



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Сопротивление материалов
машиностроительного профиля»

В. А. СИДОРОВ
Л. Е. РЕУТ
А. А. ХМЕЛЕВ

ЭЩЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Методическое пособие

М и н с к
Б Н Т У
2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Сопротивление материалов
машиностроительного профиля»

В. А. СИДОРОВ
Л. Е. РЕУТ
А. А. ХМЕЛЕВ

ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Методическое пособие
к решению задач по механике материалов
для студентов машиностроительных специальностей

М и н с к
Б Н Т У
2 0 1 2

УДК 620.1(075.8)

ББК 30.121я7

С34

Рецензенты:

канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой «Механика материалов
и детали машин» УО БГАТУ *В. Н. Основин*;

канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой «Сопротивление материалов
и теории упругости» БНТУ *С. И. Зиневич*

Сидоров, В. А.

С34 Эпюры внутренних силовых факторов : методическое пособие к
решению задач по механике материалов для студентов машино-
строительных специальностей / В. А. Сидоров, Л. Е. Реут, А. А. Хме-
лев. – Минск : БНТУ, 2012. – 55 с.

ISBN 978-985-525-936-8.

В методическом пособии рассмотрены теоретические аспекты выявления внут-
ренних усилий при нагружении твердого тела, приведены примеры построения эпюр
внутренних силовых факторов, даны практические правила построения и контроля
правильности эпюр. Методическое пособие предназначено для студентов машино-
строительных специальностей.

УДК 620.1(075.8)

ББК 30.121я7

ISBN 978-985-525-936-8

© Сидоров В. А., Реут Л. Е.,
Хмелев А. А., 2012

© Белорусский национальный
технический университет, 2012

1. Внутренние силы. Основные понятия

Под действием внешних сил или изменения температуры реальные тела деформируются, т.е. изменяют свою форму и размеры. При нагружении твердого тела в нем возникают внутренние силы взаимодействия частиц, оказывающих противодействие внешним силам и стремящиеся вернуть частицы тела в положение, которое они занимали до деформации.

В сопротивлении материалов не принимаются во внимание внутренние силы, действующие в ненагруженном теле, а рассматриваются только те дополнительные внутренние силы, которые появляются при нагружении тела. Эти дополнительные внутренние силы взаимодействия, возникающие в результате нагружения, часто называют *усилиями*.

Внутренние силовые факторы в поперечном сечении определяются методами сопротивления материалов через внешние – нагрузки, силы и пары сил.

Пусть имеется брус (рис. 1), к которому приложена совокупность внешних сил $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$, удовлетворяющих условиям равновесия. Возникающие в брусе внутренние силы выявляются, если мысленно рассечь брус на две части, например, плоскостью m (рис. 1) и «открыть» сечение (рис. 2).

Такой прием выявления внутренних сил, в сопротивлении материалов называется *методом сечений*. Так как связи между частями бруса устранены, необходимо действие правой части на левую и левой части на правую заменить системой внутренних сил (F_n), распределенных по сечению.

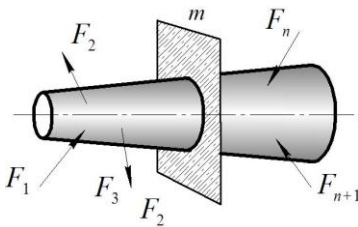


Рис. 1

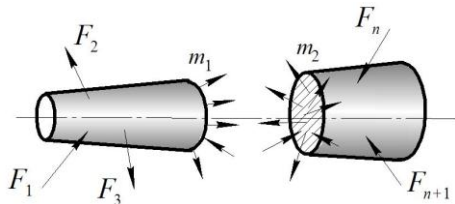


Рис. 2

Внутренние силы по принципу действия и противодействия всегда взаимны. Правая часть бруса действует на левую точно так, как левая на правую. С точки зрения теоретической механики система сил, возникающих в плоскости m_1 , обратная по знаку системе сил в плоскости m_2 , так как силы рассматриваются в отрыве от тел. В сопротивлении материалов и те и другие силы представляют собой одни и те же внутренние силы и им должен приписываться один и тот же знак. Закон распределения внутренних сил по сечению определяется не только внешними силами, но и геометрией оси бруса и геометрией поперечного сечения, но, однако во всех случаях внутренние силы должны быть такими, чтобы удовлетворялось условие равновесия для каждой части в отдельности. Символически это условие можно записать так:

$$\left\langle F_{\text{внеш}} \right\rangle_{\text{л}} + \left\langle F_{\text{внут}} \right\rangle_{\text{л}} = 0 \quad \text{или} \quad -\left\langle F_{\text{внут}} \right\rangle_{\text{п}} + \left\langle F_{\text{внеш}} \right\rangle_{\text{п}} = 0,$$

где под символами $(F_{\text{внеш}})_{\text{л}}$ и $(F_{\text{внеш}})_{\text{п}}$ понимается сумма внешних сил и пар сил для частей бруса, расположенных слева или справа от сечения соответственно. Под величиной $F_{\text{внут}}$ понимается то же условие для внутренних сил. Первое из приведенных выражений является символом шести условий (уравнений) равновесия для левой части бруса, а второе – для правой.

Так как все тело находится в равновесии, то

$$\left\langle F_{\text{внеш}} \right\rangle_{\text{л}} - \left\langle F_{\text{внут}} \right\rangle_{\text{л}} = 0,$$

а написанные уравнения равновесия для правых и левых частей становятся попарно тождественными. Это значит, что равнодействующая внутренних сил в сечении может определяться с равным успехом из условия равновесия либо левой, либо правой части рассеченного бруса. *Следовательно, внутренние силовые факторы, определяемые методом сечений, можно определить из условий равновесия правой или левой части рассеченного бруса.*

2. Метод сечений. Определение внутренних силовых факторов

Метод сечений является одним из распространенных способов определения внутренних силовых факторов в сечениях бруса. Он позволяет установить величину и направление силовых факторов, представляющих статический эквивалент напряженного состояния поперечного сечения.

Для определения внутренних силовых факторов методом сечений поступают следующим образом:

1. **Разрезают** мысленно брус на две части поперечным сечением.
2. **Отбрасывают** одну из частей.
3. **Заменяют** действие отброшенной части, на оставленную часть, внутренними силовыми факторами.
4. **Устанавливают** величину силовых факторов из условия равновесия оставленной части под действием внешних и внутренних сил.

Начальные буквы операций метода сечений составляют слово "**РОЗУ**".

Какие же внутренние силовые факторы определяются методом сечений в брус?

Воспользуемся правилами статики и приведем систему внутренних сил к центру тяжести сечения. В результате получим главный вектор R и главный момент M (рис. 3). Выберем далее систему координат X, Y, Z . Ось Z направим по нормали к сечению, а оси X и Y расположим в его плоскости. Спроектировав главный вектор и главный момент на оси X, Y, Z , получим шесть составляющих: три силы и три момента. Составляющая внутренних сил по нормали к сечению (N) называется *продольной или нормальной* силой. Продольная сила представляет собой равнодействующую нормальных напряжений, распределенных на поверхности поперечного сечения одной из частей бруса (рис. 4).

$$N = \int \sigma \cdot dA \quad (1)$$

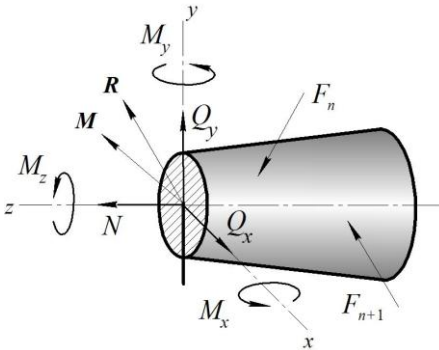


Рис. 3

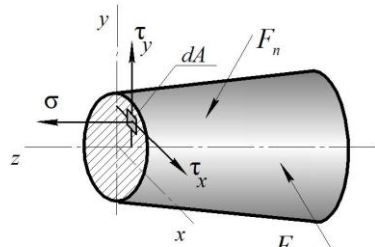


Рис. 4

Составляющие внутренних сил по осям поперечного сечения Q_x и Q_y называются *поперечными* силами. Поперечные силы определяются касательными напряжениями:

$$Q_x = \int \tau_x \cdot dA; \quad Q_y = \int \tau_y \cdot dA \quad (2)$$

Момент относительно нормальной оси z называется *крутящим* моментом M_k . Крутящий момент обусловлен касательными напряжениями:

$$M_k = \int (\tau_x \cdot y + \tau_y \cdot x) dA \quad (3)$$

Моменты относительно осей поперечного сечения M_x и M_y называются *изгибающими* и являются интегральными характеристиками нормальных напряжений:

$$M_x = \int \sigma \cdot y dA; \quad M_y = \int \sigma \cdot x dA \quad (4)$$

При известных внешних силах все шесть внутренних силовых факторов определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части бруса:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum Y &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum Z &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

С наличием определенных внутренних силовых факторов связаны простые виды деформаций – *растяжение, сжатие, изгиб, кручение*. Например, если на каком-то участке бруса в поперечных сечениях возникает только нормальная сила N , а прочие внутренние силовые факторы обращаются в нуль, то на этом участке имеет место растяжение или сжатие в зависимости от направления N . Если отличным от нуля является только крутящий момент M_k , то имеет место кручение. Если отсутствуют продольная силы и крутящий момент, то брус испытывает изгиб. Продольная сила положительна, если она растягивает брус. Знак крутящего момента выбирается произвольно, но должен быть единым в пределах решения одной задачи.

Изгибающий момент в сечении считается положительным, если он изгибает балку выпуклостью вниз (рис. 5). (*Балкой называется брус с прямой осью, работающий на изгиб*).

Поперечная сила считается положительной, если рассматриваемый элемент стремится повернуться по часовой стрелке (рис. 6).

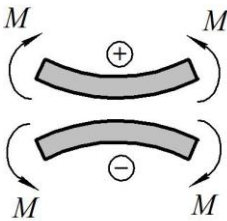


Рис. 5

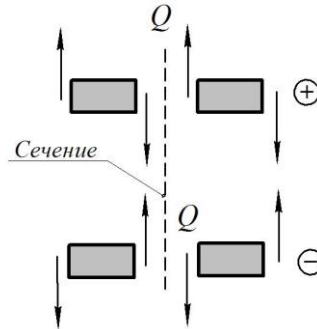


Рис. 6

Если в поперечных сечениях приложить *положительные внутренние силовые факторы*, то из условия равновесия получим не только величину, но и знак внутреннего силового фактора.

