. Сер 1. 2012. Вып. 3. – С. 107–116
5. Zahnert, Th. Experimental investigations of the use of cartilage in tympanic membrane reconstruction / K.-B. Hüttenbrink, D. Murbe, M. Bornitz // The American Journal of Otology. 2000. Vol. 21. p. 322-328.
6. Beer, H.-J. Modeling of Components of the Human Middle Ear and Simulation of Their Dynamic Behavior / H.-J. Beer [et al.] // Audiology & Neuro-Otology. – 1999. – Vol. 4. – P. 156-162.
7. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 290 с.
8. Wada, H. Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear / H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery (Hüttenbrink, K.-B., eds). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 76–81.
9. Чигарев, А.В. Биомеханика: Учебное пособие/ А.В. Чигарев, Г.И. Михасев. – Мн.: УП «Технопринт», 2004. – 306с.

SUMMARY

Biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanoplasty and stapedotomy is proposed. The basic goal of this paper is to clear up the influence of the normal and tangential displacements in the eardrum at the strain-stress state of the reconstructed middle ear. The reconstructed tympanic membrane is modeled as an isotropic elastic annular plate, and the plate having an elliptical shape.

Поступила в редакцию 25.10.2013

СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ МАНИПУЛЯТОРА

к.т.н. Анципорович П.П., к.т.н. Акулич В.К., к.т.н. Дубовская Е.М.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Для манипулятора $B \perp B // B$ с тремя степенями свободы, работающего в ангулярной системе координат, получены дифференциальные уравнения движения звеньев в форме уравнений Лагранжа второго рода. Для этого необходимо определить кинематические характеристики и составить выражения кинетической энергии манипулятора. Схема манипулятора показана на рис. 1. С каждым звеном связываем правую систему координат. Система координат $x_0 y_0 z_0$ – неподвижная, а системы $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ и $x_3 y_3 z_3$ – подвижные, жестко связанные с соответствующими звеньями манипулятора. Оси y_1 , y_2 , y_3 параллельны. Обобщенными координатами являются параметры относительного движения звеньев: φ_{10} – угол поворота звена 1 относительно звена 0 вокруг оси z_0 ; φ_{21} – угол поворота звена 2 относительно звена 1 вокруг оси y_2 ; φ_{32} – угол поворота звена 3 относительно звена 2 вокруг оси y_3 .

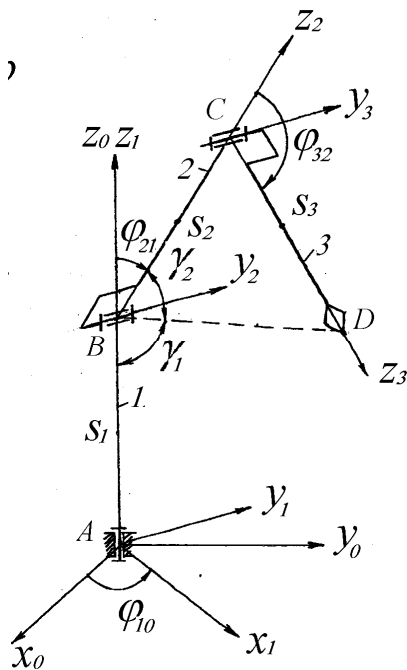


Рисунок 1. - Кинематическая схема манипулятора с 3 степенями свободы

Для составления дифференциальных уравнений движения звеньев манипулятора в форме уравнений Лагранжа второго рода следует получить выражение кинетической энергии манипулятора T , которая складывается из кинетических энергий отдельных звеньев и транспортируемой детали. В частности, кинетическая энергия звена 3 выражается матричной формулой [1]

$$T_3 = \frac{1}{2} \left\{ m_3 V_{S_3}^2 + (\omega_{30}^{(3)})^T [I_{S_3}] \omega_{30}^{(3)} \right\},$$

где $[I_{S_3}]$ – тензор инерции звена в центре масс,

$$V_{S_3}^2 = 0,25l_3^2 (\dot{\varphi}_{10}^2 \sin^2 \varphi_{\Sigma} + \dot{\varphi}_{\Sigma}^2) + l_2^2 (\dot{\varphi}_{10}^2 \sin^2 \varphi_{21} + \dot{\varphi}_{21}^2) + l_2 l_3 (\dot{\varphi}_{10}^2 \sin \varphi_{21} \sin \varphi_{\Sigma} + \dot{\varphi}_{21} \dot{\varphi}_{\Sigma} \cos \varphi_{32}),$$

$$\varphi_{\Sigma} = \varphi_{21} + \varphi_{32},$$

Для определения кинематических характеристик решается прямая задача кинематики манипулятора с использованием метода преобразования координат в матричной форме [1]. Связь между координатами центра схвата (точки D) в подвижной и неподвижной системах координат выражается в виде матричного соотношения

$$r_D^{(0)} = A_{01} [A_{12} (A_{23} r_D^{(3)} + L_{23}) + L_{12}], \quad (1)$$

где A_{01} , A_{12} , A_{23} – матрицы 3×3 поворота координатных осей при преобразовании координат точки из одной системы в другую, а L_{12} и L_{23} – столбцовые матрицы 3×1 параллельного переноса осей. Указанные матрицы составляются согласно известной методике [1].

Далее по аналогии с работой авторов [2] на основании соотношения (1) получены выражения координат центра схвата (точки D) и центров масс звеньев S_2 и S_3 , скоростей этих точек, а также угловых скоростей звеньев.

$$\left(\omega_{30}^{(3)}\right)^T = \left[-\dot{\varphi}_{10} \sin \varphi_{\Sigma} \quad \dot{\varphi}_{\Sigma} \quad \dot{\varphi}_{10} \cos \varphi_{\Sigma} \right].$$

Полагаем, что звенья имеют осесимметричную форму (в виде цилиндра). Тогда

$$\left[I_{S3} \right] = \begin{bmatrix} I_{X3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Y3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Z3} \end{bmatrix},$$

где I_{X3} , I_{Y3} , I_{Z3} – осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции звена (с началом координат в центре масс), параллельных осям подвижной системы координат $x_3 y_3 z_3$, жестко связанной с данным звеном.

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где $q_1 = \varphi_{10}$, $q_2 = \varphi_{21}$, $q_3 = \varphi_{32}$, $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}_{10}$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}_{21}$, $\dot{q}_3 = \dot{\varphi}_{32}$.

Обобщенная сила Q_i , соответствующая обобщенной координате q_i , складывается из обобщенной движущей силы Q_{Di} (управляющего момента по координате q_i), а также из слагаемых от потенциальных сил (сил тяжести звеньев). Тогда в соответствии с [3]

$$Q_i = Q_{Di} - G_1 \frac{\partial Z_{S1}}{\partial q_i} - G_2 \frac{\partial Z_{S2}}{\partial q_i} - G_3 \frac{\partial Z_{S3}}{\partial q_i} - G_D \frac{\partial Z_D}{\partial q_i}.$$

После выполнения соответствующих математических операций уравнение (2) приводится к системе из трех дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_{10} &= f_1(\varphi_{21}, \varphi_{32}, \dot{\varphi}_{10}, \dot{\varphi}_{21}, \dot{\varphi}_{32}) \\ \ddot{\varphi}_{21} &= f_2(\varphi_{21}, \varphi_{32}, \dot{\varphi}_{10}, \dot{\varphi}_{21}, \dot{\varphi}_{32}) \\ \ddot{\varphi}_{32} &= f_3(\varphi_{21}, \varphi_{32}, \dot{\varphi}_{10}, \dot{\varphi}_{21}, \dot{\varphi}_{32}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Полученные уравнения (3) могут быть использованы для решения следующих задач:

1) известны обобщенные координаты и их производные (например, из заданного закона движения схвата вдоль траектории); требуется определить движущие моменты приводных двигателей;

2) известны движущие моменты, требуется определить обобщенные координаты и их производные, а также соответствующий им закон движения схвата вдоль траектории.

В первом случае решается система алгебраических уравнений, а во втором – выполняется численное интегрирование системы дифференциальных уравнений.

Для программной реализации известных алгоритмов интегрирования дифференциальных уравнений система (3) путем понижения порядка приводится к системе из 6 дифференциальных уравнений первого порядка. Это можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \varphi_{10}, \quad z_2 = \dot{\varphi}_{10}, \quad z_3 = \varphi_{21}, \quad z_4 = \dot{\varphi}_{21}, \quad z_5 = \varphi_{32}, \quad z_6 = \dot{\varphi}_{32}, \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= f_1(z_3, z_5, z_2, z_4, z_6) \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= f_2(z_3, z_5, z_2, z_4, z_6) \\ \dot{z}_5 &= z_6 \\ \dot{z}_6 &= f_3(z_3, z_5, z_2, z_4, z_6) \end{aligned} \right\}$$

Решение обратной задачи кинематики манипулятора позволяет определить его обобщенные координаты по заданному закону движения схвата вдоль его траектории. Из геометрических соотношений, вытекающих из схемы манипулятора (см. рис. 1), получены следующие выражения для определения обобщенных координат:

$$\begin{aligned}\varphi_{10} &= \operatorname{arctg} \frac{y_D}{x_D}, \\ \varphi_{21} &= \pi - \arccos \frac{l_1^2 + l_{BD}^2 - r_D^2}{2l_1 l_{BD}} - \arccos \frac{l_2^2 + l_{BD}^2 - l_3^2}{2l_2 l_{BD}}, \\ \varphi_{32} &= \arccos \frac{l_{BD}^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}r_D &= \sqrt{x_D^2 + y_D^2 + z_D^2}, \\ l_{BD} &= \sqrt{x_D^2 + y_D^2 + (z_D - l_1)^2}.\end{aligned}$$

Текущие координаты траектории центра схвата x_D , y_D , z_D определяются, исходя из принятого закона движения схвата вдоль его траектории. В качестве примера можно привести 3-участковые законы движения – трапецеидальный закон изменения скорости и синусоидальный закон изменения ускорения [4]. Время перемещения схвата из начального положения в конечное состоит из трех интервалов – разгон, равномерное движение, торможение.

РЕЗЮМЕ

В статье для манипулятора с тремя степенями свободы, работающего в ангулярной системе координат, получены дифференциальные уравнения движения звеньев в форме уравнений Лагранжа второго рода. Для этого определены кинематические характеристики и составлены выражения кинетической энергии звеньев манипулятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коловский, М.З. Основы динамики промышленных роботов / М.З.Коловский, А.В. Слоущ. – М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит., 1988. – 240 с.
2. Анципорович, П.П. Кинематический анализ манипулятора с 4 степенями свободы / П.П. Анципорович, В.К. Акулич, Е.М. Дубовская // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2012. – Вып. 27. – С. 358 – 361.
3. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в двух томах / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 1998. – 736 с.
4. Филонов, И.П. Определение кинематических характеристик звеньев манипулятора с использованием ЭВМ / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. – Минск: БПИ, 1990. – 39 с.
5. Филонов, И.П. Исследование динамики манипуляторов с использованием ЭВМ / И.П. Филонов, П.П. Анципорович, В.К. Акулич. – Минск: БПИ, 1990. – 35 с.

SUMMARY

In the article for the manipulator, working in angular system of coordinates, with three degrees of freedom the differential equations of movement of links in the form of Lagrange equations of the second kind are received. For this purpose kinematic characteristics are defined and expressions of kinetic energy of links of the manipulator are made.

РАСЧЕТ УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

д. т. н. Локтионов А. В.

УО «Витебский государственный технологический университет», Витебск

В работе [1] получено дифференциальное уравнение гармонических колебаний эллиптического маятника, состоящего из ползуна, шарика и стержня. При этом используется координатный способ задания движения ползуна и шарика. Вертикальная ось проведена через начальное положение центра тяжести системы, который движется ввиду отсутствия горизонтальных внешних сил по вертикали. Принято, что в начальный момент ползун находится в покое, угловая скорость вращения шарика $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 = 0$, угол отклонения $\phi = \phi_0 \neq 0$.

В работе [2] получен закон движения малых колебаний эллиптического маятника при приближении $\sin^2 \phi = \phi$. Однако больший диапазон угла отклонения маятника достигается при приближении $\sin^2 \phi = \phi^2$ при этом угол $\phi = -40 + 40$ градусов ($-0,698 \div 0,698$ радиан).

Рассмотрим эллиптический маятник, состоящий из ползуна I, перемещающегося без трения по горизонтальной прямой, и шарика II, подвешенного к ползуну I нерастяжимым стержнем (рисунок 1). Масса ползуна I равна M , масса шарика II – m , длина нерастяжимого стержня – l .

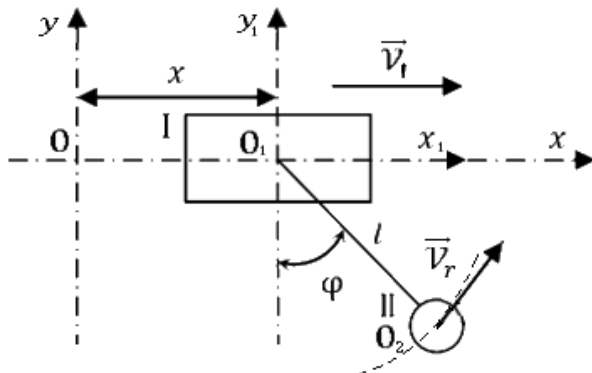


Рисунок 1. - Расчетная схема движения эллиптического маятника

По расчетной схеме рисунка 1 принимаем, что в начальный момент угол $\phi = \phi_0 = 0$, а угловая скорость $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 \neq 0$. Найдем закон движения ползуна и шарика в зависимости от заданных начальных условий, при которых $\dot{\phi}_0 = \omega_0 \neq 0$. Для решения воспользуемся уравнением Лагранжа. Принимаем, что $\sin^2 \phi = \phi^2$, на маятник не действуют силы тяжести и потенциальная энергия системы $II = 0$.

Система обладает двумя степенями свободы, а значит двумя обобщенными координатами x и ϕ . Тогда уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} &= 0. \end{aligned}$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии первого тела и кинетической энергии второго тела.

В работе [2] получены уравнения, выражающие закон движения ползуна в зависимости от угла отклонения стержня l от вертикальной оси и времени, и зависимость угловой скорости вращения маятника от угла отклонения стержня l от вертикальной оси:

$$x = \frac{ml(\dot{\phi}_0 t - \sin \phi)}{M + m}, \quad (1)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\phi}_0}{\sqrt{1 + \frac{m}{M} \operatorname{sn}^2 \phi}} \quad (2)$$

Подставляя в выражение (2) $\operatorname{sn}^2 \phi = \varphi^2$ и разделяя переменные, получим:

$$\sqrt{1 + \frac{m}{M} \varphi^2} d\varphi = \dot{\phi}_0 dt. \quad (3)$$

Для решения уравнения (3) воспользуемся заменой $\sqrt{1 + \frac{m}{M} \varphi^2} = p$. Получим:

$$\varphi = \sqrt{\frac{M}{m} (p^2 - 1)}, \text{ а } d\varphi = d\sqrt{\frac{M}{m} (p^2 - 1)} = \frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M} (p^2 - 1)}} dp.$$

Уравнение (3) можно записать в виде:

$$\int p \frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M} (p^2 - 1)}} dp = \int \dot{\phi}_0 dt. \quad (4)$$

Рассмотрим левый интеграл уравнения (4):

$$\int p \frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M} (p^2 - 1)}} dp = \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{p^2}{\sqrt{p^2 - 1}} dp. \quad (5)$$

Введем замену $\sqrt{p^2 - 1} = t$, тогда $p = \sqrt{t^2 + 1}$, а $dp = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$.

Уравнение (5) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{t^2 + 1}{t} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \sqrt{\frac{M}{m}} \int \sqrt{t^2 + 1} dt. \quad (6)$$

Введем замену $t = \operatorname{tg} x$, тогда $\sqrt{t^2 + 1} = \frac{1}{\cos x}$, а $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

Уравнение (6) примет вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{1}{\cos x} \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{\cos x}{(\cos^2 x)^2} dx = \\ &= \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{d \sin x}{(1 - \sin^2 x)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем замену $\sin x = \cos y$. Уравнение (7) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{d \cos y}{(1 - \cos^2 y)^2} = - \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{\sin y dy}{(\sin^2 y)^2} = - \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{1}{\sin^3 y} dy. \quad (8)$$

Так как для малых углов $\sin y \approx y$, то $\sin^3 y \approx y^3$.

Тогда уравнение (8) примет вид:

$$- \sqrt{\frac{M}{m}} \int \frac{1}{y^3} dy = - \sqrt{\frac{M}{m}} \int y^{-3} dy = \sqrt{\frac{M}{m}} \frac{1}{2y^2}. \quad (9)$$

Введем обратную замену:

$$y \approx \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \cos x.$$

Уравнение (9) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m} \frac{1}{2 \cos^2 x}} = \sqrt{\frac{M}{m} \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 x)}. \quad (10)$$

Учитывая, что $\operatorname{tg} x = t$, а $t = \sqrt{p^2 - 1}$, где $p^2 = 1 + \frac{m}{M} \varphi^2$, из (10) и (5) будем иметь:

$$\int p \frac{p}{\sqrt{\frac{m}{M} (p^2 - 1)}} dp = \sqrt{\frac{M}{m} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \varphi^2\right)}. \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в (4), получим:

$$\sqrt{\frac{M}{m} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \varphi^2\right)} = \dot{\varphi}_0 t + C_4. \quad (12)$$

С учетом принятых начальных условий при $t = t_0 = 0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$ из уравнения

(12) получим $C_4 = \sqrt{\frac{M}{m} \frac{1}{2}}$.

Тогда уравнение (12) примет вид:

$$\sqrt{\frac{M}{m} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \varphi^2\right)} = \dot{\varphi}_0 t + \sqrt{\frac{M}{m} \frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Из равенства (13) получим:

$$\varphi = \sqrt{\sqrt{\frac{4M}{m}} \dot{\varphi}_0 t}. \quad (14)$$

Уравнение (14) выражает закон движения малых колебаний при сложном движении эллиптического маятника с учетом принятых начальных условий и равенства, что $\sin^2 \varphi = \varphi^2$.

Подставляя уравнение (14) в (1), получим закон движения ползуна в зависимости от времени и заданной начальной угловой скорости вращения маятника.

Для построения траектории движения тел системы, с учетом равенств (1) и (14) и известных расчетных формул по определению координат центра масс системы, приняты следующие условные расчетные данные: $m=1$; $M=5$; $\dot{\varphi}_0 = 0,1$; $l=1$.

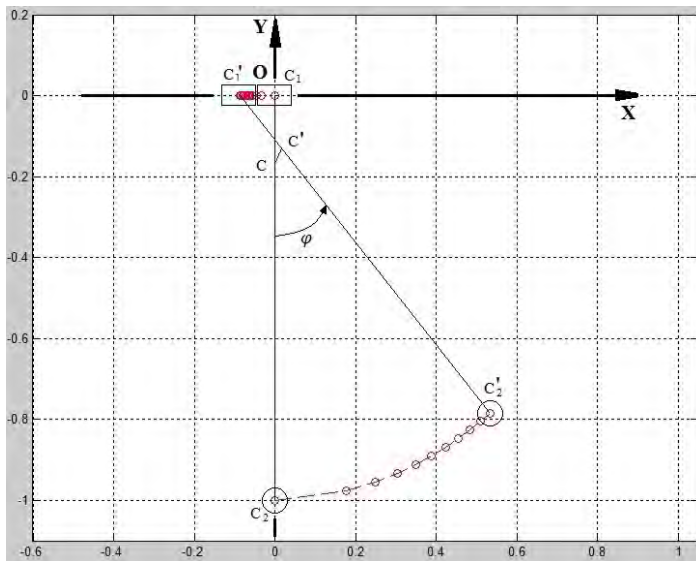


Рисунок 2. - Расчетная схема перемещения центров масс ползуна, шарика и эллиптического маятника

На рисунке 2 представлены траектории перемещения центров масс ползуна C_1C_1' , шарика C_2C_2' и эллиптического маятника CC' .

Из рисунка 2 следует, что ползун перемещается вдоль оси ОХ. Причем, чем дальше шарик отклонен от вертикальной оси ОУ, тем меньше скорость перемещения ползуна. Скорость перемещения ползуна максимальна, когда координата Х шарика равна 0.

Траектория движения шарика C_2C_2' представляет собой сегмент эллипса, т.е. шарик перемещается по эллиптической траектории.

Полученная расчетная формула (14) по определению закона движения малых колебаний маятника значительно упрощается по сравнению с формулой в работе [2], которая имеет вид:

$$\varphi = \frac{M}{m} \left[\sqrt{\left(\frac{3m}{2M} \dot{\varphi}_0 t + 1 \right)^2 - 1} \right] \quad (15)$$

и применима при исследовании малых колебаний маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения при диапазоне изменения угла φ от -40° до $+40^\circ$.

При расчете уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения с учетом заданных исходных параметров, момента инерции шарика относительно точки подвеса $O_1 - J$ и условию, что $\sin^2 \varphi = \varphi^2$, уравнение движения маятника имеет вид [3]:

$$\varphi = \sqrt{\frac{4[(ml)^2 - J(M+m)]}{(ml)^2 \varphi}} \dot{\varphi}_0 t. \quad (16)$$

Из уравнений (14)-(16) следует, что при исследовании закона движения малых колебаний эллиптического маятника целесообразно рассматривать сложное движение маятника и использовать равенство (14).

РЕЗЮМЕ

Изложен расчет уравнения малых колебаний эллиптического маятника. С учетом принятых начальных условий получены уравнения движения ползуна и малых колебаний маятника. Представлена схема перемещений центров масс ползуна, шарика и эллиптического маятника. Установлено, что при исследовании следует рассматривать сложное движение эллиптического маятника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики. В 2 т. Т.2 / А. А. Яблонский. – Москва : Высшая школа, 1971. – 488 с.
2. Локтионов, А. В. К вопросу составления дифференциального уравнения при сложном движении эллиптического маятника / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки : междунар. сб. науч. тр. / Вып. 4 / М-во образования Республики Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп.; под ред. А. О. Шимановского. – Гомель : БелГУТ, 2010. – С. 162-166.
3. Локтионов, А. В. Расчет уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения / А. В. Локтионов, С. А. Сеньков // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.- техн. журнал. – Минск, 2011. – № 26. – С. 138-143.

SUMMARY

Calculation of the equation of small fluctuations of an elliptic pendulum is stated. Taking into account the accepted entry conditions the movement equations slide and small fluctuations of a pendulum are received. The scheme of movings of the centres of weights slide, a ball and an elliptic pendulum is presented. It is established, that at research it is necessary to consider difficult movement of an elliptic pendulum.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОЙ МАШИНЫ С МАХОВИЧНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Астахов Э. И., маг. Кузнецов Е.Н., асп. Шкурко С. С.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

В настоящее время среди двигателей мобильных машин преобладают двигатели внутреннего сгорания, частично в новых образцах электродвигатели, а также комбинированные или гибридные двигатели. В связи с повышением современных требований к экологической чистоте городского автотранспорта повышается интерес к так называемому маховичному или инерционному двигателю, в котором быстровращающийся маховик обеспечивает большой запас кинетической энергии для движения мобильной машины (автомобиля) на конечное значительное расстояние. В работе профессора Гулия Н. В. [1], фирмы «Кларк», Volvo и других показано использование маховиков в гибридных двигателях совместно с ДВС или с электрическими двигателями. Такие гибридные двигатели являются более универсальными и могут обеспечить любые маршруты движения, однако являются более сложными. Для отдельных видов автотранспорта, например, для маршрутного такси с длительными стоянками на конечных остановках, более целесообразным является, по нашему мнению, использование чисто маховичного двигателя с «зарядкой» (раскруткой) маховика в гараже в начале смены и дозарядки на конечных остановках. Ранее в работах [2,3] авторов показано применение маховичного двигателя для легкового переднеприводного автомобиля такси. В данной работе рассматривается другая схема грузопассажирского маршрутного такси заднеприводного автомобиля для перевозки грузов и пассажиров.

Кинематическая схема предлагаемого автомобиля показана на рисунке 1. Вращающийся маховик 1 установлен в герметичном корпусе 2 с волновой передачей 3 для снижения вентиляционных потерь и шума. Вращение от тихоходного вала волновой передачи передается на коническую передачу 4 и далее, через муфту сцепления 5, на двухступенчатый клиноременный вариатор 6, зубчатую передачу 7, карданный вал 8, конический дифференциал 9 и на полуоси ведущих колес 10. Ведомые колеса 11 связаны с рулевым механизмом 12. Разгонный электродвигатель 13 через обгонную муфту подключается к вариатору, для раскрутки маховика. Одна из ступеней вариатора 6 связана с педалью 14 регулирования скорости движения автомобиля, а другая ступень является следящей, с автоматической регулировкой передаточного числа вариатора, для поддержания постоянной скорости выходного вала при уменьшении частоты вращения маховика.

Схема внешних сил сопротивлений и моментов мобильной машины представлена на рисунке 2, для наиболее тяжелого случая трогания с места при подъеме на гору: $M_{\text{ш}}$ - момент сопротивления перекачиванию пневмошин; M_g - момент составляющей силы веса $G = mg$. При движении маршрутного такси возникают силы сопротивления движению создаваемые внешней средой. Это сила сопротивления дороги и сила сопротивления воздуха. Сила сопротивления дороги $F_{\psi} = F_f + F_n$, где F_f - сила сопротивления качению автомобиля, F_n - сила сопротивления подъёму. $F_f = fG_a$, где f - коэффициент сопротивления качению, $F_n = G_a \sin \alpha$, где α - угол подъема продольного профиля дороги. Сила сопротивления воздуха $F_g = k_g A_g V^2$, где k_g - коэффициент сопротивления воздуха, $A_g = \alpha B_r H_r$ - площадь лобового сопротивления микроавтобуса. Следовательно, моменты этих сил сопротивления равны: $M_{\psi} = (fG_a + G_a \sin \alpha)r_k$ и $M_g = k_g A_g V^2 r_k$.

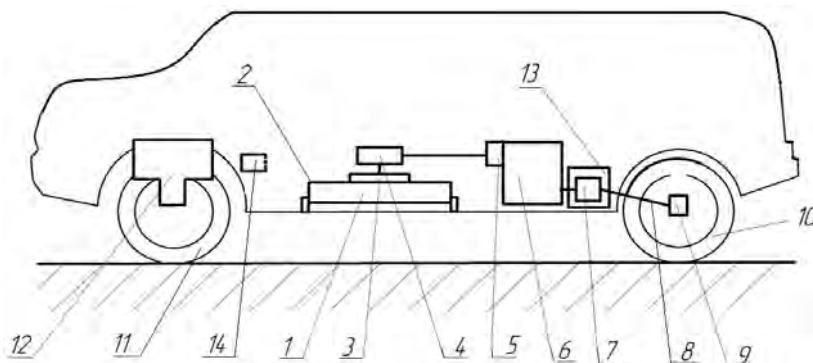


Рисунок 1 – Общий вид заднеприводного автомобиля с маховичным двигателем:

На рисунке 1 приняты следующие обозначения: 1 - маховик, 2- корпус, 3 - волновая передача, 4 - коническая передача, 5 – муфта сцепления, 6 - вариатор, 7- зубчатая передача, 8 – карданный вал, 9 – конический дифференциал, 10 – ведущие колеса, 11 – ведомые колеса, 12 – рулевой механизм, 13 - электродвигатель, 14 – педаль

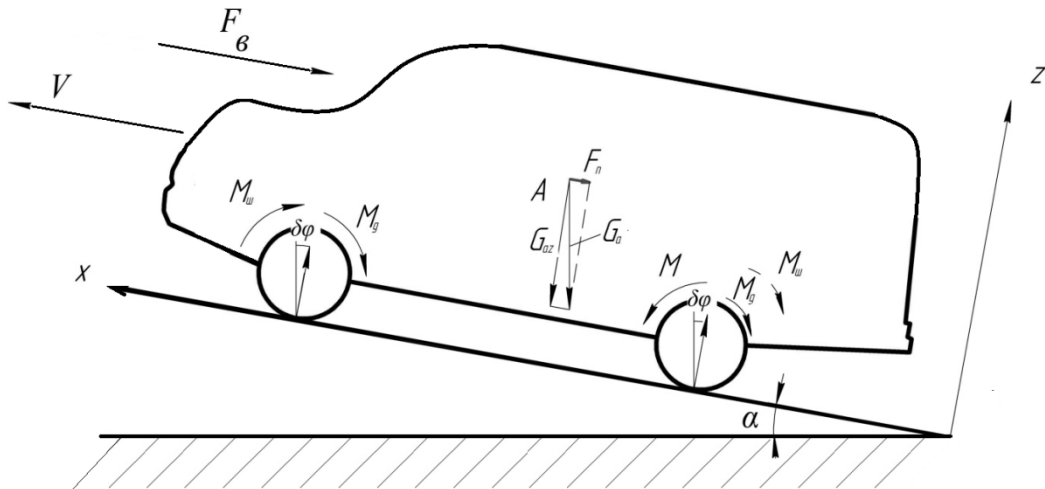


Рисунок 2 – Схема сил и моментов сопротивления автомобиля при подъеме

Динамическая модель, принимаемая для расчета динамики разгона микроавтобуса маршрутного такси, представлена на рисунке 3.

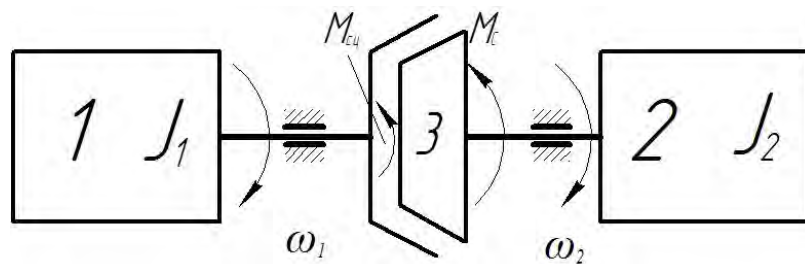


Рисунок 3 – Динамическая расчетная модель трансмиссии автомобиля (при идеально жестких звеньях)

Динамическая модель до сцепления полумуфт представляет собой вращающуюся массу, характеризующуюся приведенным моментом инерции J_1 маховика, а вторая J_2 представляет собой инерционный параметр трансмиссии и автомобиля, на которую (звено приведения – ось пневмошин) действует приведенный момент инерции $M_n^c = M_\psi + M_g$. Между этими массами расположена муфта сцепления 3, при замыкании которой в ней возникает момент сцепления $M_{сц}$. После сцепления полумуфт динамическая модель становится одномассовой с общим приведенным моментом инерции: $J_n = J_1 + J_2$. Так как время сцепления по сравнению с общим временем разгона незначительно, то, пренебрегая этой фазой, для основной фазы разгона будем использовать одномассовую модель с приведенным моментом инерции J_n , при этом считая, что автомобиль к началу основной фазы разгона уже достиг определенной начальной скорости, за счёт фазы включения сцепления. Величина приведенного момента инерции J_n полученная из равенства кинетической энергии и рассчитана для случая предполагаемого линейного закона разгона в следующем виде:

$$J_n = \frac{J_2}{U_{k-1}^2} + J_1,$$

где J_1 – постоянная составляющая вращающихся звеньев ведомой части связанной с колесом автомобиля;

J_2 – составляющая ведущей части звеньев с маховиком.

График зависимости приведенного момента инерции $J_n(\varphi)$ в функции от угла φ поворота колеса, рассчитанный в диапазоне передаточного отношения вариатора от $U_{1-k}=0,364\div 3,283$ представлен на рисунке 4. Как видно из рисунка 4 приведенный момент инерции J_n при увеличении скорости колеса по линейному закону при разгоне, уменьшается по закону квадратичной гиперболы.

Из уравнения кинетической энергии одномассовой модели с вращающимся звеном приведения:

$$\frac{J_n \omega_0^2}{2} - \frac{J_{n_i} \omega_i^2}{2} = \int_0^\varphi M_n^o d\varphi + \int_0^\varphi M_n^c d\varphi \quad (1)$$

Так как приведенный движущий момент $M_n^o = 0$, формула (1) примет вид:

$$\frac{J_n \omega_0^2}{2} - \frac{J_{n_i} \omega_i^2}{2} = \int_0^\varphi M_n^c d\varphi \quad (2)$$

Из уравнения (2) угловая скорость звена приведения будет равна:

$$\omega_i = \sqrt{\left(2T_0 - 2 \int_0^\varphi M_n^c d\varphi\right) / J_{n_i}} \quad (3)$$

где $T_0 = J_n \omega_0^2 / 2$ – кинетическая энергия системы в начале фазы разгона, она же и начальная кинетическая энергия маховика.

При численном интегрировании способом средних прямоугольников работа приведенного момента сопротивления примет вид:

$$\int_0^\varphi M_n^c d\varphi = \sum_{i=1}^n M_n^c \Delta\varphi = \Delta\varphi \sum_{i=1}^n M_n^c \quad (4)$$

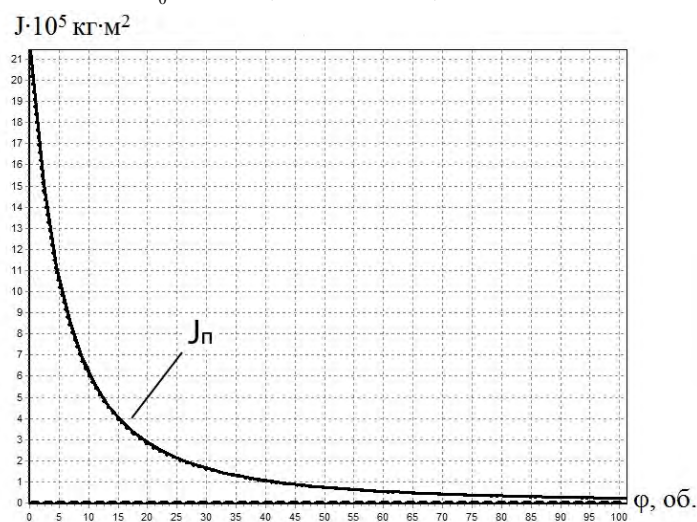


Рисунок 4 – График зависимости приведенного момента инерции

Угловое ускорение колеса ε определяется из дифференциального уравнения движения одномассовой модели:

$$M_n^o + M_n^c = J_n \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2(\varphi)}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi}, \quad (6)$$

отсюда:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \left(-M_n^c - \frac{\omega^2(\varphi)}{2} \cdot \frac{dJ_n}{d\varphi} \right) / J_n(\varphi). \quad (7)$$

При численном дифференцировании с малым интервалом $\Delta\varphi$, с учётом того, что производная $\frac{dJ_n}{d\varphi}$ является отрицательной получим следующее уравнение для углового ускорения:

$$\varepsilon_i = \frac{-M_{n_i}^c - \frac{\omega_i^2(\varphi_i)}{2} \cdot \frac{\Delta J_n}{\Delta\varphi}}{J_{n_i}(\varphi_i)}. \quad (8)$$

Результаты расчетов $\omega_i(\varphi)$ и $\varepsilon_i(\varphi)$, а так же угловой скорости маховика ω_M и производной $\omega'(\varphi)$ представлены на рисунке 5.

Из рисунка 5 видно:

- 1) угловая скорость колеса $\omega(\varphi)$ возрастает по линейному закону, т. к. принято предположение о возрастании передаточного отношения U_{k-1} также по линейному закону;
- 2) угловое ускорение колеса из графика $\varepsilon(\varphi)$ также возрастает по линейному закону;
- 3) угловая скорость маховика ω_M при разгоне микроавтобуса маршрутного такси с наиболее жесткими условиями (преодоления подъёма) уменьшается незначительно.

