

## КИНЕМАТИКА ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С НЕКРУГЛЫМИ КОЛЕСАМИ

Горбач Н.И., Яровенко Д.В.

В работе рассмотрена кинематика двух типов зубчатых передач с эллиптическими колесами. Получены формулы для угловой скорости и углового ускорения ведомого колеса, на основании которых построены графики зависимости указанных угловых характеристик от угла поворота ведущего колеса, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Конструктивно такие передачи можно осуществить зубчатыми эллиптическими колесами с одинаковыми геометрическими параметрами.

Известно, что эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до фокусов  $F$  и  $F'$  имеет одно и тоже значение  $2a$ , где  $a$  – большая полуось эллипса (рис. 1)

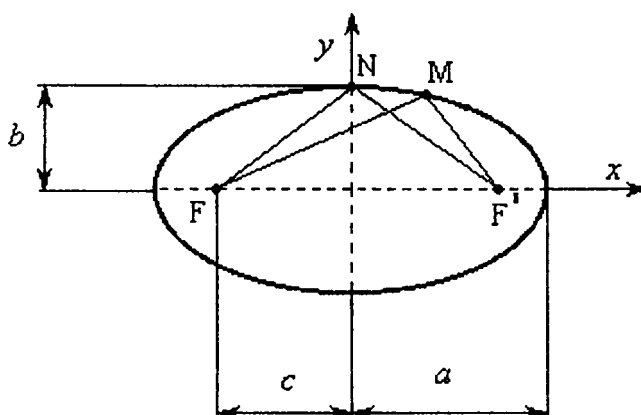


Рис. 1

Рассмотрим некоторые геометрические соотношения.

Расстояние между фокусами  $FF'$  называется фокусным расстоянием. Оно обозначается  $2c$ , т.е.  $FF' = 2c$ .

Так как  $FF' < FM + F'M$ , то  $2c < 2a$ , т.е.  $c < a$ .

Из определения эллипса следует, что

$$FM + F'M = FN + F'N = 2a, \text{ где } FN = F'N, \text{ из } \Delta FON \quad (FN)^2 = c^2 + b^2.$$

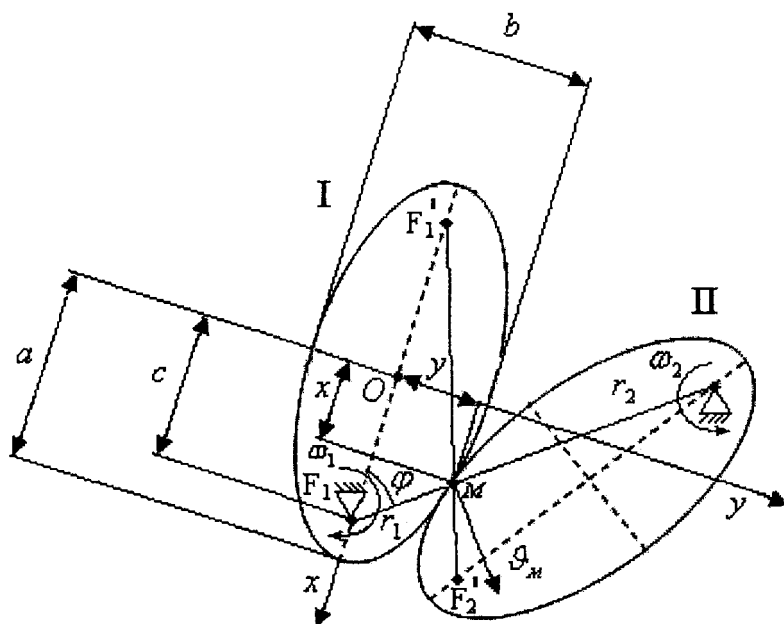


Рис. 2

Пусть колесо 1 вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг оси, проходящей через фокус  $F_1$ . Угол, образованный большой осью эллиптического колеса 1 и прямой, соединяющей оси вращения  $F_1$  и  $F_2$  колес 1 и 2, обозначим  $\varphi$ . Колесо 2 по отношению к колесу 1 расположить так, чтобы выполнялось условие  $F_1F_2 = F_1'F_2' = 2a$ .