Для наглядного представления характера изменения внутренних силовых факторов M_x , M_y , M_k , N , Q_x , Q_y вдоль оси бруска строят их графики, которые называют *эпюрами* изгибающих и крутящих моментов, продольной и поперечных сил. *Эпюры позволяют установить наиболее нагруженные участки бруса и наметить опасные сечения. Кроме того, эпюры внутренних силовых факторов используются для вычисления перемещений.*

При построении эпюр рекомендуется пользоваться следующими основными правилами:

1. Ось отсчета, на которой строится эпюра, всегда выбирают так, чтобы она была параллельна оси стержня (или совпадала с ней).
2. Ординаты эпюр, выражающие в *выбранном масштабе* значение усилия или момента, откладываются от оси отсчета по перпендикуляру.
3. Эпюры принято штриховать линиями, перпендикулярными к оси отсчета. В зависимости от расположения оси отсчета (горизонтальное или вертикальное) положительные значения усилий или моментов откладываются вверх или справа от оси отсчета, отрицательные – вниз или слева.
4. На эпюрах проставляются числа, показывающие величины характерных ординат, а в поле эпюры в кружочке ставят знак усилия.

3. Построение эпюр внутренних силовых факторов

Наиболее распространенными способами построения эпюр являются:

1. Построение эпюр по аналитическим выражениям метода сечений.
2. Построение эпюр по характерным точкам метода сечений.
3. Построение эпюр методом прохода.

При построении эпюр первым методом записываются **аналитические выражения** внутренних силовых факторов в пределах одного участка. Границы участков определяют точками приложения внешних сил, изменяющих математическое выражение внутреннего силового фактора.

При построении эпюр **по характерным точкам** значения внутренних силовых факторов вычисляются методом сечений для границ участков (характерных точек). Этот метод усваивается учащимися быстрее, но требует применения определенных правил построения эпюр.

Распространенным методом построения эпюр в практике является **метод прохода**. Если составленное уравнение на основании метода сечений разрешить относительно искомого внутреннего силового фактора, то легко установить, *что продольная и поперечная силы равны сумме проекций всех сил, взятых по одну сторону от сечения на соответствующую ось в сечении. Если силы предварительно разложить на составляющие вдоль координатных осей прямого бруса, то установление продольной и поперечных сил в каждом сечении сводится к последовательному суммированию всех сил от крайнего сечения до рассматриваемого. При этом достаточно установить правило знаков для внешних сил в выражении внутреннего силового фактора, чтобы строить эпюры Q и M простым подсчетом суммы внешних сил.* Очевидно, в выражении для продольной силы будет знак плюс, если внешняя сила направлена от сечения, т.е. те силы, которые направлены на встречу вашего движения вдоль бруса при суммировании должны входить со знаком плюс, по ходу движения – со знаком минус.

При движении слева направо, т.е. при рассмотрении левой части бруса положительные внешние силы (силы, совпадающие по направлению с положительным направлением координатных осей) входят в выражение поперечной силы со знаком плюс.

Это же правило справедливо и для *изгибающих и крутящих моментов*. Изгибающий момент в сечении равен сумме моментов всех сил, расположенных по левую сторону от сечения, при этом моменты, стремящие повернуть рассматриваемую часть бруса по часовой стрелке входят со знаком плюс.

Все внешние силовые факторы меняют свой знак в выражении внутреннего силового фактора при изменении направления движения на противоположное. Это очевидно для продольной силы. Если при движении слева направо силы совпадали по направлению с направлением движения, то при движении справа налево (при рассмотрении правой части бруса) они будут направлены навстречу движению.

В той части бруса, которая несет распределенную нагрузку интенсивностью q , суммирование внешних сил заменяет интегрирование или подсчет площади графика интенсивности нагрузки, попавшей в рассматриваемую часть бруса. Это же относится и к распределенным моментам. Более того, при построении эпюр изгибающих моментов, подсчет моментов от внешних сил можно заменить подсчетом площади эпюры поперечных сил под рассматриваемой частью бруса.

Все сказанное имеет математическую интерпретацию в виде дифференциально-интегральных зависимостей между внутренними силовыми факторами и интенсивностью внешних нагрузок:

$$\frac{dN}{dz} = q_z; \quad \frac{dQ_x}{dz} = q_x; \quad \frac{dQ_y}{dz} = q_y; \quad (5)$$

$$\frac{dM_{\mathbf{k}}}{dz} = m_z; \quad \frac{dM_x}{dz} = m_x + Q_y; \quad \frac{dM_y}{dz} = m_y + Q_x$$

$$\begin{aligned} N &= \int q_z dz + \sum F_z & M_{\mathbf{k}} &= \int m_z dz + \sum M_z \\ Q_x &= \int q_x dz + \sum F_x & M_x &= \int (m_x + Q_y) dz + M_x \\ Q_y &= \int q_y dz + \sum F_y & M_y &= \int (m_y + Q_x) dz + M_y \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство приведенных зависимостей можно получить, рассмотрев равновесие части бруса, вырезанного двумя поперечными сечениями, под действием внутренних силовых факторов и распределенной нагрузки (рис. 7).

В таком виде дифференциальные зависимости приводятся в учебной и справочной литературе.

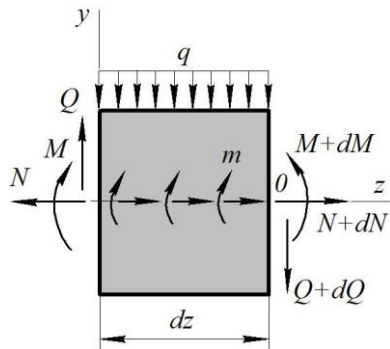


Рис. 7

4. Практические правила построения и контроля эпюр

Из дифференциально-интегральных зависимостей (5)-(6) выводится ряд правил, которыми руководствуются при построении эпюр M_x , M_y , M_k , N и Q .

Для эпюр продольных сил:

1. На участках, не содержащих продольной распределенной нагрузки, эпюра продольных сил очерчена прямыми, параллельными оси (соответствует нулевому уровню продольной силы).

2. В сечениях, где приложена сосредоточенная сила, направленная вдоль оси бруса, на эпюре N будет скачок на величину этой силы. Если сосредоточенная сила наклонена к оси бруса, то на эпюре продольных сил будет скачок на величину ее компоненты вдоль оси бруса. Поэтому при построении эпюры по характерным точкам в области, содержащей сосредоточенную силу, следует вычислить два значения продольной силы и непосредственной близости до точки приложения силы и за ней.

3. На участке, содержащем равномерно распределенную продольную нагрузку, эпюра продольных сил очерчена наклонной прямой. Эпюра продольных сил на порядок выше эпюры продольных нагрузок (эпюры внешних сил, действующих вдоль оси бруса).

Для эпюр крутящих моментов:

1. На участке, не несущем распределенной моментной нагрузки относительно оси бруса, эпюра крутящих моментов очерчена прямыми, параллельными оси нулевому уровню крутящих моментов.

2. В сечениях, в которых приложен сосредоточенный момент относительно оси бруса, на эпюре крутящих моментов будет скачок на величину этого момента (компоненты).

Эпюра крутящих моментов на порядок выше эпюры распределенных моментов относительно оси бруса.

Для эпюр поперечных сил и изгибающих моментов:

1. Эпюра поперечных сил очерчена прямыми, параллельными оси на тех участках, на которых нет соответствующей интенсивно-

сти поперечной нагрузки. Если при этом на участке нет распределенной моментной нагрузки, то эпюра изгибающих моментов очерчена прямыми, наклонными на тех участках, на которых поперечная сила отлична от нуля, и параллельна оси на участках с нулевым значением поперечной силы.

2. В сечениях, содержащих точку приложения сосредоточенной силы, параллельной поперечной оси в сечении, будет скачок на величину этой силы на эпюре поперечных сил и излом на эпюре моментов.

3. В сечениях, где приложен сосредоточенный момент относительно оси сечения, на соответствующей эпюре моментов будет скачок на величину момента (скачкообразное изменение ординаты эпюры), а на эпюре поперечных сил характер кривой не изменяется.

4. На участках, не содержащих моментной нагрузки, ордината эпюры изгибающего момента отличается от предыдущей на площадь участка эпюры поперечной силы между названными сечениями.

Площадь треугольного участка поперечной силы равна квадрату ординаты, деленному на удвоенное значение интенсивности нагрузки.

5. Экстремальные значения изгибающих моментов наблюдаются в сечениях по длине балки, где эпюры поперечных сил проходят через нуль.

6. На концевой шарнирной опоре поперечная сила равна реакции опоры, а изгибающий момент равен нулю, если на опоре не приложен сосредоточенный момент.

7. В заделке поперечная сила равна реакции, а изгибающий момент равен моменту в заделке.

8. В промежуточном шарнире поперечная сила равна реакции шарнира, а изгибающий момент равен нулю.

Ординаты эпюр представляют собой значения внутреннего силового фактора в данном сечении в масштабе построения и откладываются по перпендикулярам к оси (нулевому уровню). На эпюрах продольных и поперечных сил указывается знак внутреннего силового фактора.

5. Примеры построения эпюр для различных видов нагружения брусьев

5.1. Растяжение (сжатие)

Пример 1

Для изображенного на рис. 8, а стержня построить эпюры продольных сил без учета собственного веса.

Дано: $F_1 = 40$ кН; $F_2 = 60$ кН; $F_3 = 80$ кН; $F_4 = 40$ кН; $F_5 = 80$ кН.

Решение:

Мысленно рассекаем стержень в пределах участка I и отбрасываем верхнюю часть (рис. 8, б). Для уравнивания силы F_1 необходимо, чтобы равнодействующая внутренних сил (продольная сила N_1) была равна внешней силе F_1 :

$$N_1 = F_1 = 40 \text{ кН}$$

Аналогично мысленно рассекаем стержень в пределах участка II и отбрасываем верхнюю часть (рис. 8, в). Чтобы уравновесить внешние силы F_1 и F_2 , равнодействующая внутренних сил (продольная сила N_2) должна быть равна алгебраической сумме сил F_1 и F_2 :

$$N_2 = F_1 - F_2 = 40 - 60 = -20 \text{ кН}$$

Аналогично, рассекая стержень на остальных участках, получаем:
– на участке III (рис. 8, г):

$$N_3 = F_1 - F_2 + F_3 = 40 - 60 + 80 = 60 \text{ кН}$$

– на участке IV (рис. 8, д):

$$N_4 = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = 40 - 60 + 80 - 40 = 20 \text{ кН}$$

– на участке V (рис. 8, е):

$$N_5 = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 = 40 - 60 + 80 - 40 + 80 = 100 \text{ кН}$$

Продольные силы на любом из участков можно также определить, мысленно отбросив нижнюю часть стержня и рассматривая равновесие его верхней части, предварительно определив опорную

реакцию. В соответствии с полученными данными строим эпюру продольных сил (рис. 8, ж). Стержень на участках I, III, IV испытывает растяжения, а на участке II – сжатие.

