УДК 517.958(075.8)

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Коляда А.Д.

Научный руководитель – Марцинкевич В.С., старший преподаватель

Рассмотрим применение неявной разностной схемы численного решения уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (1) в прямоугольнике D = [0 ≤ x ≤ L, 0 ≤ t ≤ T] с начальным $u(x,0) = \varphi(x)$ (2) и граничными условиями $u(0,t) = \mu_1(t),\ u(L,t) = \mu_2(t)$ (3).

Для составления разностной схемы на сетке с постоянными шагами h и τ по координатным осям Ox и Ot выберем шаблон (изображенный на рисунке 1), состоящий из 4 точек: $(x_i;t_j),(x_{i-1};t_{j+1}),(x_i;t_{j+1})$ и $(x_{i+1};t_{l+1})$.

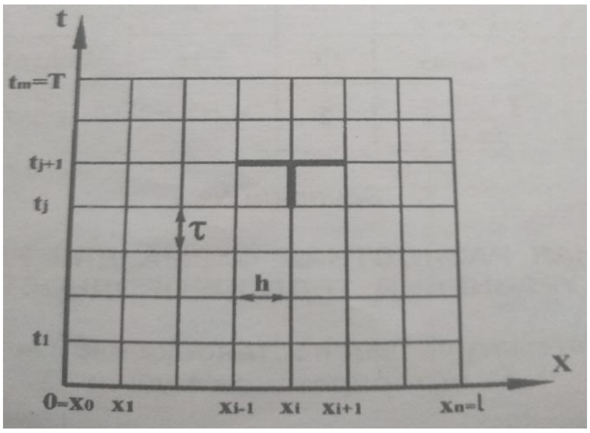

Рисунок 1. Сетка и шаблон неявной разностной схемы

Входящие в уравнение (1) производные аппроксимируем и получаем следующие конечно-разностные соотношения:

$$\frac{\partial u(x_i,t_{j+1})}{\partial t} \approx \frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_{j+1})}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^j+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}. \qquad (5)$$

Подставляя полученные аппроксимации (4) и (5) в уравнение (1), получим:

$$\frac{u_i^{j=1}-u_i^j}{\tau} = a^2\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}, \qquad (6)$$

$i = 1,2, \dots , k - 1; j = 0,1, \dots , p - 1.$

Обозначим за $w = \frac{a^2 \tau}{h^2}$ (7). И получим $wu_{i-1}^{j+1} - u_i^{j+1} - 2wu_i^{j+1} + wu_{i+1}^{j+1} + u_i^j = 0$, упростив получаем $wu_{i-1}^{j+1} - (1 + 2w)u_i^{j+1} + wu_{i+1}^{j+1} = -u_i^j$ (8).

Также аппроксимируя начальные и граничные условий получам следующие соотношения:

$u(x_i, 0) = u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0,1, \dots, k$ (9)

$u(0, t_{j+1}) = u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1}),\ u(l, t_{j+1}) = u(x_k, t_{j+1}) = u_k^{j+1} = \mu_2(t_{j+1}),$ (10) $j = 0,1, \dots, p - 1.$

Полученная разностная схема называется неявной, так как в каждое уравнение получившейся системы входят три значения неизвестной функции с последующего слоя $t = t_{j+1}$.

Расчет значений знакомых функций $u(x, t)$ производиться в узлах сетки. Значения функции $u_i^0 (i = 0,1, \dots, k)$ на нулевом слое $t = t_0 = 0$ вычисляются из начального условия (9). Расписав уравнение (8) для всех натуральных точек первого слоя $t = t_1 = \tau$ и добавив соотношения (10) из граничных условий, получим систему линейных уравнений с известной правой частью для определения неизвестных значений $u_i^1 (i = 0, 1, \dots, k)$ на первом слое:

$$\begin{cases} u_0^1 = \mu_1(t_1) \\ wu_{i-1}^1 - (1 + 2w)u_i^1 + wu_{i+1}^1 = -u_i^0 \\ u_n^1 = \mu_2(t_1) \end{cases} \qquad (11)$$

$(i = 1,2, \dots, k - 1)$

По решению на первом слое находим решения на втором и последующих слоях из системы (11):

$$\begin{cases} u_0^m = \mu_1(t_m) \\ wu_{i-1}^m - (1 + 2w)u_i^m + wu_{i+1}^m = -u_i^{m-1} \\ u_k^m = \mu_2(t_m) \end{cases} \qquad (12)$$

$(i = 1,2, \dots, k - 1; m = 1,2, \dots, p)$

Для решения системы (12) используют метод прогонки.