Скорость точки  $M$  касания колес перпендикулярна прямой  $F_1F_2$  и равна  $v_M = \omega_1 F_1M = \omega_2 F_2M$ , где  $F_1M = r_1$ ,  $F_2M = r_2$ .

$$\text{Тогда } \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2}. \quad (2)$$

Из антипараллелограмма  $F_1F'F_2F_2'$  следует, что  $F_1M = F_2'M = r_1$  и  $F_1'M = F_2M = r_2$ .

$$\text{Тогда } r_1 + r_2 = 2a, \text{ откуда } r_2 = 2a - r_1. \quad (3)$$

Из  $\Delta F_1F'M$  по теореме косинусов определяем  $F_1'M$ :

$$(F_1'M)^2 = (F_1M)^2 + (F_1F')^2 - 2(F_1M)(F_1F')\cos\varphi. \quad (4)$$

С учетом равенства (3) уравнение (4) представим в виде

$$(2a - r_1)^2 = r_1^2 + 4c^2 - 2r_1\cos\varphi. \quad (5)$$

Из равенства (5) с учетом соотношения (1) после преобразований получим

$$r_1 = \frac{b^2}{a - c\cos\varphi}. \quad (6)$$

$$\text{Тогда } r_2 = 2a - \frac{b^2}{a - c\cos\varphi} = \frac{2a^2 - 2acc\cos\varphi - b^2}{a - c\cos\varphi} = \frac{a^2 - 2acc\cos\varphi + c^2}{a - c\cos\varphi}. \quad (7)$$

Закон изменения угловой скорости колеса 2 с учетом значений  $r_1$  и  $r_2$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 b^2 (a - c\cos\varphi)}{(a - c\cos\varphi)(a^2 - 2acc\cos\varphi + c^2)} = \omega_1 \frac{b^2}{a^2 - 2acc\cos\varphi + c^2}, \quad (8)$$

где  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Рассмотрим другой способ определения  $r_1$ , используя каноническое уравнение эллипса, выбрав начало координат  $X$  и  $Y$  в центре эллипса. Выразим координаты точки  $M$  в этих осях:

$$\begin{aligned} x &= c - r_1 \cos \varphi, \\ y^2 &= r_1^2 - (c - x)^2 = r_1^2 (1 - \cos^2 \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставим значения  $X$  и  $Y$  в каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(c - r_1 \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{r_1^2 (1 - \cos^2 \varphi)^2}{b^2} = 1. \quad (10)$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$r_1^2 - \frac{2cb^2 r_1 \cos \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} = \frac{b^4}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что это выражение можно заменить тождеством

$$\left( r_1 - \frac{cb^2 \cos \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} \right)^2 = \frac{b^4}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} + \frac{c^2 b^4 \cos^2 \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi^2}, \quad (12)$$

добавив в левую и правую части уравнения (11) квадрат выражения  $\frac{cb^2 \cos \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}$ .

Преобразуем правую часть уравнения (12)

$$\frac{b^4}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} + \frac{c^2 b^4 \cos^2 \varphi}{(a^2 - c^2 \cos^2 \varphi)^2} = \frac{b^4}{(a^2 - c^2 \cos^2 \varphi)} \left( 1 + \frac{c^2 \cos^2 \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi} \right) = \frac{a^2 b^4}{(a^2 - c^2 \cos^2 \varphi)^2}. \quad (13)$$

Подставим полученное выражение в правую часть уравнения (12), после преобразований получим

$$r_1 = \frac{b^2}{a - c \cos \varphi}, \quad (6')$$

что соответствует полученному первым способом.

Хотя второй способ несколько более громоздкий, но этот способ является более общим и позволяет выразить радиусы  $r_1$  и  $r_2$  зацеплений эллиптических колес с осями вращения в центрах эллипсов, что будет показано ниже. Анализируя выражение (8) угловой скорости  $\omega_2$  видим, что при постоянной угловой скорости  $\omega_1$  колеса 1 угловая скорость  $\omega_2$  второго колеса является величиной непостоянной и зависит от угла  $\varphi$ , который в свою очередь является функцией времени. Поэтому продифференцировав по времени выражение (8), найдем закон изменения углового ускорения колеса 2

$$\varepsilon_2 = - \frac{2ac(a^2 - c^2) \sin \varphi}{(a^2 - 2ac \cos \varphi + c^2)^2} \omega_2^2. \quad (14)$$

Проведем анализ кинематики данного механизма на основе полученных законов изменения угловой скорости  $\omega_2$  (8) и углового ускорения  $\varepsilon_2$  уравнение (14)

1. Угловая скорость вращения второго колеса  $\omega_2$  будет достигать максимального значения при наименьшей величине знаменателя уравнения (8). Это условие достигается при  $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$  (рис. 3).