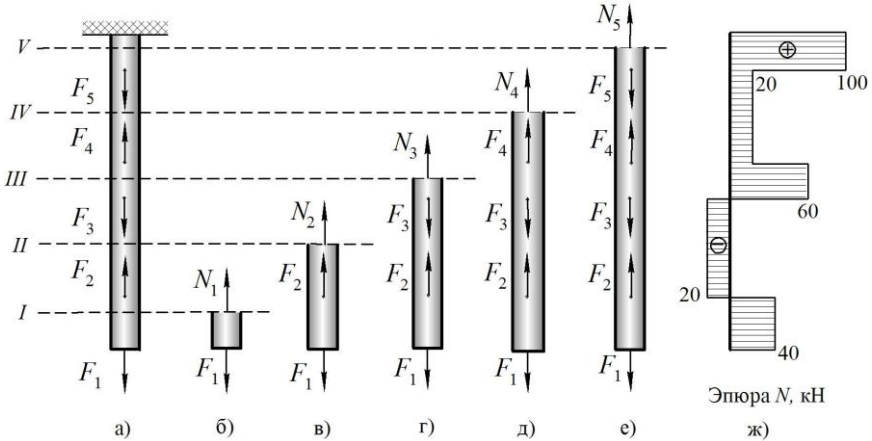


Рис. 8

Пример 2

Для изображенного на рис. 9, а, стержня построить эпюры продольных сил без учета и с учетом собственного веса стержня.

Решение:

Строим эпюру продольных сил методом прохода, двигаясь от нижнего свободного конца.

Продольная сила на III-ем участке от точки приложения силы F_3 равна этой силе. При переходе через точку приложения силы F_2 продольная сила скачкообразно изменяется до значения $(-2F)$, так как сила $F_2 = 3F$ совпадает с направлением прохода. Очередное изменение продольной силы будет при переходе от II-го к I-му участку. Поэтому к предыдущему значению продольной силы следует прибавить $F_1 = 6F$. И тогда в результате получаем:

$$N_{III} = F \quad N_{II} = -2F \quad N_I = 4F,$$

что и отражено на эпюре (рис. 9, б). Так как брус не несет продольной распределенной нагрузки, эпюра на участках I, II, III очерчена прямыми, параллельными его оси.

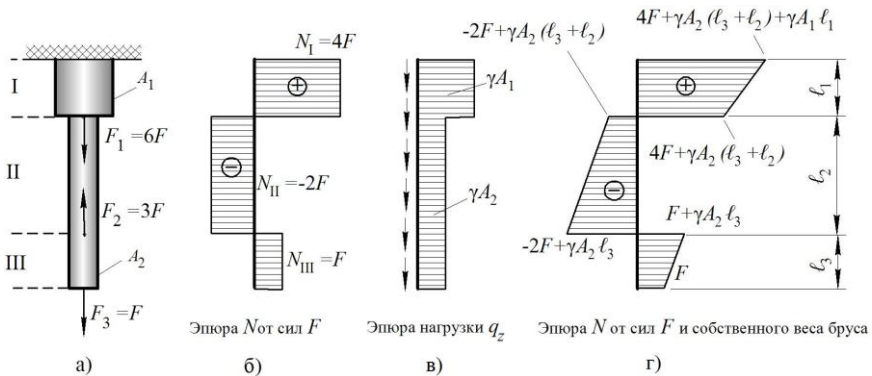


Рис. 9

При учете собственного веса на брус действует дополнительная нагрузка, распределенная по его длине и направленная вдоль оси. Интенсивность q этой нагрузки пропорциональна площади поперечного сечения и представлена в виде эпюры на рис. 9, в. При построении эпюры продольных сил с учетом собственного веса к ординатам эпюры, изображенной на рис. 9, б, следует добавить площади эпюры интенсивности нагрузки, расположенной ниже рассматриваемого сечения:

- В крайнем нижнем сечении продольная сила $N = F$, так как ниже силы F_3 нет площади эпюры интенсивности нагрузки.
- В сечении ниже силы F_2 (в непосредственной близости к ней), продольная сила N равна:

$$N = F + \gamma \cdot A_2 \cdot l_3$$

- В сечении ниже F_1 в непосредственной близости к ней продольная сила N равна:

$$N = F_3 - F_2 + \gamma \cdot A_2 \cdot (l_3 + l_2) \Rightarrow -2F + \gamma \cdot A_2 \cdot (l_3 + l_2)$$

- В сечении выше силы F_2 в непосредственной близости к ней:

$$N = -2F + \gamma \cdot A_2 \cdot l_3$$

- В сечении выше F_1 :

$$N = F_1 - F_2 + F_3 + \gamma \cdot A_2 \cdot (l_3 + l_2) \Rightarrow 4F + \gamma \cdot A_2 \cdot (l_3 + l_2)$$

- В заделке:

$$N = 4F + \gamma \cdot A_2 \cdot (\ell_3 + \ell_2) + \gamma \cdot A_1 \cdot \ell_1$$

Эпюра продольных сил с учетом собственного веса представлена на рис. 9, з.

5.2. Кручение

Пример 3

Построить эпюру крутящих моментов вала, несущего четыре шкива (рис. 10, а). Правый крайний шкив D – ведущий, шкивы A, B, C – ведомые. Как изменится эпюра крутящих моментов M_k , если ведущий шкив поместить между ведомыми шкивами третьим слева?

Решение:

Строим эпюры методом прохода слева направо (рис. 10, б). До шкива A крутящий момент равен нулю. Эпюра крутящих моментов должна быть очерчена прямыми, параллельными оси Z , так как вал нагружен сосредоточенными моментами.

Под шкивом A на эпюре M_k – скачок на величину момента M_A . Момент положительный, скачок вверх.

До шкива B крутящий момент не изменяется, а под шкивом B скачкообразно возрастает на величину M_B . Между шкивами момент постоянный, а под шкивом C скачкообразно возрастает на M_C .

Так как эпюра M_k должна быть замкнутой, то под ведущим шкивом должно быть скачкообразное изменение момента до нуля. При этом величина скачка равна моменту на ведущем шкиве.

Справа от ведущего шкива D эпюра M_k нулевая. Таким образом, согласно эпюре (рис. 10, б) наиболее нагруженным является участок слева от ведущего шкива и здесь $M_k = M_D = M_{\max}$.

Рассмотрим, как изменится эпюра крутящих моментов, если ведущий D и ведомый C шкивы поменять местами. Схема конструкции представлена на рис. 10, в.

Так как слева от секущей плоскости $n-n$ (рис. 10, а) изменений в расчетной схеме нет, то эпюра M_k слева от сечения и на участке, где взято сечение, совпадает с рассмотренной нами выше.

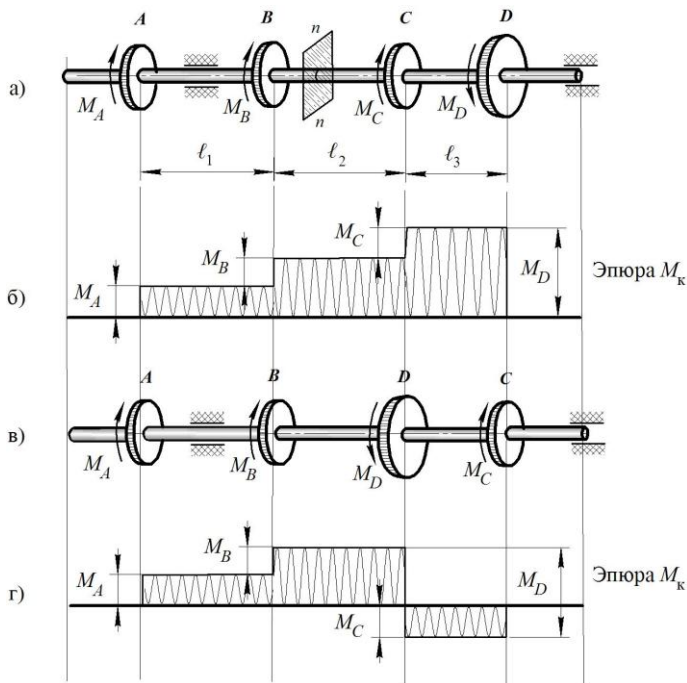


Рис. 10

При движении дальше вправо под шкивом D будет скачок в отрицательном направлении (вниз) на величину момента M_D на ведущем шкиве. На участке между шкивами D и C будет отрицательное значение крутящего момента M_k и скачок на эпюре в положительном направлении под шкивом C эпюра замыкается, т.е. за шкивом C будет нулевой.

Второй вариант размещения шкивов (рис. 10, в) является более благоприятным, так как при таком размещении шкивов уменьшается значение максимального крутящего момента. Теперь, как видно из эпюры (рис. 10, г), $M_{\max} = (M_D - M_C)$ и, следовательно, нагрузка на вал уменьшается.

Пример 4

При завинчивании винтовой сваи в грунт мощность механизма (кабестана) позволяет передать максимальный момент на сваю $M = 500$ кНм. Сопротивление грунта завинчиванию лопасти, приве-

денное к сечению $n-n$, составляет $M_1 = 280$ кНм (рис. 11, а), а сопротивление сил трения о сваю со стороны грунта представлено в виде распределенной по линейному закону моментной нагрузки $m_h = k \cdot h$, эпюра которой изображена на рис. 11, б, где $k = 2$ кНм.

Определить максимальную глубину погружения ствола сваи в грунт и построить эпюру крутящих моментов M_k для предельного случая.

Решение:

В сечении $n-n$ значение $M_k = -280$ кНм, так как определяется моментом сопротивления лопасти при завинчивании в грунт. Так как рассматривается нижняя часть бруса, поэтому внешний момент входит в выражение M_k со своим знаком. Далее при движении вверх момент M_k возрастает по закону квадратной параболы, так как интенсивность изменяется по линейному закону. Следовательно, кривая на эпюре M_k направлена выпуклостью вправо, как показано на рис. 11, в. На первом участке эпюра M_k очерчена прямой, параллельной оси, так как распределенных моментов на этом участке вала нет. Для предельного погружения сваи максимальное значение $M_k = 500$ кНм, что не трудно заметить при рассмотрении верхней части сваи, так как нет распределенных моментов на этом участке вала.