Такие идеальные линейные законы $\omega(\varphi)$ и $\varepsilon(\varphi)$ можно обеспечить в традиционном варианте автомобиле опытным водителем или при автоматическом управлении с добавлением элементов механатроники.

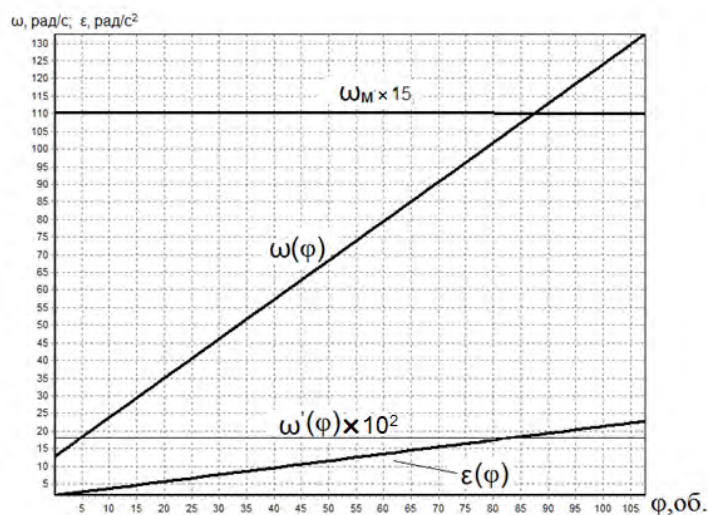


Рисунок 5 – Графики зависимостей скоростей и ускорений

Таким образом, транспортное средство может совершить множество таких разгонов. Если принять, что минимальная скорость маховика, при которой уже необходима дозарядка, должна быть не более чем в 3 раза меньше максимальной, то такая мобильная машина, на основании проведенных расчётов, сможет произвести примерно 200 таких разгонов, а это эквивалентно 50 км общего пути разгонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулия Н. В., Инерционные аккумуляторы энергии. Изд-во ВГУ, Воронеж, 1973.
2. Соболевский А. К. Определение динамических параметров мобильной машины с маховичным двигателем/ Соболевский А. К., Астахов Э. И. -Машиностроение. – 2006. – Вып. 22. Т.2. – с. 42 – 46.
3. Астахов Э. И. Анализ динамики разгона и торможения в энергетическом балансе мобильной машины с маховичным двигателем. Современные проблемы машиноведения: тез. докл. VIII Междунар. научн.-техн. конф. (науч. чтения, посвящ. 115-летию со дня рождения П. О. Сухого)/ Астахов Э. И., Шкурко С. С., Пирч А. С. - Гомель, 28-29 окт. 2010г.; под общ. ред. С. Н. Тимошина. – Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого, 2010. – с.40 – 41.

SUMMARY

The perspective non-polluting automobile of a city fixed-route taxi with the flywheel engine in which quickly rotating flywheel provides propulsion for movement on final distance to 100 km is considered. The analysis of acceleration dynamics at the start of the car from a place is resulted on one-mass dynamic model with a rotating link of reduction. Angular speed of the car wheel was defined from the movement equation in the integrated form of kinetic energy, and a condition of acceleration was defined from the differential equation of movement which are solved by a numerical method.

Поступила в редакцию 12.10.2013

О ВЫБОРЕ ПОЛЮСОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ (СПОСОБ ДВУХ МОМЕНТОВ)

к. т. н. Холодарь Б.Г.

УО «Брестский государственный технический университет», Брест

Определение опорных реакций представляет собой одну из основных операций при расчете конструкций на прочность. Возникающие реактивные силовые факторы зависят от конструктивного исполнения опорных устройств, геометрии системы и характера нагружения.

Традиционно реакции ищутся в декартовой системе координат с помощью уравнений равновесия. При этом для системы, состоящей из нескольких тел, одновременно приходится определять и реакции внутренних связей, решая системы линейных уравнений. Более рациональным является использование принципа возможных перемещений (ПВП), который позволяет определить искомую реакцию из одного уравнения, независимо от других реакций [1]. При этом, как будет понятно из дальнейшего, разделение реакции на компоненты R_x и R_y вдоль общих осей координат является не самым удобным способом ее представления и затрудняет получение общих выводов.

Освободив систему от внешних связей и используя условия совместности движения в узлах соединения ее частей, можно выразить перемещение любой точки конструкции в зависимости от некоторого описывающего ее движение параметра, который в этом случае будет являться обобщенной координатой. Соответствующее совокупное движение всех точек системы будем называть ее обобщенным движением. Равенство нулю возможной работы или возможной мощности сил системы на выбранном обобщенном движении трансформируется в условие равенства нулю обобщенной силы, из которого определяется соответствующий реактивный силовой фактор.

Приложенная к телам системы активная нагрузка может быть приведена к какой-либо точке, и в этом случае она представится двумя силовыми факторами – главным вектором и главным моментом, каждый из которых в частном случае может оказаться равным нулю. Сведение нагрузки к двум силовым факторам позволяет определить реакции связей методом суперпозиции. При использовании ПВП телам придают соответствующие обобщенные движения, однако расчетные схемы при этом могут оказаться достаточно сложными и не вполне удобными, что ограничивает применение метода. Далее рассматривается методика расчета реакций опорных устройств, которая, как нам представляется, является менее громоздкой и позволяет сами вычисления свести к минимуму. Она является комбинированной и использует одновременно ПВП и условия равновесия. Хотя методология является общей для систем различного конструктивного исполнения, рассмотрим построение решения более подробно для нескольких схем в отдельности.

Применение метода становится понятным из рассмотрения расчетных схем для одного тела (рис.1). Всю активную нагрузку приведем к точке А (F – главный вектор, M_A – главный момент относительно этой точки).

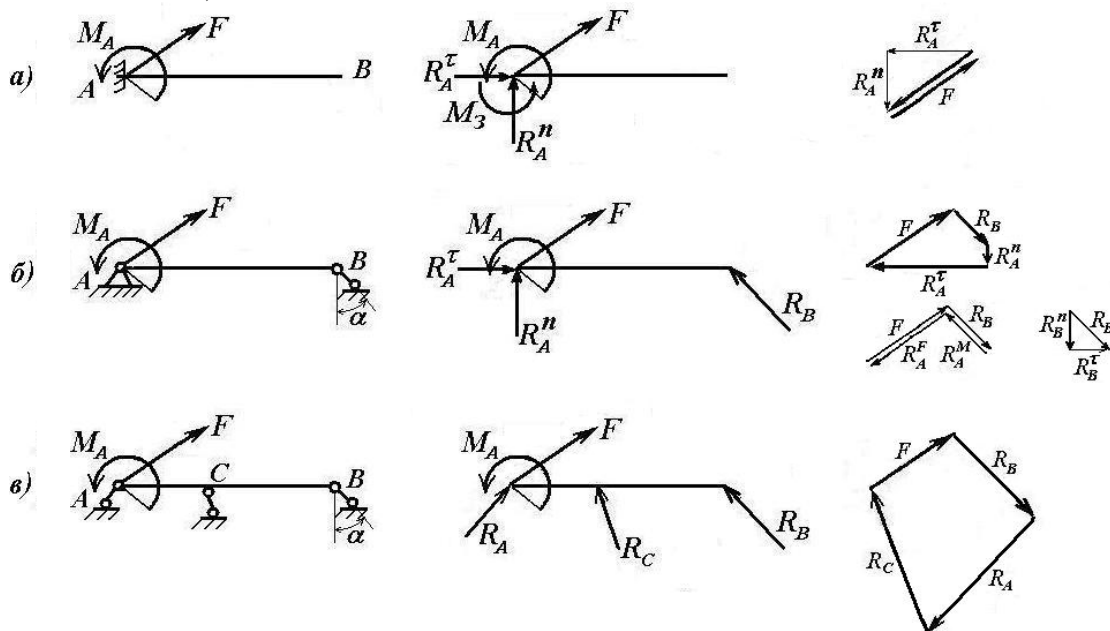


Рис.1. – Схемы закрепления тела – жесткая заделка (а), шарнирное крепление (б), стержневые опоры (в)

Для схем рис.1 соответствующие обобщенные движения очевидны и сводятся к вращению вокруг трех мгновенных центров вращения (МЦВ), два из которых могут быть бесконечно удаленными (случай жесткой заделки). Для схемы "1в" МЦВ находятся на пересечениях линий действия реакций. Определив реакцию одной из опор от моментной нагрузки M_A (для зашпеленной балки это будет момент заделки M_3 , для других – реакция R_B), мы имеем возможность найти остальные неизвестные из векторного условия $\bar{F}^e = \bar{F} + \sum \bar{R}_i = 0$ простым геометрическим построением (показано справа на схемах) или же сделать это в аналитической форме через суммы проекций на выбранные оси координат. Для схемы "1б" видим, что стержневая опора уравнивает только моментную нагрузку, ее реакция равна $R_B = \frac{M_A}{L \cos \alpha}$ и при угле установки опоры $\alpha=0$ бу-

дет минимальной (здесь L – длина балки, МЦВ совпадает с точкой А). На схеме, кроме того, показано графическое определение реакции R_A и ее разложение на составляющие в зависимости от их направления или в связи с вызвавшей их нагрузкой. Для схемы "1в" соответствующий МЦВ находится в точке пересечения линий действия реакций R_A и R_C . Фактически для схем "1б" и "1в" достаточно элементарным вычислением определить только нормальную компоненту реакции R_B

($R_B^n = \frac{M_A}{H}$, где H – расстояние между МЦВ и точкой В), а величина полной реакции может быть найдена графически (на построениях направление реакции правой опоры согласовано с направлением момента M_A). В связи с возможным применением AutoCad'a или других подобного рода пакетов точность графического способа не уступает аналитическому, неизбежно использующему при вычислениях разного рода округления.

Анализируя схемы, можно сделать заключение, что в схеме "1б" ось стержневой опоры не должна совпадать с прямой АВ ($\alpha \neq 90^\circ$), а в схеме "1в" – все три МЦВ не должны сливаться в одну точку. Целесообразно также в этой схеме иметь две крайних опоры установленными нормально к АВ (чем обеспечиваются минимальные поперечные реакции), а среднюю – вдоль АВ.

Если конструкция состоит из двух тел, то при их шарнирном соединении могут быть реализованы схемы крепления, показанные на рис.2. Активные нагрузки на обоих телах (правом и левом) считаем приведенными к точке А.

Для такой системы независимо от фактической формы тел удобно ввести в рассмотрение их представление двумя прямыми АВ и АС, соединенными шарниром А.

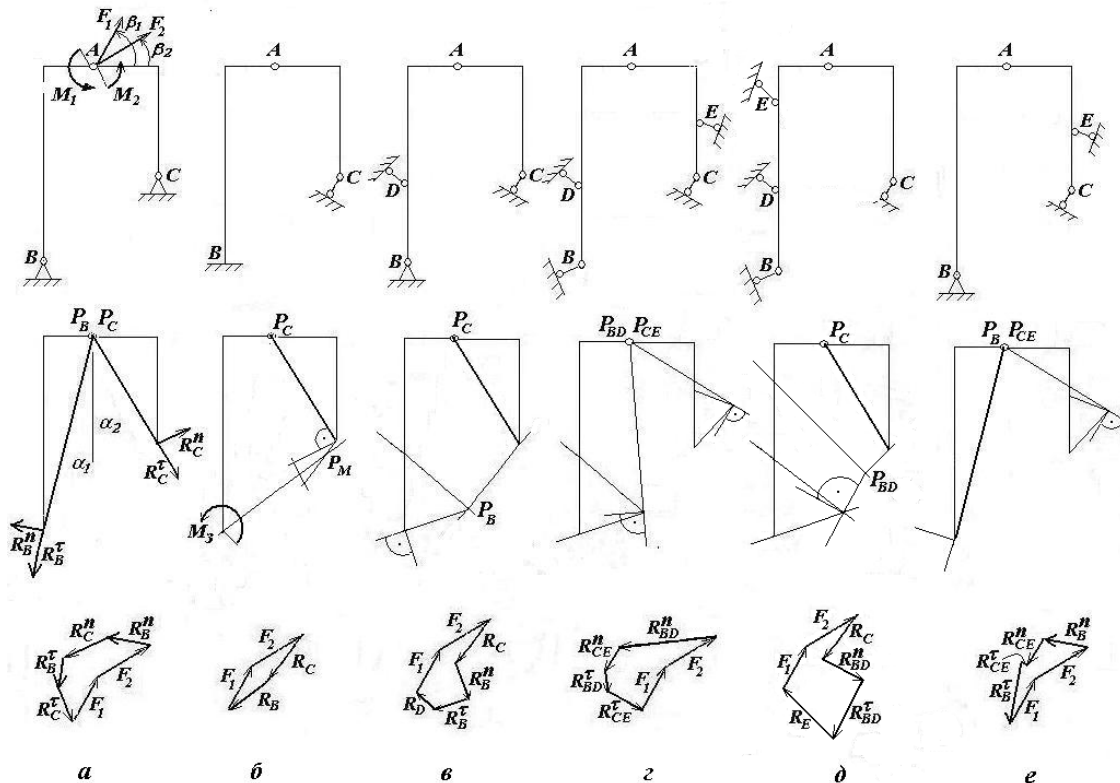


Рисунок 2. – Системы двух тел с различными вариантами установки опор

Для схемы “2а” сразу видно, что если в точках В и С разложить реакции на нормальные и касательные составляющие к этим аппроксимирующим прямым, то определение нормальных составляющих через ПВП можно провести на простейших движениях – вращениях каждого из тел вокруг точки А, при которых из двух активных нагрузок на этих телах (F_1 и M_1 или F_2 и M_2) только моменты, приложенные к каждому из тел, будут производить работу. Т.о., нормальные реакции в опорных точках каждого из тел не зависят от главного вектора \bar{F}^a , а зависят только от момента активных нагрузок на соответствующем теле относительно точки соединения с другим телом, как это, собственно, имело место и для одного тела (рис.1б). Реакции составят $R_B^n = \frac{M_1}{AB}$ и

$$R_C^n = \frac{M_2}{AC}.$$

Величины касательных компонент реакций R_B^r и R_C^r зависит от всех 4-х нагрузок (M_1, M_2, F_1, F_2). Для определения каждой с помощью ПВП необходимо дать системе обобщенное движение, состоящее из двух вращений вокруг соответствующих МЦВ, что ведет к достаточно громоздким вычислениям. Однако эти компоненты легко могут быть найдены графически из векторного равенства $\bar{F}^e = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{R}_D^n + \bar{R}_C^n + \bar{R}_D^r + \bar{R}_C^r = 0$ поскольку их направления известны. При этом отпадает необходимость и в выборе видов обобщенных движений и МЦВ механической системы для определения касательных компонент реакций в опорах В и С, в связи с чем эти схемы не приводятся. Точками Р с соответствующими индексами на схемах отмечены мгновенные центры вращения тел системы для определения той или иной реакции (обращаем внимание, что не используются поступательные движения).

Вместо касательных составляющих при разложении реакций R_B и R_C могут быть выбраны и другие направления, которые представляют интерес для конструктора, так как с точки зрения их определения в принципе ничего не меняется. Еще раз отмечаем, что несложно от графического построения перейти к аналитическому способу вычисления этих реакций. Ввиду простоты получения результата отсутствует необходимость приводить выражения для каждой касательной реакции, которые будут зависеть от формы тел, геометрических и силовых параметров нагружения. В рассматриваемой комбинированной методике эти данные (величины активных силовых факторов, положение точек приложения, углы ориентации сил относительно выбранной системы координат) используются только при приведении системы сил к заданной точке, а решение шести уравнений равновесия с шестью неизвестными, включая внутренние силы в соединении, не требуется.

Поясним кратко построение решения для каждой из оставшихся схем. В случаях, когда реакции связей в разных схемах крепления одинаковы, то при построении силовых многоугольников это отражено векторами одинаковой длины. На фигурах среднего ряда на рис.2 указаны линии действия реакций и некоторые дополнительные построения, поясняющие определение реакций через их компоненты.

Для схемы “2б” после определения реакции R_C аналогично предыдущему случаю находим реакцию R_B из условия равновесия (равенства нулю главного вектора внешних сил системы) $\bar{F}^e = 0$, строим ее линию действия на схеме конструкции, находим МЦВ, относительно которого реакции не дают момента (точка Р_м), и далее определяем момент в заделке M_3 из уравнения $M_P = M_1 + M_2 + M_P(F_1) + M_P(F_2) + M_3 = 0$, соответствующего обобщенному движению всей системы в виде вращения вокруг точки Р_м, лежащей на пересечении линий действия реакций R_C и R_B .

Для схемы “2в” после определения реакции R_C можно определить R_B^n , задавая всей системе обобщенное движение в виде вращения вокруг точки Р_в (рис.2в). После этого две оставшиеся реакции находятся графически, как показано рядом на рисунке для той же схемы.

Для схемы “2г” равнодействующие реакций R_B и R_D , R_C и R_E пройдут через точки пересечения их линий действия Р_{вд} и Р_{се} соответственно. Поэтому, задавая поочередно телам обобщенное движение в виде вращения вокруг точки А, находим нормальные компоненты равнодействующих R_{BD}^n и R_{CE}^n . Далее графически из условия $\bar{F}^e = 0$ находим касательные компоненты этих равнодействующих (схема на рис.2г), после чего можно определить сами реакции стержневых связей R_B, R_D, R_C, R_E , используя положение их линий действия.

Для схемы “2д” найдя, как и прежде, реакцию R_C , можем определить нормальную компоненту любой из равнодействующих двух реакций ($R_{BD}^n, R_{BE}^n, R_{DE}^n$) тела АВ, задавая обобщенное движение в виде вращения всей системы вокруг точки пересечения линий действия третьей реакции с линией действия реакции R_C (для построения на рис.2д конкретно выбрана равнодействующая R_{BD}

и реакция R_E). После этого графическим построением определяем касательную компоненту равнодействующей двух реакций и полную реакцию третьей опоры тела АВ. По компонентам равнодействующей далее находим обе реакции.

Для схемы “2е”, найдя нормальную компоненту реакции R_B и нормальную компоненту R_{CE}^n равнодействующей двух реакций R_C и R_E , имеем возможность касательными компонентами R_{CE}^r и R_B^r замкнуть силовой многоугольник (рис.2е) и затем определить сами реакции по аналогии с рассмотренными выше случаями.

Имея опорные реакции и разделив систему на части, нетрудно определить и реакции в соединительном шарнире С.

ПВП позволяет, анализируя различные схемы крепления тел, находить оптимальные или, наоборот, недопустимые углы установки стержневых опор. Например, для схемы “2д”, как и для одного тела, нельзя допускать совпадения трех МЦВ тела АВ, для схемы “2г” при произвольных F_1 и F_2 нельзя допускать, чтобы точки P_{BC} и P_{DE} лежали на одной прямой, проходящей через точку А и т.п.

Отметим, что во всех рассмотренных схемах для определения реакции (или ее компоненты) обобщенное движение задавалось в виде вращения вокруг одного МЦВ. Поэтому решение задач можно построить в рамках общепринятой методики (без использования понятий об обобщенных движениях), составляя в каждом случае по два уравнения моментов вокруг определенным образом выбранных полюсов (совпадают с соответствующими МЦВ для ПВП). Необходимость решать системы уравнений при этом отсутствует.

Если тел более двух, то при сохранении статической определенности задачи можно по такой же методике определить все неизвестные, идя от последнего присоединенного тела к двум начальным и передавая на предыдущее тело найденную реакцию связи.

Дополнительно затронем вопрос о действии на тела моментной нагрузки.

Как и силы, моментную нагрузку также нельзя переносить с тела на тело. Это хорошо видно, например, на схеме рис.2а с тремя шарнирами. Если момент M приложен к правому

телу, то $R_C^n = \frac{M}{L_2}$ (здесь $L_2=AC$), а так как тело АВ находится в равновесии под действием только

двух сил, то направление реакций в точке А и точке С идет по линии АС, и мы легко находим эти реакции и касательную компоненту R_B^r реакции R_B из условия равновесия $\bar{F} = 0$ графическим построением или через проекции. При переносе момента M на левое тело величины реакций и их направления изменятся. Отметим, что для определения всех реактивных нагрузок в этом случае требуется всего одно вычисление – величина нормальной реакции одной из опор.

Здесь представляет интерес попутная задача – как распределить между двумя телами момент $M=M_1+M_2$, чтобы реакции опор были такими же, как при приложении момента M к жесткой системе тел (сварка вместо шарнира в точке А), когда они составляют $R_B=R_C=M/BC$ и ориентированы перпендикулярно прямой ВС. Для тел, соединенных шарниром, компоненты реакции на опоре В от моментов M_1 и M_2 будут равны:

$$R_B^n = M_1 / L_1, \quad R_B^r = \frac{M_1}{L_1 \operatorname{tg} \beta} + \frac{M_2}{L_2 \sin \beta},$$

где $L_1=AB$, $L_2=AC$, $\beta = \alpha_1 + \alpha_2$.

Введя безразмерные параметры

$$m_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}, \quad m_2 = \frac{M_2}{M_1 + M_2}, \quad \xi = \frac{L_1}{L_2}$$

из условия $(R_B^n)^2 + (R_B^r)^2 = (M / BC)^2$ находим функции

$$m_1 = \frac{\xi(\xi - \cos \beta)}{1 + \xi^2 - 2\xi \cos \beta}, \quad m_2 = 1 - m_1.$$

Их графики приведены на рис.3 и показывают достаточную сложную зависимость решения от параметров ξ и β . При найденной связи между величинами моментов M_1 и M_2 реакции на опорах будут минимальными из возможных.

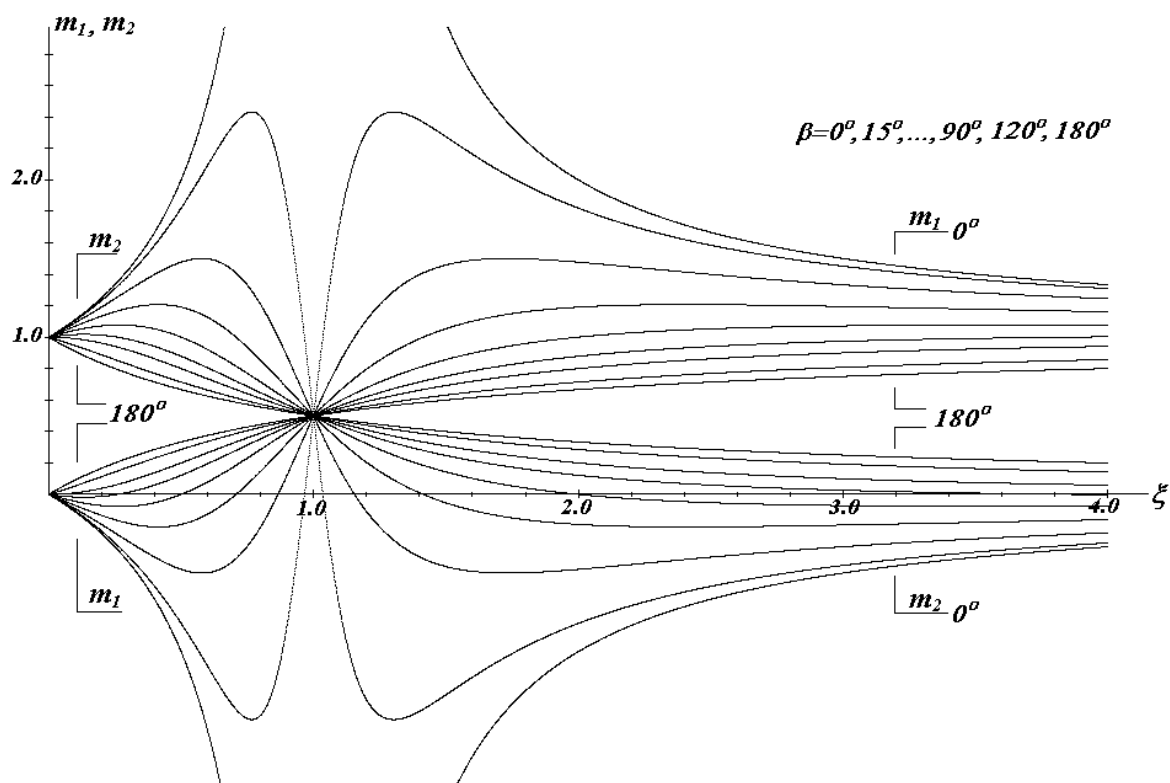


Рис.3. Влияние параметров ξ и β на функции m_1, m_2

РЕЗЮМЕ

Определение реакций независимо друг от друга базируется на их разложении на составляющие по специальному образом выбираемым направлениям и соответствующем выборе полюсов при использовании уравнений моментов. Методика реализуется в аналитической или графо-аналитической форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.В. Бутенин, Я.Л. Луни, Д.Р. Меркин. Курс теоретической механики. В двух томах. СПб, издательство «Лань», 1998. -736 с.

SUMMARY

Determination of the reactions independently from each other is based on their decomposition along specially chosen axes and on a corresponding choice of poles when using the equations of the moments. The technique is realized either in an analytical or graphic-analytical form.

Поступила в редакцию 05.09.2013

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В СЕРВЕРНОМ ЯЩИКЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

асп. Али М. Абед Аль-Зобайде

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Конечно-элементное моделирование - один из наиболее эффективных методов численного исследования сложных физических процессов и находит все более широкое применение для исследования воздушных потоков в замкнутых объемах. Достоинство численного моделирования особенно ощутимы, когда проведение реального эксперимента требует большого количества замеров, которые в свою очередь вносят изменение в исследуемый процесс или весьма затруднительны.

Метод конечных элементов представляет собой известный численный метод решения системы дифференциальных уравнений, описывающих большинство физических процессов, в т.ч. - процесс переноса тепла. Основная идея применения МКЭ заключается в том, что непрерывная величина, температура, аппроксимируется дискретной моделью, состоящей из множества кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе элементарных областей, на которые разбивается исследуемая область (поверхность или пространство). Сами кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области [1-3].

Выбор МКЭ обусловлен следующим: во-первых, метод можно применять при исследовании неоднородных тел, во-вторых, метод позволяет описывать как прямолинейные области, так и криволинейные; в-третьих, размеры элементов могут быть переменными (вблизи неоднородностей для более точной аппроксимации сеть разбиения исследуемой области делается мельче); в-четвертых, этот метод позволяет решать задачи со смешанными граничными условиями. Главным недостатком МКЭ длительное время являлась необходимость разработки вычислительных программ и применение ЭВМ. В настоящее время эта проблема решена. Создано достаточно большое количество программных комплексов, позволяющих проводить расчеты методом конечных элементов.

Для решения задачи необходимо построить трехмерную модель, а затем осуществить генерацию сеточной конечно-элементной модели. Генерация сеточной модели предусматривает создание конечно-элементной сетки, отражающей геометрию изделия и наложения граничных условий, определяющих содержание физической задачи. Поскольку Solid Works simulation ориентирован на решение физических задач в объемной постановке, то рациональным решением по описано геометрии анализируемой детали является тетраэдральный конечный элемент.

Тетраэдральная сетка позволяет достаточно точно аппроксимировать любую геометрию изделия и поэтому используется для объемного анализа на основе метода конечных элементов. Возможности препроцессора Solid Works позволяют строить сетки из тетраэдральных конечных элементов двух типов - четырехузловых тетраэдров и десятиузловых тетраэдров. Четырехузловые элементы обеспечивают линейную аппроксимацию искомой функции, в частности температуры, в пределах объема конечного элемента

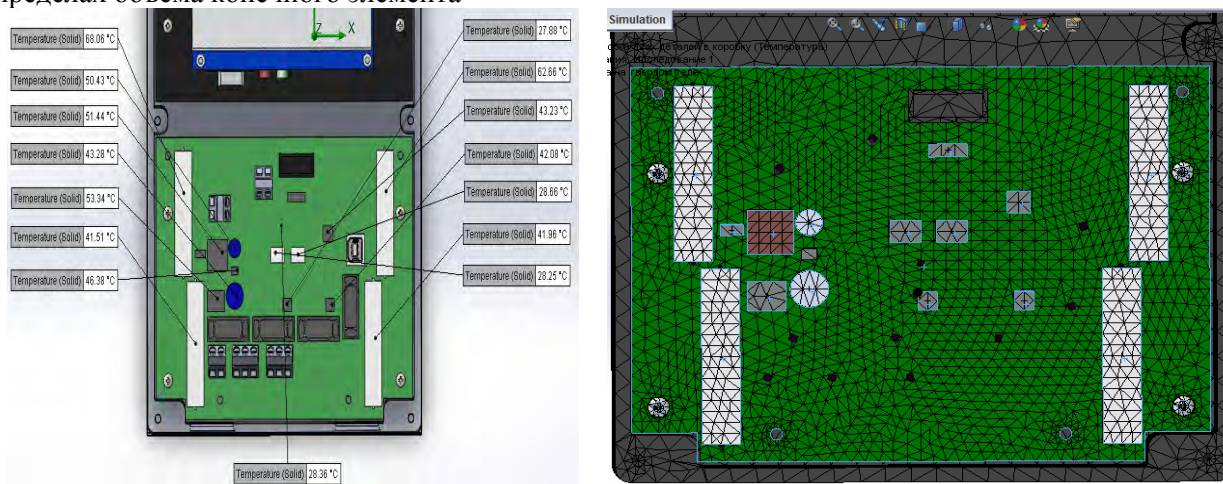


Рисунок 1. – Твердотельная (а) и конечно-элементная (б) модели построенные в системе SolidWorks.

Одним из основных этапов создания конечно-элементной модели является задание аутентичных свойств материала. Модель по своей структуре неоднородна, и разным ее элементам соответствуют различные материалы.

Все свойства выбранного материала соответствуют реальному нагревающему элементу, сделанному из керамики. Также задавались материалы алюминий (конденсаторы), кремний (микрочипы), РСВ слой для платы.

После определения материала по каждому выбранному элементу необходимо задать расчетную температуру деталей. Расчетная температура будет такой же, как и рабочая. Модель должна соответствовать оригиналу, поэтому температуры будут одинаковы (таблица 1)

Таблица 1 Материалы и температуры деталей

Количество деталей	Название	Материал	Расчетная температура °С
2	Конденсатор	Алюминий	43.28;50.43
7	Чип	Кремний	53.34; 51.44; 46.38; 28.66; 28.25; 43.23; 42.08
1	Плата	РСВ слой	28.36
4	Нагреватель	Керамика	41.51; 68.06; 62.66; 41.96

Как только материалы определены и заданы все температуры, возможен расчет конвективного теплообмена в серверном ящике при различных температурах окружающей среды.

В данном случае выбран стационарный процесс, соответствующий реальным условиям работы серверного ящика при температура внешней среды равной 20°С.

На рисунке 2. показано распределение поля температур и направления воздушных потоков. На рисунках 3 показано температурное поле на плате, смонтированной в серверном ящике. На рисунке 4 показано распределение температур в произвольном сечении серверного ящика.

Основными тепловыделяющими элементами являются 4 керамических элемента (на рисунке 3 показаны под цифрами 1-4), выделяющие по 10 Вт тепла каждый. Элементы охлаждаются потоками воздуха со скоростью до 1 м/с.

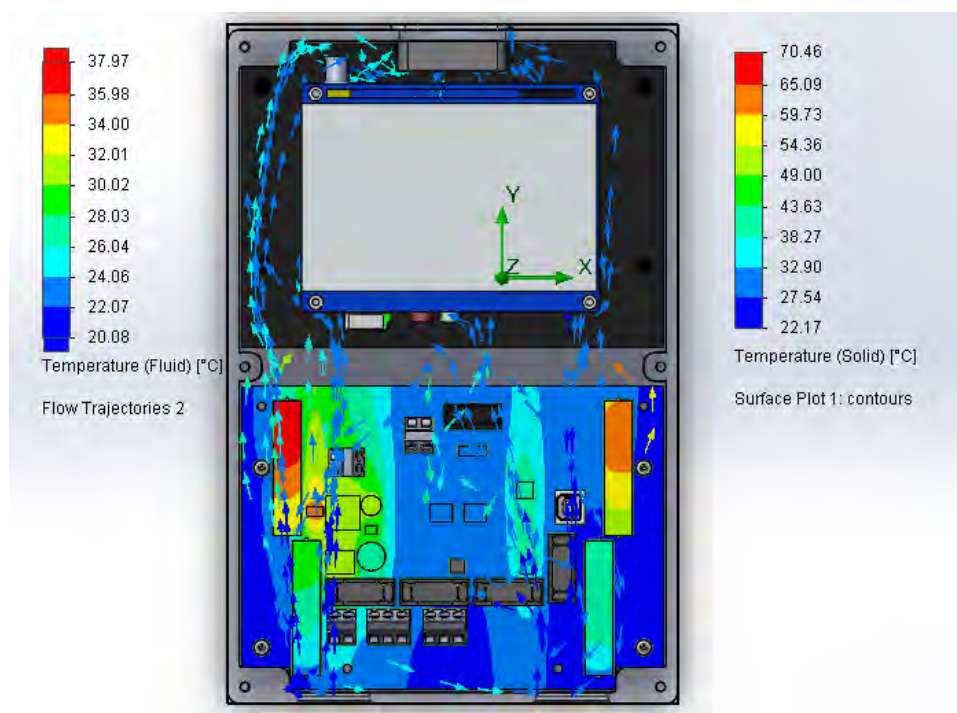


Рис. 2. – Распределение поля температур и направления потоков воздуха при температуре окружающей среды 20°С.

Максимальная температура нагревающего элемента составляет 68 °С, при этом максимально допустимая температура 75 °С. Расчетная температура меньше максимально допустимой на 7 °С. Основные тепловыделяющие элементы - керамические нагреватели. В результате расчета получена их максимальная температура (68 °С), температура потоков воздуха увеличивается с 20 до +35 °С. На керамических элементах температура изменяется : 1) от 22, до +45 °С; 2) от 22, до 40 °С; 3) от 49, до 68 °С; 4) от 47, до 60 °С)

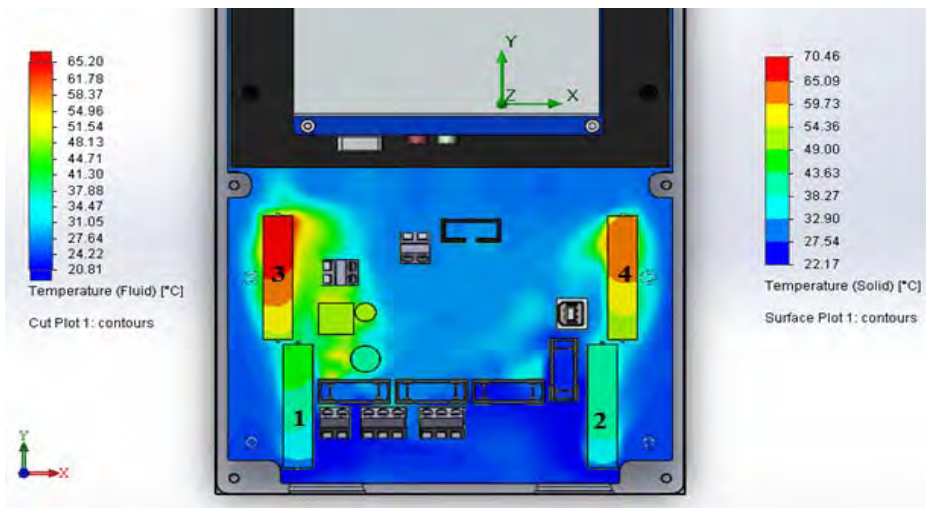


Рисунок 3. – Распределение поля температур на плате, находящейся в серверном ящике.