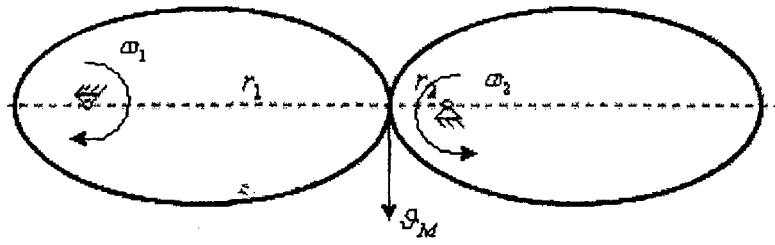


Рис. 3.

В этом случае

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac \cdot 1 + c^2} = \omega_1 \frac{(a-c)(a+c)}{(a-c)^2} = \omega_1 \frac{a+c}{a-c} = \omega_{\max};$$

$$r_1 = a + c; \quad r_2' = a - c.$$

2. Минимальное значение  $\omega_2$  будет при  $\varphi = \pi$ ,  $\cos\varphi = -1$  (рис. 4).

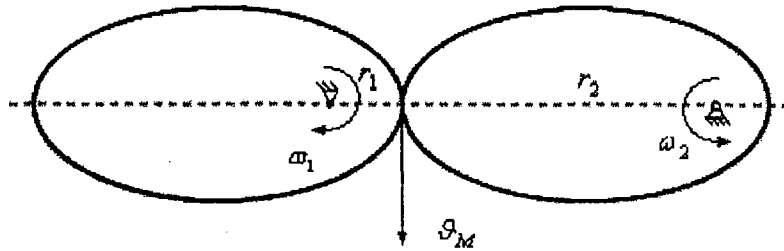


Рис. 4.

В этом случае

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac \cdot (-1) + c^2} = \omega_1 \frac{a-c}{a+c} = \omega_{\min};$$

$$r_1 = a - c; \quad r_2 = a + c.$$

3. Определим величину угла  $\varphi$ , при котором выполняется условие  $\omega_2 = \omega_1$ . С учетом этого из уравнений (1) и (8) получим

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac \cos\varphi + c^2} = 1 \text{ или } a^2 - c^2 = a^2 - 2ac \cos\varphi + c^2 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{c}{a} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{c}{a} \text{ и } r_1 = r_2 = a \text{ (рис. 5).}$$

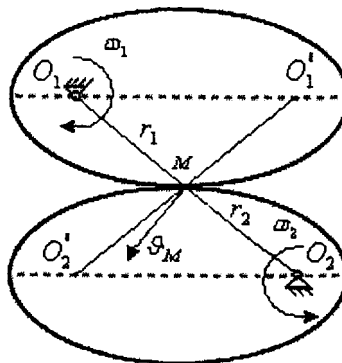


Рис. 5

Угловое ускорение  $\varepsilon_2$  в положениях  $\varphi=0$  и  $\varphi=\pi$ , т.е. когда угловая скорость  $\omega_2$  принимает экстремальное значение, равно 0.

Для построения графиков изменения угловой скорости  $\omega_2$  и углового ускорения  $\varepsilon_2$  колеса 2 рассмотрим числовой пример – задачу 14.6 из сборника задач по теоретической механике И.В. Мещерского.