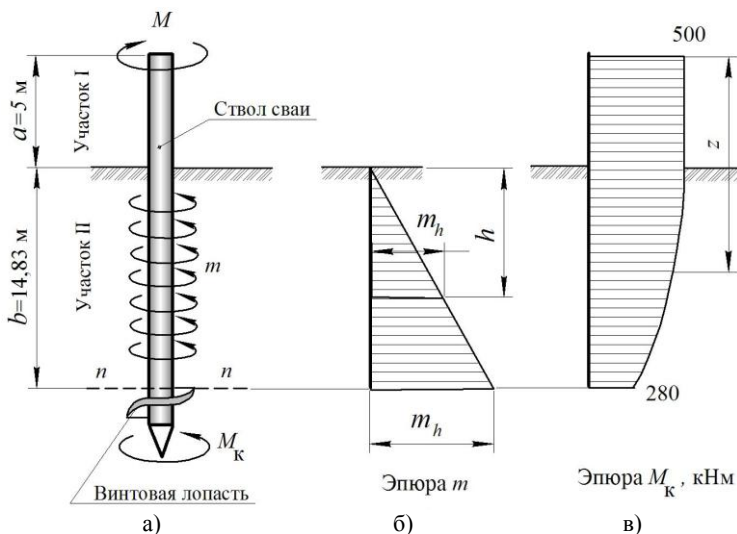


Рис. 11

Определим глубину b погружения сваи в грунт. Изменение крутящего момента на участке определяется площадью эпюры интенсивности нагрузки. Из эпюры M_k это изменение равно:

$$500 - 280 = 220 \text{ (кНм)}$$

С другой стороны, из площади эпюры (рис. 11, б) следует:

$$220 = \frac{1}{2} m_b \cdot b = \frac{1}{2} k \cdot b^2, \quad \text{откуда:} \quad b = \sqrt{\frac{2 \cdot 220}{2}} = 14,83 \text{ м.}$$

5.3. Изгиб

5.3.1. Статически определяемые балки

Пример 5

Построить эпюры Q и M для балки, представленной на рис. 12, а.

Решение:

Для балок, опирающихся на опоры, перед построением эпюр необходимо определить реакции опор. Балка является статически определимой, поэтому составив уравнения моментов относительно опор, определяем реакции:

$$\sum M_B = 0: \quad F_1 \cdot 10 - R_A \cdot 8 + F_2 \cdot 6 + q \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \right) - F_3 \cdot 2 = 0$$

$$1 \cdot 10 - R_A \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 0,8 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0$$

$$\boxed{R_A = 5,6 \text{ кН}}$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 \right) - F_3 \cdot 6 + R_B \cdot 8 = 0$$

$$1 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 0,8 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot 6 + R_B \cdot 8 = 0$$

$$\boxed{R_B = 3,6 \text{ кН}}$$

После определения реакций опор необходимо провести проверку, так как ошибка в их определении приведет к неверному построению эпюр:

$$\sum Y = 0: \quad -F_1 + R_A - F_2 - q \cdot 4 - F_3 + R_B = 0$$

$$-1 + 5,6 - 3 - 0,8 \cdot 4 - 2 + 3,6 = 0$$

При построении эпюр воспользуемся методом прохода. На консоли (части балки, свисающей за опору) эпюра поперечных сил постоянна, Q равна левой крайней силе F_1 и в соответствии с правилом знаков $Q = -1$ кН. Изгибающий момент на этом участке изменяется по линейному закону и он отрицателен, так сила F_1 изгибает балку выпуклостью вверх. Под силой F_1 изгибающий момент равен нулю, в опорном сечении A момент $M = -2$ кНм.

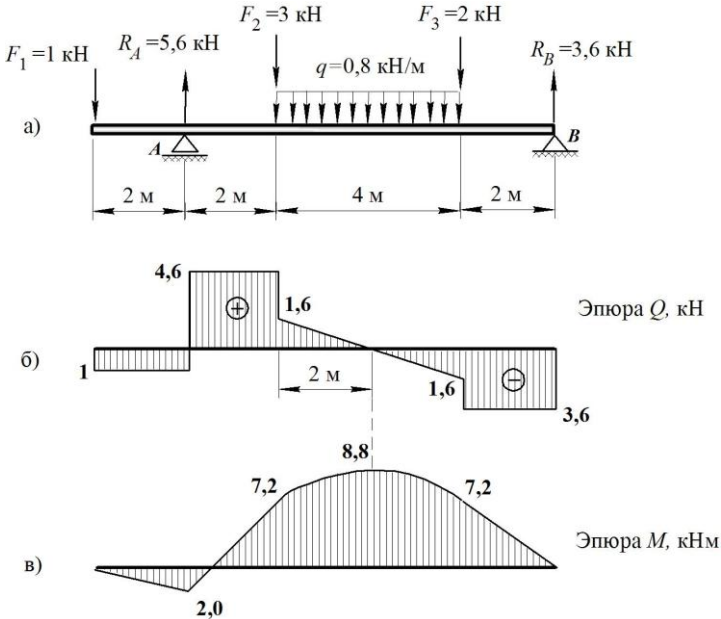


Рис. 12

На участке от опорного сечения A до точки приложения силы F_2 на левой границе распределенной нагрузки, поперечная сила определяется разностью реакции и силы на консоли, т.е. $Q = 5,6 - 1 = 4,6$ кН и она постоянна. В опорном сечении A мы получаем скачок на эпюре Q на величину реакции R_A (см. эпюру). Двигаясь по балке, отмечаем, что на границе интенсивности нагрузки слева на эпюре Q должен быть скачок на величину силы $F_2 = 3$ кН вниз, а затем монотонное убывание по линейному закону. До скачка на правой границе поперечная сила изменяется на площадь распределенной нагрузки между рассматриваемыми сечениями, т.е. на $0,8 \cdot 4 = 3,2$ кН. Так

как на левой границе $Q = 1,6$ кН, то на правой будет такое же значение, но со знаком минус. В конце участка распределенной нагрузки действует сосредоточенная сила $F_3 = 2$ кН, направленная вниз. Следовательно, на эпюре Q будет в этом сечении скачкообразное изменение поперечной нагрузки в отрицательном направлении. Значение поперечной силы станет равным $-3,6$ кН. Это значение должно быть постоянным на всем участке от силы F_3 до правого опорного сечения B . То, что реакция $R_B = 3,6$ кН свидетельствует о том, что эпюра Q замкнутая, так как при проходе правого опорного сечения мы получаем нулевое значение поперечной силы Q . В свою очередь, замкнутая эпюра Q свидетельствует о том, что опорные реакции балки были определены верно.

Эпюра изгибающих моментов на крайнем левом участке и на участке между опорным сечением A и левой границей распределенной нагрузки очерчена по прямой согласно правилам. Изгибающие моменты здесь соответственно равны:

– на опоре A :

$$M = -F_1 \cdot 2 = -2 \text{ кНм}$$

– на левой границе распределенной нагрузки изгибающий момент определяется как сумма моментов всех сил слева от сечения относительно сечения:

$$M = -F_1 \cdot 4 + R_A \cdot 2 = -1 \cdot 4 + 5,6 \cdot 2 = +7,2 \text{ кНм}$$

Изгибающий момент здесь также может быть определен по эпюре Q – значение ординаты эпюры M отличается от ординаты в опорном сечении на площадь эпюры Q между этими сечениями:

- момент в опорном сечении равен $M = -2$ кНм
- площадь эпюры Q на данном участке равна $4,6 \cdot 2 = 9,2$ кНм
- следовательно, момент на левой границе распределенной нагрузке определяется как

$$M = -2 + 9,2 = +7,2 \text{ кНм}$$

На участке распределенной нагрузки эпюра M представляет собой квадратную параболу, которая начинается со значения $7,2$ кНм в правой границе и заканчивается значением $7,2$ на левой границе

распределенной нагрузки, потому что положительный и отрицательный треугольник на эпюре Q равновелики.

Экстремальное значение M_{\max} изгибающий момент принимает в том сечении, на Q переходит через ноль. Оно отличается от значения на границе на площадь треугольника эпюры Q .

$$M_{\max} = +7,2 + 1/2 \cdot 3,6 \cdot 2 = 8,8 \text{ кНм}$$

Полезно использовать следующее правило: площадь треугольника на эпюре Q равна квадрату ординаты эпюры, разделенной на удвоенное значение интенсивности нагрузки на данном участке, т.е. $A_Q = \frac{Q^2}{2q}$.

Например:

- площадь эпюры Q на левой половине распределенной нагрузки равна

$$A_Q = 1/2 \cdot 3,6 \cdot 2 = 3,6 \text{ кНм}$$

- здесь ордината $Q = 3,6 \text{ кН}$, ее квадрат равен $Q^2 = 12,96 \text{ (кН}^2\text{)}$
- разделив это значение на удвоенное значение интенсивности нагрузки на данном участке $\rightarrow 2q = 3,6 \cdot 2 = 7,2 \text{ кН/м}$, получим значение A_Q :

$$A_Q = \frac{Q^2}{2q} = \frac{12,96}{7,2} = 1,8 \text{ кНм}$$

Прибавляя значение A_Q к ординате момента $M = 7,2 \text{ кНм}$, найдем $M_{\max} = 7,2 + 1,8 = 9,0 \text{ кНм}$, что и было показано выше. Предлагается самостоятельно проверить этим методом ординаты эпюры M в сечениях, удаленных на один метр от границы интенсивности нагрузки.

На последнем участке эпюра M очерчена прямой. Как видно площадь эпюры Q на этом участке, равная $(3,6 \cdot 2) = 7,2 \text{ кН}$, обеспечивает замыкание эпюры M на ноль правее сечения B . Это означает,

что задача решена правильно, а следовательно, и правильно были найдены реакции не только в сумме, но и каждая в отдельности.

Иногда предоставляется возможность построить эпюры, не вычисляя реакций опор (обычно в консольных балках). Рассмотрим несколько примеров.

Пример 6

Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для консольной балки, защемленной правым концом (рис. 13).

- балка нагружена сосредоточенной силой;
- балка нагружена распределенной нагрузкой.

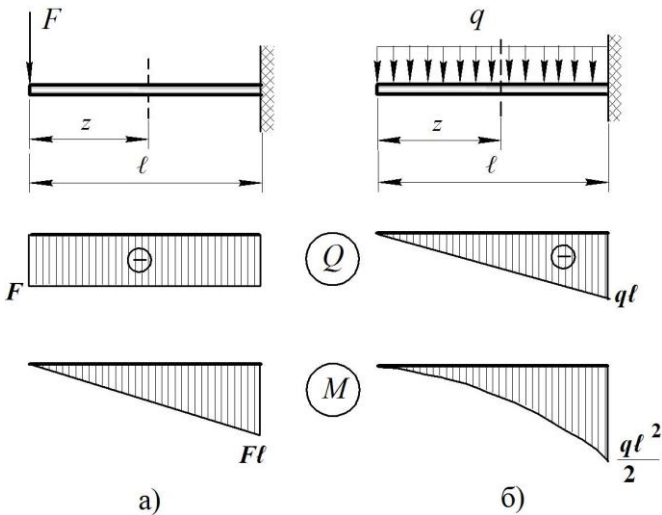


Рис. 13

Решение:

Для схемы (рис. 13, а) поперечная сила Q равна сосредоточенной силе F , приложенной на консоли, и постоянна на всей длине участка. Для схемы (рис. 13, б) она изменяется по линейному закону от нуля на левом конце балки до значения ql в заделке.