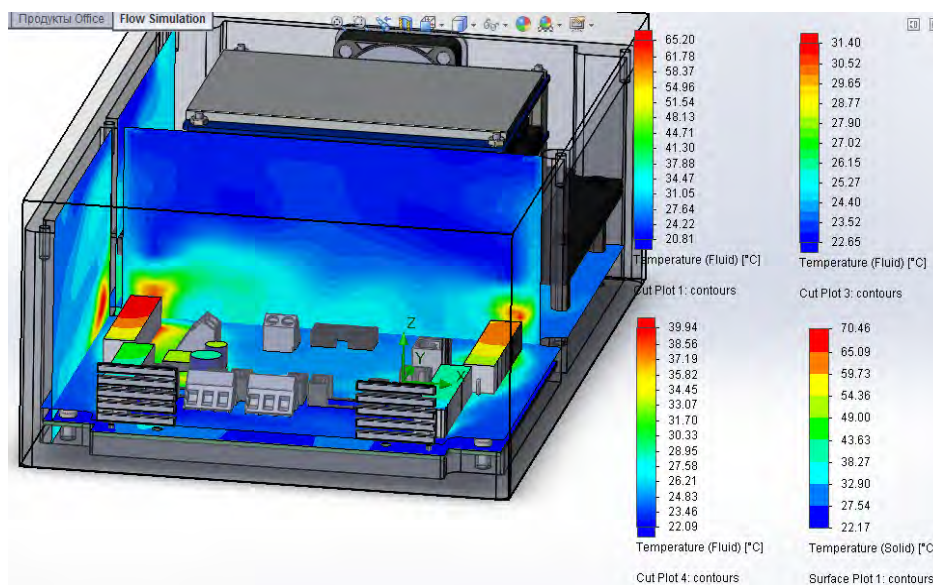


Рисунок 4. – Распределение поля температур в серверном ящике.

РЕЗЮМЕ

Таким образом, с помощью программного модуля конечно-элементного моделирования в системе SolidWorks получено графическое представление температурного поля при стационарной теплопроводности внутри серверного ящика. Установлено, что система охлаждения тепловыделяющих элементов ящика обеспечивает охлаждение элементов, смонтированных внутри, но при повышении температуры окружающей среды данной системы охлаждения будет недостаточно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сегелинд Л. Применение метод конечных элементов: пер. с англ. / Под ред. д-ра физ. – мат. наук Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1979.
2. Joseph E. Flaherty. Finite Element Analysis / Lecture Notes. – Rensselaer Polytechnic Institut Troy, New York, 2000.
3. Розин Л.А. Основы метода конечных элементов в теории упругости / Л.А. Розин. - Л.: 1972. - 79 с.

SUMMARY

Thus, with the help of the software module of finite element modeling in Solid Works received a graphical representation of the temperature field in steady heat conduction inside the server box. Found that the fuel cell cooling system provides cooling box elements mounted inside, but at higher ambient temperatures of the cooling system is insufficient.

Поступила в редакцию 14.08.2013

ПРЫМЯНЕННЕ МЕТАДУ ЖУКОЎСКАГА ДА ВЫЗНАЧЭННЯ РЭАКЦЫЙ ЗНЕСНІХ СУВ'ЯЗЕЙ

Русан С.І., Заяц В.Р., Талачынец І.М.

Барананавіцкі дзяржаўны ўніверсітэт, Баранавічы

Агульныя заўвагі. Навукова-метадычнае даследаванне мае на мэце ўдасканаленне вучэбнага працэсу па тэарэтычнай механіцы і тэорыі механізмаў і машын. Пад знешнімі сувязямі будзем разумець целы, якія злучаюць механічную сістэму з нерухомай асновай, інакш – кінематычныя пары, утвораныя звеннямі механізма са стойкай. Графааналітычны метада Жукоўскага выкарыстоўваецца ў сілавым аналізе плоскіх механізмаў для праверкі рэзультатаў, атрыманых аналітычным метадам. Такая праверка выконваецца на завяршальнай стадыі разлікаў. Але памылка можа быць зроблена і на пачатку сілавога аналізу механізма. Тады працяг разліку не прадуктыўны. Таму пажадана графааналітычную праверку весці адначасова з аналітычным разлікам. Аднак існуючая практыка прымянення метаду Жукоўскага, прыстасаванага для вызначэння толькі знешніх сіл, не дазваляе яе выконваць. Ніжэй паказана, што згаданы метада аднолькава прыгодны як для вызначэння знешніх (прыведзеных ці ўраўнаважвальных), так і ўнутраных сіл узаемадзеяння звенняў ў кінематычных парах.

Сутнасць метаду Жукоўскага. У аснову метаду пакладзены графічны аб'ект, называемы “рычагом Жукоўскага” (ці “жорсткім рычагам”). Метада Жукоўскага прымяняецца як для рашэння задач статыкі, так і задач дынамікі. У першым выпадку ён грунтуецца на агульным ураўненні статыкі, у другім – на агульным ураўненні дынамікі. Кожнае з іх можна запісаць у выглядзе:

$$\sum \delta A_i = 0, \quad (1)$$

дзе δA_i – магчымая работа сілы F_i , што прыкладзена да звяна механізма. Як вядома з фізікі, для выканання работы выкарыстоўваецца рычаг. Ён уяўляе сабою цела ў выглядзе стрыжня, якое мае пункт апоры. Да рычага прыкладваюцца сілы, што выконваюць работу. У метада Жукоўскага ў якасці ўмоўнага рычага выкарыстоўваецца павернуты на 90° план скорасцей усіх пунктаў механізма, у якіх прыкладзены сілы. Апорай такога разгалінаванага “рычага” служыць полюс плана скорасцей. Для вылічэння моманту сілы F_i , прыкладзенай у якім-небудзь пункце M_i звяна механізма, яе пераносяць паралельна на “рычаг” і прыкладваюць да канца вектара скорасці v_i гэтага ж пункта. Пасля пабудовы “рычага” і пераноса на яго ўсіх сіл, што дзейнічаюць на механізм, сутнасць метаду Жукоўскага можна сфармуляваць наступным чынам: *раўнавазе плоскага рычажнага механізма адпавядае раўнавага пабудаванага для яго “жорсткага рычага”*. Інакш, больш канкрэтна – сума момантаў усіх сіл, перанесеных на “рычаг”, адносна яго пункта апоры роўна нулю:

$$\sum M_p(\vec{F}_i) = 0, \quad (2)$$

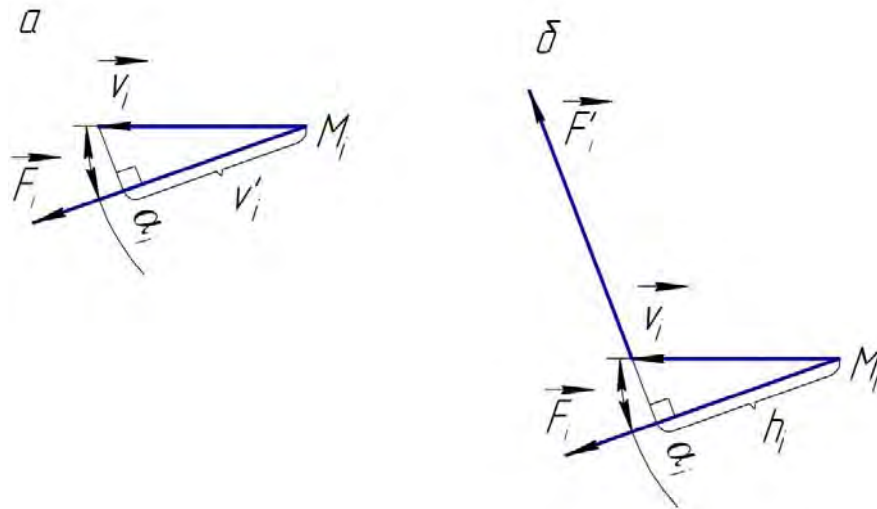
дзе p – пункт апоры “рычага” (полюс плана скорасцей). Як бачым, вучоны здзяйсніў геніяльны пераход ад складанага механізма да прастага рычага ў якасці мадэлі.

Каб глыбей зразумець і творча прымяняць на практыцы метада Жукоўскага, студэнтам неабходна цверда засвоіць трансфармацыю ўраўнення (1) ва ўраўненне (2). Кожнае складаемае першага з іх, як вядома з курса тэарэтычнай механікі, уяўляе сабою магчымую работу F_i і вылічваецца па формуле: $\delta A_i = \vec{F}_i \delta \vec{r}_i$, дзе $\delta \vec{r}_i$ – магчымае перамяшчэнне пункта M_i , у якім прыкладзена сіла F_i . Спецыфіка сувязей у вивучаемых механізмах дазваляе ў апошняй формуле замяніць магчымае перамяшчэнне $\delta \vec{r}_i$ на сапраўднае $d\vec{r}_i$ і запісаць яе ў выглядзе: $dA_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i$. Замест роўнасці (1) атрымліваем: $\sum \vec{F}_i d\vec{r}_i = 0$. Прадыферэнцыруем яе па часе (пры $F_i = \text{const}$): $\sum \vec{F}_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i \vec{v}_i = \sum F_i v_i \cos \alpha_i = 0$, альбо

$$\sum F_i v_i^t = 0. \quad (3)$$

Тут $v_i^t = v_i \cos \alpha_i$ – праекцыя скорасці v_i на напрамак сілы F_i . Цяпер у роўнасці (3) кожнае складаемае, у адрозненне ад (1), уяўляе не работу сілы F_i , а яе магучасць. На рысунку 1,а паказаны множнікі, што ўтвараюць складаемае сумы (3). Яго формула асацыіруецца з момантам

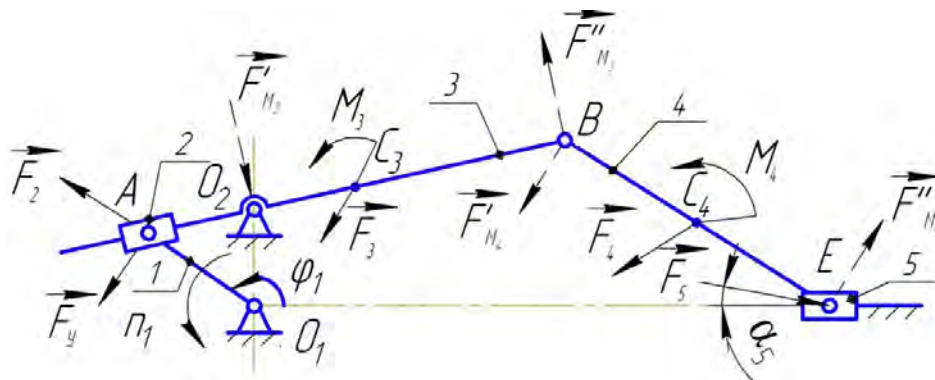
сілы F_i : $F_i h_i$. Каб адрэзак v_i' на рысунку 1,а мог выконваць ролю пляча h_i , сілу F_i неабходна перанесці ў палажэнне F_i' (рыс. 1, б), г.зн. павярнуць яе на 90° і прыкласці да канца вектара \vec{v}_i' . Адрэзак $h_i = v_i' = v_i \cos \alpha_i$ можна разглядаць як рычаг, замацаваны шарнірна ў пункце M_i . Калі цяпер рысункі віды 1,б для ўсіх сіл, прыкладзеных да звенняў механізма, аб'яднаць, сумясціўшы іх цэнтры M_i , то атрымаем схему разгалінаванага “рычага Жукоўскага”. Агульны центр будзе плюсам плана скорасцей p , а складаемае сумы (3) прадстаўляецца ў выглядзе: $F_i v_i' = M_p(\vec{F}_i')$. Сама ж роўнасць (3) пераходзіць у $\sum M_p(\vec{F}_i') = 0$, дзе $F_i' = F_i$. Такім чынам, мы здыйснілі пераход ад роўнасці (1) да (2) – ураўнення раўнавагі “рычага Жукоўскага”.



Рысунк.1 - Паходжанне “рычага Жукоўскага”: а – скорасць \vec{v}_i і сіла \vec{F}_i , прыкладзеная да пункта M_i ; б – перамяшчэнне вектара сілы і вызначэнне яе пляча h_i .

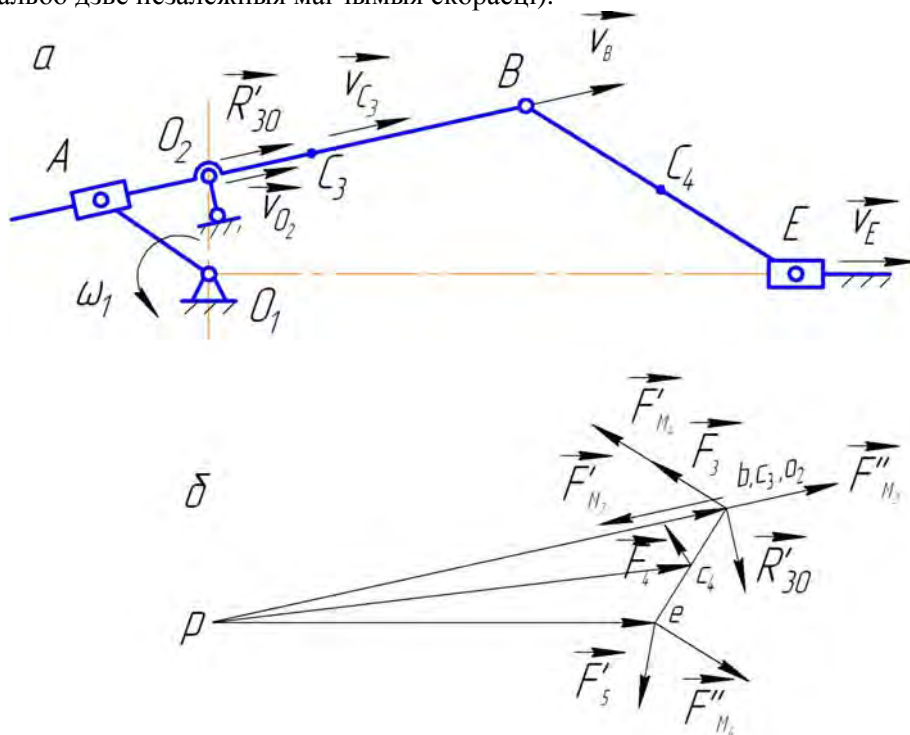
Асаблівасці пабудовы “жорсткага рычага” ў сілавым аналізе знешніх кінематычных пар. Як адзначалася, ў падручніках па тэарэтычнай механіцы і тэорыі механізмаў і машын не разглядаецца магчымасць прымянення метаду Жукоўскага да вызначэння рэакцый у кінематычных парах. З курса тэарэтычнай механікі вядома, што агульныя ўраўненні статыкі і дынамікі, пакладзеныя ў аснову гэтага метаду, і атрыманае з іх ураўненне (3), прынцыпова дазваляюць выконваць такое даследаванне. Паўстае пытанне: як рэалізаваць такую магчымасць? Уявім плоскі рычажны механізм з адной ступенню свабоды і знешнімі кінематычнымі парамі другога класа. Шукаемая рэактыўная сіла ў такіх парах прадстаўляецца дзвюма невядомымі. Напрыклад, у вярчальнай кінематычнай пары – кампанентамі рэакцыі ці яе модулем і напрамкам (вуглом). Далей улічваем, што для механізма можна скласці толькі адно ўраўненне раўнавагі (2) і знайсці з яго адну невядомую сілу. Таму пераўтвараем адну даследуемую аднарухому вярчальную пару ў дзве дзвюхвярчальныя. Цяпер кожная з іх будзе ўтрымліваць адну кампаненту рэакцыі, якая можа быць знойдзена з аднаго ўраўнення раўнавагі (2).

Прыклад вызначэння рэакцыі. На рысунку 2 прадстаўлены механізм, для якога вызначаны ўсе знешнія сілавыя ўздзеянні і знойдзена ўраўнаважвальная сіла F_5 . Моменты сіл інерцыі M_3, M_4 заменены парамі сіл $F_{M_3}^I, F_{M_3}^{II}$ і $F_{M_4}^I, F_{M_4}^{II}$. Сілы цяжару на рысунку аб'яднаны з сіламі інерцыі; іх раўнадзейныя абазначаны літарамі $F_2 + F_3$.

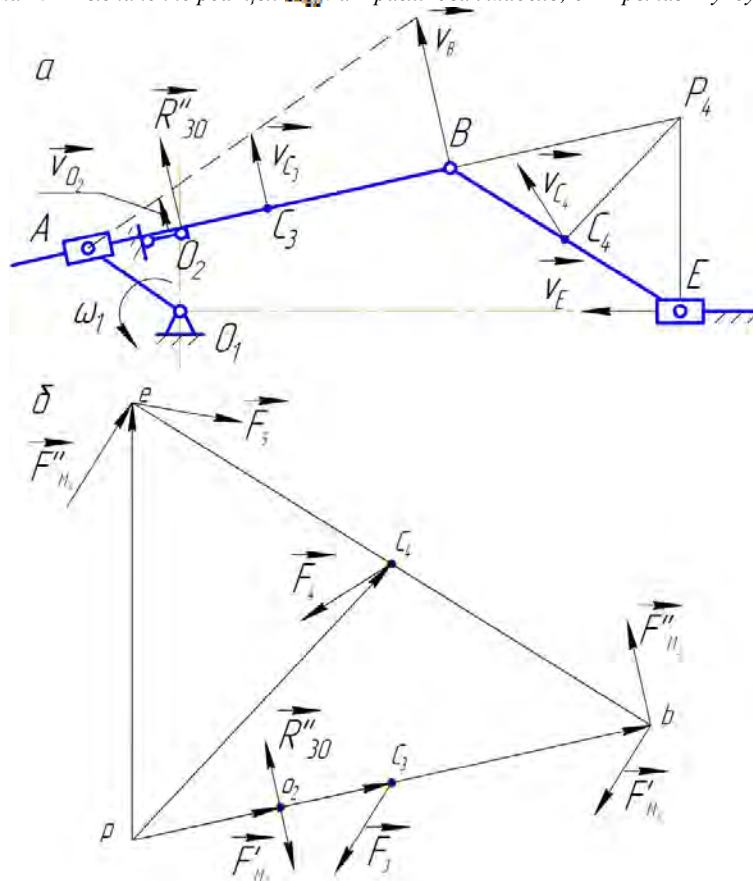


Рысунк.2 - Кінематычная схема механізма і сілавыя фактары

Знойдем рэакцыю сувязі O_2 . Каб рашыць задачу метадам кінэстатыкі, трэба спачатку знайсці рэакцыі ў кінэматычнай пары B . І калі пры гэтым будзе зроблена памылка, то яна пяройдзе і ў значэнне рэакцыі ў апоры O_2 . Каб вызначыць гэтую рэакцыю непасрэдна, без аналізу сумежных пар, выкарыстаем “жорсткі рычаг”. Прадставім рэакцыю ў выглядзе сумы: $\vec{R}_{30} = \vec{R}'_{30} + \vec{R}''_{30}$. Складаемыя сумы і пераўтвораная пара O_2 паказаны на рысунках 3, а; 4, а. На кожным з іх механізм мае дзве ступені свабоды і адпаведна два незалежныя магчымыя перамяшчэнні (альбо дзве незалежныя магчымыя скорасці).



Рысунк 3 - Вызначэнне рэакцыі R'_{30} : а – разліковая мадэль; б – “рычаг Жукоўскага”



Рысунк 4 - Вызначэнне рэакцыі R''_{30} : а – разліковая мадэль; б – “рычаг Жукоўскага”

Визначаем рэакцыю R'_{30} . У якасці незалежных магчымых скорасцей прымаем v_{O_2} і ω_1 (рыс. 3,а). Паколькі сіла R'_{30} прыкладзена да часткі механізма, рух якой вызначаецца скорасцю v_{O_2} , то прымаем $v_{O_2} \neq 0$, $\omega_1 = 0$. Рухомая частка механізма ўключае звенні 3, 4, 5. Будзем для яе план скорасцей (рыс. 2, б), на якім скорасць v_{O_2} прымаем адвольна; пры гэтым $v_B = v_{C_3} = v_{O_2}$. Пераносім на яго і паварочваем на 90° усе сілы, прыкладзеныя да рухомай часткі механізма. Складаем ураўненне раўнавагі (2) атрыманага “рычага” (нулявыя моманты прапускаем): $M_p(\vec{F}'_{M_4}) + M_p(\vec{F}'_3) - M_p(\vec{R}'_{30}) + M_p(\vec{F}'_4) - M_p(\vec{F}'_5) - M_p(\vec{F}'_{M_4}) = 0$. Паколькі тут $M_p(\vec{R}'_{30}) = -R'_{30} \cdot p \cdot b$, то $R'_{30} = \frac{1}{pb} [M_p(\vec{F}'_{M_4}) + M_p(\vec{F}'_3) + M_p(\vec{F}'_4) - M_p(\vec{F}'_5) - M_p(\vec{F}'_{M_4})]$. Аналагічна вызначаем рэакцыю R''_{30} . Адпаведная ей разліковая мадэль паказана на рысунку 4,а, дзе v_{O_2} , ω_1 – незалежныя магчымыя скорасці. Стрыжань OO_2 левым шарнірам прымацаваны да стойкі, а правым злучаны са звяном 3. Прымаем $v_{O_2} \neq 0$, $\omega_1 = 0$. Будзем для рухомай часткі механізма павернуты на 90° план скорасцей. Пераносім на яго (ужо без павароту) усе сілы, прыкладзеныя да гэтай часткі, і складаем ўраўненне (2). З яго вызначаем R''_{30} . Поўную рэакцыю знаходзім па формуле: $R_{30} = \sqrt{(R'_{30})^2 + (R''_{30})^2}$.

Заклучэнне. Апісаная вышэй методыка пашырэння метаду Жукоўскага адкрывае магчымаць яго выкарыстання для кантролю аналітычных разлікаў на ўсіх этапах сілавога аналізу. Акрамя таго, і гэта вельмі істотна, яна дазваляе аператыўна выкарыстоўваць эфектыўны метады ў якасці асноўнага ў працэсе праектавання механізмаў на стадыі пошуку аптымальнага варыянта яго кінематычнай схемы. Методыка можа выкарыстоўвацца як ў вучэбным працэсе, так і ў інжынернай практыцы.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается вопрос усовершенствования силового анализа плоских механизмов с низшими кинематическими парами. Показано, что графоаналитический метод Жуковского, обычно применяемый для определения внешних сил можно применять и для определения внутренних сил, можно применять и для определения внутренних сил взаимодействия, возникающих в кинематических парах.

ЛІТАРАТУРА

1. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин. – Москва: «Наука», 1988. 639 с.
2. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Часть 1. – Москва: «Высшая школа», 1963. – 431 с.
3. Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: сб. науч. тр. – Гомель: БелГУТ, 2009. – 242 с.

SUMMARY

The question of improvement of the power analysis of flat mechanisms with the lowest kinematic couples is considered. It is shown that the graphic-analytical method of Zhukovsky which is usually applied to determination of external forces, it is possible to apply and to determination of internal forces of the interaction arising in kinematic couples.

Поступила в редакцию 10.12.2012

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ МЕХАТРОННОЙ СИСТЕМЫ РЕКУПЕРАЦИИ ЭНЕРГИИ ДЛЯ МОБИЛЬНЫХ МАШИН

студ. **Шашко А.Е.**, студ. **Серик А.Л.**, студ. **Хурсевич С.В.**, к. т. н. **Авсиевич А.М.**

Белорусский национальный технический университет, Минск

Рекуперация энергии является эффективным средством повышения экономичности и экологичности мобильных машин. В настоящее время существует несколько вариантов рекуперации. Они подразумевают как накопление кинетической энергии в рекуператоре-маховике, так и преобразование энергии торможения в электроэнергию с последующим ее использованием на работу дополнительного оборудования или обратным преобразованием в механическую [1]. Отдельным направлением является разработка мобильных машин с маховичным двигателем, в которых источник электрической или тепловой энергии отсутствует вообще [2]. Маховичные двигатели, несмотря на давний срок их разработки, так и не нашли своего применения в силу сложностей технологического характера и необходимости специальных стационарных устройств для раскрутки. Мобильные машины с двигателями внутреннего сгорания и электродвигателями на сегодняшний день начинают снабжаться устройствами рекуперации. В электротранспорте широко применяется рекуперативное торможение, при котором электроэнергия, вырабатываемая тяговыми электродвигателями, работающими в генераторном режиме, возвращается в электрическую сеть. В гибридных авто и гоночных автомобилях класса «Формула-1» применяется принцип рекуперации с преобразованием кинетической энергии при торможении в электрическую и обратно. Такое двойное преобразование энергии является недостатком ввиду значительных потерь. В сообществе ученых и инженеров эффективность рекуперации вызывает сомнения в связи с тем, что неизбежное при этом увеличение массы машины приведет к большому расходу энергии, чем будет сохранено. Поэтому целью данной работы ставилось определить критерии эффективности рекуперации кинетической энергии в мобильных машинах.

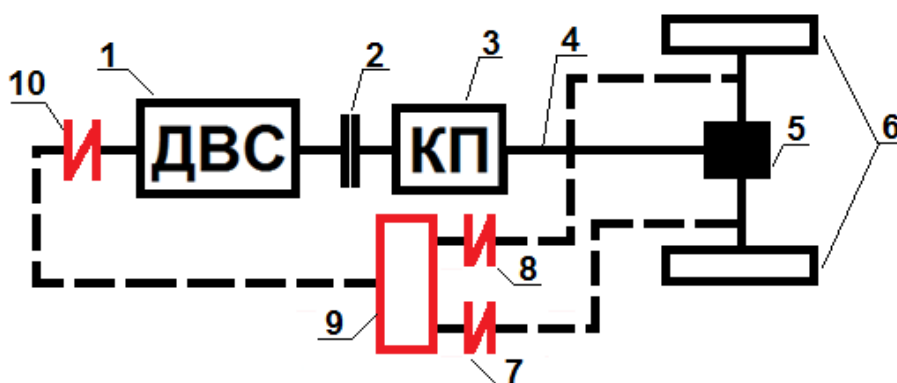


Рисунок 1. – Принципиальная схема мобильного автомобиля с рекуператором

1 – двигатель внутреннего сгорания, 2 – муфта сцепления, 3 – коробка перемены передач, 4 – карданный вал, 5 – главная передача и дифференциал, 6 – ведущие колеса, 7, 8, 10 – редуктор-сцепление, 9 – накопитель энергии

На рисунке 1 изображена схема автомобиля с механической системой рекуперации. Черным цветом со сплошными соединительными линиями показано обычное расположение стандартных агрегатов автомобиля (двигатель внутреннего сгорания, сцепление, коробка перемены передач, карданный вал, главная передача и дифференциал, ведущие колеса). Пунктирными линиями показана кинематическая цепь системы рекуперации.

Накопление энергии рекуператором 9 возможно в двух вариантах: от трансмиссии в процессе торможения (через редуктор-сцепление 7) и от двигателя в режиме холостого хода (через редуктор-сцепление 10). Второй вариант реализуем для дизельных двигателей, у которых на холостом ходу существует значительный запас мощности [3]. Через редуктор-сцепление 8 аккумулированная энергия передается от рекуператора на трансмиссию.

Устройства 7,8,10 условно названные нами «редуктор-сцепление» одновременно выполняют обе эти функции. Они должны обладать автоматической системой управления и в зависимости от режима работы машины в текущий момент времени включаться - выключаться, а во включенном состоянии автоматически изменять в широких пределах свое передаточное отношение.

Определим критерии эффективности работы такой системы с точки зрения затрат энергии на движение мобильной машины.

Работу $A_{дв}$, совершаемую двигателем можно вычислить по формуле:

$$A_{дв} = \frac{m_{п} \cdot \Delta V^2}{2} + A_{сопр} + A_{торм}^{х.х.}, \quad (1)$$

где $m_{п}$ – приведенная масса автомобиля, ΔV – изменение скорости от 0 до V , $A_{сопр}$ – работа сил сопротивления движению автомобиля, $A_{торм}^{х.х.}$ – работа, затрачиваемая на поддержание режима холостого хода и расходуемая в процессе торможения.

При появлении системы рекуперации, появятся дополнительные затраты двигатель будет больше нагружен, и он будет совершать дополнительно работу при разгоне машины

$$A_{дв.доп} = \frac{I_{рек}^{п} \cdot \Delta \omega^2}{2} + A_{сопр.рек}, \quad (2)$$

где $I_{рек}^{п}$ – приведенный момент инерции звеньев кинематической цепи рекуператора, $\Delta \omega$ изменение угловой скорости от 0 до ω , $A_{сопр.рек}$ – работа сил сопротивления движению звеньев цепи рекуператора.

С другой стороны при наличии системы рекуперации на преодоление работы сил сопротивления расходуется часть сохраненной кинетической энергии

$$A_{рек} = \left(\frac{m_{п} \cdot \Delta V_{торм}^2}{2} \eta_7 + A^{х.х.} \eta_{10} \right) \eta_8, \quad (3)$$

где η_7 , η_{10} , η_8 – коэффициенты полезного действия кинематических цепей с редукторами-сцеплениями 7, 10 и 8 соответственно, $\Delta V_{торм}$ – изменение скорости при торможении, $A^{х.х.}$ – работа двигателя на холостом ходу.

Таким образом, если $A_{рек} > A_{сопр.рек}$, то систему рекуперации энергии можно считать эффективной.

Примером автоматического управления системы рекуперации может быть установка акселерометра. Во время спуска с возвышенности, автомобиль получает прирост кинетической энергии за счет своей силы тяжести. И чтобы эта энергия не терялась, в блок управления можно будет установить акселерометр, который будет следить за отклонениями угла от установленной нормы и подключать редуктор 7 для раскрутки маховика 9. Так будет аккумулироваться кинетическая энергия, и этот процесс может заменить торможение автомобиля водителем во время спуска. Во время подъема на возвышенность редуктор 7 можно отключить и включить редуктор 10, который от маховика будет передавать крутящий момент на двигатель, для того чтобы помочь преодолеть силу тяжести автомобиля, и отключаться, когда вращающий момент маховика будет меньше либо равен определенному критическому значению. Остается только определить эффективный угол α наклона автомобиля на спуске, при котором стоит включать рекуператор, согласно схеме на рис. 2, на которой h – высота спуска, l – длина спуска.

Определим угол α из условия возрастания кинетической энергии машины

$$\Delta T = mgh - A_{TC}, \quad (4)$$

где ΔT – изменение кинетической энергии, mgh – потенциальная энергия (m – масса автомобиля, g – ускорение свободного падения), A_{TC} – работа сил сопротивления.

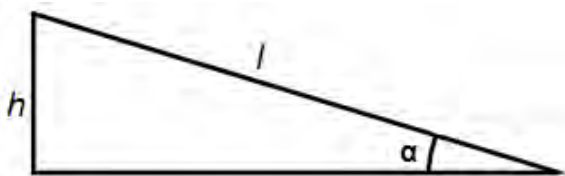


Рисунок 2. – Схема к определению угла движения на спуске для включения рекуперации

Для того, чтобы система была работоспособной, требуется выполнение условия

$$mgh > A_{TC}, \quad (5)$$

Работа сил сопротивления складывается из работы сопротивления, зависящей от массы машины работы и аэродинамического сопротивления

$$A_{TC} = mglf + A_{\text{сопр}}, \quad (6)$$

где f – коэффициент сопротивления, аналогичный коэффициенту трения, $mglf$ – работа силы трения на пути l , $A_{\text{сопр}}$ – работа сил аэродинамического сопротивления.

В предельном случае потенциальная энергия равна работе сил сопротивления:

$$mgh = mglf + A_{AC}. \quad (7)$$

Разделив все на длину спуска l получим

$$\frac{h}{l} = f + k_{AC}, \quad (8)$$

где, k_{ac} – коэффициент аэродинамического сопротивления.

Учитывая схему на рис. 2 и коэффициент полезного действия системы рекуперации η , получаем, угол, при котором следует включать систему рекуперации

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{f + k_{AC}}{\eta}\right). \quad (9)$$

РЕЗЮМЕ

Вывод об эффективности системы рекуперации может быть сделан только при рассмотрении конкретных условий работы машины, включающем анализ перепадов высот на пути движения. Вероятно, в мобильных машинах такая система будет эффективна только при оснащении их дизельными двигателями. Вторым условием эффективной рекуперации является разработка конструкции передаточных механизмов между двигателем, рекуператором и ведущей осью, обеспечивающих высокий коэффициент полезного действия, и оснащенных автоматической системой управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулия Н.В. Накопители энергии. М.: Наука. 1980. 151 с. Патент RU 2117836 C1, 6 F16H 33/02. В.С.Семенов.
2. Гулия Н. В., Инерционные аккумуляторы энергии. Изд-во ВГУ, Воронеж, 1973.
3. Драгунов, Г.Д. Анализ экспериментальных характеристик дизеля на режимах холостого хода и малых нагрузках / Г.Д. Драгунов, А.Н. Медведев // XXVI Российская школа по проблемам науки и технологий. Краткие сообщения: сб. науч. тр. – Екатеринбург: Уральское отделение РАН, 2006. – С. 145–151.

SUMMARY

The conclusion about the effectiveness of the recovery can only be made by considering the specific conditions of the machine, which includes analysis of the height differences in the way of movement. Probably in mobile machines, such a system would be effective only when equipping their diesel engines. The second condition is the development of efficient recovery of the construction of transmission mechanisms between the engine, the heat exchanger and the drive axle, providing high efficiency, and equipped with an automatic control system.

Поступила в редакцию 05.11.2013

СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ И ГРАФИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В КУРСОВОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ПО ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИНк. ф.-м. н. **Бокун Г. С.**, к. ф.-м. н. **Гапанюк Д. В.***Белорусский государственный технологический университет, Минск*

Введение. Реализованный на кафедре подход по внедрению компьютерных технологий позволил эффективно решать задачи проектирования механизмов и машин. Ранее было показано, что для достижения целей проектирования, стоящих перед ТММ, целесообразно использовать пакет общего пользования, в частности Mathcad [1]. Это дает двойное преимущество как из-за естественного повышения самого уровня использования пакета и освоения общих методов механики, применяемых при создании новых конструкций машин и механизмов. Потому что, в этом случае, при применении пакетов общего пользования, студенты сами должны составлять и решать уравнения, описывающие движение механизмов и машин, а не пользоваться результатами компьютерного решения, получаемыми с помощью специализированных пакетов.

В данной работе излагаются результаты развития и совершенствования разработанных ранее подходов по применению компьютерных технологий в учебном процессе [2]. Цель выполненных разработок заключается в переходе от проектирования отдельных механизмов к проектированию механических агрегатов и механических систем. Для достижения поставленных задач понадобилось расширить и дополнить компьютерный практикум и соответствующие электронные пособия, создать, в том числе, новые дистанционные электронные работы.

Основная часть. Компьютерный практикум [3] предназначен для предоставления возможности всем студентам учебной группы осуществить проектирование рычажных механизмов на основе использования инновационных методов. Реализуется этот практикум в виде трех дополнительных занятий, проводимых под руководством преподавателя в дисплейных классах университета. Опыт реализации практикума показал, что разработанные ранее подходы по компьютерному построению механизмов не во всех случаях позволяют осуществить синтез всех положений механизма, соответствующих одному и тому же варианту его сборки. Возникающая трудность является специфической для данного пакета и возникает из-за того, что все программные записи здесь соответствуют стандартным записям в учебной литературе по математике и механике. Последнее обстоятельство и предопределило сделанный ранее выбор в пользу выбора пакета Mathcad.