Задана угловая скорость ведущего колеса  $\omega_1=9\pi$  рад/с, полуоси эллипсов  $a = 25$  см,  $b = 15$  см.

$$\text{Значение } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ см.}$$

При этих данных запишем формулы (8) и (14):

$$\omega_2 = \frac{81\pi}{41 - 40 \cos \varphi}; \quad (8')$$

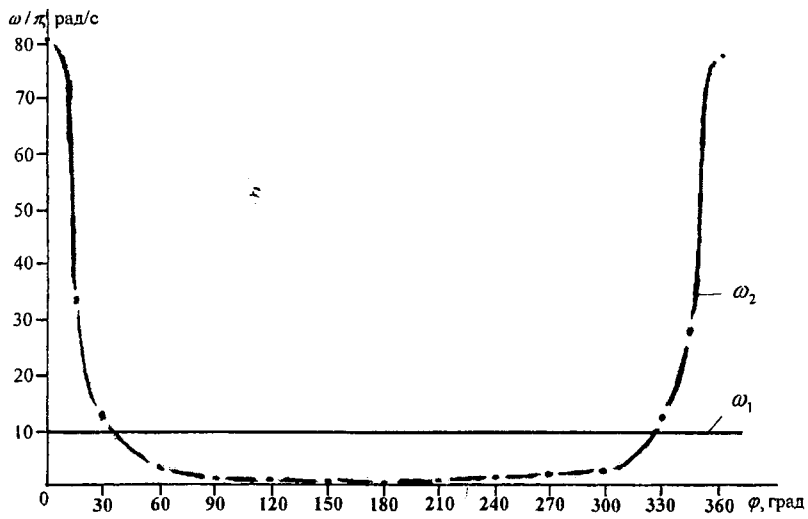
$$\varepsilon_2 = \frac{29160\pi^2 \sin \varphi}{(41 - 40 \cos \varphi)^2}. \quad (14')$$

Вычисления сведем в табл. 1.

Таблица 1.

$\varphi$ , град	$\omega_2/\pi$ , рад/с	$\varepsilon_2/\pi^2$ , рад/с <sup>2</sup>
0	81	0
15	34,28	-1351,7
30	12,7	-360,5
60	3,86	-57,3
90	1,97	-17,3
120	1,33	-6,8
150	1,08	-2,5
180	1,0	0
210	1,08	2,5
240	1,33	6,8
270	1,97	17,3
300	3,86	57,3
330	12,7	360,5
345	34,28	1351,7
360	81	0

На основании результатов вычислений построены графики  $\omega_2$  и  $\varepsilon_2$  (рис. 6).



Б)