Соответственно, эпюра изгибающих моментов очерчена прямой для первой схемы и квадратной параболой для второй. Максимальная ордината момента в заделке равна площади эпюры Q .

Обычно руководствуются правилом: при построении эпюры со стороны сжатого волокна кривая имеет выпуклость навстречу действия распределенной нагрузки (рис. 12 и рис. 13, б). Это относится и к ломаной эпюре M при действии сосредоточенных сил: эпюра M в этом случае всегда имеет перелом навстречу сосредоточенной силе (рис. 12).

Пример 7

Построить эпюры Q и M для двухопорной однопролетной балки (рис. 14):

а) балка нагружена сосредоточенной силой (рис. 14, а);

б) балка нагружена двумя одинаковыми силами F , равноудаленными от опор (рис. 14, б).

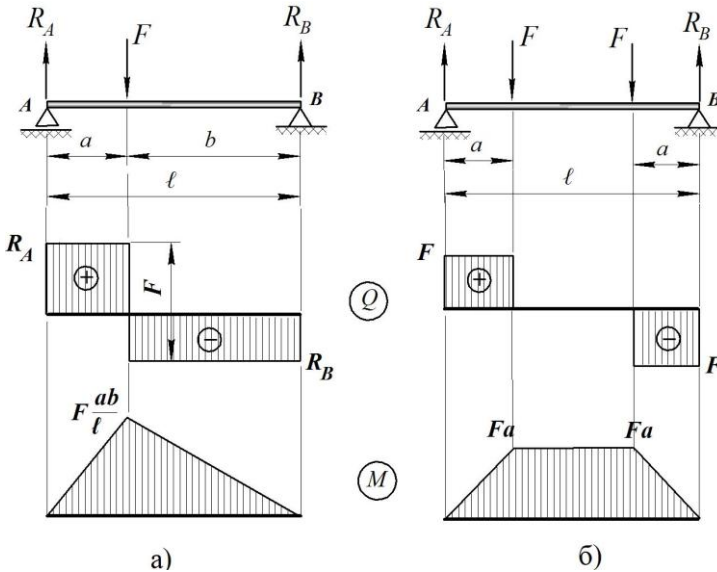


Рис. 14

Решение:

Определяем опорные реакции:

– для первой схемы опорные реакции равны:

$$R_A = F \frac{b}{\ell} \text{ и } R_B = F \frac{a}{\ell};$$

– для второй схемы, исходя из симметрии нагрузки:

$$R_A = R_B = F.$$

Методом прохода устанавливаем, что поперечная сила в опорном сечении равна реакции R_A и постоянна до сечения, в котором приложена сила F . В этом сечении поперечная сила скачкообразно уменьшается на величину этой силы, а далее имеет постоянной значение, равное реакции R_B , но с обратным знаком.

Для второй балки (рис. 14, б) $R_A = F$, и эпюра Q замыкается на ноль в начале второго участка, где в действие вступает сила F . На втором участке $Q = 0$, а в конце участка (рис. 14, б) поперечная сила скачкообразно изменяется в минус на величину F и эпюра Q замыкается на опорной реакции $R_B = F$.

Изгибающий момент возрастает по линейному закону. Ордината на эпюре M в точке приложения силы F численно равна площади прямоугольника с эпюры Q .

Излом на эпюре M будет в сечении по длине балки, в котором приложена сосредоточенная сила и направлен острием навстречу действию силы. Это особенно важно помнить при построении эпюры на участках с большим количеством сосредоточенных сил, чтобы правильно изобразить эпюру моментов, когда масштабы не выдерживаются строго. На втором участке, где $Q = 0$, а момент постоянный $M = \text{const}$, имеет место *чистый изгиб*.

Пример 8

Для заданной балки (рис. 15) построить эпюры Q и M .

Решение:

Определяем реакции опор:

$$\sum M_B = 0: F_1 \cdot 7 + F_2 \cdot 5 + F_3 \cdot 3 + F_4 \cdot 1,5 - R_A \cdot 8 = 0$$

$$3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1,5 - R_A \cdot 8 = 0 \quad \boxed{R_A = 6,13 \text{ кН}}$$

$$\sum M_A = 0: -F_1 \cdot 1 - F_2 \cdot 3 - F_3 \cdot 5 - F_4 \cdot 6,5 + R_B \cdot 8 = 0$$

$$-3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 5 - 4 \cdot 6,5 + R_B \cdot 8 = 0 \quad \boxed{R_B = 6,87 \text{ кН}}$$

Проверка $\sum Y = 0: R_A + R_B - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = 0$

$$6,13 + 6,87 - 3 - 2 - 4 - 4 = 0$$

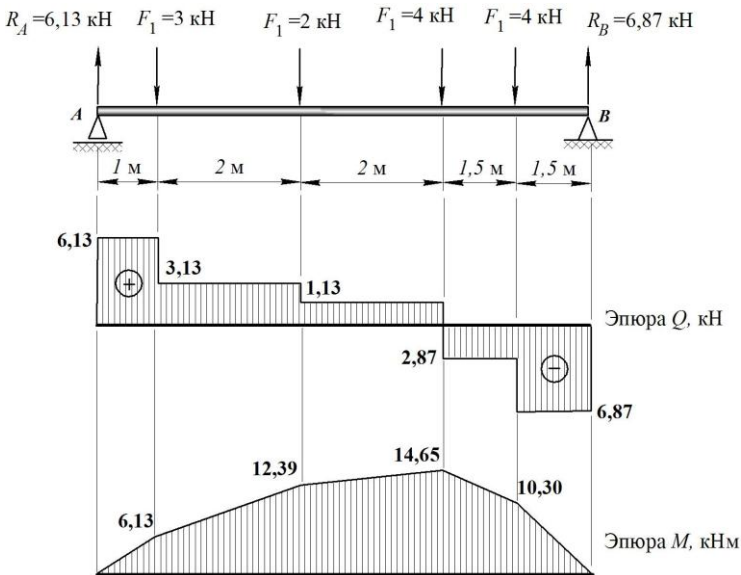


Рис. 15

Строим эпюру Q методом прохода. В опорном сечении Q принимает значение реакции $R_A = 6,13 \text{ кН}$ и под силой F_1 уменьшается на 3 кН , принимая значение $3,13 \text{ кН}$. Под силой $F_2 = 2 \text{ кН}$, Q изменяется до $1,13 \text{ кН}$ и под следующей силой F_3 принимает отрицательное значение, равное $-2,87 \text{ кН}$. Претерпев еще одно скачкообразное изменение, под последней силой F_4 в минус до значения $-6,87 \text{ кН}$, эпюра Q замыкается на реакции R_B .

Эпюра моментов вся в положительной области. В опорном сечении $M = 0$. Под первой силой величина момента равна $M = +6,13 \text{ кНм}$ согласно правилу знаков для M . В следующей точке под силой

$F_2 = 2$ кН момент увеличится на величину площади эпюры Q на втором участке слева и примет значение: $6,13 + 3,13 \cdot 2 = 12,39$ кНм. Максимальное значение ординаты M по модулю будет в сечении под силой $F_3 = 4$ кН и примет соответственно значение, увеличенное на площадь эпюры Q на среднем участке балки: $12,39 + 1,13 \cdot 2 = 14,65$ кНм. Далее, начиная с этой ординаты, момент убывает до нуля в опорном сечении B .

На эпюре изгибающих моментов знак обычно не указывается. Согласно правилу знаков, принятому в машиностроении, эпюры изгибающих моментов всегда строятся со стороны сжатых волокон.

Пример 9

Построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для двухопорной балки (рис. 16), нагруженной сосредоточенным моментом. Как изменится эпюра моментов, если момент m сместить к опорным сечениям?

Решение:

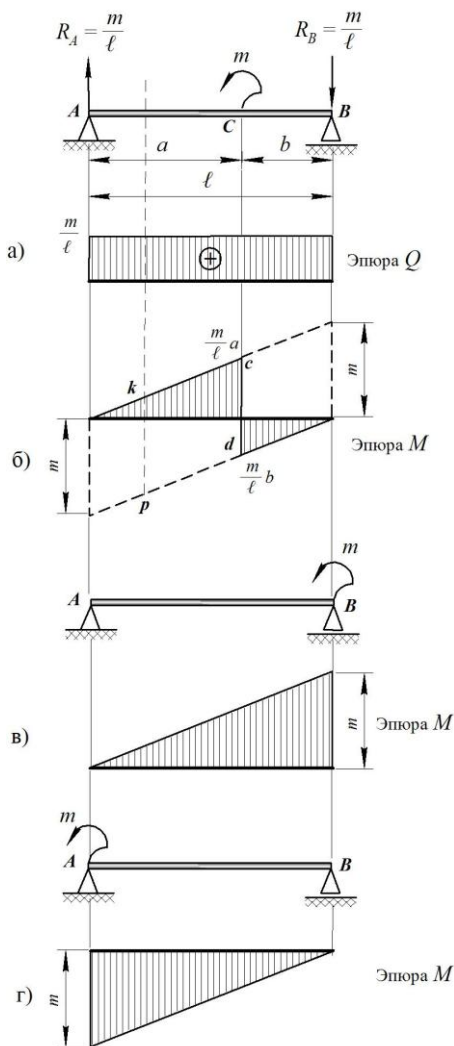


Рис. 16

Каждая опорная реакция равна $\frac{m}{\ell}$ и направлена против направления момента m . Поперечная сила Q на всем пролете балки постоянна и равна реакциям $Q = R_A = R_B = \frac{m}{\ell}$ (рис. 16, а).

Строим эпюру M . Значение M от нуля в опорном сечении A возрастает по линейному закону. В сечении C при движении слева момент равен $M = \frac{m}{\ell}a$. Под сосредоточенным моментом m на эпюре M возникает скачок в отрицательном направлении на величину момента, приложенного в сечении (рис. 16, б). Далее эпюра вновь возрастает по линейному закону до нуля в опорном сечении B .

Если на эпюру изгибающих моментов провести продолжения – пунктирные линии, то при смещении точки приложения момента m , скачок также будет перемещаться, при этом для любого положения момента m отрезок $cd = kp = m$. Из сказанного ясно, каким образом будет изменяться эпюра моментов при смещении m к опорному сечению. На рис. 16, в, г указаны предельные случаи, когда момент m приложен в опорном сечении. Реакции опор при этом, а значит, и эпюра поперечных сил остаются неизменными (рис. 16, а).

Пример 10

Построить эпюры Q и M для балки, нагруженной распределенной нагрузкой, изменяющейся по закону треугольника $q_z = q_0 \frac{z}{\ell}$ (рис. 17).