Для преодоления возникающих трудностей электронное пособие по проектированию рычажных механизмов было дополнено специальным разделом, посвященным разрешению проблемы продолжения решения по параметру. В этом разделе показаны методы идентификации «срыва» решения системы уравнений при переходе от одного состояния к другому, и изложены подходы, позволяющие преодолеть возникающую трудность. Показано, что можно вернуться к исходному варианту сборки механизма, если перейти от исходного к новому базовому положению механизма, соответствующему положению, предшествующему моменту бифуркации. Помимо изложенного «ручного» управления вычислительным процессом, предложен и разработан вариант автоматического программного управления. Основан он на специфическом использовании оператора FRAME, позволяющего организовать вычисления в цикле, когда расчетные данные в конце цикла записываются в отдельный файл и считываются, как начальное приближение соответственно в начале цикла. В результате каждое новое решение системы уравнений, определяющей функции положения механизма, находится как уточнение результатов предыдущего решения. Это как раз и позволяет находить решения системы, соответствующее одной и той же ветви или сборке механизма. Опыт реализации компьютерного практикума показал, что после занятий, проведенных в дисплейном классе под руководством преподавателя все студенты группы в состоянии справиться самостоятельно с проектированием уже шестизвенных механизмов. Осуществлять такое проектирование оказалось удобным в тех же дисплейных классах, но уже в виде самостоятельной работы. Предоставляемая компьютерным практикумом возможность самостоятельного применения Mathcad в задачах механики была далее использована для переноса компьютерных подходов на проектирование зубчатых и кулачковых механизмов. Для этого было соответствующим образом переработано и усовершенствовано электронное пособие по проектированию этих механизмов. Предыдущая версия этого пособия [4] давала возможность «спроектировать» эти механизмы, вводя лишь исходные данные и наблюдая готовые результаты проектирования, полученные фактически без участия проектанта. Из-за этого в варианте [4] данное пособие использовалось как демон-

страционное. Для использования же этого пособия в качестве обучающей системы оно было существенно усовершенствовано и дополнено. А именно, применявшиеся ранее программы для проектирования планетарных зубчатых передач с их внутренней «защитой» логикой заменены на прямой расчет критериев качества механизмов в зависимости от принимаемых исходных данных. В результате вместо готового ответа, из множества представленных вариантов необходимо отобрать оптимальный, исходя из знания условий и характеристик выбора.

Что касается проектирования прямозубой эвольвентной передачи, то здесь сохранен расчет параметров зубьев и характеристик картины эвольвентного зацепления в среде Mathcad. Но наряду с использованием видеofilьма, демонстрирующего особенности эвольвентного зацепления в Mathcad, предлагается осуществить вычерчивание картины зацепления в системе КОМПАС. Это дает возможность ознакомиться в каждом конкретном случае не только с линией зацепления, как в случае упомянутой анимации, но и с другими характеристиками, такими как угловые и линейные шаги, делительная, начальная, основная окружности, углами перекрытия и зацепления и т. п.

Аналогичный комбинированный подход использован при совершенствовании компьютерного проектирования кулачковых механизмов. Mathcad удобно использовать для определения функции положения исполнительного звена механизма, построения графика центрального профиля кулачка, как функции, заданной в полярной системе отсчета. Что же касается процедуры определения радиуса начальной шайбы кулачка и его рабочего профиля, то разработанные ранее аналитические подходы для этого, оказались достаточно сложными для усвоения и замены на построение соответствующих диаграмм и графическое решение.

Для распространения изложенных выше подходов по синтезу отдельных механизмов на проектирование машинных агрегатов и механических систем были разработаны и внедрены в учебный процесс две дополнительные виртуальные лабораторные работы, изучаемые студентами самостоятельно. Первая лабораторная работа посвящается изложению компьютерных процедур, позволяющих учесть реальный характер сил производственных сопротивлений, а вторая предназначена для учета реальной характеристики двигателя. Для самостоятельного выполнения первой работы подготовлено соответствующее электронное пособие, где изложены на конкретных примерах использования программы GraphDigit процедуры оцифровки данных, представленными файлами в различных форматах. Изложены способы работы с программой при различных режимах оцифровки. После оцифровки диаграмм сил производственных сопротивлений их необходимо представить соответствующими зависимостями, для этого в Mathcad имеется несколько встроенных функций, позволяющие «соединить» точки выборки кривой разной степени гладкости. В пособии на примерах различных диаграмм обсуждаются предпочтительные варианты использования кусочно-линейной, линейной, кубической сплайн интерполяции в зависимости от вида индикаторной диаграммы.

Кроме того, в пособии показывается как программным путем устанавливается соответствие между значениями функции положения исполнительного звена в 360 положениях механизма и значением координаты, задающей положение точек на индикаторной диаграмме. Изложенные в пособии подходы по обработке 10 вариантов индикаторных диаграмм, заимствованных из [5] представляют достаточно полную информацию, дающую возможность студенту самостоятельно решить задачу об учете реальных сил производственных сопротивлений в приведенный момент механизма.

Реальную механическую характеристику двигателя учитываем, привлекая электронное пособие, описанное в работе [6], предназначенное для выполнения второй виртуальной лабораторной работы. Здесь показано как, опираясь на характеристики отдельных механизмов получить характеристики агрегата, входящие в дифференциальное уравнение движения машины, как подобрать мощность двигателя, определить параметры его механической характеристики. Найденные в итоге зависимости вносятся в подготовленное в записях Mathcad дифференциальное уравнение движения машины и рассматриваются его решение при различных условиях. Что позволяет, в конечном итоге, исследовать различные режимы движения машинного агрегата под действием приложенных сил.

Заключение. Описанные методические разработки были использованы для выполнения курсового проекта по ТММ в форме индивидуальной самостоятельной работы в дисплейных классах университета. Как показал опыт для придания уверенности студентам в возможности работы на предлагаемом уровне и приобретения навыков в использовании Mathcad и соответствующего начального импульса первые три занятия проводились для группы в целом под руководством преподавателя. Далее студенты делились на подгруппы по числу компьютеров в дисплейном классе и

выполняли проектирование сначала рычажных, затем зубчатых и кулачковых механизмов. Кроме указанных самостоятельных занятий на компьютере, перед каждым из них проводилось дополнительное консультационное занятие в аудитории общего пользования, в часы, выделяемые учебным отделом для групповых консультаций по проекту. На этих занятиях обсуждались компьютерные подходы и программы, с помощью которых будет осуществляться соответствующий этап проектирования. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что читаемый в настоящее время лекционный курс посвящен изложению и постановке общих вопросов и методов, в том числе и традиционных, и, из-за недостатка времени, не позволяет сосредоточить подавляющее внимание на компьютерных подходах на уровне их конкретного применения да еще и для конкретного вычислительного пакета.

В результате соответствующего конкретного опыта определилась тематика и цели названных занятий. На первом занятии рассматривается построение и последующее решение системы уравнений, определяющих функции положения механизма и ориентацию его звеньев в зависимости от положения приводного звена. Второе занятие посвящается компьютерному построению механизма и созданию анимации, отражающей работу механизма (сначала рассматриваются простейшие четырехзвенные механизмы). На последующем занятии излагаются подходы по осуществлению компьютерного синтеза шестизвенного механизма в соответствии с индивидуальной структурной схемой. Четвертое занятие посвящается изложению подходов к выполнению кинематического анализа и вычислению первых и вторых передаточных функций. Здесь же обсуждается как результаты, полученные на компьютере, сравнить с полученными ранее путем построения планов скоростей и ускорений для одного положения механизма.

Соответственно, пятая и шестая консультации выделяются для обсуждения вопросов динамического синтеза и анализа и их программной реализации. Последние седьмое и восьмое занятия предназначены для конструирования зубчатых и кулачковых механизмов в соответствии с методикой изложенной выше в соответствующих электронных пособиях.

Студенты, успешно освоившие все этапы компьютерного проектирования самостоятельно обобщают работу в виде проектирования машинных агрегатов с учетом особенностей индикаторных диаграмм для сил технологических сопротивлений и механической характеристики двигателя. Таким образом, можно с уверенностью отметить, что разработанный и реализованный в качестве эксперимента подход по внедрению компьютерных технологий, может быть использован для соответствующего расширения и модернизации курса ТММ или создания нового курса по основам компьютерного моделирования и проектирования в механике.

РЕЗЮМЕ

Представлен опыт кафедры теоретической механики по внедрению компьютерных методов при проектировании механизмов во время обучения студентов по курсу теории машин и механизмов. Выполненные работы позволяют подняться на более высокий уровень проектирования и расширить его горизонты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокун, Г. С. Применение информационных технологий для учебного проектирования механизмов / Г. С. Бокун, В. С. Вихренко, С. А. Гляков // Теоретическая и прикладная механика: межведомственный сборник научно-методических статей. – Минск: БНТУ, 2005. – Вып. 18. – С. 215–220.
2. Бокун, Г. С. Опыт внедрения компьютерных технологий в проектирование по курсу теории механизмов и машин / Г. С. Бокун, В. С. Вихренко, Д. В. Гапанюк // Труды БГТУ – Минск: БГТУ, 2009. – Серия 8. – Вып. 10. – С. 45–47.
3. Бокун, Г. С. Компьютерный практикум по проектированию рычажных механизмов / Г. С. Бокун, В. С. Вихренко, Д. В. Гапанюк // Теоретическая и прикладная механика: межведомственный сборник научно-методических статей. – Минск: БНТУ, 2011. – Вып. 26. – С. 248–252.
4. Компьютерная механика. Динамический и кинематический анализ: курс лекций / С. А. Гляков [и др.]: под ред. М. А. Журавкова. – Минск: БГУ, 2006. – 375 с.
5. Теория механизмов и машин: Метод. указания и контр. задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов / Н. И. Левитский [и др.] – М.: Высш. шк., 1989. – 127 с.
6. Бокун, Г. С. Использование функциональных представлений MATHCAD в задачах динамики по курсу ТММ / Г. С. Бокун, В. С. Вихренко, Д. В. Гапанюк // Теоретическая и прикладная механика: межведомственный сборник научно-методических статей. – Минск: БНТУ, 2010. – Вып. 25. – С. 312–316.

SUMMARY

The experience of the Department of Theoretical Mechanics in implementation of computational methods during training of students in the field of mechanisms design in the course of the Theory of Machines and Mechanisms is represented. The work performed gives possibility to significantly improve the level of teaching design and enlarge its horizons.

Поступила в редакцию 03.11.2013

ПРЕИМУЩЕСТВЕННОСТЬ ОБЪЕКТОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОБЩЕПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ ДИСЦИПЛИН

к.т.н. Калина А.А., к.т.н. Ковалева И.Л., студ. Петраш Н.С., студ. Шумель А.В.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Перечень дисциплин, преподаваемых в вузах в рамках конкретных специальностей, определяется на основании стандартов и типовых планов. Адаптация содержания каждой из дисциплин к специфике вуза выполняется, как правило, на этапе разработки учебных программ. При этом одним из направлений повышения эффективности освоения и понимания студентами изучаемых курсов может стать использование в качестве примеров при объяснении материала группы дисциплин единых объектов из предметных областей, определяемых спецификой вуза.

Обучение студентов специальности 1-40 01 02-01 «Информационные системы и технологии в проектировании и производстве» в БНТУ осуществляется на кафедре «Системы автоматизированного проектирования» (САПР). Автоматизация проектирования – динамически развивающаяся область информационных технологий. Со времени основания кафедры САПР предметная область изучаемых дисциплин, базирующаяся на теории и методах, применяемых в системах автоматизации производственных процессов машиностроения, постепенно дополнялась информационными технологиями сквозного проектирования изделий и управления данными, методами и системами выполнения инженерных расчетов и оптимизации, математического моделирования, технологиями, алгоритмами и системами работы с графическими объектами, современными технологиями и языками разработки программного обеспечения, и соответствующего ему аппаратного обеспечения. Знание современных информационных технологий позволяет студенту, обучающемуся на кафедре САПР, более широко овладевать подходами и методами решения классических инженерных задач, рассматривая их с точки зрения инженера или постановщика задачи, и с точки зрения квалифицированного пользователя современных CAD/CAE/CAM пакетов и программиста.

Одной из общепрофессиональных дисциплин, в рамках которой студенты кафедры САПР приобретают инженерные навыки, является «Техническая механика». При изучении курса студенты знакомятся с конструкциями, типажом, материалами и способами изготовления деталей машин общего назначения, с физическими процессами, сопутствующими их работе. Дисциплина формирует знания по расчету и конструированию деталей, сборочных единиц и приводов машин. Эти знания и навыки востребованы в дальнейшем в цикле специальных дисциплин, а объекты проектирования встречаются во многих лабораторных работах и курсовых проектах. Так в рабочую учебную программу дисциплины специальности «Оптимизация проектных решений» включена лабораторная работа «Моделирование и оптимизация параметров узлов и деталей машин», целью которой является изучение методов решения задач многокритериальной оптимизации. В качестве объекта оптимизации студентам предлагается использовать редуктор, который они спроектировали в ходе выполнения курсового проекта по предмету «Техническая механика».

Рассмотрим основные этапы выполнения лабораторной работы. Объект оптимизации - двухступенчатый редуктор с цилиндрическими косозубыми передачами.

Каждая передача состоит из двух цилиндрических косозубых колес, одно из которых (меньшее) называется шестерней, второе (большее) - колесом. Для изготовления колес и шестерен выбрана сталь с термообработкой – улучшение. Предположим, что у колес твердость находится в диапазоне 220...280 НВ, у шестерен – 260...330 НВ.

Входные данные:

- L_n ресурс работы редуктора в часах;
- частоты вращения и вращающие моменты на валах (представлены в таблице 1);
- схема редуктора (представлена на рисунке 1);
- передаточное число быстроходной ступени u_1 ;
- передаточное число тихоходной ступени u_2 ;
- значения коэффициентов (стандарт по расчету зубчатых передач).

Таблица 1. Частоты вращения и моменты на валах

Вал	Частота вращения $n, \text{мин}^{-1}$	Вращающий момент $T,$ Нм
I	950	38.763
II	211,111	170.09
III	64,997	538,645

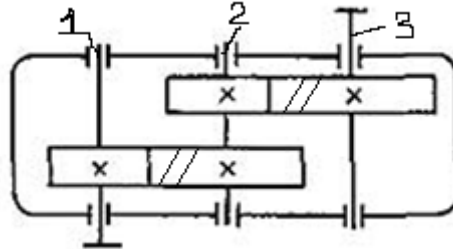


Рисунок 1. – Схема двухступенчатого редуктора с цилиндрическими косозубыми передачами

1 этап. Разработка оптимизационной модели.

В соответствии с заданием на первом этапе выполнения лабораторной работы студенты должны разработать многокритериальную многопараметрическую оптимизационную модель. Именно на этом этапе они в полной мере могут использовать свои знания, полученные при изучении дисциплины «Техническая механика». Разработка и защита курсового проекта по «Технической механике» позволяет студентам осознанно и обоснованно выбрать оптимизируемые параметры, назначить параметрические и функциональные ограничения, разработать целевые функции.

Для рассматриваемого примера в качестве оптимизируемых параметров были выбраны твердости колес:

- твердость шестерни тихоходной ступени;
- твердость колеса тихоходной ступени;
- твердость шестерни быстроходной ступени;
- твердость колеса быстроходной ступени.

В качестве критериев приняты условия равнопрочности ступеней на контактную и изгибную усталость:

$|K_1 - K_2|$ - условие равнопрочности по контактному напряжению;

$|K_3 - K_4|$ - условие равнопрочности по напряжению изгиба;

Оба критерия предлагалось минимизировать.

Предлагалось также уменьшить габариты редуктора. Для этого в качестве критериев задавались межосевые расстояния передач, которые также минимизировались:

a_{wt} - межосевое расстояние тихоходной ступени;

a_{wb} - межосевое расстояние быстроходной ступени.

Учитывалось, что допускается перегрузка 5% и недогрузка 10% по контактному напряжению, напряжение изгиба должно быть меньше предельно допустимого. Отсюда были получены следующие функциональные ограничения:

$$0.90 \leq \frac{\sigma_{HPt}}{\sigma_{Ht}} \leq 1.05 \quad 0.90 \leq \frac{\sigma_{HPb}}{\sigma_{Hb}} \leq 1.05 \quad \frac{\sigma_{FPt}}{\sigma_{Ft}} \geq 1 \quad \frac{\sigma_{FPb}}{\sigma_{Fb}} \geq 1$$

По рекомендациям стандарта, разность между твердостью шестерни и колеса принималась 20..70 НВ.

Параметрические ограничения:

$20 \leq HB_{t1} - HB_{t2} \leq 70$ - разность между твердостями шестерни и колеса тихоходной ступени;

$20 \leq HB_{b1} - HB_{b2} \leq 70$ - разность между твердостями шестерни и колеса быстроходной ступени.

2 этап. Создание математической модели.

Математическая модель создается при помощи диалоговой системы принятия решений (ОРТ).

На первом этапе задаются параметры и параметрические ограничения. На втором этапе за-

даются критерии и их тип. Затем вводятся функциональные ограничения и количество экспериментов. В результате формируется Xml- файл, содержащий необходимые данные.

3 этап. Организация пользовательского модуля.

Задачи, которые необходимо решить в пользовательском модуле:

- чтение Xml-файла, созданного при помощи диалоговой системы принятия решений ОПТ;
- расчет для каждого эксперимента значений критериев и функциональных ограничений,
- на выходе получить Xml – файл с рассчитанными данными.

Пользовательский модуль написан на языке С#. Запуск программы осуществляется любым из возможных способов. Внешний вид программы соответствует все стандартам и рекомендациям к приложениям для операционных систем WindowsXp, Windows7. После запуска программа находится в пассивном режиме и готова перейти в один из активных режимов своей работы. Есть два активных режима работы:

- загрузка необходимых для работы документов (*.xml, *.xmcd)
- расчёт значений экспериментов

На первом шаге пользователь выбирает необходимые файлы для расчёта, далее осуществляется их открытие программой. Для работы с файлами *.xml использовалась библиотека System.Xml.Linq, которая содержит в себе классы LINQ to XML. Интерфейс программирования XML в памяти, который позволяет легко и эффективно изменять XML-документ. Для работы с файлами *.xmcd использовались API функции Mathcad. Данная система относится к классу систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением.

На втором шаге выполняется расчёт по данным полученным из документов загруженных пользователем. Результаты, полученные после проведения расчёта, сохраняются в новый файл Result.xml.

Текущая версия программы состоит из следующих классов (Рисунок 3):

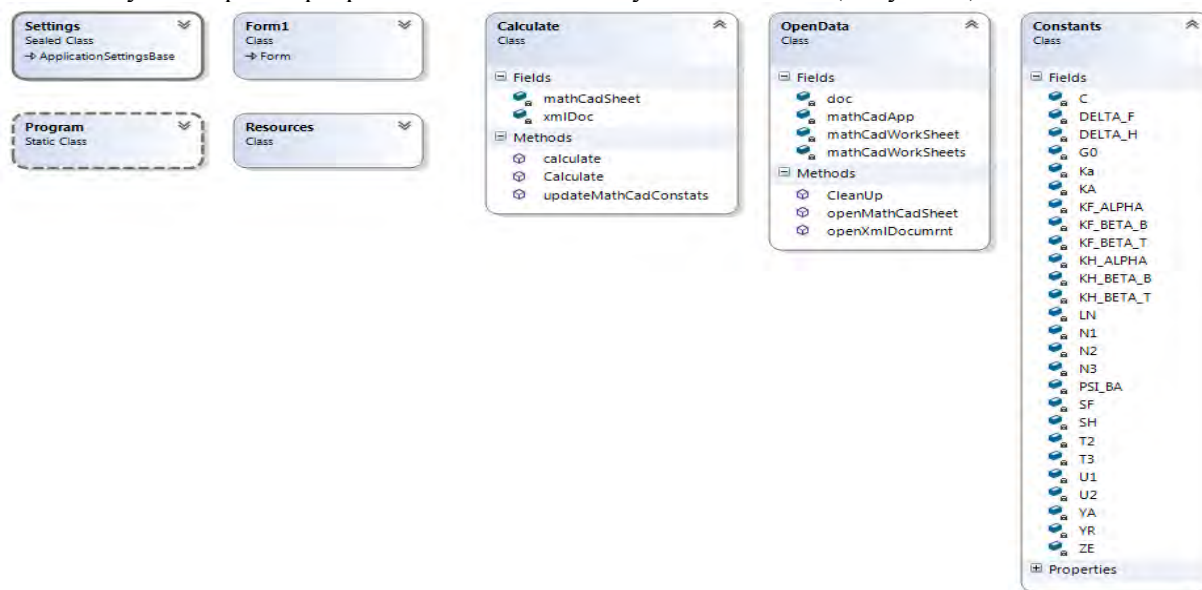


Рисунок 3. - Диаграмма классов расчетного модуля

- Calculate
Выполняет расчёт, используя APIMathCADи формирует файл с результатами.
- OpenData
Осуществляет загрузку файлов выбранных пользователем.
- Constatnts
Позволяет изменять данные необходимые для расчёта.
- Form1
Содержит методы для обработки событий окна программы.
- Setings
Класс по работе с ресурсами программы
- Program
Управляет запуском программы.

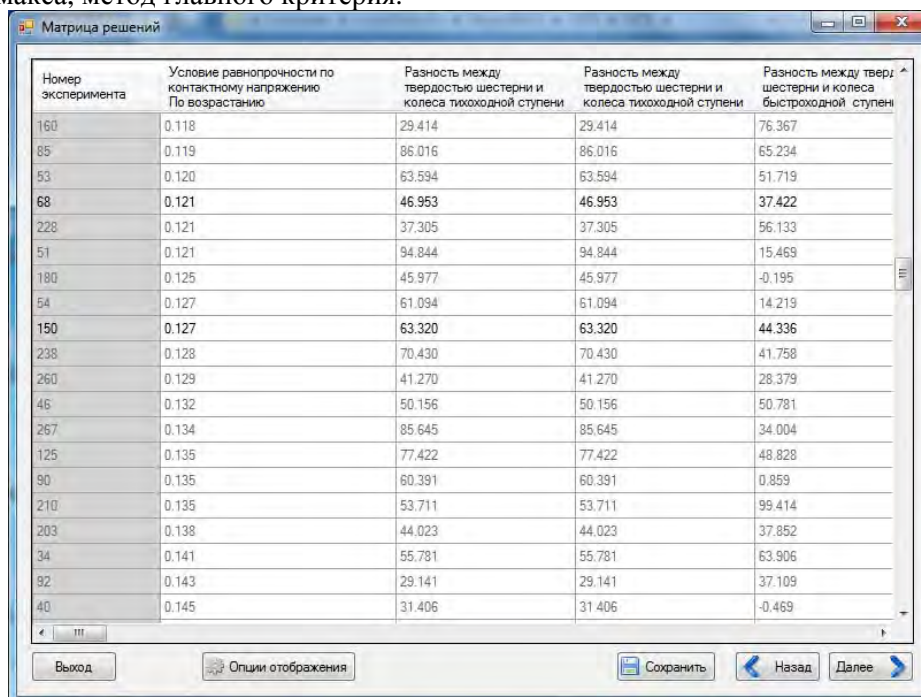
На рисунке 4 изображена матрица решений, сформированная при помощи системы ОПТ.

Черным цветом выделены строки, удовлетворяющие функциональным ограничениям, серым – не удовлетворяющие.

4 этап. Обработка результатов.

Генерировалось 3000 точек, по функциональным ограничениям прошли только 210.

С целью закрепления материала, прослушанного на лекциях по дисциплине «Оптимизация проектных решений», на этом этапе студентом предлагалось выбрать окончательное решение различными методами и сравнить полученные результаты. Для изучения предлагались следующие методы: «Поиск точки с минимальным удалением от идеальной», «Метод бинарных отношений», «Поиск точки с максимальной мощностью», аддитивный критерий, мультипликативный критерий, метод минимакса, метод главного критерия.



Номер эксперимента	Условие равнопрочности по контактному напряжению По возрастанию	Разность между твердостью шестерни и колеса тихоходной ступени	Разность между твердостью шестерни и колеса тихоходной ступени	Разность между твердостью шестерни и колеса быстроходной ступени
160	0.118	29.414	29.414	76.367
85	0.119	86.016	86.016	65.234
53	0.120	63.594	63.594	51.719
68	0.121	46.953	46.953	37.422
228	0.121	37.305	37.305	56.133
51	0.121	94.844	94.844	15.469
180	0.125	45.977	45.977	-0.195
54	0.127	61.094	61.094	14.219
150	0.127	63.320	63.320	44.336
238	0.128	70.430	70.430	41.758
260	0.129	41.270	41.270	28.379
46	0.132	50.156	50.156	50.781
267	0.134	85.645	85.645	34.004
125	0.135	77.422	77.422	48.828
90	0.135	60.391	60.391	0.859
210	0.135	53.711	53.711	99.414
203	0.138	44.023	44.023	37.852
34	0.141	55.781	55.781	63.906
82	0.143	29.141	29.141	37.109
40	0.145	31.406	31.406	-0.469

Рисунок 8.- Матрица решений

Выполнение рассмотренной лабораторной работы позволяет студентам изучить современные методы решения многокритериальных задач, используя при этом реальный инженерный объект.

РЕЗЮМЕ

Объекты, изучаемые студентами в рамках общепрофессиональной дисциплины «Техническая механика» востребованы в дальнейшем в цикле специальных дисциплин. В статье рассматривается структура лабораторной работы по курсу «Оптимизация проектных решений», целью которой является изучение методов решения задач многокритериальной оптимизации. В качестве объекта оптимизации студентам предлагается использовать редуктор, который они сконструировали в ходе выполнения курсового проекта по дисциплине «Техническая механика».

ЛИТЕРАТУРА

1. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. /В.В. Подиновский, В.Д. Ногин – М.: Физматлит, 2007.- 312с.
2. Мархель Т.А.. Придухо В.Т. //Принятие решений в условиях многокритериальности// Лабораторные работы по дисциплине «Оптимизация проектных решений» для студентов специальности 1-40 01 02«Информационные системы и технологии (по направлениям)» направления 1-40 01 02-01 «Информационные системы и технологии в проектировании и производстве», Минск, 2010

SUMMARY

Objects studied by students as part of general professional disciplines "Technical mechanics" in demand in the future in a series of special disciplines. The paper describes the structure of the laboratory work in the course "Optimization of design decisions", the purpose of which is the study of methods for solving multi-criteria optimization. As the object of optimizing the students are encouraged to use gear that they constructed during the execution of a course project for the subject "Technical mechanics."

Поступила в редакцию 24.11.2012

ИССЛЕДОВАНИЕ НАГРУЖЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ УПРАВЛЯЕМОГО МОСТА ПРИ ПОВОРОТЕ ТРАКТОРА БЕЗ ПОДВЕСКИ

асп. Сафронов К. И., к.т.н. Гурвич Ю. А.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

На выходные характеристики поворота трактора влияют: во-первых, главный вектор и главный момент силового взаимодействия каждого колеса с шиной, и дорогой; во-вторых, параметры рулевого привода и рулевого механизма, установочные параметры управляемых колес, схема привода ведущих колес, параметры шин, массово-геометрические параметры трактора и другие параметры. Поэтому исследование силовых характеристик, действующих на элементы моста при повороте трактора, состоит из нескольких этапов [1-5]. На первом этапе, используя принципы механики, формируется механико-математическая модель нового трактора (или уже существующего). На втором этапе определяются характеристики силового взаимодействия колес с дорогой [2,3], которые являются исходными данными для выполнения третьего этапа. На третьем этапе методом конечных элементов (МКЭ), с использованием пакетов программ и 3D моделей деталей ведущего моста трактора, вычисляются нагрузки и напряжения в любых точках моста.

В данной статье приведены некоторые результаты работ, полученные в 2013 году по ГНТП «Машиностроение», подпрограмма «Тракторостроение» по теме: «Разработать механико-математические модели, алгоритмы расчета усилий в различных точках моста при повороте трактора без подвески мощностью 300...360 л.с. и трактора с подвеской» (определение нагрузок и напряжений в различных точках моста с помощью МКЭ выполняет РУП «МТЗ»):

- разработана методика определения величины главного вектора и главного момента силового взаимодействия колес управляемого моста с дорогой при круговом движении трактора без подвески: продольную, боковую, нормальную силы \vec{F} , \vec{S} , \vec{G} ; стабилизирующий момент шины \vec{M}_s ; момент сопротивления качению \vec{M}_f .
- разработана методика определения характеристик шин;
- проведен кинематический анализ рулевого привода;
- разработана методика определения параметров кругового движения трактора;
- разработана методика определения усилий в рулевом приводе при повороте колес управляемого моста на месте;
- разработана методика определения усилий в рулевом приводе при круговом движении трактора;
- приведен пример расчета давления в гидроцилиндрах при повороте колес на месте и при круговом движении трактора в функции угла поворота внутреннего колеса.

Трактор схематизируется одномассовой пространственной моделью и жестко связанной с ней системой координат с началом, расположенным в ее центре масс. Ось x системы координат совпадает с направлением скорости движения трактора и его продольной осью, а ось z направлена вниз – перпендикулярно дороге.

На рисунке 1, в плоскости xOy подвижной системы координат, изображена проекция i -го колеса с координатами его центра x_i и y_i , повернутого на угол α_i , а также показаны силы и момент, действующие на колесо в плоскости дороги и составляющие вектора скорости движения колеса \vec{v}_i .

Касательная и боковая силы F_{ki} и $F_{\delta i}$, действующие на колесо, связаны с его кинематическими параметрами – с коэффициентом буксования δ_i и с углом увода ψ_i – следующими зависимостями:

$$F_{ki} = \varphi_i G_i \left\{ 1 - \frac{\delta_{0i}}{2|\delta_i|} \left[1 - \exp\left(-\frac{2|\delta_i|}{\delta_{0i}} \right) \right] \right\} \operatorname{sgn} \delta_i, \quad (1)$$

$$F_{\delta i} = \varphi_i G_i \operatorname{th} \frac{\psi_i}{\psi_{\delta i}}, \quad (2)$$

где φ_i – коэффициент сцепления; $\delta_{\delta i}$ – характеристический коэффициент буксования; $\psi_{\delta i}$ – характеристический угол увода.

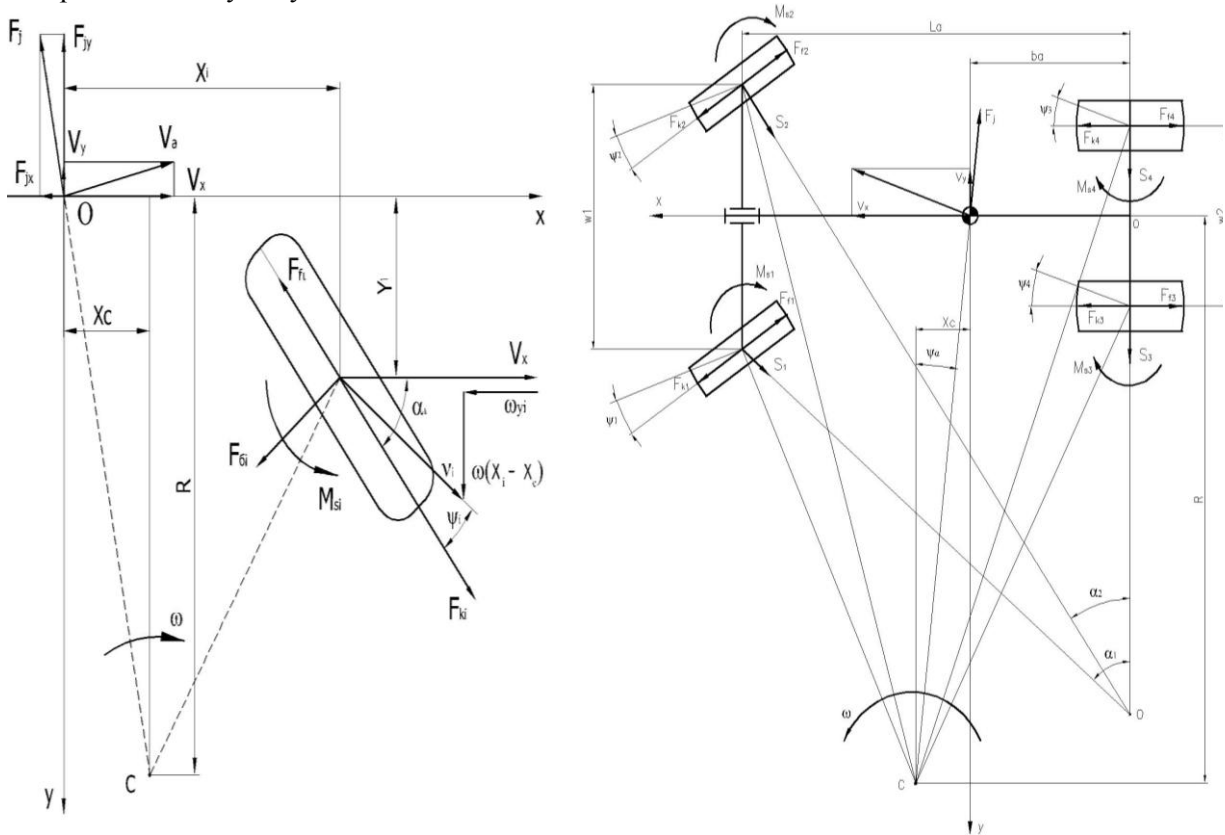


Рисунок 1 - Проекция колеса в плоскости дороги и схема сил, действующих на трактор

Наиболее точная зависимость между кинематическими параметрами отдельного двухколесного моста и полным стабилизирующим моментом шин двух колес предложена в работе [2]. Применительно к одному колесу эта зависимость представлена следующим образом:

$$M_{ci} = \frac{b_i^2(1 - \delta_i)K_{xi}}{3R\beta_i} + \frac{a_i\psi_i K_{yi}}{3}. \quad (3)$$

В соответствии с рисунком 1, уравнения равновесия машины в плоскости xOy , имеют вид:

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ki} - F_{fi}) \cos \alpha_i - F_{\delta i} \sin \alpha_i] - \frac{mv_x^2}{R} \operatorname{tg} \psi_a = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ki} - F_{fi}) \sin \alpha_i + F_{\delta i} \cos \alpha_i] - \frac{mv_y^2}{R} = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ki} - F_{fi})(x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i) + F_{\delta i}(x_i \cos \alpha_i + y_i \sin \alpha_i) - M_{ci}] = 0. \quad (5)$$

Для определения нормальных сил G_i , действующих на колеса машины, используются проекции уравнений равновесия трактора (4) и (5) на плоскости xOz и yOz .

Задаваясь законом распределения касательной силы по колесам трактора, решим первое из двух уравнений равновесия (4) относительно F_{ki} .

$$F_{ki} = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^n k_i \cos \alpha_i} \sum_{i=1}^n \left(F_{fi} \cos \alpha_i + S_i \sin \alpha_i + \frac{mv_x^2}{R} \operatorname{tg} \psi_a \right), \quad (6)$$

где k_i – коэффициент распределения касательных сил по колесам $k_i = F_{ki} / \left(\sum_{i=1}^n F_{ki} \right)$.