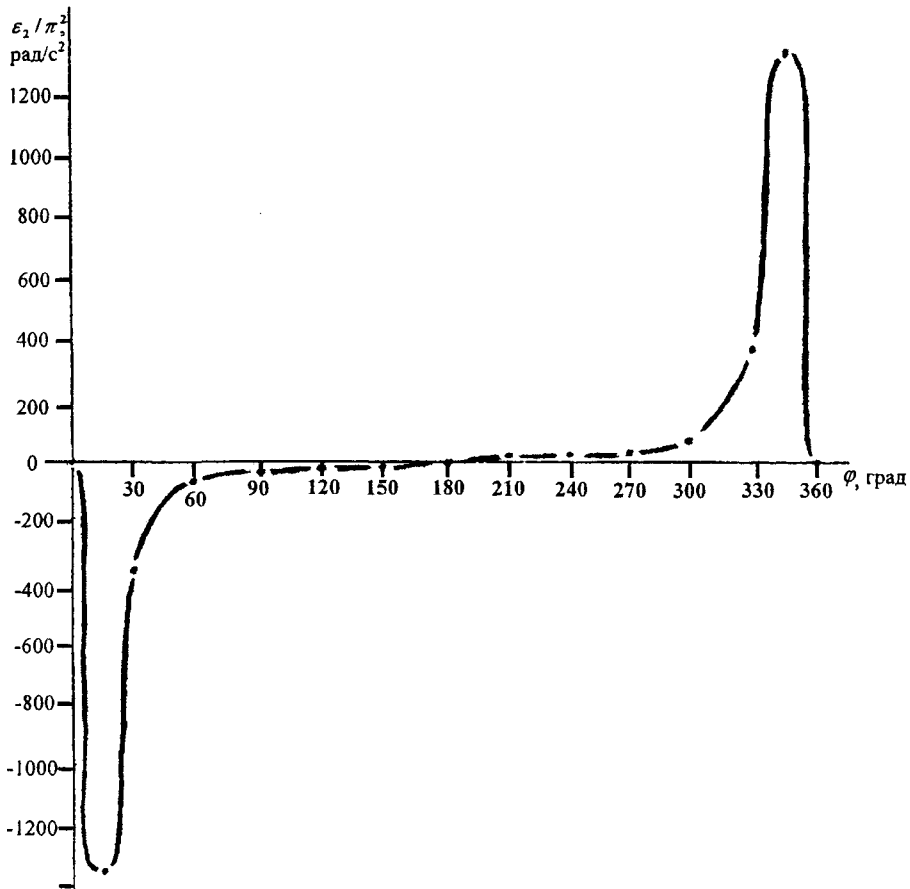


Рис. 6

Из приведенных графиков видно, что угловая скорость колеса 2 в пределах угла  $\varphi$  поворота колеса 1 от  $90^\circ$  до  $270^\circ$  практически остается постоянной и составляет примерно одну десятую часть от угловой скорости колеса 1 (рис. 6а). Угловое ускорение  $\varepsilon_2$  колеса 2 в пределах этих углов значительно меньше максимального значения (рис. 6б), т.е. в пределах указанных значений углов работа передаточного механизма будет более плавной.

Теперь рассмотрим зубчатое зацепление эллиптических колес второго типа, т.е. оси вращения помещены в точках  $O_1$  и  $O_2$  пересечения осей эллипсов с полуосями, равными  $a$  и  $b$ , причем  $O_1O_2 = a + b$  (рис. 7)

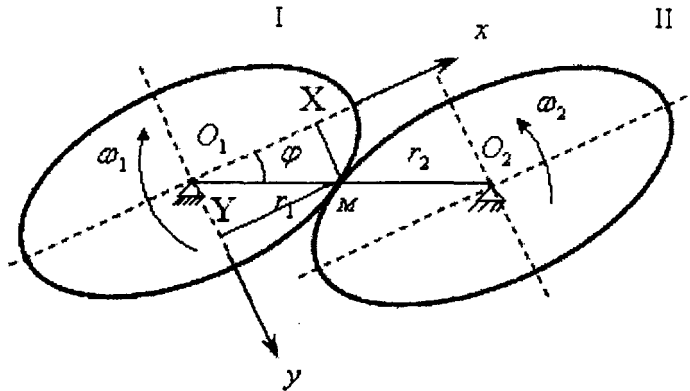


Рис. 7

Скорость точки  $M$  касания колес

$$v_M = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} = \frac{\omega_1 r_1}{a + b - r_1}, \text{ где } r_2 = O_1O_2 - r_1.$$

Координаты точки  $M$  в осях  $XO_1Y$

$$x = r_1 \cos \varphi; \quad y = r_1 \sin \varphi.$$

Уравнение эллипса в этих осях:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{r_1^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{r_1^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1. \quad (15)$$

Решив уравнение (15) относительно  $r_1$ , получим

$$r_1 = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (16)$$

Тогда угловая скорость колеса 2

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{\omega_1 ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} \left( a + b - \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}} \right)} = \\ &= \frac{\omega_1 ab}{(a + b) \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} - ab}. \end{aligned} \quad (17)$$

Проведём анализ кинематики механизма:

1.  $\omega_2$  принимает максимальное значение при  $\varphi = 0$  (рис. 8)

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 ab}{(a + b)b - ab} = \frac{\omega_1 ab}{ab + b^2 - ab} = \frac{\omega_1 a}{b} = \omega_{\max} \quad (18)$$

$$r_1 = a; \quad r_2 = b$$

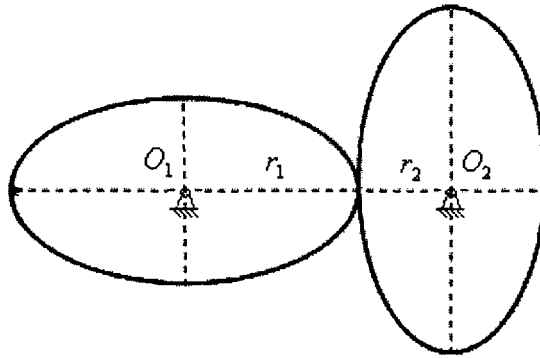


Рис. 8

2.  $\omega_2$  принимает минимальное значение при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (рис. 9)