Выведем расчетные формулы для метода прогонки. Идея метода состоит в том, что путем последовательного исключения одного неизвестного в каждом уравнении системы ее можно привести к эквивалентной системе с двумя неизвестными в каждом уравнении. Будем искать решение системы в виде: $u_i^{j+1} = \alpha_{i+1} u_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0,1,\ldots,k-1$ (13), где α_{i+1} и β_{i+1} – неизвестные коэффициенты.

Тогда подставив в (13) вместо i $i-1$, получаем:

$u_{i-1}^{j+1} = \alpha_i u_i^{j+1} + \beta_i, \quad i = 0,1,\ldots,k$ (14).

Подставляя (14) в (8) получим:

$$u_{i-1}^{j+1} = \frac{w}{1+2w-w\alpha_i} u_{i+1}^{j+1} + \frac{w\beta_i + u_i^j}{1+2w-w\alpha_i}. \qquad (15)$$

Сравнивая формулы (13) и (15). Выпишем рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты α_{i+1} и β_{i+1} с α_i и β_i:

$$\alpha_{i+1} = \frac{w}{1+2w-w\alpha_i}, \; \beta_{i+1} = \frac{w\beta_i + u_i^j}{1+2w-w\alpha_i}, \; i = 0,1,\ldots,k-1, \; j = 0. \qquad (16)$$

Алгоритм решения системы линейных уравнений методом прогонки состоит в следующем: сравнивая выражения (13), записанное для i=0 $u_0^{j+1} = \alpha_1 u_1^{j+1} + \beta_1$(17) с граничным условием (10) $u_0^{j+1} = \mu_1(t_{j+1})$ (18), делаем вывод, что $\alpha_1 = 0$, а $\beta_1 = \mu_1(t_{j+1})$. Далее по формулам (16) находим следующие коэффициенты $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ при $i = 1,2,\ldots,k-1, j = 0$. Этот процесс называется прямой прогонкой.

Метод прогонки может применяться, если знаменатели выражений (16) не обращаются в 0.

Зная прогоночные коэффициенты, решение системы уравнений (8) и (10) находим по формуле (13) в обратном порядке придавая значения $i = k-1, k-2, \ldots, 1, 0;$ начиная с $i = k-1$: $u_{k-1}^{j+1} = \alpha_k u_k^{j+1} + \beta_k$ (19), поскольку значение $u_k^{j+1} = \mu_2(t_{j+1})$ известно из граничного условия. Этот процесс называется обратной прогонкой.

Выведем формулы для расчета α_i и β_i при использовании граничных условий второго и третьего рода. В данной работе в расчетах будут проведены вычисления при граничные условия второго рода.

Пусть на левой границе стержня задано граничное условие второго рода: $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{f_1(t)}{\lambda} = q(0,t)$ (20) или же в конечных разностях $u_0^{j+1} = u_1^{j+1} + \frac{h}{\lambda} f_1(t_{j+1})$ (21).

Сравнивая граничные условия (21) с (17), делаем вывод, что $\alpha_1 = 1, \ \beta_1 = \frac{h}{\lambda} f_1(t_{j+1})$.

Пусть по аналогии и на правой границе стержня задано граничное условие второго рода: $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{f_2(t)}{\lambda} = q(l,t)$ (22) или же в конечных разностях $u_k^{j+1} - u_{k-1}^{j+1} = \frac{h}{\lambda} f_2(t_{j+1})$ (23).

Решив систему двух уравнений (19) и (23), найдем, что $u_k^{j+1} = (\beta_k - \frac{h}{\lambda} f_2(t_{j+1}))/(1 - \alpha_k)$ (24).

Решением функции двух переменных может быть в виде таблицы или графика.

Преимуществом неявной схемы является то, что ее можно использовать при любом значении $w = \frac{\tau a^2}{h^2}$. Неявная разностная схема является абсолютно устойчивой. Выбор шагов определяется не соображениями устойчивости, а требуемой точностью расчетов.

Недостатком неявной схемы является необходимость решать на каждом временном слое систему линейных уравнений. Когда явная схема является неустойчивой, тогда применяют неявную схему.

Литература

1. Марцинкевич В.С. Уравнение математической физики: методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей. – Минск: БНТУ, 2008. – С. 12-30, рис. 2.