Подставив в уравнения (4) и (5) выражение (6), получим:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}R + a_{12}x_C &= a_{10}, \\ a_{21}R + a_{22}x_C &= a_{20}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $a_{11} = \sum_{i=1}^n [C_{yi} + K_{yi}(\alpha_i + \text{inv}v_i)(\cos\alpha_i + H_A \sin\alpha_i) + F_{fi}(H_A \cos\alpha_i - \sin\alpha_i)]$,

$$a_{12} = \sum_{i=1}^n K_{yi}(\cos\alpha_i + H_A \sin\alpha_i)/\beta_i, \quad a_{10} = \sum_{i=1}^n K_{yi}x_i(\cos\alpha_i + H_A \sin\alpha_i)/\beta_i + (1 - H_A \text{tg}\psi_a)mv_x^2,$$

$$a_{21} = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[C_{yi} + K_{yi}(\alpha_i + \text{inv}v_i) \right] [x_i \cos\alpha_i + (y_i + H_B) \sin\alpha_i] - \left[-\frac{1}{3} K_{yi} a_i (\alpha_i + \text{inv}v_i) + F_{fi} [(H_B + y_i) \cos\alpha_i - x_i \sin\alpha_i] \right] \right\},$$

$$a_{22} = \sum_{i=1}^n \left\{ K_{yi} [x_i \cos\alpha_i + (y_i + H_B) \sin\alpha_i] / \beta_i - \frac{1}{3} K_{yi} a_i / \beta_i \right\},$$

$$a_{20} = \sum_{i=1}^n \left\{ K_{yi} x_i [x_i \cos\alpha_i + (y_i + H_B) \sin\alpha_i] / \beta_i + \frac{1}{3\beta_i} [K_{xi} b_i^2 (1 - \delta_i) - K_{yi} x_i a_i] \right\} - mv_x^2 H_B \text{tg}\psi_a,$$

$$H_A = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^n k_i \cos\alpha_i}, \quad H_B = \frac{\sum_{i=1}^n k_i (x_i \sin\alpha_i - y_i \cos\alpha_i)}{\sum_{i=1}^n k_i \cos\alpha_i}.$$

Решая уравнения (7), получим:

$$R = \frac{a_{10}a_{22} - a_{12}a_{20}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \quad x_C = \frac{a_{11}a_{20} - a_{10}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (8)$$

Алгоритм расчета силовых и геометрических характеристик поворота трактора без подвески содержит три основных расчетных шага.

При первом расчетном шаге: задаемся углом поворота переднего внутреннего колеса α_1 ; для принятой конструкции рулевого привода, используя геометрические соотношения, определяем углы поворота остальных управляемых колес. Находим координаты центра рулевого управления x_D и y_D . Принимаем в качестве первого приближения $x_C = x_D$, $R = y_D$, $\beta_i = 1 - y_i / y_D$, $\zeta = 1$, $\psi_i = 0$, $\delta_i \rightarrow 0$, $F_{jx} = 0$, $F_{jy} = 0$. Вычисляем G_i , затем, определив коэффициенты $\phi_i, \delta_{0i}, \psi_{0i}$, находим $K_{xi}, C_{xi}, K_{yi}, C_{yi}$ в предположении, что $\delta_i \rightarrow 0$ и $\psi_i \rightarrow 0$. Рассчитываем кинематические параметры движения машины и каждого колеса, а также вычисляем силы, действующие на каждое колесо.

При втором расчетном шаге вычисляется тангенс угла ψ_a дрейфа машины по формуле (2). Уточняются значения различных параметров и характеристик: β_i и $\text{inv}v_i$, составляющих сил инерции F_{jx} и F_{jy} , нормальной нагрузки на каждое колесо G_i , коэффициентов $\phi_i, \delta_{0i}, \psi_{0i}$ и вычисляются параметры $K_{xi}, C_{xi}, K_{yi}, C_{yi}$ при значениях δ_i и ψ_i , найденных на предыдущем расчетном шаге. Далее расчет выполняется в той же последовательности, которая описана выше.

Третий расчетный шаг повторяет второй до тех пор, пока не будет достигнута необходимая точность вычислений.

Предложенный расчетный метод определения параметров движения колесных машин при больших углах поворота управляемых колес позволяет определить с достаточной точностью силы и стабилизирующие моменты, действующие на каждое колесо машины, и рассчитать величины конструктивных параметров рулевого привода.

Возможность достаточно точного определения сил и моментов, действующих на управляемые колеса машины при ее повороте, повышает эффективность стадии проектирования новых тракторов и позволяет улучшить характеристики выпускаемых тракторов.

После определения сил и моментов, приложенных к колесу, и проекций на оси координат: единичного вектора \vec{a}^0 направления оси шкворня и радиус-вектора \vec{e} , проведенного из точки пересечения шкворня с цапфой колеса в центр пятна контакта колеса с дорогой, запишем выражения для составляющих стабилизирующего момента, действующего на цапфу внутреннего колеса со знаком «+», а на цапфу внешнего колеса – «-»:

$$\begin{aligned} T_G &= \pm G(b \cos \sigma - r_c \sin \sigma) \sin \zeta \sin \alpha_e; & T_S &= S(b \sin \sigma + r_c \cos \sigma) \sin \zeta \sin \alpha_e; \\ T_F &= \pm F((b \cos \sigma - r_c \sin \sigma) \cos \zeta - (b \sin \sigma + r_c \cos \sigma) \sin \zeta \cos \alpha_e); \\ T_{MC} &= M_S \cos \zeta; & T_{Mf} &= \mp M_f \sin \zeta \cos \alpha_e, \end{aligned} \quad (9)$$

где ζ – угол комбинированного наклона шкворня; σ – угол развала колес; α_e – эффективный угол поворота колеса [2]; b – длина цапфы; r_c – радиус колеса.

Результирующий момент, приложенный к поворотной цапфе, равен сумме указанных составляющих:

$$T_\Sigma = T_G + T_S + T_f + T_{MS} + T_{Mf}.$$

Механизм поворота управляемых колес включает два равных симметрично расположенных гидроцилиндра (рисунок 2). Каждый гидроцилиндр воздействует на рычаг поворотных цапф и создает поворачивающий момент. Суммарный поворачивающий момент равен сумме моментов сопротивления повороту колес

$$F_{c1}S_1 + F_{c2}S_2 = T_{s1} + T_{s2}, \quad (10)$$

где F_{c1} и F_{c2} – усилие на штоке гидроцилиндра внутреннего и внешнего колеса; S_1 и S_2 – плечо силы F_{c1} и F_{c2} относительно оси поворота шкворня внутреннего и внешнего колеса; T_{s1} и T_{s2} – моменты сопротивления колес относительно оси шкворня.

Определим усилия в рулевом приводе при повороте колес управляемого моста на месте. Моменты сил F_f и G_k относительно оси шкворня определяются смешанными произведениями векторов: $T_F = \vec{a}^0(\vec{e} \times \vec{F}_f)$, $T_G = \vec{a}^0(\vec{e} \times \vec{G}_k)$, а момент сопротивления повороту на месте $M_{\varphi \max}$ на жесткой поверхности рассчитывается как момент трения прямоугольной площадки контакта.

Рассматривая вращение площадки контакта вокруг неподвижной оси, проходящей через центр симметрии O , получим:

$$M_{\varphi \max} = \frac{1}{3} \varphi G \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{2b} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda_1}{2} \right) \right| + \frac{b^2}{2a} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda_2}{2} \right) \right| \right).$$

В связи с упругой деформацией шины момент сопротивления M_φ повороту колеса на месте увеличивается с увеличением угла α поворота колеса асимптотически приближаясь к $M_{\varphi \max}$:

$$M_\varphi = M_{\varphi \max} \left(1 - \exp \left(-\frac{\alpha}{\alpha_x} \right) \right), \text{ где } \alpha_x - \text{характеристический угол, } \alpha_x = 4^\circ.$$

В таблице 1 приводится перечень исходных данных для расчета силовых и геометрических параметров трактора МТЗ 3522, мощностью 350 л.с. при повороте. Значения угла поворота внутреннего колеса α_1 задаются в пределах $\alpha_{1\min} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1\max}$ с шагом $\Delta\alpha_1$.

На рисунке 3 приведены графики изменения давления в гидроцилиндрах при повороте колес на месте и при круговом движении трактора в функции угла поворота внутреннего колеса для двух случаев: поворот трактора влево и поворот – вправо.

Анализ современных моделей автотракторных транспортных средств показывает, что наличие подвески ведущего моста предполагает увеличение скоростей движения, что в свою очередь ужесточает требования к характеристикам прямолинейного движения и поворота машин: круговое движение, «вход в поворот» и «выход из поворота».

Таблица 1 - Исходные данные

Параметры трактора	Единицы измерения	Обозначения		Значение параметра
		в тексте	в программе	
Расстояние между осями шкворней в плоскости рулевой трапеции	м	a_c	AC	1,575
Длина рычага рулевой трапеции	м	h	H	0,234
Угол установки рычага рулевой трапеции	градус	Θ	TET	14
Угол продольного наклона шкворня	градус	γ	GAM	0
Угол поперечного наклона шкворня	градус	β	BET	7
Угол развала управляемых колес	градус	σ_0	$SG0$	0
Длина поворотной цапфы	м	b_C	BC	0,170
Длина рычагов рулевого привода	м	$h_a; l_c; l_e$	$h_a; l_c; l_e;$	0,196; 0,58; 0,174
Угол установки рычага рулевого привода	градус	τ	tau	8
Диаметр штока	м	ds	ds	0,03
Диаметр цилиндра	м	dp	dp	0,063
КПД гидроцилиндра		ec	ec	0,97
Диаметр шины	м	D	$DR1$	1,644
Ширина профиля шины	м	B	$BR1$	0,590
Ширина беговой дорожки (площадки контакта)	м	b_n	$BP1^*)$	0,470
Коэффициент удельной контактной нагрузки	кН/м	q	$SR1$	234
Показатель нагрузочной характеристики	–	c	$CR1$	0,85
Фактор прогиба шины	–	e_r	$ER1$	0,5
Фактор тангенциальной жесткости шины	–	e_x	$EX1$	2,4
Фактор сопротивления боковому уводу	–	e_y	$EY1$	1,25
Диаметр шины	м	D	$DR2$	2,061
Ширина профиля шины	м	B	$BR2$	0,716
Ширина беговой дорожки шины	м	b	$BP2$	0,575
Коэффициент удельной контактной нагрузки	кН/м	q	$SR2$	408
Показатель нагрузочной характеристики шины	–	c	$CR2$	0,85
Фактор прогиба шины	–	e_r	$ER2$	0,4
Фактор тангенциальной жесткости шины	–	e_x	$EX2$	2,4
Фактор сопротивления	–	e_y	$EY2$	1,25
База трактора	м	L	L	2,96
Расстояние от оси заднего моста до центра тяжести	м	b	B	1,184
Расстояние от центра тяжести до поверхности дороги	м	z_0	$Z0$	1,27
Ширина колеи передних колес	м	w_1	$W1$	2,150
Ширина колеи задних колес	м	w_2	$W2$	2,050
Масса трактора	т	m	M	11

Коэффициент трения шины об асфальт	–	μ	FIR	0,74
Связность	кПа	c_0	C0	7
Характеристический угол	градус	α_x	AR	4
Начальный угол поворота внутреннего колеса	градус	α_1	A1	1
Максимальный угол поворота внутреннего колеса	градус	α_{1m}	A1M	40
Скорость движения	м/с	V_x	V	2,8

Одной из основных характеристик, описывающих динамику движения, является устойчивость, а одним из узлов трактора, наиболее сильно влияющим на критерий устойчивости, – управляемый мост, колеса которого могут совершать различного рода колебания, в том числе, и автоколебания (или шимми) [3]. Для описания «вход в поворот» и «выход из поворота» трактора необходимо использовать уравнение Лагранжа второго рода, т.е. реализовать описание нестационарного движения трактора.

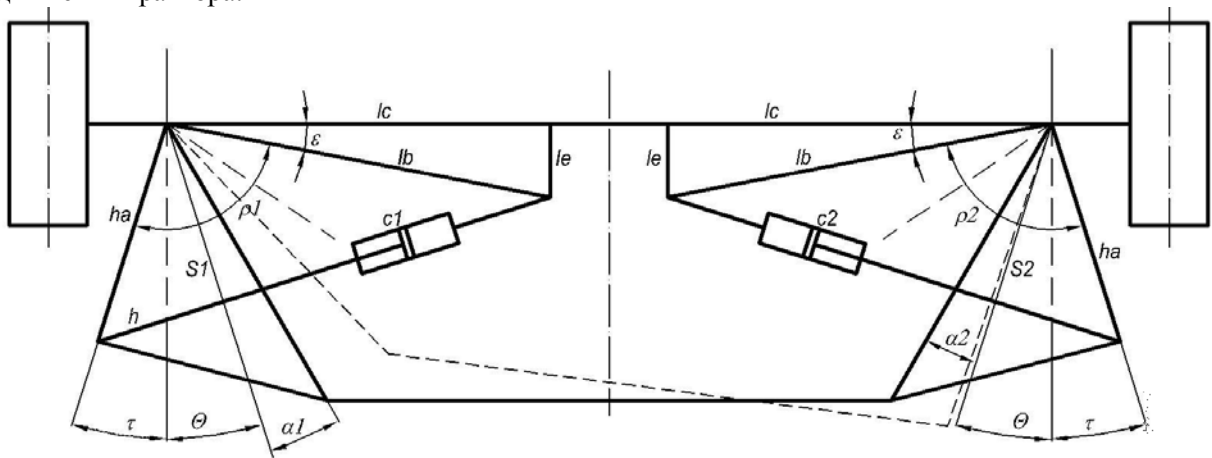


Рисунок 2 - Кинематическая схема рулевого привода

Поэтому к тракторам с подвеской необходимо применять методы исследования динамики движения машины, используя критерии устойчивости, стабилизации, плавности хода, безопасности движения с учетом среднего времени реакции водителя, во всем диапазоне рабочих и транспортных скоростей движения [3]. Если критерий устойчивости движения трактора будет «плохим», то одновременно ухудшатся показатели управляемости и безопасности движения, стабилизация управляемых колес будет недостаточной. Повышается утомляемость водителя, который все время будет пытаться исправлять траекторию движения трактора, что увеличит вероятность аварии.

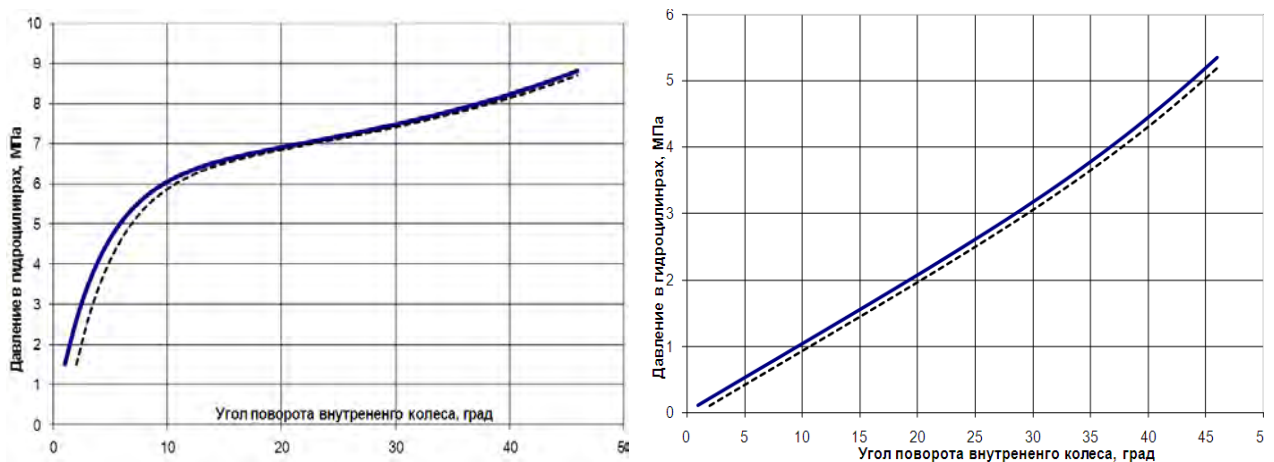


Рисунок 3 – Давление в гидроцилиндрах при повороте колес на месте и при круговом движении трактора в функции угла поворота внутреннего колеса

Выполненные исследования силовых и геометрических параметров поворота трактора позволяют сделать следующий вывод. Разработан расчетный метод для определения сил и моментов, действующих на колеса со стороны дороги, при круговом движении трактора в функции угла поворота внутреннего (или внешнего) колеса и других характеристик: координат центра поворота и радиуса поворота трактора; вертикальной нагрузки на каждом колесе трактора; различных характеристик силового взаимодействия каждого колеса с шиной и дорогой в зависимости от нагрузки на колесо; касательной силы тяги, боковой силы и коэффициентов буксования каждого колеса; усилий в гидроцилиндрах при повороте управляемых колес на месте и при круговом движении трактора.

РЕЗЮМЕ

Приведено описание нового метода определения параметров управляемой оси и трактора в целом. В результате рассчитываются силы, действующие на колесо в зависимости от угла поворота внутреннего управляемого колеса: вертикальные силы, боковые силы, касательные силы тяги, коэффициент буксования на каждом колесе, а также другие силовые и геометрические характеристики поворота.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чудаков, Е.А. Теория автомобиля / Е.А.Чудаков, - М.: Машиностроение 1978 – 216с.
2. Андреев, А.Ф. О взаимодействии колеса с опорной поверхностью / А.Ф. Андреев, Автомобиле- и тракторостроение: Динамика и долговечность тягово-транспортных машин: Мн: Вышэйшая школа, 1994, вып. 5, 51-58с.
3. Гурвич, Ю.А. Прикладные критерии устойчивости движения управляемых колес транспортных средств / Ю.А.Гурвич, Ю.Д.Сырокваш // Автомобильная промышленность. М.: 2005, – с.23-27.
4. СТБ ГОСТ Р 52302–2006 «Автотранспортные средства. Управляемость и устойчивость. Технические требования. Методы испытания».
5. ГОСТ 27257–1987 «Методы определения параметров поворота колесных машин».

SUMMARY

This article contains a description of a new method of steerable axle and tractor parameters definition. In result next forces at the wheel in dependence of turning of internal wheel angle are calculated: vertical load, and traction force, slippage coefficient, horizontal force at each wheel, and other load and kinematical characteristics.

Поступила в редакцию 05.11.2013

УДК 517.52+517.983

ОБ ОПЕРАТОРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

к. ф.-м. н. Акимов В.А.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Введем следующее обозначение: d_x - оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$; $P_n(d_x)$ - оператор вида

$$P_n(d_x) = \sum_{i=0}^n a_i d_x^i, \quad d_x^i = \frac{d^i}{dx^i}, \quad a_0 dx^0 = a_0, \quad a_i = \overline{1, n} - \text{вещественные или комплексные числа.}$$

Из основной теоремы алгебры следует, что любой полином $P_n(d_x)$ может быть представлен в виде

$$P_n(d_x) = a_n \prod_{i=1}^m (d_x - a_i)^{k_i} \quad (1)$$

$\sum_{i=1}^m k_i = n$, где a_i - вещественные или комплексные числа.

Докажем, что имеет место формула сдвига

$$P_n(d_x)e^{\alpha x}f(x) = e^{\alpha x}P_n(d_x + \alpha)f(x) \quad (2)$$

Доказательство проведем по индукции. Для полинома $P_1(d_x) = d_x$ формула (2) есть следствие формулы Лейбница

$$d_x[e^{\alpha x}f(x)] = e^{\alpha x}d_xf(x) + \beta e^{\alpha x}f(x) = e^{\alpha x}(d_x + \alpha)f(x).$$

Пусть теперь формула верна для оператора d_x^{n-1} . Докажем, что она верна и для оператора d_x^n .

Имеем

$$\begin{aligned} d_x^n e^{\alpha x} f(x) &= d_x [d_x^{n-1} e^{\alpha x} f(x)] = d_x [e^{\alpha x} (d_x + \alpha)^{n-1} f(x)] = e^{\alpha x} d_x \\ & (d_x + \alpha)^{n-1} f(x) + \alpha e^{\alpha x} (d_x + \alpha)^{n-1} f(x) = e^{\alpha x} (d_x + \alpha)^n f(x) \end{aligned}$$

Таким образом, для любого целого m получена формула

$$d_x^m [e^{\alpha x} f(x)] = e^{\alpha x} (d_x + \alpha)^m f(x)$$

из которой сразу следует утверждение (2), что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь уравнение

$$(d_x + \alpha)y(x) = f(x) \quad (3)$$

Используя формулу (2), перепишем (3) в виде $e^{-\alpha x} d_x [e^{\alpha x} y(x)] = f(x)$. Таким образом, уравнение (3) эквивалентно уравнению

$$d_x [e^{\alpha x} y(x)] = f(x) e^{\alpha x} \quad (4)$$

Как известно, общее решение уравнения $d_x y(x) = f(x)$ имеет вид $y(x) = \int f(x) d_x + C$, где C - константа.

Введем обозначение $\int f(x) d_x + C = \frac{1}{d_x} f(x)$.

Теперь можно решение уравнения (3) записать в виде

$$y = e^{-\alpha x} \frac{1}{d_x} e^{\alpha x} f(x)$$

Приведем примеры решения задач по формуле (4).

1. $y'(x) + y(x) = x$

Здесь $\alpha = 1$ и $f(x) = x$.

Легко получим $y(x) = e^{-x} \frac{1}{d_x} (e^x x) = e^{-x} \left(\int e^x x d_x + C \right) = e^{-x} (x e^x - e^x + C) = x - 1 + C e^{-x}$.

2. $y'(x) - 2y(x) = \sin(x)$; $\alpha = -2$, $f(x) = \sin(x)$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{2x} \frac{1}{d_x} (e^{-2x} \sin(x)) = e^{2x} \left(\int e^{-2x} \sin(x) d_x + C \right) = -e^{2x} \left(\frac{2}{5} e^{-2x} \sin(x) + \frac{1}{5} e^{-2x} \cos(x) + C \right) = \\ &= -\frac{2}{5} \sin(x) - \frac{1}{5} \cos(x) + C e^{2x}. \end{aligned}$$

3. $y'(x) + 10y(x) = e^x \cos(x)$; $\alpha = 10$, $f(x) = e^x \cos(x)$

$$y(x) = e^{-10x} \frac{1}{d_x} (e^{11x} \cos(x)) = e^{-10x} \left(\int e^{11x} \cos(x) d_x + C \right) = \frac{11}{122} e^x \cos(x) + \frac{1}{122} e^x \sin(x) + C e^{-10x}.$$

4. $y'(x) - 5y(x) = 0$; $\alpha = 5$, $f(x) = 0$

$$y(x) = e^x \frac{1}{d_x} 0 = e^{5x} C = C e^{5x}.$$

Если положить $P_n(d_x) = (d_x + \beta)^k$, то для дифференциального уравнения

$$(d_x + \beta)^k y(x) = f(x) \quad (5)$$

Получим решение

$$y(x) = e^{-\alpha x} \left(\frac{1}{d_x}\right)^k \left[e^{\alpha x} f(x) \right] \quad (6)$$

Приведём несколько примеров:

$$1. \quad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x$$

$$y(x) = e^x \frac{1}{d_x^2} 1 = e^x \left(\iint dx dx + C_1 x + C_2 \right) = e^x \left(\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right)$$

$$2. \quad y'''(x) + 6y''(x) + 12y'(x) + 8y(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$(d_x + 2)^3 y(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$y(x) = e^{2x} \frac{1}{d_x^3} x^2 = e^{2x} \left(\frac{x^5}{60} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \right)$$

$$3. \quad y''(x) + y'(x) + \frac{1}{4} y(x) = 0, \quad (d_x + \frac{1}{2})^2 y(x) = 0$$

$$y(x) = e^{\frac{-x}{2}} \frac{1}{d_x^2} 0 = e^{\frac{-x}{2}} (C_1 x + C_2)$$

Если теперь вернуться к уравнению (1), то по аналогии с вышеизложенным можно утверждать, что любое его решение представимо в виде

$$y(x) = e^{d_m x} \frac{1}{d_x^{k_m}} e^{(-a_m + a_{m-1})x} \frac{1}{d_x^{k_{m-1}}} \dots \frac{1}{d_x^{m_1}} e^{(-\alpha_2 + \alpha_1)x} e^{-\alpha_1 x} \frac{f(x)}{a_n} \quad (7)$$

Если все корни α_i полинома $P_{n(x)}$ являются простыми, то получим

$$y(x) = e^{d_n x} \frac{1}{d_x} e^{(-a_n + a_{n-1})x} \frac{1}{d_x} \dots \frac{1}{d_x} e^{(-\alpha_2 + \alpha_1)x} e^{-\alpha_1 x} \frac{f(x)}{a_n} \quad (8)$$

Приведём примеры:

$$1. \quad y'''(x) + y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = \sin(x)$$

$$(d_x + 3)(d_x - 1)^2 y(x) = \sin(x)$$

$$y(x) = e^x \frac{1}{d_x^2} e^{-4x} \frac{1}{d_x} (e^{3x} \sin(x)) = e^x \frac{1}{d_x^2} e^{-4x} \left(\frac{3}{10} e^{3x} \sin(x) - \frac{1}{10} e^{3x} \cos(x) + C_1 \right) =$$

$$= e^x \frac{1}{d_x^2} \left(\frac{3}{10} e^{-x} \sin(x) - \frac{1}{10} e^{-x} \cos(x) + C_1 e^{-4x} \right) = \frac{3}{20} \cos(x) + \frac{1}{20} \sin(x) + A e^{-3x} +$$

$$+ (B_1 x + B_2) e^x$$

$$2. \quad y^{(4)}(x) + 2y''(x) + y = \cos(x)$$

$$(d_x + i)^2 (d_x - i)^2 = \cos(x)$$

$$y(x) = e^{ix} \frac{1}{d_x^2} e^{-2ix} \frac{1}{d_x^2} e^{ix} \cos(x) = -\frac{x^2}{8} \cos(x) + C_1 x \cos(x) + C_2 x \sin(x) + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)$$

Таким образом, приведены формулы, выражающие решение уравнения (1) через интегралы от правой части. Этой формулой можно так же пользоваться для отыскания решения однородного уравнения.

РЕЗЮМЕ

В работе изложены основы операторного метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрены конкретные примеры решения некоторых классических задач трех различных типов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов В.П. Операторные методы. Изд-во «Наука», М., 1973 г., 544 с.

SUMMARY

The paper presents the basis of the operator method for solving ordinary differential equations with constant coefficients. Specific examples of solutions to some classical problems of three different types were considered.

Поступила в редакцию 05.11.2013

УДК 539.3+534.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЕ

д. ф.-м. н. ¹ **Поленов В.С.**, д. ф.-м. н. ² **Чигарев А.В.**

¹ *Воронежский институт экономики и права, Воронеж*

² *УО «Белорусский национальный технический университет», Минск*

Распространению упругих волн в среде со случайными неоднородностями посвящено ряд работ. Среди них следует отметить работы [1-4], в которых предполагалось, что рассматриваемая среда является однокомпонентной, неограниченной, изотропной и стохастически неоднородной.

В данной работе изучается одномерная модель двухкомпонентной [5] стохастически неоднородной среды, одна компонента которой представляет идеально упругую среду (скелет упругой среды), а вторая – жидкость

Предполагается, что в такой среде распространяется поперечная волна.

Показано влияние неоднородности двухкомпонентной среды на коэффициент затухания и скорость распространения волны. Для волнового комплексного числа получено алгебраическое уравнение четвертой степени с комплексными коэффициентами.

Для заданной величины дисперсии приведены аналитические выражения, определяющие скорость и коэффициент затухания поперечной волны.

Распространение поперечной волны в неограниченной двухкомпонентной среде в перемещениях описывается системой уравнений [6]

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right); \quad \rho_{12} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $\mu = \mu(x)$ – модуль сдвига, $\rho_{12} = \rho_{12}(x)$ – коэффициент динамической связи упругой компоненты и жидкости, $\rho_{11}(x) = \rho_1(x) - \rho_{12}(x)$, $\rho_{22}(x) = \rho_2(x) - \rho_{12}(x)$ – эффективные массы упругой и жидкой компонент; ρ_1, ρ_2 – плотности компонент. Параметры, описывающие данную среду являются случайными функциями координаты x . Индексы, стоящие вверху в круглых скобках относятся: 1 – к упругой компоненте, 2 – к жидкости.

Представим $u^{(i)}$, μ , ρ_{ij} ($i, j=1, 2$) в виде суммы математического ожидания и флуктуации

$$u^{(i)} = \langle u^{(i)} \rangle + u^{(i)'}, \quad \mu = \langle \mu \rangle + \mu', \quad \rho_{ij} = \langle \rho_{ij} \rangle + \rho'_{ij}. \quad (2)$$

Символ $\langle \rangle$ обозначает математическое ожидание соответствующих функций, штрих – их флуктуации.

Система (1) с учетом (2) и зависимости перемещений компонент от времени при помощи множителя $\exp(i\omega t)$ будет записана в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 [\langle \rho_{11} \rangle \langle u^{(1)} \rangle + \langle \rho_{12} \rangle \langle u^{(2)} \rangle + \langle \rho_{11} \rangle u^{(1)'} + \rho'_{11} \langle u^{(1)} \rangle + \rho'_{11} u^{(1)'} + \\ + \langle \rho_{12} \rangle u^{(2)'} + \rho'_{12} \langle u^{(2)} \rangle + \rho'_{12} u^{(2)'}] + \mu'_{,x} \langle u^{(1)} \rangle_{,x} + \mu'_{,x} u^{(1)'}_{,x} + \\ + \langle \mu \rangle \langle u^{(1)} \rangle_{,xx} + \langle \mu \rangle u^{(1)'}_{,xx} + \mu' \langle u^{(1)} \rangle_{,xx} + \mu' u^{(1)'}_{,xx} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \langle \rho_{12} \rangle \langle u^{(1)} \rangle + \langle \rho_{22} \rangle \langle u^{(2)} \rangle + \langle \rho_{12} \rangle u^{(1)'} + \rho'_{12} \langle u^{(1)} \rangle + \rho'_{12} u^{(1)'} + \\ + \langle \rho_{22} \rangle u^{(2)'} + \rho'_{22} \langle u^{(2)} \rangle + \rho'_{22} u^{(2)'} = 0. \end{aligned}$$

Осредним (3) и из (3) вычтем осредненное выражение, получим систему уравнений относительно средних перемещений

$$\begin{aligned}
\langle u^{(1)} \rangle_{,xx} + k_1^2 (\langle \gamma_{11} \rangle \langle u^{(1)} \rangle + \langle \gamma_{12} \rangle \langle u^{(2)} \rangle) &= -f_1 \\
\langle \gamma_{12} \rangle \langle u^{(1)} \rangle + \langle \gamma_{22} \rangle \langle u^{(2)} \rangle &= -f_2 \\
f_1 &= (\langle M' u'_{,x} \rangle)_{,x} + k_1^2 (\langle \gamma'_{11} u^{(1)} \rangle + \langle \gamma'_{12} u^{(2)} \rangle) \\
f_2 &= \langle \gamma'_{12} u^{(1)} \rangle + \langle \gamma'_{22} u^{(2)} \rangle
\end{aligned} \tag{4}$$

и относительно флуктуаций

$$\begin{aligned}
u'_{,xx} + k_1^2 (\langle \gamma_{11} \rangle u^{(1)} + \langle \gamma_{12} \rangle u^{(2)}) &= -f_3, \quad \langle \gamma_{12} \rangle u^{(1)} + \langle \gamma_{22} \rangle u^{(2)} = -f_4 \\
f_3 &= (M' \langle u^{(1)} \rangle)_{,x} + k_1^2 (\gamma'_{11} \langle u^{(1)} \rangle + \gamma'_{12} \langle u^{(2)} \rangle), \quad f_4 = \gamma'_{12} \langle u^{(1)} \rangle + \gamma'_{22} \langle u^{(2)} \rangle
\end{aligned} \tag{5}$$

В формулах (4) и (5) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_{11} \rangle &= \frac{\langle \rho_{11} \rangle}{\langle \rho \rangle}, \quad \langle \gamma_{12} \rangle = \frac{\langle \rho_{12} \rangle}{\langle \rho \rangle}, \quad \langle \gamma_{22} \rangle = \frac{\langle \rho_{22} \rangle}{\langle \rho \rangle}, \quad \gamma'_{11} = \frac{\rho'_{11}}{\langle \rho \rangle}, \quad \gamma'_{12} = \frac{\rho'_{12}}{\langle \rho \rangle}, \\
\gamma'_{22} &= \frac{\rho'_{22}}{\langle \rho \rangle}, \quad M' = \frac{\mu'}{\langle \mu \rangle}, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad c^2 = \frac{\langle \mu \rangle}{\langle \rho \rangle}, \quad \langle \rho \rangle = \langle \rho_{11} \rangle + 2\langle \rho_{12} \rangle + \langle \rho_{22} \rangle.
\end{aligned} \tag{6}$$

Систему (5) преобразуем к виду

$$u'_{,xx} + k_2^2 u^{(1)} = -F, \quad u^{(2)} = - \left(b_1 u^{(1)} + \frac{f_4}{\langle \gamma_{22} \rangle} \right) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
F &= (M' \langle u^{(1)} \rangle)_{,x} + k_1^2 (a'_1 \langle u^{(1)} \rangle + a'_2 \langle u^{(2)} \rangle), \quad a'_1 = \gamma'_{11} - b_1 \gamma'_{12} \\
a'_2 &= \gamma'_{12} - b_1 \gamma'_{22}, \quad k_2^2 = k_1^2 \frac{\langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{22} \rangle - \langle \gamma_{12} \rangle^2}{\langle \gamma_{22} \rangle}, \quad b_1 = \frac{\langle \gamma_{12} \rangle}{\langle \gamma_{22} \rangle}
\end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение (7) представляет собой уравнение Гельмгольца, решение которого выражается через функцию Грина G

$$u^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} G [(M' \langle u^{(1)} \rangle)_{,x} + k_1^2 (a'_1 \langle u^{(1)} \rangle + a'_2 \langle u^{(2)} \rangle)] dx, \tag{9}$$

которая удовлетворяет уравнению

$$G_{,xx} + k_2^2 G = -4\pi \delta(x - x_1), \tag{10}$$

где $\delta(x - x_1)$ – функция Дирака.

Тогда (8) с учетом (9) запишем в виде

$$\begin{aligned}
u^{(2)} &= -b_1 \int_{-\infty}^{\infty} [G_{,x} (M' \langle u^{(1)} \rangle) + k_1^2 G (a'_1 \langle u^{(1)} \rangle + a'_2 \langle u^{(2)} \rangle)] dx - \\
&\quad - (b'_1 \langle u^{(1)} \rangle + b'_2 \langle u^{(2)} \rangle), \quad b'_1 = \frac{\gamma'_{12}}{\langle \gamma_{22} \rangle}, \quad b'_2 = \frac{\gamma'_{22}}{\langle \gamma_{22} \rangle}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Подставим (9) и (11) в правые части (4) и учитывая (10), получим систему дифференциальных уравнений относительно средних перемещений фаз

$$\begin{aligned}
(1 - 4\pi \langle M \bar{M}' \rangle) \langle u^{(1)} \rangle_{,xx} + k_1^2 \left(\langle \gamma_{11} \rangle - \frac{1}{\langle \gamma_{22} \rangle} \langle \gamma'_{12} \bar{\gamma}'_{12} \rangle \right) \langle u^{(1)} \rangle - \\
- k_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} G \langle M \bar{M}' \rangle \langle u^{(1)} \rangle_{,x_1} dx_1 + k_1^4 \int_{-\infty}^{\infty} G \langle \gamma'_{11} \bar{\gamma}'_{11} \rangle \langle u^{(1)} \rangle dx_1 +
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
+ k_1^4 b_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} G \langle \gamma'_{12} \bar{\gamma}'_{12} \rangle \langle u^{(1)} \rangle dx_1 - k_1^4 b_1 \int_{-\infty}^{\infty} G \langle \gamma'_{12} \bar{\gamma}'_{12} \rangle \langle u^{(2)} \rangle dx_1 + k_1^2 \langle \gamma_{12} \rangle \langle u^{(2)} \rangle = 0 \\
\langle \gamma_{12} \rangle \langle u^{(1)} \rangle - k_1^2 b_1 \int_{-\infty}^{\infty} G \langle \gamma'_{12} \bar{\gamma}'_{12} \rangle \langle u^{(1)} \rangle dx_1 + k_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} G \langle \gamma'_{12} \bar{\gamma}'_{12} \rangle \langle u^{(2)} \rangle dx_1 + \\
+ k_1^2 b_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} G \langle \gamma'_{22} \bar{\gamma}'_{22} \rangle \langle u^{(2)} \rangle dx_1 + (\langle \gamma_{22} \rangle - \frac{1}{\langle \gamma_{22} \rangle} \langle \gamma'_{22} \bar{\gamma}'_{22} \rangle) \langle u^{(2)} \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Черта сверху над буквой обозначает комплексно – сопряженную величину.