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 ab}{(a+b)a - ab} = \frac{\omega_1 ab}{a^2 + ab - ab} = \frac{\omega_1 b}{a} = \omega_{\min}; \quad (19)$$

$$r_1 = b; \quad r_2 = a.$$

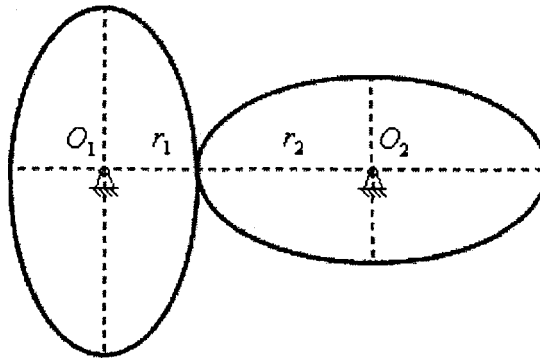


Рис. 9

Из выражения (17) видно, что при постоянной угловой скорости  $\omega_1$  колеса 1 угловая скорость  $\omega_2$  колеса 2 зависит от угла  $\varphi$  поворота колеса 1, а, следовательно, является функцией времени.

Определим угловое ускорение  $\varepsilon_2$ , зададимся числовым значением и построим графики зависимости  $\omega_1(\varphi)$ ,  $\omega_2(\varphi)$ ,  $\varepsilon_2(\varphi)$ .

Продифференцировав по времени выражение (17), после преобразований получим:

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = - \frac{\omega_1^2 ab(a+b)^2 (a-b) \sin 2\varphi}{((a+b)\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} - ab)^2 \cdot 2\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (20)$$

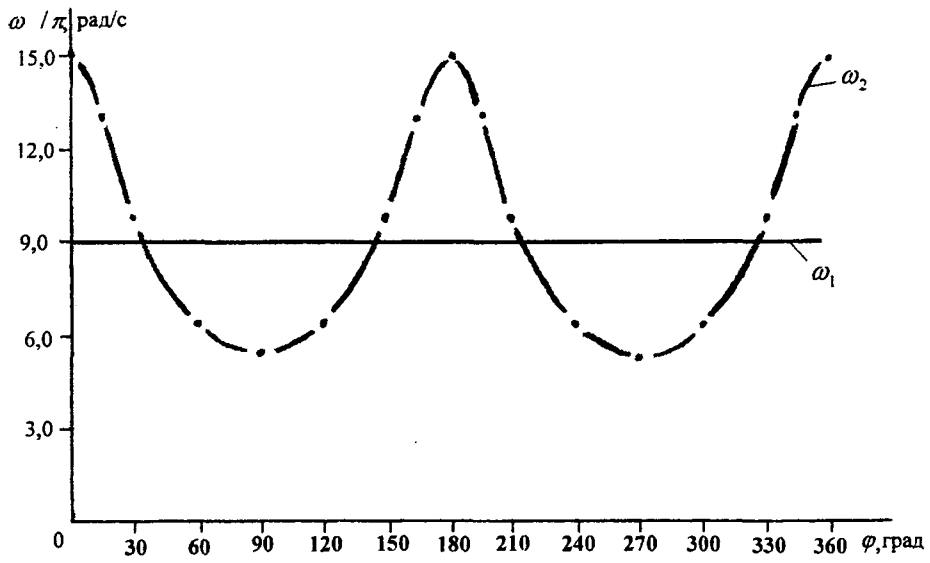
Примем значения  $\omega_1$ ,  $a$  и  $b$  такими же, как и для первого типа зацепления, рассмотренного выше, т.е.  $\omega_1 = 9\pi$  рад/с,  $a = 25$  см,  $b = 15$  см.

Перепишем уравнения (17) и (20) с учетом принятых числовых значений

$$\omega_2 = \frac{675\pi}{8\sqrt{225 \cos^2 \varphi + 625 \sin^2 \varphi} - 75}; \quad (17')$$



a)



б)