Решение:

Определяем реакции опор. Результирующая R_q данной распределенной нагрузки, изменяющейся по заданному линейному закону, равна площади грузовой эпюры, т.е. площади треугольника, и проходит через его центр тяжести (рис. 17, а):

$$R_q = \frac{1}{2} q_0 l$$

$$\sum M_B = 0: R_q \cdot \frac{1}{3} l - R_A \cdot l = 0; \quad \frac{1}{2} q_0 l \cdot \frac{1}{3} l - R_A \cdot l = 0 \quad \boxed{R_A = \frac{q_0 l}{6}}$$

$$\sum M_A = 0: -R_q \cdot \frac{2}{3} l + R_B \cdot l = 0; \quad -\frac{1}{2} q_0 l \cdot \frac{2}{3} l + R_B \cdot l = 0 \quad \boxed{R_B = \frac{q_0 l}{3}}$$

Закон распределения ординат Q представляет квадратную параболу, а изгибающих моментов – кубическую параболу. Запишем выражение для Q и M :

– в сечении на расстоянии Z от опоры A :

$$q_z = \frac{q_0 z}{l}$$

– тогда поперечная сила Q_z в этом сечении определится как сумма реакции R_A и результирующей распределенной нагрузки на этом участке, определяемой как площадь треугольника:

$$Q_z = \frac{q_0 l}{6} - \frac{1}{2} \cdot q_0 \frac{z}{l} \cdot z = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 z^2}{2l}$$

– изгибающий момент в этом сечении равен:

$$M_z = \frac{q_0 l}{6} z - \frac{q_0 z^2}{2l} \cdot \frac{1}{3} z = \frac{q_0 l}{6} z - \frac{q_0 z^3}{6l}$$

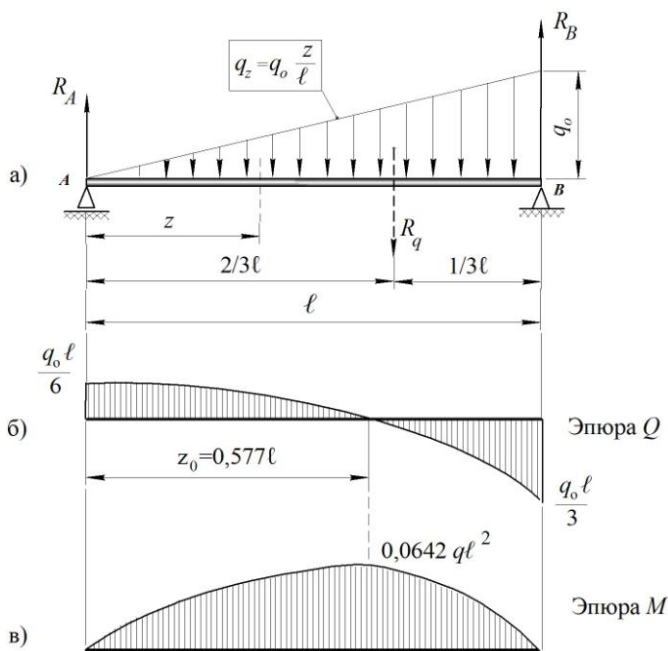


Рис. 17

Задавая значения z , строим эпюры поперечных сил (рис. 17, б) и изгибающих моментов (рис. 17, в). Так как эпюра Q переходит через нуль, то в этом сечении на эпюре моментов должен быть экстремум. Определяем точку экстремума z_0 , приравняв выражение Q_z к нулю:

$$Q_{z_0} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 z^2}{2l} = 0, \quad \text{отсюда} \quad z_0 = 0,577l$$

Максимальное значение M_{\max} определяется из выражения для изгибающего момента при подстановке $z_0 = 0,577l$ (рис. 17, в):

$$M_{\max} = \frac{q_0 l}{6} z_0 - \frac{q_0 z_0^3}{6l} = \frac{q_0 l}{6} (0,577l) - \frac{q_0 (0,577l)^3}{6l} = 0,0642 ql^2$$

На практике чаще используется эпюра изгибающих моментов, а эпюра поперечных сил строится лишь иногда для уточнения некоторых координат.

Пример 11

Для заданной балки (рис. 18, а) построить эпюру поперечных сил и изгибающих моментов.

Решение:

На консолях, изгибающий момент согласно правилу знаков отрицательный и изменяется по линейному закону от нуля под силами F до конечного значения в опорном сечении. Его величину определяем, умножив силу на плечо (расстояние от точки приложения силы до опорного сечения). Если бы в пролете не было распределенной нагрузки, то эпюру моментов можно было бы завершить, проведя прямую, соединяющую значения опорных моментов, как показано пунктиром ab на рис. 18, б. В этом случае отпала бы необходимость в построении эпюры Q .

Однако пролет загружен распределенной нагрузкой q , поэтому эпюра M здесь будет очерчена по квадратной параболе, направленной выпуклостью навстречу направлению нагрузки, т.е. вверх. При этом парабола на участке будет иметь экстремум, поэтому для вычисления точки экстремума необходимо построить эпюру Q на данном пролете, а для этого необходимо определить реакции опор.

На этом примере покажем один из удобных способов определения реакций, позволяющий их вычислить устно при симметричной загрузке пролета. Перенеся по законам механики силы в опорные сечения, получим систему (рис. 18, з), статически эквивалентную исходной. Однако в последней реакции определяются значительно проще. Каждая реакция в опорном сечении включает реакцию от перенесенной в опорное сечение нагрузки (силы или момента) и имеет от этой нагрузки соответствующее направление:

– на опоре A –

$$R_{F_1} = F_1 = 2 \text{ кН (вверх)}$$

$$R_q = \frac{q\ell}{2} = \frac{1,6 \cdot 6}{2} = 4,8 \text{ кН (вверх)}$$

$$R_{m_1} = \frac{m_1}{\ell} = \frac{4}{6} = 0,67 \text{ кН (вверх)}$$

$$R_{m_2} = \frac{m_2}{\ell} = \frac{2,4}{6} = 0,4 \text{ кН (вниз)}$$

Тогда опорные реакции как суммарное значение реакций нагрузок равны:

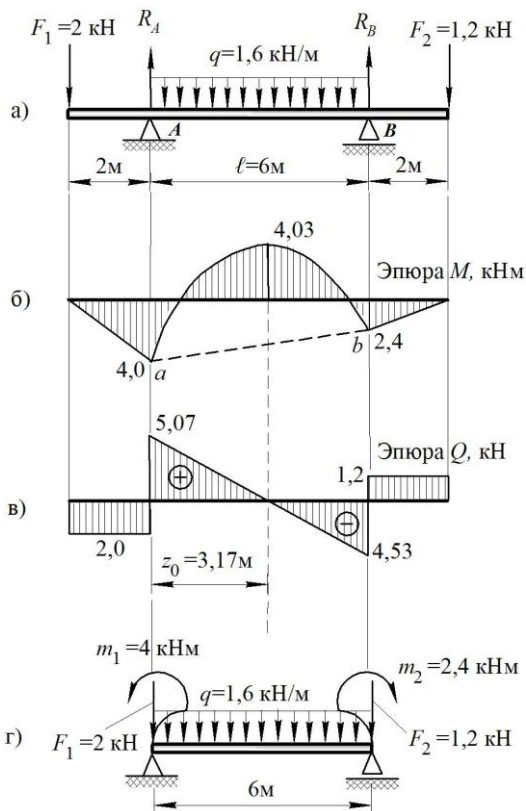


Рис. 18

$$R_q = \frac{q\ell}{2} = 4,8 \text{ кН (вверх)}$$

$$R_{m_1} = \frac{m_1}{\ell} = 0,67 \text{ кН (вниз)}$$

$$R_{m_2} = \frac{m_2}{\ell} = 0,4 \text{ кН (вверх)}$$

$$R_A = 2 + 4,8 + 0,67 - 0,4 = 7,07 \text{ кН}$$

$$R_B = 1,2 + 4,8 - 0,67 + 0,4 = 5,73 \text{ кН}$$

Эпюра поперечных сил представлена на рис.18, в. Точка экстремума, т.е. координата z_0 , при которой изгибающий момент на участке имеет максимум, определяется из условия $Q_{z_0} = -F + R_A - q \cdot z_0 = 0$ и равна:

$$z_0 = \frac{-F + R_A}{q} = \frac{-2 + 7,07}{1,6} = 3,17 \text{ м}$$

или $5,07/q$ (см. рис. 18, б).

Максимальная ордината момента соответственно равна:

$$M_{\max} = \left(F_1 + R_A \right) z_0 - m_1 - \frac{q \cdot z_0^2}{2} =$$

$$= \left(2 + 7,07 \right) 3,17 - 4 - \frac{1,6 \cdot 3,17^2}{2} = 4,03 \text{ кНм}$$

Как видно из расчета, иногда построение эпюры Q необходимо, так как позволяет существенно уточнить расчет. Так в сечении, удалённом на 3,17 м от левой опоры, момент по модулю максимальный, и это определяет дальнейший расчёт на прочность.

Пример 12

Построить эпюры Q и M для балки с *промежуточным шарниром* (рис. 19, а).

Решение:

Как известно, через шарнир изгибающий момент не передается, поэтому в сечении B , проходящем через шарнир, изгибающий момент равен нулю. Это позволяет разбить балку на две части – подвесную балку AB и основную балку BC , работающие независимо друг от друга как две отдельные балки, где подвесная балка AB правым концом B опирается на левый свободный конец B консоли BC (рис. 19, б).

В подвесной балке AB реакция опор в силу симметрии нагрузки $R_A = R_B = F$. Влияние подвесной балки на консоль выразится действием в точке B сосредоточенной силы $R_B = F$, направленной в сторону, противоположную действию той же реакции на подвесной балке, т.е. сверху вниз (рис. 19, в).

Далее задача решается для каждой отдельной балки. Эпюра Q изображена на рис. 19, г:

- на левом участке подвесной балки $Q = R_A = F$;
- на среднем участке $Q = 0$, здесь имеет место чистый изгиб;
- на правом участке и на консоли BC $Q = -R_B = -F$.

Эпюра M изображена на рис. 19, д. На участках балки, где $Q = \text{const}$, изгибающий момент изменяется по линейному закону, а

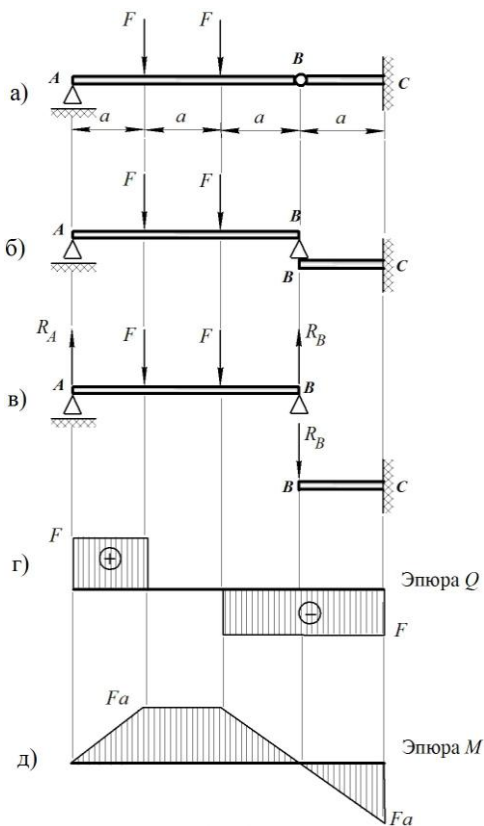


Рис. 19

на участке, где поперечная сила отсутствует ($Q=0$) – $M = \text{const}$.
Изменение величины изгибающих моментов на участках легко определить по площадям эпюры Q , о чем было рассказано ранее.