Решение (12) и (13) будем искать в виде

$$\langle u^{(a)} \rangle = A_a \exp(iqx) \quad (a=1,2). \tag{14}$$

Здесь A_a – амплитуды компонент, q – волновое комплексное число, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Если подставить (14), решение функции Грина $G(t) = \frac{2\pi i}{k_2} \exp(ik_2|t|)$ и значения корреляционных функций: $\langle M\bar{M}' \rangle = D_1 \exp(-\frac{|r|}{a})$, $\langle \gamma'_{11}\bar{\gamma}'_{11} \rangle = D_2 \exp(-\frac{|r|}{a})$, $\langle \gamma'_{12}\bar{\gamma}'_{12} \rangle = D_3 \exp(-\frac{|r|}{a})$, $\langle \gamma'_{22}\bar{\gamma}'_{22} \rangle = D_4 \exp(-\frac{|r|}{a})$, где $D_i (i = \overline{1,4})$ – дисперсии, a – радиус корреляции функции $f'(x)$, $r = x - x_1$ и в соотношениях (12), (13) сделать замену $x - x_1 = t$, то получим однородную систему двух алгебраических уравнений относительно амплитуд A_1 и A_2 .

$$\begin{aligned} & \left[iB_1 k_2 q^3 + \left(\frac{1}{a} B_1 k_2 - ik_2^2 C_1 \right) q^2 + iB_3 k_1^2 k_2 q + \frac{1}{a} B_3 k_1^2 k_2 - ik_1^2 (B_3 k_2^2 + B_4 k_1^2) \right] A_1 + \\ & + \left[i\langle \gamma_{12} \rangle k_1^2 k_2 q + \frac{1}{a} \langle \gamma_{12} \rangle k_1^2 k_2 - ik_1^2 (\langle \gamma_{12} \rangle k_2^2 - B_5 k_1^2) \right] A_2 = 0 \\ & \left[i\langle \gamma_{12} \rangle k_2 q + \frac{1}{a} \langle \gamma_{12} \rangle k_2 - i(\langle \gamma_{12} \rangle k_2^2 - B_5 k_1^2) \right] A_1 + \\ & + \left[iB_6 k_2 q + \frac{1}{a} B_6 k_2 - i(B_6 k_2^2 + B_7 k_1^2) \right] A_2 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} B_1 &= 4\pi D_1 - 1, \quad B_2 = 2\pi D_1, \quad B_3 = \langle \gamma_{11} \rangle - \frac{D_3}{\langle \gamma_{22} \rangle}, \quad B_4 = 2\pi(D_2 + b_1^2 D_3), \\ B_5 &= 2\pi b_1 D_3, \quad B_6 = \langle \gamma_{22} \rangle - \frac{D_4}{\langle \gamma_{22} \rangle}, \quad B_7 = 2\pi(D_3 + b_1^2 D_4), \quad C_1 = B_1 + B_2. \end{aligned} \quad (16)$$

Однородная система (15) имеет нетривиальное решение при условии, когда определитель системы равен нулю. Раскрывая определитель второго порядка, составленный из коэффициентов при A_1 и A_2 , получим алгебраическое уравнение четвертой степени с комплексными коэффициентами относительно волнового комплексного числа q

$$\begin{aligned} & \Gamma_0 q^4 + \Gamma_1 q^3 + \Gamma_2 q^2 + \Gamma_3 q + \Gamma_4 = 0, \quad (17) \\ & \Gamma_0 = -B_1 B_6 k_2^2, \quad \Gamma_1 = (B_1 B_6 k_2^3 + B_1 B_7 k_1^2 k_2 + C_1 B_6 k_2^3) + i \frac{1}{a} 2B_1 B_6 k_2^2, \\ & \Gamma_2 = \left[\frac{1}{a^2} B_1 B_6 k_2^2 - C_1 B_6 k_2^4 - (C_1 B_7 + B_3 B_6 - \langle \gamma_{12} \rangle^2) k_1^2 k_2^2 \right] - \frac{i}{a} [B_1 B_7 k_1^2 k_2 + (B_1 + C_1) B_6 k_2^3], \\ & \Gamma_3 = \left[2(B_3 B_6 - \langle \gamma_{12} \rangle^2) k_1^2 k_2^3 + (B_3 B_7 + B_4 B_6 - 2\langle \gamma_{12} \rangle B_5) k_1^4 k_2 \right] + \frac{i}{a} 2(B_3 B_6 - \langle \gamma_{12} \rangle^2) k_1^2 k_2^2, \\ & \Gamma_4 = \left[\frac{1}{a^2} (B_3 B_6 - \langle \gamma_{12} \rangle^2) k_1^2 k_2^2 + (-B_3 B_6 + \langle \gamma_{12} \rangle^2) k_1^2 k_2^4 + \right. \\ & \quad \left. + (-B_3 B_7 - \langle \gamma_{12} \rangle B_5 - B_4 B_6) k_1^4 k_2^2 + (B_5 B_5 - B_4 B_7) k_1^6 \right] + \\ & \quad + \frac{i}{a} \left[2(B_3 B_6 + \langle \gamma_{12} \rangle^2) k_1^2 k_2^3 - (B_3 B_7 + B_4 B_6 - 2\langle \gamma_{12} \rangle B_5) k_1^4 k_2 \right]. \end{aligned}$$

Из уравнения (17) определим коэффициент затухания γ и скорость c волны по формулам [7]

$$\gamma = |jm q|, \quad c = \omega(\text{Re } q)^{-1}. \quad (18)$$

Рассмотрим случай упругой двухкомпонентной среды с заданной величиной дисперсии: $D_1 = \frac{1}{4\pi}$,

$D_2 = \langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{12} \rangle^2$, $D_3 = \langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{22} \rangle$, $D_4 = \langle \gamma_{22} \rangle^2$. В этом случае соотношения (16) принимают вид

$$\begin{aligned} B_1 &= 0, \quad B_2 = \frac{1}{2}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = 4\pi \langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{12} \rangle^2, \quad B_5 = 2\pi \langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{12} \rangle, \\ B_6 &= 0, \quad B_7 = 2\pi (\langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{22} \rangle + \langle \gamma_{12} \rangle^2). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (17) для определения коэффициента затухания и скорости распространения поперечной волны в упругой, насыщенной жидкостью, пористой среде запишем в таком виде

$$\begin{aligned}
 & a^2 \chi_1 q^2 + (a^2 \chi_2 + i a \chi_3) q + (\chi_4 + a^2 \chi_5) + i a \chi_6 = 0 \\
 & \chi_1 = \left[\langle \gamma_{12} \rangle^2 - \pi (\langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{22} \rangle + \langle \gamma_{12} \rangle^2) \right] k_1^2 k_2^2, \quad \chi_2 = -2 \left[\langle \gamma_{12} \rangle^2 k_1^2 k_2^3 + 2\pi \langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{12} \rangle^2 k_1^4 k_2 \right] \\
 & \chi_3 = -2 \langle \gamma_{12} \rangle^2 k_1^2 k_2^2, \quad \chi_4 = -\langle \gamma_{12} \rangle^2 k_1^2 k_2^2, \\
 & \chi_5 = \langle \gamma_{12} \rangle^2 k_1^2 k_2^4 - 4\pi \langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{12} \rangle^2 k_1^4 k_2^2 + 4\pi^2 \left[\langle \gamma_{11} \rangle^2 \langle \gamma_{12} \rangle^2 - \right. \\
 & \left. - 2 \langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{12} \rangle^2 (\langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{22} \rangle + \langle \gamma_{12} \rangle^2) \right] k_1^6, \quad \chi_6 = 2 \left[\langle \gamma_{12} \rangle^2 k_1^2 k_2^3 + 2\pi \langle \gamma_{11} \rangle \langle \gamma_{12} \rangle^2 k_1^4 k_2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Из уравнения находим

$$q = \frac{1}{2a\chi_1} \left[(a\chi_2 \pm \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2}) + i(\chi_3 \pm \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2}) \right].
 \tag{20}$$

По (18) определим коэффициент затухания и скорость распространения поперечной волны

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{1}{2a\chi_1} (\chi_3 \pm \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2}), \quad c = \omega \left[\frac{1}{2a\chi_1} (a\chi_2 \pm \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2}) \right]^{-1} \\
 r &= \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\beta_2}{\beta_1}
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

$$\beta_1 = a^2 (\chi_2^2 - 4\chi_1 \chi_5) - (\chi_3^2 + 4\chi_1 \chi_4), \quad \beta_2 = 2a (\chi_2 \chi_3 - 2\chi_1 \chi_6).$$

При заданных значениях математических ожиданий $\langle \gamma_{11} \rangle$, $\langle \gamma_{12} \rangle$, $\langle \gamma_{22} \rangle$ можно получить зависимости коэффициента затухания и скорости распространения поперечной волны от частоты при различных значениях радиуса корреляции в упругой, насыщенной жидкостью, пористой среде.

РЕЗЮМЕ

Изучается одномерная модель двухкомпонентной стохастически неоднородной среды, одна компонента которой представляет идеально упругую среду (скелет упругой среды), а вторая – жидкость. Показано влияние неоднородности двухкомпонентной среды на коэффициент затухания и скорость распространения волны. Для волнового комплексного числа получено алгебраическое уравнение четвертой степени с комплексными коэффициентами. Для заданной величины дисперсии приведены аналитические выражения, определяющие скорость и коэффициент затухания поперечной волны

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А.В. Чигарев – Минск, Технопринт, 2000. - 425 с.
2. Шуман Б.М. Распространение упругих волн в среде со случайными неоднородностями / Б.М. Шуман – Прикл. мех, 1968, №4, Вып. 10 – С. 6 – 13.
3. Чигарев А.В. Распространение волн в стохастически неоднородной упругой среде / А.В. Чигарев - Изв АН СССР, МГТ, 1970, № 4 - С. 87 – 92.
4. Чигарев А.В. Распространение ударных волн в стохастически неоднородной упругой среде / А.В. чигарев – Прикл.мех. 1972, Т.8, Вып. 5 – С. 69 – 74.
5. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range / M.A. Biot - J. Acoust. Soc. America, 1956. v. 28, № 2. -P. 168-178.
6. Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах / Л.Я. Косачевский - ПММ. 1959, Т. 23, Вып. 6 - С. 1115 - 1123.
7. Лифшиц И.М. К теории распространения ультразвуковых волн в поликристаллах / Л.Я. Лифшиц, Г.Д. Пархомовский – ЖТФ, 1950, Т. 20, Вып. 2 – С. 175 – 182.
8. Поленов В.С. Распространение волн в вязкоупругой среде со случайными неоднородностями / В.С. Поленов, А.В. Чигарев – Сб. Тр. НИИ мат. ВГУ, Воронеж -1972. Вып. 6 – С. 25 -27.

SUMMARY

We study a two-dimensional model of a stochastically inhomogeneous medium, one component of which is perfectly elastic medium (the skeleton of an elastic medium) and the second - a liquid. Shows the effect of heterogeneity of the two-component medium on the attenuation coefficient and the speed of propagation of the wave. For the wave of the complex number obtained by an algebraic equation of the fourth degree with complex coefficients. For a given value of the dispersion of the analytical expressions for the velocity and attenuation cross bullocks.

Поступила в редакцию 19.10.2013

ПАМЯТИ ДЮИСА ДАНИЛОВИЧА ИВЛЕВА
(06.09.1930 – 03.03.2013)



Дюис Данилович Ивлев родился 6 сентября 1930 г. в городе Чебоксары (Россия) в семье преподавателя Чувашского Педагогического института. После окончания школы поступил в МГУ им. М.В. Ломоносова на механико-математический факультет, который окончил в 1953 году. В 1956 г. после учебы в аспирантуре Института механики МГУ защитил кандидатскую диссертацию. Работал в качестве ассистента, младшего научного сотрудника Института механики АН СССР, инженером и старшим инженером оборонного предприятия. В 1959 г. защитил в совете МГУ докторскую диссертацию на тему «Пространственная задача теории идеальной пластичности». С 1959 по 1966 год заведовал кафедрой теории упругости и пластичности на механико-математическом факультете Воронежского государственного университета где под его руководством сформировалась крупная научная школа, многие из представителей которой стали известными учеными, докторами и кандидатами наук. В 1966-70 годы Д.Д. Ивлев заведует кафедрой в Московском высшем техническом училище им. Н.Э. Баумана, затем с 1971 по 1982 г. во Всесоюз-

ном заочном политехническом институте. В 1982 году возглавляет кафедру математического анализа и дифференциальных уравнений в Чувашском государственном университете, кафедру механики деформируемого твердого тела, с 1986 г. Д.Д. Ивлев – декан физико-математического факультета. Под его руководством начинает формироваться научная школа, создается докторский совет по защите диссертаций. В 1993 г. Д.Д. Ивлев возглавляет кафедру математического анализа Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева, где продолжилось становление научной школы механики под его руководством, работа докторского совета. В 1992 г. ему присваивается звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации», в 2006 г. он становится лауреатом Государственной премии Чувашской Республики в области науки и техники, награжден медалью «За заслуги перед Отечеством», высшей наградой Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики – Золотой медалью им. И.Я. Яковлева, нагрудным значком «За отличные успехи в работе», знаком «Изобретатель СССР», медалями «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941-1945 гг.», «50 лет Победы в Великой Отечественной войне 1941-1945 гг.», «60 лет Победы в Великой Отечественной войне 1941-1945 гг.» и др.

На протяжении многих лет Д.Д. Ивлев член Национального Комитета РАН по теоретической и прикладной механике, член экспертного Совета ВАК РФ по математике и механике, действительный член Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, академик Международной инженерной академии и Инженерно-технологической академии Чувашской Республики, Отличник высшей школы, основатель российской научной школы «Механика сплошных сред, теория упругости и пластичности», член редколлегии журнала «Известия РАН. Механика деформируемого твердого тела», создатель и редактор серии «Механика предельного состояния», «Вестник ЧГПУ», «Теоретическая и прикладная механика» и др.

Исследования Д.Д. Ивлева посвящены различным разделам в механике деформируемого твердого тела, главным образом в математической теории пластичности. В более чем 300 публикациях, в том числе 9 монографиях, Д.Д. Ивлев показал, что уравнения пространственной теории идеальной пластичности образуют статически определимую систему уравнений гиперболического типа. Это позволило ему дать общее построение теории идеальной пластичности на основе уравнений гиперболического типа, что соответствует представлениям о сдвиговой природе деформирования идеально пластических сред. Этот подход был распространен на случай анизотропных, сжимаемых идеально пластических материалов и проблемы разрушения хрупких материалов. Д.Д. Ивлев исследовал проблемы дуализма в теории пластичности, дав исчерпывающий анализ различных экстремальных принципов, лежащих в основе построения теории пластичности. Развивая идеи А.Ю. Ишлинского, В. Прагера о трансляционном механизме упрочнения, предложил метод построения моделей сложных сред, обладающих упругостью, вязкостью, пластичностью.

В работах Д.Д. Ивлева был развит эффективный метод малого параметра, позволивший получить линеаризованные приближенные решения ряда конкретных задач для плоских, осесимметричных и пространственных тел, определить границы областей пластического состояния. Эффективность метода была подтверждена на примерах ряда классических решений Л.А. Галина, Г.П. Черепанова и др.

Необходимо отметить, что в работах Д.Д. Ивлева получили исследования по связям теории течения и деформационной теории пластичности, механике разрушения, предельного состояния конструкций, механике сыпучих сред, гидродинамике и др.

Научные исследования Д.Д. Ивлева внесли фундаментальный вклад в механику деформируемого твердого тела.

Непосредственно под его руководством защищено более 20 докторских и 100 кандидатских диссертаций. Его ученики работают во многих городах стран СНГ и в далеком зарубежье. Сотни высококвалифицированных специалистов – учеников профессора Ивлева Д.Д. безмерно благодарны Учителю за путевку в научную жизнь, счастье общения с мудрым и великим наставником, талантливым педагогом.

Светлая память о талантливом и замечательном Человеке, Ученом и Педагоге Дюисе Даниловиче Ивлеве навсегда сохранится в наших сердцах.

Чигарев А.В., Плескачевский Ю.М., Василевич Ю.В., Чигарев Ю.В., Куликов И.С., Косых Э.Г. Чижик С.А., Журавков М.А., Хвисевич В.М., Старовойтов Э.И., Михасев Г.И., Красневский Л.Г., Альгин В.Б., Тариков Г.П., Можаровский В.В., Яровая А.В., Леоненко Д.В., Акимов В.А., Смирнов Г.И., Кулак М.И., Микулик А.Н., Мелешко И.Н., Босаков С.В., Сосновский Л.А. и др.

Редакция ТПМ

ДЮИС ДАНИЛОВИЧ ИВЛЕВ*

3 марта 2013 года на 83-м году жизни скоропостижно скончался выдающийся российский ученый, доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный деятель науки Российской Федерации, член редколлегии журнала "Известия Российской Академии наук. Механика твердого тела" Дюис Данилович Ивлев.

Д.Д. Ивлев родился 6 сентября 1930г. в г. Чебоксары Чувашской Республики. После окончания средней школы в 1948г. Д.Д. Ивлев поступает на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, который заканчивает в 1953г. В 1956г., после окончания аспирантуры при Институте механики МГУ, он успешно защитил диссертацию "Приближенное решение упруго-пластических задач методом малого параметра", в 1959г., после защиты диссертации работы "Пространственная задача теории идеальной пластичности", Д.Д. Ивлев получает степень доктора физико-математических наук.

Научные работы Д.Д. Ивлева (всего свыше 300, среди них семь монографий) посвящены механике деформируемого тела, в основном, математической теории пластичности.

Основные научные достижения Д.Д. Ивлева связаны с созданием теории трехмерной задачи теории идеально пластического тела. В этом направлении им существенно развита математическая теория пластичности А.Ю. Ишлинского (1946г.), в которой были приняты два уравнения, связывающие главные напряжения, и одно тензорное уравнение перестановочности, эквивалентное как выяснилось позднее ассоциированному закону течения на ребре призмы Кулона-Треска. Полный пересмотр воззрений, господствовавших в то время, постепенно привел Д.Д. Ивлева к уравнениям математической теории пластичности гиперболического аналитического типа. Ему впервые удалось выяснить исключительную роль критерия текучести Треска-Сен-Венана: уравнения теории пластического течения на ребрах и гранях призмы Кулона-Треска для напряжений и скоростей имеют гиперболический аналитический тип. Это обстоятельство, указавшее, прежде всего, на альтернативу эллиптическим уравнениям многочисленных теорий пластичности, позволило распространить на трехмерные течения представление о линиях скольжения, известных из теории плоского деформированного состояния; теория двумерных полей скольжения и поразительные законы, которым они подчиняются, были созданы и открыты Г. Генки и Л. Прандтлем более чем за три десятилетия до трехмерных гиперболических формулировок А.Ю. Ишлинского и Д.Д. Ивлева.

Д.Д. Ивлеву принадлежит исчерпывающий анализ уравнений общей плоской задачи и уравнений теории упрочняющегося пластического тела. Он выполнил исследование кинематики пространственного пластического течения на поверхностях максимальной скорости сдвига. Построил ряд новых автомодельных решений. Им решены пространственные и осесимметричные задачи о вдавливании твердых тел в идеально пластическую среду. В задаче Л.А. Галина о растяжении пластинки с отверстием статическое решение ему удалось дополнить кинематическим.

В последние годы Д.Д. Ивлев активно разрабатывал общую гиперболическую парадигму механики сплошных сред и, в широком смысле, всего естествознания.

Дюис Данилович Ивлев руководил одной из крупнейших научных школ России. В настоящее время она включает около 100 кандидатов и более двух десятков докторов наук, работающих в Москве, Воронеже, Самаре, Владивостоке, Чебоксарах. По отношению к своей научной школе он всегда выступал как ученый и мыслитель, мудрый педагог и наставник.

Д.Д. Ивлев – член Российского Национального Комитета по теоретической и прикладной механике, член Экспертного Совета по математике и механике ВАК РФ, действительный член Национальной академии наук и искусств Чувашской Республики, академик Международной инженерной академии и Инженерно-технологической академии Чувашской Республики, лауреат Государственной премии Чувашской Республики в области науки и техники (2006г.).

Дюис Данилович был строг и точен в науке, доброжелателен в жизни. Все мы глубоко скорбим о постигшей нас тяжелой утрате.

* Некролог. Дюис Данилович Ивлев // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела .– 2013. – № 3. – С. 143-144.

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.3

Плескачевский Ю.М., Чigareва Ю.А. **Моделирование эффективной теплопроводности микрокомпозитной среды с учетом вероятности перколяции** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С. 4-18. В статье предложен новый метод вычисления эффективных свойств микрокомпозитных материалов, который позволяет вычислить эффективные коэффициенты вблизи порога перколяции. Вероятность перколяции определяется на основе уравнения ФПК (Фоккера-Планка-Колмогорова). Предлагается подход к аналитическому моделированию вычисления эффективной теплопроводности на основе уравнения ФПК в сочетании с методом самосогласованного поля. – Ил. 6. Библиогр. – 8 назв.

УДК 539.4:620.2+519.621.64

Чижик С.А., Циммерманн К., Чigareв В.А. **Поступательное движение мягкого робота амебоподобного типа** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С. 19-22. В работе рассмотрены основные гипотезы движения амёб, созданы математические модели расчета жидкостных механизмов для осуществления двигательных функций гофрированных мягких роботов. Приведен механизм движения жидких масс в мягкой оболочке. – Ил. 4. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.3

Маевская С.С., Михасев Г.И. **О влиянии магнитного поля на формы свободных и вынужденных колебаний трехслойной балки, содержащей магнитореологический эластомер** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.23-27. Рассматриваются свободные и вынужденные колебания трехслойной балки, содержащей магнитореологический эластомер. Анализируется влияние внешнего стационарного магнитного поля на собственные частоты и декремент колебаний, соответствующие первым нескольким модам балки. Исследуется амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний при различных уровнях приложенного магнитного поля. – Ил. 4. Библиогр.–15 назв.

УДК 536

Щербаков С.С., Сосновский Л.А. **Обобщенная модель механотермодинамических состояний среды** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.28-40. В статье дано построение обобщенной модели механотермодинамической среды. В основу анализа и синтеза положены: энергетическое описание сплошной среды; энтропийное описание той же среды; основные положения механотермодинамики; характерные экспериментальные данные. – Ил. 3. Библиогр. – 12 назв.

УДК 539.3

Косых Э.Г., Сейфер Д.В. **Критическая нагрузка для сжатой стойки переменной жесткости** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.41-44. В задаче продольного изгиба сжатой консольной стойки уточнены граничные условия. Получены новые результаты для критической нагрузки. – Ил. 5. Библиогр. – 5 назв.

УДК 612.76

Журавков М.А., Романова Н.С., Прохоров Н.А., Дрозд Е.С. **Определение физико-механических свойств биотканей с использованием данных экспериментов атомно-силовой микроскопии и наноиdentификации** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.45-50. Рассмотрена задача восстановления механических свойств биологических структур, как решение задачи обработки результатов экспериментальных данных при использовании АСМ-технологий и теории интегродифференцирования дробного порядка. – Библ. – 12 назв.

УДК 539.3

Старовойтов Э. И., Савицкий Д.М. **Термосиловое деформирование упругопластических трехслойных стержней** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.51-57. Рассмотрено деформирование физически нелинейного трехслойного стержня в температурном поле. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Предложена методика решения соответствующих краевых задач. Получены аналитические решения задач и проведен численный анализ решений.–Ил. 3. Библиогр.– 9 назв.

УДК 539.4

Романова Т.П., Янковский А.П. **Построение определяющих уравнений упругопластического поведения перекрестно-армированного металлокомпозитного слоя в рамках модели Прандтля – Рейсса –Хилла при плоском напряженном состоянии** //ТПМ. Выпуск 29. 2014.С.58-64. На основе метода шагов по времени разработана численно-аналитическая методика моделирования упругопластического деформирования армированного металлокомпозитного слоя с изотропно упрочняющимися фазовыми материалами, позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать компоненты композиции как нелинейно-упругие с начальным напряженным состоянием. Линеаризация этих определяющих соотношений позволяет свести на каждой итерации задачу моделирования к соотношениям типа обобщенного закона Гука для анизотропного неоднородного слоя с предварительным напряженным состоянием. Ил. 1. Библиогр. – 10 назв.

УДК 531.662 Мухутдинов Р.Ф., Шигабутдинов А.Ф., Шигабутдинов Ф.Г. **Влияние форм и размеров местных дефектов на картину выпучивания цилиндрической ортотропной оболочки при продольном ударе** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.65-68. В статье рассматриваются поперечные движения цилиндрических оболочек с местными изменениями толщины при продольном ударе с учетом волнового характера передачи продольных деформаций по длине. Исследуется влияние местоположения и размеров «дефектов» на картину прогибов. Ил. 4. Библиогр. – 14 назв.

УДК 539.3

Чigareв Ю.В., Чigareв В.А. **К стохастической неустойчивости нелинейных колебаний стержней** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.69-72. В работе рассмотрено получение условий возможности возникновения состояния детерминированного хаоса в неоднородных нелинейных стержнях под воздействием осциллирующих сил. Величины параметров, которые характеризуют детерминированный хаос зависят от неоднородности и нелинейности материала стержня. Показано, что пространственные нелинейные колебания стержня под действием двух взаимно перпендикулярных сил приводятся к уравнению Дуффинга, где возмущающая сила представляет сумму двух составляющих. – Библиогр. – 7 назв.

УДК 539.3:534.1

Кукарских Л.А., Поленов В.С. **О динамическом деформировании насыщенных жидкостью упругих пористых сред** // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 29. 2014. С.73-78. Приведена система уравнений, описывающая динамическое деформирование пористой среды. Выведено, что скорости распространения продольных волн в пористой среде равны скоростям волн, распространяющихся отдельно в сплошной упругой среде и жидкости. Логарифмический декремент затухания колебаний поперечной волны в пористой среде зависит от скорости поперечной волны. – Ил. 2. Библиогр. – 10 назв.

УДК 539.3+539.372+621.94.084

Ширвель П.И., Куликов И.С., Чigareв А.В. **Неосимметричное напряженно-деформированное состояние длинного тепловыделяющего цилиндра в условиях квазистатического терморadiационного воздействия** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С. 79-85. Выполнено виртуальное моделирование $2D(r, \theta)$ деформирования одноосвязного цилиндрического тела в условиях терморadiационных воздействий.

Установлены особенности деформирования тепловыделяющих материалов с учетом зависимости их характеристик от уровней действующих температур и облучения, эффектов радиационного формоизменения и терморadiационной ползучести. Исследовано влияние окружающей неравномерности на неосесимметричное НДС для различных значений амплитуд температур. В качестве модельного тела рассмотрен сплошной цилиндр с внутренними источниками тепла. Свойства модельного тела соответствуют керметному топливу ($40\%UO_2+60\%Cr$). Полученные результаты могут быть использованы при определении и анализе НДС, а также при прогнозировании ресурса экстремально нагруженных конструктивных элементов в машиностроении и энергетике. – Ил. 7. Табл.2. Библиогр. – 15 назв.

УДК 612.76+539.37

Борисов А.В. Модели циклического нагружения при ходьбе // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С. 86-88. Проведена постановка задачи описания процессов разрушения при циклической двуногой ходьбе в шарнирах-суставах. Предложено решение этой задачи на основании критериев Содерберга, Гудмана, Гербера. Проведены численные оценки для биологических тканей человека. Рассмотрено протекание во времени процесса деградации материала и изменения области устойчивости к нагрузкам. – Ил. 5. Библиогр. 4.

УДК 674.055

Вихренко В.С., Ласовский Р.Н., Тишевич А.Ю. Упрощенная модель движения упругого стержня // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.89-92. Рассмотрена простая модель упругого продольно деформируемого стержня в предположении, что продольная деформация постоянна вдоль его оси. Получены уравнения Лагранжа второго рода для различных видов движения стержня. Численно исследовано вращательное движение стержня в виде усеченного конуса. Показано, что продольные деформации и, как следствие, угловая скорость стержня, носят колебательный характер. – Ил. 2. Библиогр. – 7. назв.

УДК 539.374

Шавловская О.Г., Леоненко Д.В. Уравнения равновесия трехслойной оболочки в упругой среде // Теоретическая и прикладная механика. Выпуск 29. 2014. С.93-96. Сделана постановка краевой задачи о деформировании трехслойной оболочки в упругой среде. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа–Лява. В толстом заполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине, изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Упругая среда описывается моделью Винклера. С помощью вариационного принципа Лагранжа получены уравнения равновесия трехслойной оболочки вращения в упругой среде и сформулированы условия на границах. – Ил. 1. Библиогр. – 4 назв.

УДК 620.172 (088.8)

Одиноква О.А., Королев С.А., Чураев А.О. Оценка возможности использования высокополимеров в строительных конструкциях на основе физико-механических свойств // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.97-99. На уровне изобретения разработан метод определения температур перехода полимерных материалов, которые играют решающую роль в определении технологических параметров изготовления и эксплуатации изделий из пластмасс. Простота осуществления метода, не требующего сложной измерительной и испытательной аппаратуры, делают его доступным в условиях любой испытательной лаборатории. Приведены эксперименты. – Библиогр. – 2 назв.

УДК 621.835-41:514.764

Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Кинематика колесно-шагающего движителя, перемещающегося по ступеням // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.100-104. Описана методика расчета кинематических характеристик колесно-шагающего движителя при его движении по ступеням лестницы. Даны основные геометрические характеристики движителя в зависимости от размеров ступеней. Данная методика применима при проектировании средств передвижения для лиц с ограниченными возможностями. – Ил. 3. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.3

Журавков М.А., Круподеров А.В., Щербakov С.С. Гранично-элементное моделирование с использованием элементов с квадратичным распределением усилий и распараллеливанием вычислений // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.105-110. В работе представлена реализация алгоритмов для метода граничных элементов с использованием элементов с квадратичным распределением нагрузки. Представлены результаты распараллеливания алгоритмов на графические процессоры с использованием технологии CUDA. Приведены примеры расчетов. Показана высокая эффективность распараллеливания вычислений. – Ил. 4. Библиогр. – 5 назв.

УДК 629.3.027.3:004.94

Василевич Ю.В., Томило Е.В. Определение долговечности автомобильных рессор // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.111-116. Приведены аналитические зависимости и методика ресурсных испытаний для автомобильных рессор. – Ил. 3. Библиогр. – 7 назв.

УДК 539.3

Шилько С.В., Рябченко Т.В., Петроковец Е.М., Башлакова А.Л., Кропотин О.В. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния полимерных трубчатых элементов // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.117-121. Рассмотрены возможности конечноэлементного анализа с целью оптимизации трубчатых элементов конструкций из полимерных материалов при различных условиях нагружения, основываясь на методически простых стандартных испытаниях и конечноэлементном моделировании. Учитываются особенности геометрии реальных изделий и нелинейность деформирования полимерных материалов (конечные деформации (гиперупругость) и вязкоупругость материала заготовки). Полученные распределения объемных и контактных напряжений, перемещений и деформаций позволяют судить о соответствии изделий эксплуатационным требованиям в части формстабильности и критериев прочности. – Ил. 7. Библиогр. – 6 назв.

УДК 519.63

Янковский А.П. Использование обобщенных методов Рунге – Кутты высоких порядков точности при численном интегрировании начальной задачи для уравнения переноса // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.122-127. На основе метода шагов по времени разработана численно-аналитическая методика моделирования упругопластического деформирования армированного металлокомпозитного слоя с изотропно упрочняющимися фазовыми материалами, позволяющая в дискретные моменты времени рассматривать компоненты композиции как нелинейно-упругие с начальным напряженным состоянием. Линеаризация этих определяющих соотношений позволяет свести на каждой итерации задачу моделирования к соотношениям типа обобщенного закона Гука для анизотропного неоднородного слоя с предварительным напряженным состоянием. – Ил. 3. Библиогр. – 6 назв.

УДК 532.516

Конон П.Н. О формах осесимметричных слоев жидкости на поверхности горизонтального вращающегося диска // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.128-133. Рассмотрено движение капли вязкой жидкости на поверхности вращающегося диска в поле сил инерции, поверхностного натяжения и силы тяжести. Проведены экспериментальные исследования. Получено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, описывающее относительное равновесие капли. Проведены его исследования во внутренней системе координат, связанной с поверхностью слоя. Численно получены и проанализированы формы относительного равновесия свободной поверхности капли. – Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 621.793

Девяно О.Г., Пиличук А.П., Кочеров А.Л. **Оценка напряженного состояния при лазерной обработке газотермических покрытий** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.134-136. В статье обоснована необходимость определения напряженного состояния в деталях с покрытиями. Для выявления закономерностей образования остаточных напряжений после поверхностного упрочнения предлагается использовать метод переменных параметров упругости. Представлены результаты расчета остаточного напряженного состояния поверхностного слоя стальных деталей с покрытием из никеля. – Ил. 3. Библиограф. – 7 назв.

УДК 621.01

Омаров Т.И., Тулегенова К.Б., Бекенов Е.Т., Кончина Л.В., Гончарова И.А. **Математическое описание колебаний консольного грузоподъемного устройства** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.137-140. Показано влияние переменной массы, нелинейных характеристик упругих связей и зазоров на возникновение динамических нагрузок в работе грузоподъемных устройств. Даны рекомендации для уменьшения нагрузок в несущих элементах устройств. – Ил. 4. Библиограф. – 4 назв.

УДК 539.3

Яровая А. В., Поддубный А. А. **Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов упругой трехслойной балки, частично опертой на упругое основание** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.141-147. Рассмотрен изгиб упругой трехслойной балки под действием распределенных и сосредоточенных нагрузок при неполном контакте с упругим основанием. По длине балки выделены три участка, на каждом из которых нагрузки и жесткость упругого основания могут иметь различную величину, а могут и отсутствовать. Выведена система дифференциальных уравнений равновесия, получено ее аналитическое решение в перемещениях, выписаны граничные условия и условия сопряжения на границах участков. Получены числовые значения прогибов теоретическим и экспериментальным путем. – Ил. 2. Библиограф. – 4.

УДК 539.3+612.311

Босьяков С. М., Шпилевский И. Э., Алексеев Д. В. **Анализ поврежденности бедренной кости с пострезекционным дефектом при действии статической нагрузки** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.148-151. В работе получены зависимости опасных объемов, поврежденности и средней по объему поврежденности, характеризующих прочность бедренной кости после секторальной резекции, от линейного размера пострезекционного дефекта. Зависимости получены на основании результатов конечно-элементного расчета напряженно-деформированного состояния бедренной кости при действии статической нагрузки. Модель бедренной кости получена на основании томографических данных. Пострезекционный дефект локализован в верхней, средней и нижней третях наружной поверхности бедренной кости. В качестве критерия ограничения опасного объема использован критерий разрушения Коломба-Мора. Определены диапазоны угловых и линейных размеров пострезекционного дефекта, при которых может наступить патологический перелом в средней и нижней третях бедренной кости, если не будет компенсирована потеря ее прочности после секторальной резекции. – Ил. 3. Библиограф. – 15 назв.