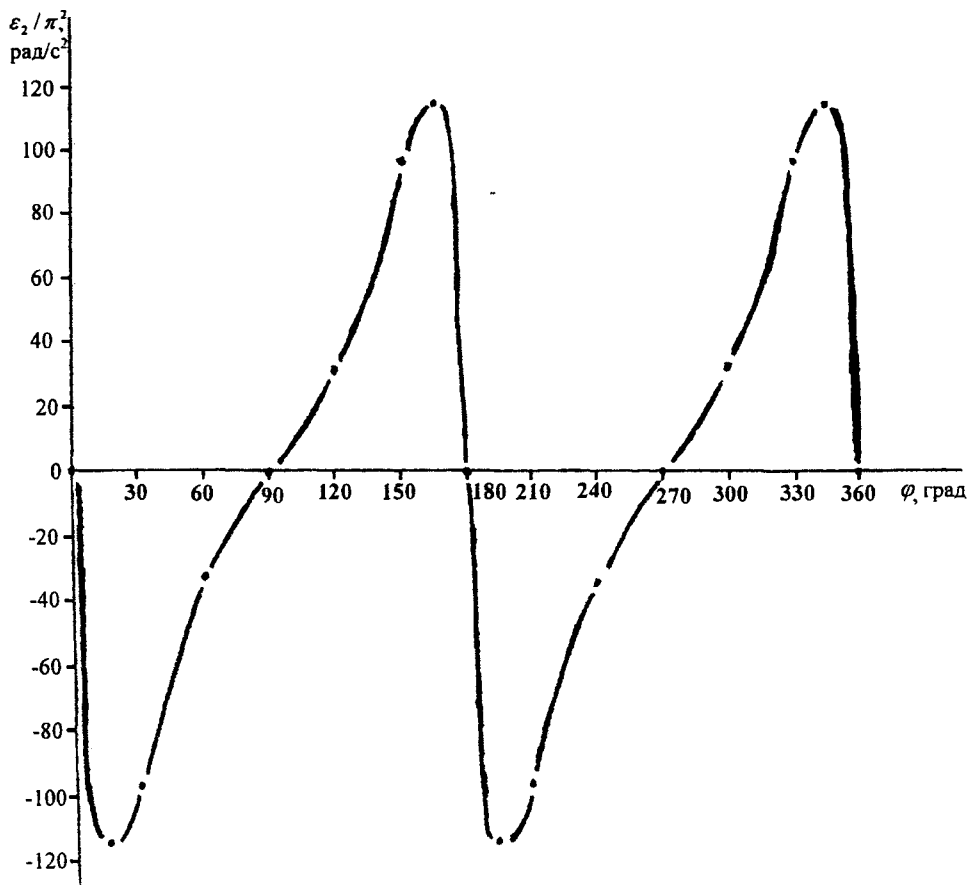


Рис. 10

$$\varepsilon_2 = - \frac{9720000\pi^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{225 \cos^2 \varphi + 625 \sin^2 \varphi} (8\sqrt{225 \cos^2 \varphi + 625 \sin^2 \varphi} - 75)^2}. \quad (20')$$

Вычисления  $\omega_2$  и  $\varepsilon_2$  сведем в табл. 2.

Таблица 2

$\varphi$ , град	$\omega_2/\pi$ , рад/с	$\varepsilon_2/\pi^2$ , рад/с <sup>2</sup>
0	15	0
15	13,0	-113,43
30	9,75	-97,44
60	6,23	-31,32
90	5,4	0
120	6,23	31,32
150	9,75	97,44
165	13,0	113,43
180	15	0
195	13,0	-113,43
210	9,75	-97,44
240	6,23	-31,32
270	5,4	0
300	6,23	31,32
330	9,75	97,44
345	13,0	113,43
360	15	0

## ВЫВОД

Из рассмотренных примеров видно, что главное отличие некруглых зубчатых колёс от круглых в том, что для зацеплений с некруглыми зубчатыми колёсами передаточное отношение не остаётся постоянным, а, следовательно, при  $\omega = \text{const}$  ведущего колеса, ведомое колесо вращается неравномерно. При этом угловая скорость ведомого колеса изменяется по гармоническому закону для первого типа зацепления с периодом  $2\pi$ , а для второго с периодом равным  $\pi$ . Отношение максимальной угловой скорости к минимальной в первом случае равно 81, а во втором – 2,78.

Угловое ускорение для первого типа зацепления при некоторых углах  $\varphi$  поворота ведущего колеса достигает больших значений и превышает максимальные значения угловых скоростей для зацепления второго типа примерно в 12 раз. Поэтому зубчатая передача второго типа характеризуется более плавной работой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Фитматгиз, 1963. – 872 с.
2. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1981.