Пример 13

Построить эпюры Q и M для балки, изображенной на рис. 20.

Решение:

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0: -q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 2 - m_2 - m_1 + R_B \cdot 6 = 0$$

$$R_B = \frac{q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 2 + m_2 + m_1}{6} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1 + 30 \cdot 2 + 20 + 10}{6} = 18,33 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0: q \cdot 2 \cdot 5 + F \cdot 4 - m_2 - m_1 - R_A \cdot 6 = 0$$

$$R_A = \frac{q \cdot 2 \cdot 5 + F \cdot 4 - m_2 - m_1}{6} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 5 + 30 \cdot 4 - 20 - 10}{6} = 31,67 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum Y = 0: R_A + R_B - q \cdot 2 - F = 0; 31,67 + 18,33 - 10 \cdot 2 - 30 = 0$$

Построение эпюр Q и M произведем по характерным точкам, для чего пронумеруем на границах участков точки, расположенные в непосредственной близости от границы каждого участка.

Вычисляем значения внутренних силовых факторов в характерных точках:

Точка 0:

$$Q = 0; M_0 = 0$$

Точка 1:

$$Q_1 = R_A = 31,67 \text{ кН}; M_1 = 0$$

Точка 2:

$$Q_2 = 31,67 - 10 \cdot 2 = 11,67 \text{ кН}$$

$$M_2 = 31,67 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = 43,34 \text{ кНм}$$

Точка 3:

$$Q_3 = 31,67 - 10 \cdot 2 - 30 = -18,33 \text{ кН}$$

$$M_3 = 31,67 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 + 20 = 63,34 \text{ кНм}$$

Точка 4:

$$Q_4 = 31,67 - 10 \cdot 2 - 30 = -18,33 \text{ кН}$$

$$M_4 = 31,67 \cdot 4 - 10 \cdot 2 \cdot 3 + 20 - 30 \cdot 2 = 26,66 \text{ кНм}$$

Точка 5:

$$Q_5 = -18,33 \text{ кН}$$

$$M_5 = 31,67 \cdot 4 - 10 \cdot 2 \cdot 3 - 30 \cdot 2 + 20 + 10 = 36,66 \text{ кНм}$$

Точка 6:

$$Q_6 = -18,33 \text{ кН}$$

$$M_6 = 31,67 \cdot 6 - 10 \cdot 2 \cdot 5 - 30 \cdot 4 = -18,33 \text{ кНм}$$

Точка 7:

$$Q_7 = 31,67 - 10 \cdot 2 - 30 + 18,33 = 0$$

Построение эпюр по характерным точкам заключается в соединении значений ординат двух последовательных точек (0–1, 1–2, 2–3 и т.д.) линиями в соответствии с правилами построения эпюр.

Правильно построенная эпюра должна быть замкнутой, т.е. при определении внутренних силовых факторов по силам, расположенным слева от рассматриваемой точки, в точке 7 должны получиться $M=0$ и $Q=0$. Если рассматриваются и левая и правая части балки, то в одном из сечений следует подсчитать M и Q , рас-

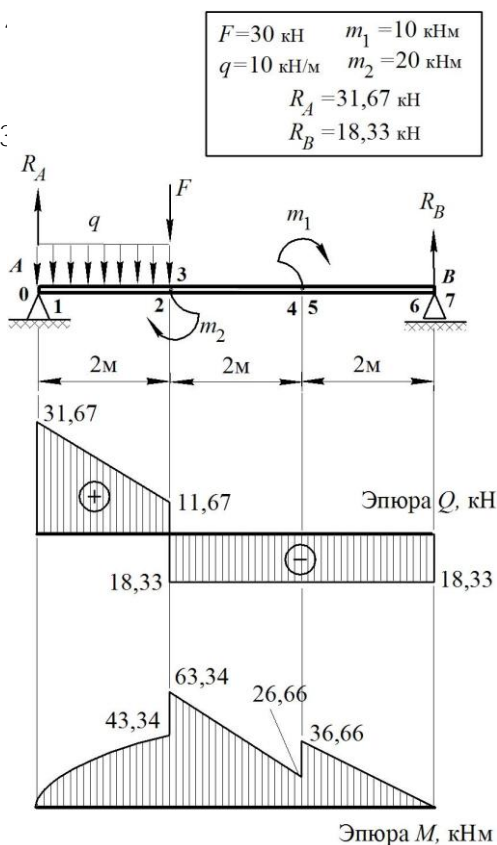


Рис. 20

смаатривая силы слева и справа. Совпадение результатов свидетельствует о правильности построения эпюр.

Пример 14

Построить эпюры Q и M для балки, изображенной на рис. 21.

Решение:

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0: R_B = 30 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0: R_A = 35 \text{ кН}$$

Построение эпюр Q и M произведем по характерным точкам:

Точка 0: $Q_0 = 0$ $M_0 = 0$

Точка 1: $Q_1 = 0$ $M_1 = 0$

Точка 2: $Q_2 = -20 \text{ кН}$ $M_2 = -10 \text{ кНм}$

Точка 3: $Q_3 = 15 \text{ кН}$ $M_3 = 5 \text{ кНм}$

Точка 4: $Q_4 = -25 \text{ кН}$ $M_4 = -5 \text{ кНм}$

Точка 5: $Q_5 = 5 \text{ кН}$ $M_5 = -5 \text{ кНм}$

Точка 6: $Q_6 = 5 \text{ кН}$ $M_6 = 0$

Точка 7: $Q_7 = 0$ $M_7 = 0$

В точке пересечения эпюры Q с осью балки на эпюре M возникает экстремум, т.е. изгибающий момент принимает наибольшее значение M_{\max} на участке. Точка экстремума определяется из условия равенства нулю поперечной силы на этом участке, рассматривая участок либо слева

направо $Q_z = Q_3 - q \cdot z_1 = 0$ и тогда $z_1 = \frac{Q_3}{q}$, либо справа налево

$Q_z = -Q_4 + q \cdot z_2 = 0$ и тогда $z_2 = \frac{Q_4}{q}$. Ордината M_{\max} в точке экстремума будет больше значения момента в точке 3 ($M_3 = 5 \text{ кНм}$) на

величину площади треугольника CDE эпюры Q :

$$M_{\max} = M_3 + \frac{1}{2} Q_3 \cdot z_1 = M_3 + \frac{Q_3^2}{2q} = 5 + \frac{15^2}{40} = 10,6 \text{ кНм}$$

или

$$M_{\max} = M_4 + \frac{1}{2} Q_4 \cdot z_2 = M_4 \cdot$$

Рассмотрим *построение* эпюр по аналитическим выражениям метода сечений.

По этому способу балка разбивается на участки, в пределах которых выражение для поперечной силы и изгибающего момента остаются постоянными.

На каждом участке балки берется какое-либо произвольное сечение на расстоянии Z от начала координат и для этого сечения записываются выражения для Q и M — $Q_z = f_1(\zeta)$ и $M_z = f_2(\zeta)$.

Начало координат можно брать на одном из концов балки, либо в начале или в конце любого участка. Придавая Z несколько значений, на каждом участке определяют соответствующие величины Q и M и строят эпюры.

$F=5$ кН	$R_A=35$ кН
$q=20$ кН/м	$R_B=30$ кН
$m=15$ кНм	

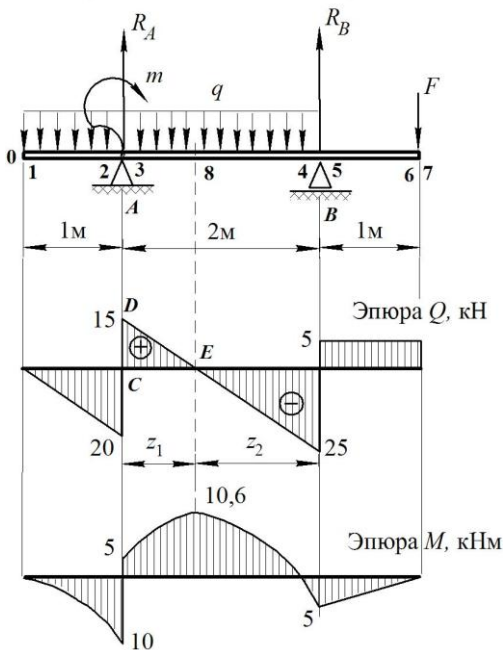


Рис. 21

Пример 15

Построить эпюры Q и M для заданной балки (рис. 22, а).

Решение:

Определяем опорные реакции

$$\sum M_A = 0: -m_1 + R_B \cdot 10 - q_2 \cdot 4 \cdot 8 + F \cdot 6 + m_2 - q_1 \cdot 2 \cdot 4 + m_1 = 0$$

$$R_B = \frac{2 + 4 \cdot 4 \cdot 8 - 12 \cdot 6 - 12 + 2 \cdot 2 \cdot 4 - 2}{10} = 6 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0: -m_1 - R_A \cdot 10 + q_2 \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 4 + m_2 + q_1 \cdot 2 \cdot 6 + m_1 = 0$$

$$R_A = \frac{-2 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 12 \cdot 4 + 12 + 2 \cdot 2 \cdot 6 + 2}{10} = 2 \text{ кН}$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = 0: R_A + R_B + F - q_2 \cdot 4 - q_1 \cdot 2 = 0 \\ 2 + 6 + 12 - 4 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

Строим эпюры Q и M .

Сечение 1. На первом участке мысленно проведем сечение на расстоянии z_1 от левого конца балки. Рассмотрим левую часть балки длиной z_1 с приложенными к ней внешними нагрузками, включая опорную реакцию R_A (рис. 22, б). Выражения для поперечной силы и изгибающего момента будут одинаковыми для всех сечений первого участка, изменяющегося в пределах $0 \leq z_1 \leq 3 \text{ м}$.