УДК 51-7:62-1

Баркалин В.В., Белогуров Е.А. **Конечноэлементное моделирование радиосистемы на основе углеродных нанотрубок** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.152-155. Исследуется радиосистема на углеродных нанотрубках. Радиоустройство находится в конечном объеме слабопроводящей среды с проводимостью 10⁻⁹ См/м. Исследование проводилось моделированием связанной электромеханической задачи методом конечных элементов. Изучено поведение приемной и передающей нанотрубки при разных значениях напряжения на электродах. Исследования проводились на частоте 100 МГц. – Ил. 8. Библиограф. – 7 назв.

УДК 539.4:620.2

Докукова Н.А., Голод С.В., Кафтайкина Е.Н. **Исследование макета подвески сиденья транспортного средства** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.156-161. Проанализированы основные типы виброизолирующих устройств, встречающихся в машиностроении: с пневматической подвеской, с «фермой Мизеса», с системой Алабужева, упругие части которых обеспечивают квази нулевую жесткость, и демпфирующими амортизаторами; исследованы их конструктивные особенности; рассмотрены соответствующие им динамические схемы; проведено математическое моделирование уравнений движения виброизолируемых объектов; исследованы математические модели; сопоставлены результаты численных расчетов с экспериментальными данными, приведенными в научной литературе; приведены новые виды амортизаторов, в полученных охраняемых документах – патентах на полезную модель, их преимущества, технические особенности, расчетные модели и численные параметры, отличающиеся от исследуемых выше; сопоставлены расчетные характеристики рассмотренных типов виброамортизаторов. – Ил. 5. Библиограф. – 9 назв.

УДК 539:374.002.62

Василевич Ю.В., Горелький К.А., Сахоненко В.М., Сахоненко С.В. **Существование и единственность решения краевых задач для препрегов** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.162-165. Для изотермического процесса деформирования препрегов доказана единственность решения статических задач. – Библиограф. – 3 назв.

УДК 614.846.35:534.1

Ларин А.Н., Ларин А.А., Водка А.А., Ущиповский И.Л. **Экспериментальные исследования вибраций центробежного пожарного насоса с прослабленной посадкой вала в подшипниках** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.166-172. В работе представлены результаты экспериментальных исследований вибрационного состояния центробежных пожарных насосов с и без дефектов. Определено, что наличие дефекта (прослабленная посадка вала в подшипниках) приводит к появлению субгармоник и к изменению в пространственной ориентации вибраций. – Ил. 6. Библ. – 5 назв.

УДК 519.621.64+539.4:620.2+621.039.5+624.012

Ширвель П.И., Сергей А.А., Чигарев В.А. **Численное моделирование процессов деформирования элементов конструкций и компонентов оборудования ЯЭУ** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.173-178. В статье рассматривается моделирование напряженно-деформированного состояния сложных физико-технических систем. Проведен комплекс виртуальных исследований по изучению механического поведения конструктивных элементов цилиндрической геометрии при воздействии неоднородных термосиловых и интенсивных радиационных полей. Разработанная механико-математическая модель механического поведения цилиндрических тел позволяет учесть комплексное воздействие механических, температурных и радиационных нагрузок, а также позволяют определить НДС ответственных конструктивных элементов и провести оценку их прочности и работоспособности с учетом внутриреакторных условий. Методы исследования: системы программирования С#/С++, среда программирования Microsoft Visual Studio 2011, общая методология моделирования, математический аппарат краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений. Полученные результаты могут быть использованы при определении и анализе НДС, а также при прогнозировании ресурса экстремально нагруженных конструктивных элементов в машиностроении и энергетике. – Ил. 4. Библиограф. – 11 назв.

УДК 539

Щербаков С.С., Шемет Л.А. **Развитие трещиноподобного повреждения и его характеристики** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.179-183. В работе представлено двумерное компьютерное моделирование распространения трещиноподобного повреждения с использованием конечно-элементного пакета. Расчеты проводились на основе модели деформированного твердого тела с опасным объемом путем уда-

ления опасных площадей на каждом шаге нагружения. Представлены зависимости коэффициента интенсивности напряжений от длины трещиноподобного повреждения, величины опасной площади и их приращений. – Ил. 4. Библиогр. – 10 назв.

УДК 539.3

Шукевич Т.В., Чигарева Ю.А., Ручан М.В. **Фрактальные модели прорастания магистральных трещин в твердых телах** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.184-188. В статье рассмотрена модель прорастания микротрещин в магистральную трещину на основе фрактала Кантора, проведена оценка времени (количество циклов) необходимых для того, чтобы из «пыли» дефектов возникла магистральная трещина. Данная модель позволяет описать процессы стабилизации роста трещины около некоторых критических длин, причем описывает случаи, когда критическая длина стабильна, а длина трещины может флуктуировать около нее, не приводя к разрушению детали, что характерно для некоторых материалов – Ил.4. Библиогр. – 11 назв.

УДК 539.3

Гурьянов Н.Г., Толенева О.Н. **Цилиндрический резервуар в постоянном температурном поле** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.189-193. Построено точное решение трехмерной задачи теории упругости для цилиндрического резервуара, заполненного жидкостью и находящегося в температурном поле. Решение представлено в виде рядов из комбинаций тригонометрических и функций Бесселя. – Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.3

Хвасевич В.М., Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В. **Использование метода граничных интегральных уравнений и Tecplot при исследовании напряженно-деформированного состояния твердых тел** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.194-199. В статье рассматривается совместное решение задач теории упругости по исследованию напряженно-деформированного состояния упругих тел при механическом нагружении. Расчет производится с помощью разработанной FORTRAN-программы, построенной на базе метода граничных интегральных уравнений, обработка результатов – с применением графического интерфейса Tecplot 360. Решены некоторые тестовые задачи, проведено сравнение с решением конечно-элементного комплекса ANSYS. – Ил.14. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.3

Мионов Д.Н., Чигарев В.А., Гончаренко В.П. **Решение стационарной задачи термоупругости и термопластичности в приближении эффективной модели для тела цилиндрической формы** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.200-203. В работе рассмотрено решение стационарной задачи термоупругости и термопластичности в приближении эффективной модели для тела цилиндрической формы. – Библиогр. – 6 назв.

УДК 539.3+612.311

Босяков С. М., Абдуфтах Фрхат Мселати. **Определение условий начальных корпусных перемещений корня зуба в форме эллиптического гиперболоида** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.184-189. В работе проведен анализ условий корпусного перемещения однокоренных зубов. Внешняя поверхность корня описывается уравнением эллиптического гиперболоида. Корень зуба является абсолютно твердым телом. Внутренняя поверхность периодонтальной связки совпадает с внешней поверхностью корня зуба. Внешняя поверхность периодонта жестко закреплена и удалена от поверхности корня зуба по нормали на постоянную величину, равную толщине связки. Условия корпусного перемещения зуба формулируются на основании уравнений равновесия корня в периодонтальной связке при действии на зуб сосредоточенной нагрузки. При этом предполагается, что углы поворота корня равны нулю, корень зуба перемещается только поступательно вдоль одной из координатных осей. Показано, что не существует единого центра сопротивления для случая симметричного корня. Проведен анализ влияния эксцентриситета эллипса в поперечном сечении корня и закругления корня зуба на положение центров сопротивления корня, а также на ориентацию сосредоточенных сил, действие которых приводит к поступательному смещению зуба. – Ил. 3. Библиогр. – 15 назв.

УДК 539.3:531.2.001:621.81

Мартыненко Т.М., Скляр О.Н. **Геометрические исследования и напряженно-деформированное состояние тонких упругих оболочек** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.210-212. Проведено аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния тонких упругих оболочек. На основании которого можно сделать вывод, что оболочки с конечной жесткостью на изгиб, в отличие от абсолютно гибкой оболочки, может находиться в чистомомментном состоянии при наличии в них как растягивающих, так и сжимающих усилий. Она будет терять устойчивость лишь после того, когда сжимающие усилия превзойдут в них некоторое критические значения. – Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.3

Пронкевич С.А. **Численный анализ влияния неоднородности на спектр и формы собственных частот пластин** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.213-218. В статье рассматривается динамика круглых пластин в присутствии неоднородности в виде отверстий или концентрированной массы. Определяется влияние размера и положения неоднородности в частоте и форме собственных колебаний круглой пластины. Также рассматриваются приближение частоты и форма колебаний регулярных полигональные пластин. – Ил. 9. Библиогр. – 2 назв.

УДК 539.3

Гавриленко С.Л., Шилько С.В. **Идентификация линейной вязкоупругой модели Прони по результатам испытаний на релаксацию при сжатии** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.219-223. Представлена методика идентификации вязкоупругой модели Прони в предположении постоянства коэффициента Пуассона. По результатам испытаний полимерного материала Фторопласт-4 на релаксацию при сжатии получена оценка точности линейной модели. Установлено, что методика является устойчивой к вариации экспериментальных данных без использования процедуры регуляризации. Проведена верификация предложенной вязкоупругой модели на основании соотношений Прони с оценкой погрешности входных данных. Ил. 3. Библиогр. – 5. назв.

УДК 539.3

Шукевич Т.В., Чигарев А. В. **Нестационарные упругие волны в неоднородных средах с начальными напряжениями** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.224-228. В статье получена система уравнений, определяющая изменение интенсивности волны в неоднородной упругой среде с начальными напряжениями в зависимости от параметров внутренней геометрии фронта волны и луч, вдоль которого оно происходит. Следовательно, изменение начального напряженного состояния позволяет управлять направлением распространения лучей и параметрами внутренней геометрии фронта волны, а полученная зависимость интенсивности волны от неоднородности (через скорость) и начальных напряжений дает возможность оценить величину совместного и раздельного влияния неоднородности и начальных напряжений на интенсивность. – Ил.3. Библиогр. – 4 назв.

УДК 624.131+539.215

Алтынбеков Ш.А. **Об одной начально-краевой задаче консолидации соленых грунтов** // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.229-234. Сформулировано математическая постановка начально-краевой задачи консолидации соленых грунтов. Исследованы вопросы существования и единственности для нее. Обоснованы методы ее решения. Пользуясь идеями метода суммарной аппроксимации и метода итерации, она сведена к конечно-разностной краевой задаче, и для нее исследованы погрешность аппроксимации, устойчивость и сходи-

мость локально-одномерной схемы (ЛОС). Даны априорные оценки и ее решение. Приведены результаты предварительных расчетов. – Ил.2. Библиогр. – 11 назв.

УДК 539.3

Журавков М.А., Босьяков С.М., Мартыненко И.М., Скляр О.Н. Численно–аналитическое решение одной задачи кубически–анизотропной теории упругости // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.235–238. Показано применение пакета ANSYS и использование компьютерной системы Mathematica, при расчете полей перемещений для материалов вольфрам и кварц. – Ил. 12. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.3

Петровский А.Л. Анализ собственных частот ротора центрифуги с консольным валом // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.239–243. В статье рассматривается методика проведения модального анализа простейшей центрифуги с консольным валом. Получены 5 форм собственных частот и проанализировано влияние нагрузки на значение первой собственной частоты центрифуги. Представлены результаты расчетов. – Ил. 4. Библиогр. – 4 назв.

УДК 536.24

Конон П.Н., Поддубная М.А. Моделирование нестационарных процессов тепло- и массообмена в многослойных дымовых трубах в условиях фазовых переходов // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.244–250. Разработана модель нестационарных процессов тепло- и массопереноса в многослойных дымовых трубах в условиях фазовых переходов при конденсации паров дымовых газов и сушке увлажненной футеровки. Численным расчетом конечных разностей исследованы поля температур в многослойной конструкции в период пуска, устойчивой работы и остановки дымовой трубы. Даны рекомендации по выбору благоприятных эксплуатационных режимов. – Ил. 4. Библиогр. – 6 назв.

УДК 621.762.4

Дудяк А.И., Гурковская О.И. Определение перемещений при изгибе составных балок из неоднородных материалов методом начальных параметров // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.251–255. В статье определен общий вид формул для нахождения прогибов и углов поворота консольной балки прямоугольного сечения составленной из n неоднородных материалов, обладающих различными значениями модулей упругости (E_1, E_2, \dots, E_n) и неравными площадями сечений (A_1, A_2, \dots, A_n) методом начальных параметров. – Ил. 3. Библиогр. – 4 назв.

УДК 621.01

Авсиевич А.М., Пронкевич С.А., Бальшева Н.О., Михальков С.Л. Влияние конструктивных параметров и режимов работы на потери мощности во вращательных парах рычажных механизмов // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.256–258. Предложена методика оценки распределения нагрузок и потерь мощности на трение во вращательных кинематических парах рычажных механизмов. Показано, что с увеличением скорости вращения начального звена показатель нагруженности увеличивается в квадратичной зависимости, что обусловлено ростом сил инерции и их влиянием на силы реакции. При этом зона нагружения для шатунных шеек коленчатого вала локализуется на участке вблизи линии, проходящей через оси шеек вала. –Ил. 3. Библиогр. – 3 назв.

УДК 519.876.5

Мирейко Е.В., Громько О.В. Интеграция САПР моделей эндопротезов тазобедренного сустава в кроссплатформные приложения // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.259–262. В данной работе представлен метод интеграции созданных САПР моделей в кроссплатформное приложение, разработанное для хирургов ортопедов, применение которого позволяет хирургам без особых знаний технических наук проводить предоперационное планирование. Приложение позволяет на основе рентгеновских снимков подобрать размер эндопротеза, провести позиционирование и необходимые измерения. Общая схема внедрения созданных моделей САПР с использованием новых написанных модулей позволяет хирургам-ортопедам использовать созданное приложение вне зависимости от уровня технических знаний. – Ил. 3. Библиогр. – 8 назв.

УДК 004.9.005.53876.5

Штуралова М.Ю., Василевич Ю.В. Установление зависимости между физико-механическими параметрами, характеризующими процессы дробления калийной руды // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.263–267. В статье установлена зависимость между физико-механическими параметрами процесса обогащения калийной руды. Была выведена формула, отражающая связь между прочностью, линейными размерами и количеством содержащегося вещества в исходной руде, поступающей на обогащение и энергией, необходимой для разрушения данного образца до предельных размеров. – Табл. 2. Ил. 2. Библиогр. – 3 назв.

УДК 539.3:531.2.001:621.81

Мартыненко Т.М., Пронкевич С.А., Кулаковский Б.Л. Определение нормальных перемещений эллиптических оболочек емкостей пожарных автомобилей // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.268–272. Проведено математическое исследование напряженно-деформированного состояния эллиптической оболочки с использованием программного комплекса ANSYS. Из которого видно, что под действием внутреннего давления большая полуось увеличивается, а малая укорачивается, т. е. поперечное сечение превращается в эллипс большего эксцентриситета. Представлены результаты численных расчетов. – Ил. 2. Библиогр. – 4 назв.

УДК 539.3

Мармыш Д.Е. Моделирование двумерного напряженно-деформированного состояния и состояния повреждаемости трибофатической системы ролик/вал // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.273–277. В работе рассмотрены результаты конечно-элементного моделирования трибофатической системы ролик/вал в плоской постановке. Представлены картины распределения полей напряжений в окрестности области контакта ролика и вала. Проведено исследование объемной повреждаемости системы. Показано значительное изменение форм и размеров октаэдрического опасного объема в зависимости от характера приложения изгибающей нагрузки. – Ил. 4. Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.3

Ручан М.В., Чигарева Ю.А., Шукевич Т.В. Влияние изменения физико-математических свойств микрокомпозита на процессы деформирования и разрушения // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.278–281. Установлено, что в процессе эксплуатации в композитных материалах под действием термосиловых воздействий идут процессы деградации их свойств, проявляющиеся в изменении их коэффициентов, теплопроводности, упругости, пластичности и т.д. Предлагаемый в работе подход позволяет учесть влияние разброса значений компонент в композите на его эффективные свойства не только в теплопроводности, но и в электропроводности, упругости, диффузии. – Ил. 2. Библиогр. – 3 назв.

УДК 531/534:[57+61]

Славашевич И.Л., Юркевич К.С. Напряженно-деформированное состояние реконструированного среднего уха при тимпанопластике и стапедотомии // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.281–286. В настоящей работе представлена биомеханическая модель реконструированного среднего уха, подвергнутого тимпанопластике и стапедотомии. Изучено влияние нормальных и тангенциальных перемещений в тимпанальной мембране на напряженно-деформированное состояние реконструированного среднего уха. Реконструированная тимпанальная мембрана моделируется как упругая изотропная кольцевая пластинка, а также как пластина, имеющая форму эллипса. – Ил. 4. Библиогр. – 9 назв.

УДК 681.3

Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М. Составление дифференциальных уравнений движения звеньев манипулятора // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.287-289. В статье для манипулятора с тремя степенями свободы, работающего в ангулярной системе координат, получены дифференциальные уравнения движения звеньев в форме уравнений Лагранжа второго рода. Для этого определены кинематические характеристики и составлены выражения кинетической энергии звеньев манипулятора. – Ил.1. Библиогр. – 5 назв.

УДК 531.8

Локтионов А.В. Расчет уравнения малых колебаний при сложном движении эллиптического маятника // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.290-293. Установлено, что при расчете уравнения движения малых колебаний эллиптического маятника с заданной начальной угловой скоростью его движения с учетом момента инерции шарика относительно оси подвеса значительно усложняется расчетная формула по определению закона движения малых колебаний маятника. Установлено, что при исследовании следует рассматривать сложное движение эллиптического маятника. Представлена схема перемещений центров масс ползуна, шарика и эллиптического маятника. – Ил. 2. Библиогр. – 3 назв.

УДК 531.011:629.113.65

Астахов Э. И., Кузнецов Е.Н., Шкурко С. С. Моделирование движения мобильной машины с маховичным двигателем // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.294-297. В работе проведен анализ динамики разгона при трогании автомобиля по одномассовой динамической модели с вращающимся звеном приведения. Угловая скорость колеса автомобиля определялась из уравнения движения в интегральной форме кинетических энергий, а угловое ускорение из дифференциального уравнения движения, которые решены численным методом. – Ил.5. Библиогр. – 3 назв.

УДК 531.2+624.04

Холодарь Б.Г. О выборе полюсов при определении опорных реакций составной конструкции (метод моментов) // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.298-302. В статье предлагается методика независимого определения опорных реакций составной конструкции, основанная на использовании принципа возможных перемещений. Особенностью методики является специальный выбор положений мгновенных центров вращения тел и разложение определяемых реакций на направления, соответствующие этим центрам. – Ил.3. Библиогр. – 1 назв.

УДК 539.377

Али М. Абед Аль-Зобайде. Исследование температурных полей в серверном ящике методом конечных элементов // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.298-302. В статье решается задача расчета температурных полей в замкнутом объеме. Рассматривается влияние охлаждающих потоков воздуха на распределение температуры в серверном ящике. Моделирование выполнено методом конечных элементов с использованием САПР «SolidWorks». – Ил. 4. Библиогр. – 3 назв.

УДК 531.8

Русан С.И., Заяц В.Р., Толочинец И.М. Применение метода Жуковского к определению реакций внешних связей // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.306-309. Рассматривается вопрос усовершенствования силового анализа плоских механизмов с низшими кинематическими парами. Показано, что графоаналитический метод Жуковского, обычно применяемый для определения внешних сил можно применять и для определения внешних сил, можно применять и для определения внутренних сил взаимодействия, возникающих в кинематических парах. – Ил. 4.

УДК 621.01

Шашко А.Е., Серик А.Л., Хурсевич С.В., Авсиевич А.М. Принципы построения мехатронной системы рекуперации энергии для мобильных машин // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.310-312. Предложена принципиальная схема рекуперации энергии для мобильной машины. Даны основные уравнения для оценки эффективности рекуперации на основе закона сохранения энергии и учета коэффициента полезного действия системы. Приведен пример элемента системы с автоматическим управлением. – Ил. 2. Библиогр. – 3 назв.

УДК 621.01

Боюн Г.С., Гапанюк Д.В. Совместное применение компьютерных и графических методов в курсовом проектировании по теории механизмов и машин // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С.313-316. В работе представлен опыт кафедры теоретической механики по внедрению компьютерных методов при проектировании механизмов во время обучения студентов по курсу теории машин и механизмов. Выполненные работы позволяют подняться на более высокий уровень проектирования и расширить его горизонты. – Библиогр. – 6 назв.

УДК 681.3.06

Калина А.А., Ковалева И.Л., Петраш Н.С., Шумель А.В. Преемственность объектов проектирования при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С. 317-319. В статье рассматривается структура лабораторной работы по курсу «Оптимизация проектных решений», целью которой является изучение методов решения задач многокритериальной оптимизации. В качестве объекта оптимизации студентам предлагается использовать редуктор, который они сконструировали в ходе выполнения курсового проекта по дисциплине «Техническая механика». – Ил. 8. Библиогр. – 2 назв.

УДК 681.3.06

Сафронов К. И., Гурвич Ю. А. Исследование нагруженности элементов управляемого моста при повороте трактора без подвески // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С. 320-326. В данной работе приведено описание нового метода определения параметров управляемой оси и трактора в целом. В результате рассчитываются силы, действующие на колесо в зависимости от угла поворота внутреннего управляемого колеса: вертикальные силы, боковые силы, касательные силы тяги, коэффициент буксования на каждом колесе, а также другие силовые и геометрические характеристики поворота. – Табл. 1. Ил. 3. Библиогр. – 5 назв.

УДК 517.52+517.983

Акимов В.А. Об операторном методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С. 326-329. В статье изложены основы нового операторного метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В качестве примеров были рассмотрены конкретные решения некоторых классических задач трех различных типов. – Библиогр. – 1 назв.

УДК 539.3; 534.1

Поленов В.С., Чигарев А.В. О распространении поперечных волн в стохастически неоднородной двухкомпонентной среде // ТПМ. Выпуск 29. 2014. С. 329-332. В работе изучается распространение поперечных волн в одномерной стохастически неоднородной двухкомпонентной среде, когда одна из компонент является упругой, а вторая - жидкостью. Исходная система дифференциальных уравнений в перемещениях сводится к одному алгебраическому уравнению четвертой степени относительно волнового комплексного числа с комплексными коэффициентами. Для конкретных заданных видов дисперсий функций флуктуации приведены аналитические выражения, определяющие скорость и коэффициент затухания поперечной волны в заданной среде. – Библиогр. – 8 назв.

ABSTRACTS

UDC 539.3 Pleskachevsky Yu. M., Chigareva Yu. A. Simulation of the microcomposite effective thermal conductivity based on the probability of percolation // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.4-18.

The paper is discussed the method of the calculation of effective properties. The method of the calculation of effective properties for microcomposite materials is proposed. This method allows to determine effective nearly a percolation threshold coefficients. The FPK equation is used for calculation of the probability of percolation threshold. **Fig. 6. Ref.: 8 titles.**

UDC 539.4:620.2+519.621.64 Chizhik S.A., Zimmermann K., Chigarev V.A. Translatory motion progress of the soft robot of amoebalike type // TAM. – 2014. – Issue 29. – P. 19-22.

The basic hypotheses of movement of amoebas are considered, mathematical models of calculation of liquid mechanisms for realisation of impellent functions of the gofferred soft robots are created. The mechanism of movement of liquid weights in a soft cover is resulted. **Fig. 4. Ref.: 3 titles.**

UDC 539.3 Maevskaya S.S., Mikhasev G.I. On influence of magnetic field on forms of free and forced vibrations of three-layer beam containing magnetorheological elastomer // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.23-27.

Free and forced vibrations of a three-layered beam containing magnetorheological elastomer are considered. Influence of the external stationary magnetic field on natural frequencies and damping ratios corresponding to the different modes of the beam is analyzed. The amplitude - frequency characteristic of forced vibrations at different levels of applied magnetic field is also studied. **Fig. 4. Ref.: 15 titles.**

UDC 536 Sherbakov S.S., Shemet L.A. Generalized model of continuum mechanothermodynamic states // TAM. – 2014. – Issue 29.–P.28-40.

Two-dimensional computer simulation of crack-like damage propagation by the means of finite element package is considered in the paper. Calculations were made basing on the model of de-formable solid with a dangerous volume by deleting the dangerous surfaces at each step of loading. The dependencies of stress intensity factor on the length of crack-like damage, the value of dangerous surface and their increments are presented. **Fig. 3. Ref.: 12 titles.**

UDC 539.3 Kosykh Ed. G., Seifer D.V. Critical load for elastic beams of variable stiffness // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.41-44.

Learn new results for the critical load. The problem is generalized to the rack variable stiffness. **Fig. 5. Ref.:5 titles.**

UDC 612.76 Zhuravkov M.A., Romanova N.S., Prohorov N.A., Drozd E.S. Determination of physical and mechanical properties of biological tissues using the experimental data of atomic force microscopy and nanoindentation // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.45-50.

Recovery problem of mechanical properties of biological structures as the problem solution of processing results of experimental data which are obtained by using ASM-technologies and fractional calculus theory. **Ref.: 12 titles.**

UDC 539.3 Starovoitov E. I., Savitsky D. M. Thermo-force deformation of elastoplastic three-layer beam // TAM. – 2014.–Issue 29.–P.51-57.

Considered physically nonlinear deformation of a three-layer beam in the temperature field. For the kinematics description asymmetrical on the thickness of package accepted hypothesis's broken normal. The method of solving the corresponding boundary-value problems is given. The analytical decisions a problem are received and their numeric analysis is conducted. **Fig. 3. Ref.: 9 titles.**

UDC 539.4 Romanova T.P., Yankovskii A.P. The construction of the defining equations of elastic-plastic behavior of cross-armoured metal-composite layer in the framework of the Prandtl – Reuss – Hill model at the plane stress state // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.58-64.

On the basis of the method of steps in time, numerical-analytical method of modeling of elastic-plastic deformation is developed for armored metal-composite layer with isotropic hardening phase materials, allowing at discrete moments of time to consider the components of the composition as nonlinear-elastic with the initial strained state. At each iteration, linearization of these determining ratios allows the task of modeling to reduce to the relations of the type of the generalized Hooke law for anisotropic heterogeneous layer with preliminary strained state. **Fig. 1. Ref.: 10 titles.**

UDC 531.662 Mukhutdinov R.F., Shigabutdinov A.F., Shigabutdinov F.G. Influence of shapes and sizes of local defects on the picture of the buckling of cylindrical orthotropic shell under longitudinal impact // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.65-68.

In the article the lateral motions of cylindrical shells with local variations in the thickness of the longitudinal impact with the wave nature of the transfer of longitudinal strains in length. The influence of the location and size of the "defects" in the picture of the troughs. **Fig. 4. Ref.: 14 titles.**

UDC 539.3 Chigarev Yu.V., Chigarev V.A. About stochastically unstable nonlinear vibrations for the rods // TAM.–2014.–Issue 29.–P. 69-72.

The conditions of possibility emergence of deterministic chaos in rods under effect of oscillator forces are considered. The quantities parameters which characterize a state of deterministic chaos depend on a nonhomogeneity and nonlinearity of a rod material. **Ref.: 7 titles.**

UDC 539.3:534.1 Kukarskikh L.A., Polenov V.S. On dynamical warping saturated fluid elastic porous medium // TAM. – 2014.– Issue 29.– P.73-78.

Bring system of equations describes dynamical warping of porous medium. The deduce that a speed advance of longitudinal waves in porous medium equal speed of waves propagates separately in solid elastic medium and fluid. Vibration decay logarithmic decrement of transverse waves in porous medium depend on speed of transverse waves. **Fig. 2. Ref.: 10 titles.**

UDC 539.3+539.372+621.94.084 Shirvel P.I., Kulikov I.S., Chigarev A.V. Asymmetric stress/strain state of fuel long cylinder for quasi-static loading under action a thermo-radiation fluence of high-energy particles // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.79-85.

The paper contains the results of the simulation 2D(r, θ) stress/strain state for singly-connected cylindrical solid elements under conditions of thermo-irradiations impact. Influence of a circumferential distortion on asymmetric stress/strain state for various values of temperature amplitudes has been investigated. A solid cylinder with internal heat sources has been considered as a model body. The numerical solution to solve stress/strain state problem for the solid long cylinder under creep, swelling and thermal strain has been obtained. The analysis of the mechanisms of nonlinear nonaxisymmetric deformation for cylindrical bodies was produced. Properties of the model body correspond to cermet fuel (40%UO₂+60%Cr). **Fig.: 7. Tab.:2. Ref.: 15 titles.**

UDC 612.76+539.37 Borisov A.V. The models of cyclic stressing in the process of walking // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.86-88.

The setting of the problem of the description of fracture processes in the hinge-joints cyclic at bipedal gait. The solution to this problem on the basis of Soderbergh, Goodman, Gerber criteria is proposed. Numerical assessment for human biological tissues is performed. The course of the process of material degradation and change of load resistance domain are considered in the given work. **Fig. 5. Ref.: 4.**

UDC 674.055 *Vikhrenko V.S., Lasovsky R.N., Tishevich A.Yu.* **Simplified model of elastic rods motion** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.89-92.

The simple model of a longitudinally elastically deformable thin rod is considered in approximation that the relative longitudinal deformation is constant along the rod axes. The second order Lagrange equations for different types of motion of the deformable rod are obtained. Rotational movement of the truncated cone rod is investigated. It is shown that the longitudinal deformation and as a consequence the angular velocity of the rod are antiphase oscillatory. Fig. 2. Ref.: 7 titles.

UDC 539.374 *Shavlovskaya O.G., Leonenko D.V.* **Equilibrium equations of three-layer shell in the elastic medium** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.93-96. A formulation of the boundary value problem about the deformation of a three-layer shell in the elastic medium was made. For isotropic base layers the Kirchhoff-Love hypotheses were accepted. In the thick fill the work of the in-plane shear and thickness reduction are taken into account, the variation of shifts is accepted as a linear along the transverse coordinate. On the interfaces the conditions of shifts' continuity are used. Elastic medium is described by the Winkler's model. Using the variational Lagrange principle we got equations of the equilibrium of a three-layer shell of rotation in the elastic medium and formulated interface conditions. Fig. 1. Ref.: 4 titles.

UDC 620.172 (088.8) *Odinokova O.A., Korolyev S.A., Churaev A.O.* **Evaluation of the use of high polymers in value-state structures based on physical and mechanical properties** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.97-99. At the level of the invention provides a method for determining the transition temperature of polymer materials, which play a crucial role in determining the technological parameters of the production and maintenance of plastic products. Ease of implementation of the method, which does not require sophisticated measurement and test equipment, making it accessible in any testing laboratory. Ref. 2 titles.

UDC 621.835-41:514.764 *Skoybeda A.T., Zhukavets V.M.* **The kinematics of wheel-step mover moving along the steps** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.100-104. The paper describes method of calculating kinematic characteristics of wheel-step mover in its motion along the stair steps. The basic geometry of the mover according to the size of the steps has been given. The given method is applicable in design of vehicles for persons with disabilities. Fig. 3. Tab. 3. Ref.: 3 titles.

UDC 539.3 *Zhuravkov M.A., Krupoderov A.V., Sherbakov S.S.* **Boundary element simulation using the elements with quadric distributions of tractions and calculations parallelizing** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.105-110. Realization of the boundary element method based on using the elements with quadric distribution of tractions is presented in the paper. The results of parallelizing of algorithms using CUDA technology are given. Examples of calculations are presented. High efficiency of calculations parallelizing is shown. Fig. 4. Ref.: 5 titles.

UDC 629.3.027.3:004.94 *Vasiljevich J.V., Tamila Y.V.* **Service life evaluation of automotive springs** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.111-116. The analytical dependencies and operational life testing methods are presented. Fig. 3. Ref.: 7 titles.

UDC 539.3 *Shilko S.V., Ryabchenko T.V., Petrokovets E.M., Bashlakova A.L., Kropotin O.V.* **Calculated and experimental research of stress-strain state of polymer tubular elements** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.117-121. Possibilities of the finite-element analysis for the purpose of optimization of tubular elements of designs from polymeric materials are considered under various loading conditions, being based on methodically simple standardized tests and finite-element modeling. Features of geometry of real products and nonlinearity of deformation of polymeric materials (finite deformations (hyperelasticity) and viscous elasticity of a billet material are considered. The received distributions of volume and contact stresses, displacements and strains allow us to judge conformity of products to operational requirements in a part of shape stability and criteria of durability. Fig. 7. Ref.: 6 titles.

UDC 519.63 *Yankovskii A.P.* **Use of generalized Runge–Kutta high orders methods for numerical integration of the initial problem for the transfer equation** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.122-127. Spectral stability of generalized Runge–Kutta high order method is studied as applied to the numerical integration of initial problem for the transfer equation. Comparison of approximate solutions obtained on the basis of different generalized Runge–Kutta methods, with the exact solution in difficult oscillating initial conditions with large modulo derivatives is held. Fig. 3. Ref.: 6 titles.

UDC 532.516 *Konon P.N.* **On the forms of axially symmetric layers of liquid on the surface of a horizontally rotating disc** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.128-133. We consider a motion of a viscous liquid drops on the surface of the rotating disk in the inertia forces of surface tension and gravity. An experiment was conducted. A nonlinear differential equation of the second order partial derivatives, which describes the relative balance of the drop. Conducted his research in the internal coordinate system associated with the surface layer. Numerically obtained and analyzed the relative equilibrium shape of the free surface of the drop. Fig. 4. Ref.: 4 titles.

UDC 621.793 *Devoino O.G., Pilipchuk A.P.* **The estimation of stress condition of gas-thermal coatings after laser treatment** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.134-136. The necessity of determination of the stress state in detail with coatings is shown in the article. The method of variable parameters of elasticity is proposed to identify the regularities of residual stresses appearance after surface hardening. The results of residual stress analysis of the surface layer of steel parts coated with nickel are presented. Fig. 3. Ref.: 7 titles.

UDC 621.01 *Omarov T.I., Tulegenova K.B., Bekenov E.T., Konchina L.V., Goncharova I.A.* **The mathematical description of fluctuations console lifting device** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.137-140. The influence of variable mass, non-linear characteristics of elastic links and gaps in the emergence of dynamic loads in the work of lifting devices is shown. Recommendations for reduction in elements of similar are given. Fig. 1. Refs.: 3 titles.

UDC 539.3 *Yarovaya A. V., Poddubny A. A.* **Theoretical and experimental study of deflections of the elastic sandwich beam, partially supported on an elastic foundation** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.141-147. Bending of elastic sandwich beams under distributed and lumped loads of incomplete contact with the elastic base. The length beams allocated three sections each of which load and stiffness of the elastic base may have a different value and may be absent. A system of differential equations of equilibrium, obtained an analytic solution in terms of displacements, written boundary conditions and the matching conditions on the boundary. Obtained numerical values of deflections theoretical and experimental way. Fig. 2. Ref.: 4 titles.

UDC 539.3+612.311 *Bosiakov S. M., Shpileuski I. E., Alekseev D. V.* **Damage analysis of the femur with postresection defect under the static load**//TAM.– 2014. – Issue 29. – P.148-151. In this paper the dependences of failure volumes, damage and volume-average damage to the linear size of the post-resection defect. These values characterize the strength of the femur after resection of a sectoral resection. Curves were obtained on the basis of the finite element analysis of the femur stress- strain state under a static load. Femur model based on the tomographic data is obtained. Postresection defect localized in different third outer side of the femur. The criterion for limiting the failure volume is Colomb-Mohr fracture criterion. The ranges of angular and linear dimensions of the post-resection defect according pathological fracture in the middle and lower thirds of the femur (if not offset by the loss of bone strength after sector resection) are established. Fig. 3. Ref.: 15 titles.

UDC 51-7:62-1 *Barkalin V. V., Belahurau Ya.E.* **Finite element modelling of carbon nanotubes' based radio system** // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.152-155. The radiosystem based on carbon nanotubes is studied. The device is disposed in finite volume of low conducting medium with

conductivity 10-9 Sm/m. In the study the coupled electromechanical problem was solved using finite element method. The behavior of receiving and transmitting nanotubes was examined depending on applied voltage on guide electrodes. Simulated frequency of the voltage was 100 MHz. **Fig. 8. Ref.: 7 titles.**

UDC 539.4:620.2 Dokukova N.A., Golod S.V., Kaftaikina E.N. Investigation of layout vehicle seat suspension // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.156-161. Analysis of the main types of anti-vibration devices encountered in mechanical engineering: air suspension, with «farm Mises» system Alabuzheva, the elastic part of which provide quasi-zero stiffness and damping shock absorbers, to study their structural features, considered as the shared scheme; mathematical modeling equations movement isolated objects studied mathematical models, numerical results are compared with experimental data presented in the literature, are the new kinds of shock absorbers in the resulting protective rights patents for utility models, their advantages, technical features, design models and numerical parameters that differ from examined above, compared the design characteristics of the considered types shock absorbers. **Fig. 5. Ref. 9 titles.**

UDC 539:374.002.62 Vasilevich Yu. V., Gorelyi K.A. Sahonenko V.M., Sahonenko S.V. Existence and uniqueness of solutions for boundary problems of prepregs // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.162-165. Plain weave fabric structure facilitates the threads of a family slide over the threads of the second family in the process of deformation of prepregs. Resistance of such a movement is the friction force. For isothermal deformation process of the uniqueness of solutions prepregs static problems the analytic solution is obtained. **Ref. 3 titles.**

UDC 614.846.35:534.1 Larin O.M., Larin O.O., Vodka O.O., Ushapivsky I.L. An experimental studies of vibration of a centrifugal fire pump with unfasten shaft in a bearing seat // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.166-172. The paper presents results of experimental investigations of the centrifugal fire pumps vibrations with and without defects. It was determined that the defect (unfasten shaft in a bearing seat) leads to appearance of sub-harmonics and to the spatial reorientation of the vibration. **Fig. 6. Ref. 5 titles.**

UDC 519.621.64+539.4:620.2+621.039.5 +624.012 Shirvel P.I., Starhei A.A., Chigarev V.A. Simulation of strain for nuclear reactor's structural elements under acting of transient thermal and mechanical loads // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.173-178.

The main goal of the article is to produce a general mathematical model of solve stress/strain state problem for solid, hollow and multilayer cylinders undergoing nuclear radiation, creep and thermal strains; software implementation of these models, numerical solution, research and analysis. Methods of research are systems programming C#/C++, a programming environment Microsoft Visual Studio 2010 Express, general methodology of mathematical modeling and computer simulation, theory of nonlinear differential equations. The obtained results can be used in the design and development of a wide class of problem for power engineering and nuclear power. The proposed mechanical model and numerical method can be the basis for the development of computer code to simulate the behavior of structural elements and components of the equipment in a whole spectrum of extreme operational modes, including emergency situations. **Fig. 4. Ref. 11 titles.**

UDC 539.3 Sherbakov S.S., Shemet L.A. The propagation of crack-like damage and its characteristics // TAM. –2014.–Issue 29. – P.179-183. Two-dimensional computer simulation of crack-like damage propagation by the means of finite element package is considered in the paper. Calculations were made basing on the model of deformable solid with a dangerous volume by deleting the dangerous surfaces at each step of loading. The dependencies of stress intensity factor on the length of crack-like damage, the value of dangerous surface and their increments are presented. **Fig. 4. Ref.: 10 titles.**

UDC 539.3 Shukevich T.V., Chigareva U.A., Ruchan M.V. Fractal model of the main crack germination in solids // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.184-188 In the article the model of micro-cracks in the germination of the main crack on the basis of fractal Cantor, assessment time (number of cycles) needed to from the "dust" defects occurred backbone crack. This model allows us to describe the processes of stabilization of the crack about some critical length, and describes cases where the critical length is stable, and the crack length can fluctuate about it without breaking down the details, which is characteristic of some materials. **Fig. 4. Ref.: 11 titles.**

UDC 539.3 Guryanov N.G., Tyuleneva O.N. Cylindrical Tank in Constant Temperature Pattern // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.189-193. There was precise solution worked out for three-dimensional problem of elasticity theory for cylindrical tank filled with fluid and located in temperature pattern. The solution is presented in the form of series from combinations of trigonometric functions and Bessel functions. **Ref.: 3 titles.**

UDC 539.3 Hwisevich V.M., Veremejchik A.I., Garbachevsky V.V. Using boundary integral equation method & TECPLOT for investigation of stress/strain state of solids // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.194-199.

In article the joint solution of tasks of the theory of elasticity on research intense the deformed condition of elastic bodies is considered at mechanical loading. Calculation is made by means of the developed FORTRAN program constructed on the basis of a method of the boundary integrated equations, processing of results – with use of the graphic Tecplot 360 interface. Some test tasks are solved, comparison with the solution of the final and element ANSYS complex is carried out. **Fig. 14. Ref.: 3 titles.**

UDC 539.3 Mironov D.N., Chigarev V. A., Goncharenko V.P. The decision of a stationary problem of thermoelasticity and thermoplasticity in approach of effective model for a body of the cylindrical form // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.200-203.

In work the decision of a stationary problem of thermoelasticity and thermoplasticity in approach of effective model for a body of the cylindrical form is considered. **Ref.: 6 titles.**

UDC 539.3+612.311 Bosiakov S. M., Abduftah Frhat Mselati. Conditions of initial displacement of the tooth root in the form of an elliptical hyperboloid // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.204-209.

In present paper the conditions of single-root teeth translation were analysed. The outer surface of the root is described by an elliptical hyperboloid. Root of the tooth is solid. The inner surface of the periodontal ligament coincides with the outer surface of the tooth root. The outer surface of periodontal fixed and removed from the surface of the tooth root is normal in an constant amount equal to the thickness of ligaments. Conditions of tooth translation are formulated on the basis of the equilibrium equations of the root in the periodontal ligament under a concentrated load. The angles of rotation equal to zero, and the root of the tooth only moves along one of the axes is assumed. It is shown that there is no single centre of resistance to the symmetric root of the tooth. Effect of ellipse eccentricity in cross section of the tooth root and rounding to the position of the centres of resistance of the root were analysed. The impact of rounding eccentricity and rounding on the orientation of the concentrated forces for translation of the tooth examined. **Fig. 3. Ref.: 15 titles.**

UDC 536.24 Martinenko T.M., Sklyar O.N. Transient processes of heat and mass transfer in two-layer stacks // TAM. – 2014. – Issue 29.– P.210-212. In the paper is considered a model of combined nonstationary heat and mass transfer in the construction of double-layer stack operates in pulse thermal regime. With help numerical calculations we obtain the measure of temperature and moisture. We found intensity of condensation on the inner surface of the lining, and calculated condensate film. **Fig. 6. Ref.: 5 titles.**

UDC 539.3 Prankevich S.A. Numerical analysis influence of inhomogeneities on the spectrum and form of ownership frequencies of plates// TAM. – 2014. – Issue 29. – P.213-218. In this paper we consider the dynamics of circular plates in the presence of heterogeneity in the

form of holes or concentrated mass. Determined by the influence of the size and position of heterogeneity in the frequency and form of natural oscillations of a circular plate. We also consider the approximation of frequencies and mode shapes of regular polygonal plates platters. **Fig. 9. Ref.: 2 titles.**

UDC 539.3 Gavrilenko S.L., Shilko S.V. Identification of Prony's linear viscoelastic model of tests results on relaxation under compression // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.219-223. The technique of Prony's viscoelastic model identification for constant Poisson's ratio is presented. Results of mechanical tests of polymer material Ftoroplast-4 on relaxation under compression allow us to estimate the accuracy of linear model. It's shown that technique is a stable to variation of experimental data without the regularization procedure. Verification of proposed viscoelastic model based on Prony's equation with estimation of experimental data error is made. **Fig. 3. Ref.: 5 titles.**

UDC 539.3 Shukevich T.V., Chigarev A.V. Time-dependent elastic waves in inhomogeneous media with initial stresses // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.224-228. In the article we obtain a system of equations determining the change in intensity of the waves in an inhomogeneous elastic medium with initial stresses, depending on the parameters of the internal geometry of the wave front and the ray along which it occurs. Consequently, the change of the initial stress state can control the propagation direction of rays and the parameters of the intrinsic geometry of the wave front, and the resulting dependence of the wave of heterogeneity (in speed) and the initial stress makes it possible to estimate the value of joint and separate the influence of heterogeneity and the initial stress on the intensity. **Fig. 3. Ref.: 4 titles.**

UDC 624.131+539.215 Altynbekov Sh.A. An basically-boundary value problem of consolidation of salty soils // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.229-234. Formulated mathematical formulation of the initial boundary value problem of consolidation of salty soils ground. Research of many questions of developing existence and uniqueness for her. Basically method of its solutions. Using the ideas of summary approximation method and the method of iteration, it is introduced to finite - difference boundary value problem, and she studied the error of approximation, stability and convergence locally a one-dimensional scheme (LOC). Given a priori estimates on the solution. The given out to results of the pre accountants. **Fig. 2. Ref.: 11 titles.**

UDC 539.3 Zhuravkov MA, Bosiakov SM, Martinenko IM, Sklar , ON, Pronkevich SA. Numerical- analytical solution of a problem in cubic anisotropic elasticity theory // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.235-238. Shows the use of the package ANSYS and use a computer system Mathematica, when calculating displacement fields for materials tungsten and quartz. **Fig. 12. Ref.: 3 titles.**

UDC 539.3 Piatrouski A.L. Modal analysis of a simple centrifuge cantilever shaft // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.239-243. In this paper we consider the methodic of modal analysis of a simple centrifuge cantilever shaft. Received five forms of natural frequencies and analyzed the influence of the load on the value of the first natural frequency of the centrifuge. The results of calculations. **Fig. 4. Ref.: 4 titles.**

UDC 536.24 Konon P.N, Poddubnaya M.A. Modeling of non-stationary processes of heat and mass transfer in multi-layer stacks in terms of phase transitions // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.244-250.

A model of time-dependent processes of heat and mass transfer in multi-layer stacks in terms of phase transitions in the flue gas condensation and drying the moist lining. Finite difference numerical simulations investigated the temperature field in a multilayered structure in the start-up , steady work and stop the chimney. Recommendations on the choice of favorable operating conditions. **Fig. 4, Ref.: 6 titles.**

UDC 621.762.4 Dudyak A.I., Gurkovskaya O.I. Determination of the bending motion of composite beams of heterogeneous materials by initial parameters method // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.251-255. Identified the common form of the formulas for finding the deflection and rotation angles of the cantilever beam of rectangular cross-section composed of n heterogeneous materials with different values of the elastic moduli (E1, E2 ... En) and uneven areas of sections (A1, A2 ... An) by initial parameters method. **Fig. 3, Ref.: 4 titles.**

UDC 621.01 Ausiyevich A.M., Pronkevich S.A., Balysheva N.O., Mikhalkov S.L. Influence of constructional parameters and working mode on the friction losses in rotational pairs of leverages // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.256-258. The method of estimation of load distribution and friction losses in rotational pairs of leverages is proposed. With increase of leverage main link rotation speed it increases in the square-law dependence, due to the rising forces of inertia. Area of loading for the connecting rod crankshaft is localized to the area near to a line passing through the axis of necks. **Fig. 3. Ref.: 3 titles.**

UDC 519.876.5 Mireyka H.V, Gromyko O.V. The integration of CAD-based models of hip implants into cross-platform applications // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.259-262. This paper presents a method of integration of CAD-based models of hip implants into cross-platform application developed for orthopedic surgeons, the usage of which helps surgeons with no technical knowledge to do pre-operative planning of orthopedic surgery. The application allows for overlaying of prosthesis on radiological images, and includes tools for performing measurements and for positioning of templates. The general scheme of introducing CAD models created using the new written modules allows an orthopedic surgeon to use application created regardless of the level of technical knowledge. **Fig. 3. Ref.: 8 titles.**

UDC 004.9.005.53 Shpurgalova M.Yu., Vasilevich Yu.V. Establishing a relationship between the physical and mehanchesкими parameters characterizing the processes of potash ore beneficiation // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.263-267. The dependence between the physical and mechanical parameters of the process of enrichment of potassium ore. Derived a formula that reflects the relationship between the strength of linear dimensions and the amount of the substance contained in the original ore coming to the enrichment and energy , it is necessary to break up the sample size limits. **Tab. 2. Fig. 2. Ref.: 3 titles.**

UDC 539.3:531.2.001:621.81 Martinenko T.M., Prankevich S.A., Kulakovskii B.L. Determination of normal displacements for elliptical shell containers of car fire // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.268-272. A mathematical study hard- exponential status An elliptic shell with the use of software package ANSYS. From which it appears, That under the action of high pressure shaft increases, A low is shortened, i.e. side-to-side cross section becomes an ellipse with eccentricity. The results of numerical calculations. **Fig. 2. Ref.: 4 titles.**

UDC 539.3 Marmysh D.E. Simulation of two-dimensional stress-strain state and the state of damageability of Tribo-Fatigue roller/shaft system // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.273-277.

Results of two-dimensional computer simulation of Tribo-Fatigue roller/shaft system are considered. Pictures of stress distribution in the neighbourhood of the area of contact of roller and shaft are given. Study of the damageability of Tribo-Fatigue system is made. Significant change in the shape and size of the octahedral dangerous volume due to the nature of the bending force application is shown. **Fig. 4. Ref.: 5 titles.**

UDC 539.3 Ruchan M.V., Chigareva U.A., Shukevich T.V. Effect of changes in physical and mathematical properties of microcomposites on the processes of deformation and fracture // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.278-281. When modeling the processes of degradation of the material changes its own \neg properties that can be described as the appearance of the scatter properties of the components of the nominal. For example, the fuel rods at a burnup of uranium dioxide component is manifested in the fact that the thermal conductivity of the material changes due to the fact that among the components alyayutsya layer transition properties. In reality , it is usually difficult to get perfect surround micro composite

material composed of pure components, and the greater the volume, the greater the variation in the properties it has. Based on this, we will initially assume that the material has the properties of the original spread, which varies during operation. **Fig. 2. Ref.: 3 titles.**

UDC 531.534:[57+61] Slavashevich I.L., Urkevich K.S. Strain-stress state of the reconstructed middle ear under tympanoplasty and stapedotomy // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.282-286. This paper presents the biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanoplasty and stapedotomy. The basic goal of this paper is to clear up the influence of the normal and tangential displacements in the eardrum at the strain-stress state of the reconstructed middle ear. The reconstructed tympanic membrane is modeled as an isotropic elastic annular plate, and the plate having an elliptical shape. **Fig. 4. Ref.: 9 titles.**

UDC 681.3 Antsiparovich P.P., Akulich B.K., Dubovskaya E.M. Drawing up of the differential equations of movement of links of the manipulator // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.287-289. In the article for the manipulator, working in an angular system of coordinates, with three degrees of freedom the differential equations of movement of links in the form of Lagrange equations of the second kind are received. For this purpose kinematic characteristics are defined and expressions of kinetic energy of links of the manipulator are made. **Fig. 1. Ref.: 5 titles.**

UDC 531.8 Loktionov A.V. Calculation of the equation of small fluctuations at difficult movement of the elliptic pendulum // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.290-293.

Previously, the differential equation of elliptic oscillation of the pendulum. It uses the method of specifying the method of coordinate movement of the slide and ball. Investigations were carried out with a small range of the angle of deflection of the pendulum and the condition that the angular velocity of rotation of the ball is zero. Found that the calculation of the equation of motion for small oscillations of a pendulum with a given elliptic initial angular velocity of its motion including the moment of inertia of the ball relative to the axis of suspension is much more complicated calculation formula to determine the law of motion of small oscillations. Found that the study should be considered complex motion elliptic pendulum. A scheme of movement of the center of mass of the slide, ball and elliptical pendulum. **Fig. 2. Ref.: 3 titles.**

UDC 531.011:629.113.65 Astakhov E.I., Kuznetsov E.N., Shkurko S.S. Simulation of the motion of the mobile machine with the engine fly-wheel // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.294-297. The analysis of the dynamics of acceleration when starting the car performed on single-mass dynamic model with a rotating cast link. The angular velocity of the wheel of the car was determined by the equations of motion in the integral form of the kinetic energy and the angular acceleration of the differential equations of motion, which are solved numerically. **Fig.5. Ref.:3 titles.**

UDC 531.2+624.04 Kholodar B.G. Choice of poles for determination of the support reactions in a complex structure (by a method of the moments) // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.298-302. Presented is a method of a determination of external constraints reactions in a compound design. The reactions are determined independently from each other. The technique is based on the principle of virtual displacements. The novelty is in the selection of the instantaneous centers of rotation and in the decomposition of the directions of the reactions corresponding to these centers. **Fig.3. Ref.: 1 title.**

UDC 539.377 Ali M. Abed Alzobaede. Research of temperature field on the basis method of finite element // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.303-305. In this paper we solve the problem of calculation of temperature fields in a confined space. The influence of the cooling air flow on the temperature distribution in the server box. Simulation was carried out by finite element method using CAD «Solid Works». **Fig.4. Ref.: 3 titles.**

UDC 531.8 Rousan S.I., Zayac V.R., Talachynets I.M. Application of the Zhukovsky's methods for definition reactions on the external relations // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.306-309. The question of improvement of the power analysis of flat mechanisms with the lowest kinematic couples is considered. It is shown that the graphic-analytical method of Zhukovsky which is usually applied to determination of external forces, it is possible to apply and to determination of internal forces of the interaction arising in kinematic couples. **Fig. 4.**

UDC 621.01 Shashko A.E., Serik A.L., Hursevich S.V., Ausiyevich A.M. Principles of construction of mechatronic energy recovery systems for mobile machines // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.310-312. The principal scheme of energy recovery system for mobile machines is proposed. Given the basic equations for estimating the efficiency of recovery on the basis of the law of energy conservation and accounting efficiency of systems are given. The example of system element with automatic control is shown. **Fig. 2. Ref.: 3 titles.**

UDC 621.01 Bokun G.S., Gapanjuk D.V. Combined application of computer and graphic methods in term project of course the Theory of Machines and Mechanisms // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.313-316. The experience of the Department of Theoretical Mechanics in implementation of computational methods during training of students in the field of mechanisms design in the course of the Theory of Machines and Mechanisms is represented. The work performed gives possibility to significantly improve the level of teaching design and enlarge its horizons. **Ref.: 6 titles.**

UDC 681.3.06 Kalina A.A., Kovaleva I.L., Petrash N.S., Shumel A.V. Continuity of design objects in the study of general and special subjects // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.317-319. Students study the efficiency of development discipline determined by the degree of understanding the practical application of the knowledge gained. One of the ways to increase the effectiveness of students' understanding of the studied courses may be the use of common objects when presenting the material of different disciplines. The knowledge gained by students in the study of general professional subjects "Technical mechanics" (eg. course design objects), demand in the future in a cycle of special disciplines. The paper describes the structure of the laboratory work in the course "Optimization of design decisions", the purpose of which is to study methods for solving multi-criteria optimization. As the object of optimizing the students are encouraged to use gear that they constructed during the execution of a course project for the subject "Technical mechanics". **Fig. 8. Ref.: 2 titles.**

UDC 681.3.06 Safronov K.I., Hurvich Yu.A. Steering axle load research during the tractor turn // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.317-319. This article contains a description of a new method of steerable axle and tractor parameters definition. In result next forces at the wheel in dependence of turning of internal wheel angle are calculated: vertical load, and traction force, slippage coefficient, horizontal force at each wheel, and other load and kinematical characteristics. **Tab. 1. Fig. 3. Ref.: 5 titles.**

UDC 517.52+517.983 Akimov V.A. About the operator method for solving ordinary differential equations // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.326-329. The paper presents the basis of the operator method for solving ordinary differential equations with constant coefficients. Specific examples of solutions to some classical problems of three different types were considered. **Ref.: 1 title.**

UDC 539.3; 534.1 Polenov V.S., Chigarev A.V. On the propagation of transverse waves in a stochastic heterogeneous two-component medium // TAM. – 2014. – Issue 29. – P.329-332. We study the propagation of transverse waves in a two-dimensional stochastic heterogeneous environment, where it is a component of the firm, and the second - a liquid. The initial system of differential equations in terms of displacements is reduced to one fourth-degree algebraic equation to the wave of a complex number with complex coefficients. For specific types of variances given the fluctuations of functions analytical expressions that determine the speed and damping of transverse waves in a given environment. **Ref.: 8 titles.**

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ

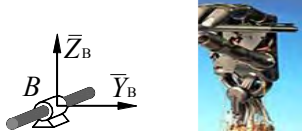
Электронная версия научной статьи должна быть оформлена в формате Microsoft Word (2003). Материалы статьи необходимо выслать на e-mail: seminar.mechatronics@gmail.com.

Объем статьи: полное количество страниц (последняя страница статьи должна быть заполнена не менее 75%), не должен превышать 7 страниц машинописного текста. Должен быть указан индекс публикации по универсальной десятичной классификации (УДК). **Текст** статьи набирается шрифтом Times New Roman 12 pt (междустрочный интервал – одинарный) с автоматической расстановкой переносов. Выравнивание текста по ширине. Страницы не нумеруются. **Отступ** первой строки абзацев везде постоянный, равный 10 мм. **Поля текста** на странице формата А4 (210x297мм): верхнее – 20 мм, нижнее 25 мм, левое и правое 20 мм. Посередине листа прописными буквами (полужирным шрифтом) печатается название статьи. Затем через 1 интервал посередине фамилии авторов (полужирным шрифтом). Затем через один интервал текст статьи с абзаца. В конце статьи через 1 интервал печатается «SUMMARY» (не более 75 слов на английском языке) и «РЕЗЮМЕ» на русском языке. После **резюме** печатается «ЛИТЕРАТУРА» и далее через 1 интервал перечисляются в виде списка источники литературы. Литературные ссылки (не более 15 источников) должны быть оформлены в порядке упоминания в тексте в соответствии с ГОСТ 7.32-2001. **Таблицы** должны содержать только экспериментальные данные и представлять собой обобщенные и статистически обработанные материалы исследований. Каждая таблица должна иметь заголовок, быть обязательно пронумерована и упомянута в тексте. Кегль текста – 9 пт. **Рисунки** должны быть выполнены в графическом редакторе и включены в текст. Количество иллюстраций не должно превышать 4, данные рисунков не должны повторять материал таблиц. Рисунки должны быть четкими, легко воспроизводимыми, быть обязательно пронумерованы, упомянуты в тексте и иметь подрисуночные подписи и объяснение значений всех условных обозначений. Подрисуночные подписи печатаются шрифтом Times New Roman 9 pt курсивом. **Формулы** и буквенные обозначения по тексту должны быть набраны в среде редактора формул Microsoft Equation 3.0. Шрифт для греческих букв – Symbol, для всех остальных – Times New Roman, основной размер – 11, крупный индекс – 7, мелкий – 5. В обозначениях латинские буквы набираются курсивом, греческие и русские – прямо. В математических формулах следует избегать громоздких обозначений. Формулы располагаются по центру страницы и нумеруются (нумерация по тексту статьи сквозная).

На отдельной странице указываются полные сведения об авторах (полное имя, организация, должность, уч. степ., уч. звание, адрес, телефон, e-mail). Также к статье обязательно прилагаются реферат и резюме на русском и английском языках с обязательным переводом на английский язык фамилий авторов и названия научного доклада.

ПРИМЕР ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЬИ

Внимание! Принимаются материалы последних исследований, не опубликованные ранее в печати.

<p>УДК 539.4:620.2+519.621.64</p> <p>О ПРОЕКТИРОВАНИИ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ (12 pt)</p> <p>¹ Иванов П.И., ² Смирнов И.П. (12 pt)</p> <p>¹ УО «Белорусский национальный технический университет», Минск ² УО «Белорусский государственный университет» Минск (12 pt)</p>	
<p>Мехатронные системы находят широкое использование в современных областях высокотехнологической промышленности ...</p> <p>... повысить надежность и долговечность наиболее ответственных элементов конструкций и компонентов оборудования механических систем и мехатронных модулей. (12 pt)</p> <p>SUMMARY</p> <p><i>This paper considers the problems of modern methods for computer and structures...</i></p> <p>РЕЗЮМЕ</p> <p>Предлагаемый подход позволяет повысить надежность...</p>	 <p>Рисунок 1. – Простейшая механическая система (9 pt)</p> <p>РЕФЕРАТ</p> <p>УДК 539.4:620.2+519.621.64 Иванов П.И., Смирнов И.П. О проектировании мехатронных систем // Международный научно-технический сборник «Теоретическая и прикладная механика», Минск, 2014г, вып.29. Проведена постановка задачи ... численные эксперименты – Ил. 3. Библиогр. 12.</p> <p>ABSTRACT</p> <p>UDC 539.4:620.2+519.621.64 Ivanov P.I., Smirnov I.P. About mechatronics system design //... <i>The mechatronics systems ...</i> – Fig. 3. Ref.: 12 titles.</p> <p>ЛИТЕРАТУРА (12 pt)</p> <p>1. Чигарев, А.В. Введение в мехатронику: учебное пособие / А.В. Чигарев, К. Циммерманн, Ю.А. Чигарева – Минск: БНТУ, 2013.– 388с.</p>

Не рассматриваются и обратно не высылаются материалы статей, оформленные с нарушением вышеперечисленных требований! Статьи, поступившие позднее установленных сроков (в случае положительной рецензии), публикуются в следующем выпуске сборника ТПМ.

СОДЕРЖАНИЕ

Юрий Михайлович Плескачевский (к 70-летию со дня рождения)	3
Плескачевский Ю.М., Чигарева Ю.А. Моделирование теплопроводности на основе уравнения ФПК вблизи порога перколяции.....	4
Чирик С.А., К. Циммерманн, Чигарев В.А. Поступательное движение мягкого робота амёбоподобного типа.....	19
Маевская С.С., Михасев Г.И. О влиянии магнитного поля на формы свободных и вынужденных колебаний трехслойной балки, содержащей магнитореологический эластомер.....	23
Щербаков С.С. Сосновский Л.А. Обобщенная модель механотермодинамических состояний среды.....	29
Косых Э.Г., Сейфер Д.В. Критическая нагрузка для сжатых стоек переменной жесткости.....	41
Журавков М.А., Романова Н.С., Прохоров Н.А., Дрозд Е.С. Определение физико-механических свойств биотканей с использованием данных экспериментов атомно-силовой микроскопии и наноиндентирования.....	45
Старовойтов Э.И., Савицкий Д. М. Термосиловое деформирование упругопластических трехслойных стержней.....	51
Романова Т.П., Янковский А.П. Построение определяющих уравнений упругопластического поведения перекрестно-армированного металлокомпозитного слоя в рамках модели Прандтля-Рейсса-Хилла при плоском напряженном состоянии.....	58
Мухутдинов Р.Ф., Шигабутдинов А.Ф., Шигабутдинов Ф.Г. Влияние форм и размеров местных дефектов на картину выпучивания цилиндрической ортотропной оболочки при продольном ударе.....	65
Чигарев Ю.В., Чигарев В.А. К стохастической неустойчивости нелинейных колебаний стержней.....	69
Кукарских Л.А., Поленов В.С. О динамическом деформировании насыщенных жидкостью упругих пористых сред.....	73
Ширвель П.И., Куликов И.С., Чигарев А.В. Неосесимметричное напряженно-деформированное состояние длинного тепловыделяющего цилиндра в условиях квазистатического терморadiационного воздействия.....	79
Борисов А.В. Модели циклического нагружения при ходьбе.....	86
Вихренко В.С., Ласовский Р.Н., Тишевич А.Ю. Упрощенная модель движения упругого стержня.....	89
Шавловская О.Г., Леоненко Д.В. Уравнения равновесия трехслойной оболочки в упругой среде.....	93
Одиноква О.А., Королев С.А., Чураев А.О. Оценка возможности использования высокополимеров в строительных конструкциях на основе физико-механических свойств.....	97
Скойбеда А.Т., Жуковец В.Н. Кинематика колесно-шагающего движителя, перемещающегося по ступеням	100
Журавков М.А., Круподеров А.В., Щербаков С.С. Гранично-элементное моделирование с использованием элементов с квадратичным распределением усилий и распараллеливанием вычислений.....	105
Василевич Ю.В., Томило Е.В. Определение долговечности автомобильных рессор.....	111

Шилько С.В., Рябченко Т.В., Петроковец Е.М., Баилакова А.Л., Кропотин О.В. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния полимерных трубчатых элементов.....	117
Янковский А.П. Использование обобщенных методов Рунге-Кутты высоких порядков точности при численном интегрировании начальной задачи для уравнения переноса.....	122
Конон П.Н. О формах осесимметричных слоев жидкости на поверхности горизонтального вращающегося диска.....	128
Девойно О.Г., Пилипчук А.П., Кочеров А.Л. Оценка напряженного состояния при лазерной обработке газотермических покрытий.....	134
Омаров Т.И., Тулегенова К.Б., Бекенов Е.Т., Кончина Л.В., Гончарова И.А. Математическое описание колебаний консольного грузоподъемного устройства.....	137
Яровая А.В., Поддубный А.А. Теоретическое и экспериментальное исследование прогибов упругой трехслойной балки, частично опертой на упругое основание.....	141
Босяков С.М., Шпилевский И. Э., Алексеев Д.В. Анализ поврежденности бедренной кости с пострезекционным дефектом при действии статической нагрузки.....	148
Баркалин, Е.А. Белогуров Е.А. Конечноэлементное моделирование радиосистемы на основе углеродных нанотрубок.....	152
Докукова Н.А., Голод С.В., Кафтайкина Е.Н. Исследование макета подвески сиденья транспортного средства.....	156
Василевич Ю.В., Горелый К.А., Сахоненко В.М., Сахоненко С.В. Существование и единственность решения краевых задач для препрегов.....	162
Ларин А.Н., Ларин А.А., Водка А.А., Уцаповский И.Л. Экспериментальные исследования вибраций центробежного пожарного насоса с прослабленной посадкой вала в подшипниках.....	166
Ширвель П.И., Сергей А.А., Чигарев В.А. Численное моделирование процессов деформирования элементов конструкций и компонентов оборудования ЯЭУ.....	173
Щербаков С.С., Шемет Л.А. Развитие трещиноподобного повреждения и его характеристики.....	179
Шукевич Т.В., Чигарева Ю.А., Ручан М.В. Фрактальные модели прорастания магистральных трещин в твердых телах.....	184
Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Цилиндрический резервуар в постоянном температурном поле.....	189
Хвисевич В.М., Веремейчик А.И., Гарбачевский В.В. Использование метода граничных интегральных уравнений и Tecplot при исследовании напряженно-деформированного состояния твердых тел.....	194
Миронов Д.Н., Чигарев В.А., Гончаренко В.П. Решение стационарной задачи термоупругости и термопластичности в приближении эффективной модели для тела цилиндрической формы.....	200
Босяков С. М., Абдуфтах Фрхат Мселати Определение условий начальных корпусных перемещений корня зуба в форме эллиптического гиперблоида.....	204
Мартыненко Т.М., Скляр О.Н. Геометрические исследования и напряженно-деформированное состояние тонких упругих оболочек.....	210
Пронкевич С.А. Численный анализ влияния неоднородности на спектр и формы собственных частот пластин.....	213
Гавриленко С.Л., Шилько С.В. Идентификация линейной вязкоупругой модели Прони по результатам испытаний на релаксацию при сжатии.....	219
Шукевич Т.В., Чигарев А.В. Нестационарные упругие волны в неоднородных средах с начальными напряжениями.....	224

<i>Алтынбеков Ш.А.</i> Об одной начально-краевой задаче консолидации соленых грунтов.....	229
<i>Журавков М.А., Босяков С.М., Мартыненко И.М., Скляр О.Н.</i> Численно-аналитическое решение одной задачи кубически анизотропной теории упругости.....	235
<i>Петровский А.Л.</i> Анализ собственных частот ротора центрифуги с консольным валом.....	239
<i>Конон П.Н., Поддубная М.А.</i> Моделирование нестационарных процессов тепло- и массообмена в многослойных дымовых трубах в условиях фазовых переходов.....	244
<i>Дудяк А.И., Гурковская О.И.</i> Определение перемещений при изгибе составных балок из неоднородных материалов методом начальных параметров.....	251
<i>Авсиевич А.М., Пронкевич С.А., Балышева Н.О., Михальков С.Л.</i> Влияние конструктивных параметров и режимов работы на потери мощности во вращательных парах рычажных механизмов.....	256
<i>Мирейко Е.В., Громько О.В.</i> Интеграция САПР моделей эндопротезов тазобедренного сустава в кроссплатформные приложения.....	259
<i>Шпургалова М.Ю., Василевич Ю.В.</i> Установление зависимости между физико-механическими параметрами, характеризующими процессы дробления калийной руды....	263
<i>Мартыненко Т.М., Пронкевич С.А., Кулаковский Б.Л.</i> Определение нормальных перемещений эллиптических оболочек емкостей пожарных автомобилей.....	268
<i>Мармыш Д.Е.</i> Моделирование двумерного напряженно-деформированного состояния и состояния повреждаемости трибофатической системы ролик/вал.....	273
<i>Ручан М.В., Чигарева Ю.А., Шукевич Т.В.</i> Влияние изменения физико-математических свойств микрокомпозита на процессы деформирования и разрушения.....	278
<i>Славашевич И.Л., Юркевич К.С.</i> Напряженно-деформированное состояние реконструированного среднего уха при тимпанопластике и стапедотомии.....	282
<i>Анципорович П.П., Акулич В.К., Дубовская Е.М.</i> Составление дифференциальных уравнений движения звеньев манипулятора.....	287
<i>Локтионов А.В.</i> Расчет уравнения малых колебаний при сложном движении эллиптического маятника.....	290
<i>Астахов Э.И., Кузнецов Е.Н., Шкурко С.С.</i> Моделирование движения мобильной машины с маховичным двигателем.....	294
<i>Холодарь Б.Г.</i> О выборе полюсов при определении опорных реакций составной конструкции (способ двух моментов).....	298
<i>Али М. Абед Аль-Зобайде</i> Исследование температурных полей в серверном ящике методом конечных элементов.....	303
<i>Русан С.Л., Заяц В.Р., Талачынец Г.М.</i> Прямые и обратные задачи динамики звеньев механизмов.....	306
<i>Шашко А.Е., Серик А.Л., Хурсевич С.В., Авсиевич А.М.</i> Принципы построения мехатронной системы рекуперации энергии для мобильных машин.....	310
<i>Бокун Г.С., Гапанюк Д.В.</i> Совместное применение компьютерных и графических методов в курсовом проектировании по теории механизмов и машин.....	313
<i>Калина А.А., Ковалева И.Л., Петраш Н.С., Шумель А.В.</i> Преимущество объектов проектирования при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин.....	316
<i>Сафронов К. И., Гурвич Ю. А.</i> Исследование нагруженности элементов управляемого моста при повороте трактора без подвески.....	320
<i>Акимов В.А.</i> Об операторном методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений.....	326
<i>Поленов В.С., Чигарев А.В.</i> О распространении поперечных волн в стохастически неоднородной двухкомпонентной среде.....	329
<i>Памяти Д.Д. Ивлева</i>	333
<i>Некролог. ДЮИС ДАНИЛОВИЧ ИВЛЕВ</i>	335
РЕФЕРАТЫ	336
ABSTRACTS	342
ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ	347