Согласно определению, поперечная сила в рассматриваемом сечении численно равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси балки всех сил, действующих на оставшуюся часть балки, т.е. расположенную слева от сечения. Здесь действует реакция R_A и, тогда согласно правилу знаков для поперечной силы:

$$Q_{z_1} = R_A = 2 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент M_{z_1} в рассматриваемом сечении определяется как сумма моментов относительно центра тяжести сечения всех внешних сил, приложенных к рассматриваемой части балки. Здесь слева от сечения приложен сосредоточенный момент m_1 и реакция R_A , расстояние которой от сечения (т.е. ее плечо) равно z_1 . Тогда в сечении 1 изгибающий момент с учетом принятого правила знаков равен:

$$M_{z_1} = -m_1 + R_A \cdot z_1 = -2 + 2 \cdot z_1$$

В соответствии с записанными выражениями Q_{z_1} и M_{z_1} для участка 1 поперечная сила Q здесь постоянна и равна 2 кН, а изгибающий момент изменяется по линейному закону. Для построения эпюры M необходимо вычислить его значение в двух точках, соответствующих границам участка, и соединить их прямой линией:

– при $z_1 = 0$ $M_{z_1} = -m_1 = -2$ кНм

– при $z_1 = 3$ м $M_{z_1} = -m_1 + R_A \cdot 3 = -2 + 2 \cdot 3 = 4$ кНм

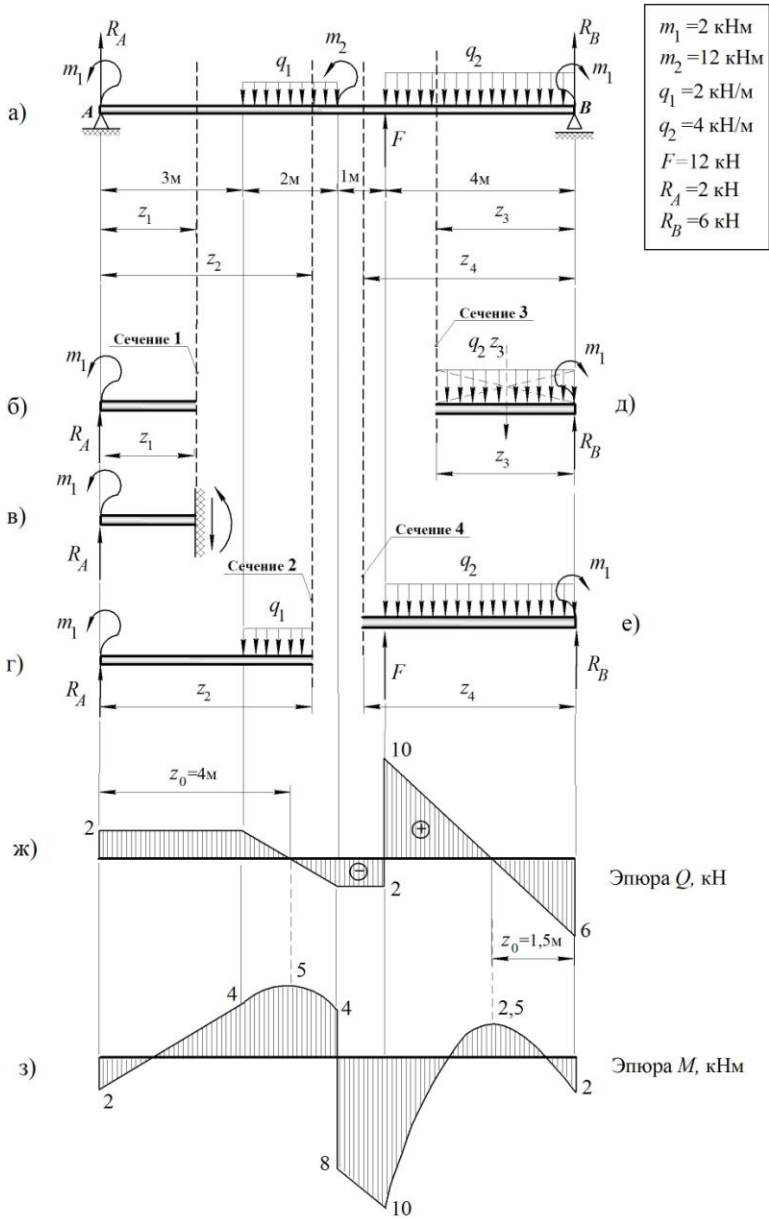


Рис. 22

При записи выражений внутренних силовых факторов в сечении иногда возникают затруднения в определении плеча силы и проектировании сил на нормаль к оси балки в рассматриваемом сечении. В этом случае удобно использовать следующий **методический прием**. Мысленно жестко закрепляем в сечении рассматриваемую часть балки и определяем реакции в заделке. Изгибающий момент в сечении будет численно равен реактивному моменту в заделке, а поперечная сила – вертикальной составляющей реакции (рис. 22, в).

Сечение 2. При рассмотрении второго участка (рис. 22, з) с распределенной нагрузкой q_1 берем сечение z_2 от левого края балки, однако пределы изменения этого участка будут равны $3 \text{ м} \leq z_1 \leq 5 \text{ м}$.

Выражения для Q_{z_2} и M_{z_2} в этом сечении имеют вид:

$$Q_{z_1} = R_A - q_1 \cdot (z_2 - 3)$$

$$M_{z_2} = -m_1 + R_A \cdot z_2 - \frac{q_1 (z_2 - 3)^2}{2}$$

Тогда – при $z_2 = 3 \text{ м}$ $Q_{z_2} = 2 \text{ кН}$; $M_{z_2} = 4 \text{ кНм}$

– при $z_2 = 5 \text{ м}$ $Q_{z_2} = -2 \text{ кН}$; $M_{z_2} = 4 \text{ кНм}$

Сила Q на втором участке изменяется по линейному закону от 2 кН до –2 кН, принимая нулевое значение в одном из сечений этого участка. Изгибающий момент M изменяется по квадратной параболе. При этом, в соответствии с дифференциальными зависимостями, в сечениях балки, где эпюры поперечных сил проходят через нуль, изгибающий момент в этом месте принимает экстремальное значение.

Определим положение этого сечения, обозначив его координату по оси как z_0 . Для этого выражение для поперечной силы на этом участке приравняем нулю:

$$Q_{z_0} = R_A - q_1 \cdot (z_0 - 3) = 0, \quad \text{откуда } z_0 = 4 \text{ м (точка экстремума)}.$$

Изгибающий момент M_{\max} в этом сечении определяется подстановкой в выражение, записанное выше, значения $z_2 = z_0 = 4 \text{ м}$:

$$M_{\max} = -m_1 + R_A \cdot z_0 - \frac{q_1 (z_0 - 3)^2}{2} = -2 + 2 \cdot 4 - \frac{2 \cdot (4 - 3)^2}{2} = 5 \text{ кНм}$$

Сечение 3. При рассмотрении следующего участка балки рационально принять начало координат на правом конце балки. В этом случае выражения для Q и M принимаю более простой вид. Пределы изменения сечения на данном участке (рис. 22, ∂) – $0 \leq z_3 \leq 4$ м.

Выражения для Q и M имеют вид:

$$Q_{z_3} = -R_B + q_2 \cdot z_3$$

$$M_{z_3} = -m_1 + R_B \cdot z_3 - \frac{q_1 \cdot z_3^2}{2}$$

На этом участке Q изменяется по линейному закону, а изгибающий момент по квадратной параболе. Для построения эпюр задаем границы участка:

$$z_3 = 0 \quad Q_{z_3} = -6 \text{ кН}; \quad M_{z_2} = -2 \text{ кНм}$$

$$z_3 = 4 \text{ м} \quad Q_{z_3} = 10 \text{ кН}; \quad M_{z_3} = -10 \text{ кНм}$$

Так как Q на участке изменяет знак на противоположный, определяем здесь точку экстремума и значение максимального момента:

$$Q_{z_0} = -R_B + q_2 \cdot z_0 = 0, \quad \text{откуда} \quad z_0 = 1,5 \text{ м}$$

$$M_{\max} = -m_1 + R_B \cdot z_0 - \frac{q_1 \cdot z_0^2}{2} = -2 + 6 \cdot 1,5 - \frac{4 \cdot 1,5^2}{2} = 2,5 \text{ кНм}$$

Сечение 4. Пределы изменения длины четвертого участка $4 \text{ м} \leq z_4 \leq 5 \text{ м}$.

$$Q_{z_4} = -R_B + q_2 \cdot 4 - F$$

$$M_{z_4} = -m_1 + R_B \cdot z_4 - q_2 \cdot 4 \cdot (z_4 - 2) + F \cdot (z_4 - 4)$$

Подставляем в выражения для Q и M границы участка и получаем:

– при $z_4 = 4 \text{ м}$ $Q_{z_3} = -2 \text{ кН}; \quad M_{z_2} = -10 \text{ кНм}$

– при $z_4 = 5 \text{ м}$ $Q_{z_4} = -2 \text{ кН}; \quad M_{z_2} = -8 \text{ кНм}$

По найденным значениям Q и M строим эпюры (рис. 22, $\text{ж}, \text{з}$).

5.3.2. Плоские рамы

Рамами называются конструкции, состоящие из стержней, соединенных жесткими узлами (брус с ломаной осью). Рама является плоской, если ее геометрическая ось, составленная из осей стержней, лежит в одной плоскости, при этом силовая плоскость, т.е. плоскость действия внешней нагрузки, совпадает с геометрической плоскостью рамы. В общем случае в поперечных сечениях брусьев плоских рам возникают три внутренних силовых фактора: продольная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M . Определение всех внутренних силовых факторов и построение эпюр производится по тем же правилам, что и для брусьев, работающих на растяжение (сжатие), и балок, работающих на изгиб.

В двухопорных рамах перед построением эпюр необходимо определить опорные реакции. Рассмотрение участков рамы при обходе ее по внутреннему или внешнему контуру отражается только на выборе положительного направления для поперечной силы. Поэтому рекомендуется проставлять знак поперечной силы на эпюрах всех элементов.

Пример 16

Построить эпюры N , Q , M для плоской рамы, изображенной на рис. 23, а.

Решение:

Построение эпюр для рам, установленных на опорах, начинают с определения опорных реакций.

Горизонтальную составляющую полной реакции в опоре B , т.е. H_B , определяем из условия, что сумма проекций всех сил на горизонтальную ось Z равна нулю:

$$\sum Z = 0: -H_B + F = 0$$

$$H_B = F = qa$$

Вертикальные реакции:

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot 2a - F \cdot a + q \cdot 2a \cdot a = 0$$

$$R_A = 0,5qa$$

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 2a - F \cdot a - q \cdot 2a \cdot a = 0$$

$$R_B = 1,5qa$$

Проверка:

$$\sum Y=0 \quad R_A + R_B - q \cdot 2a = 0 \quad 0,5qa + 1,5qa - 2qa = 0$$

Строим эпюры N , Q и M , рассматривая четыре участка балки (рис. 23, б, в, г, д).

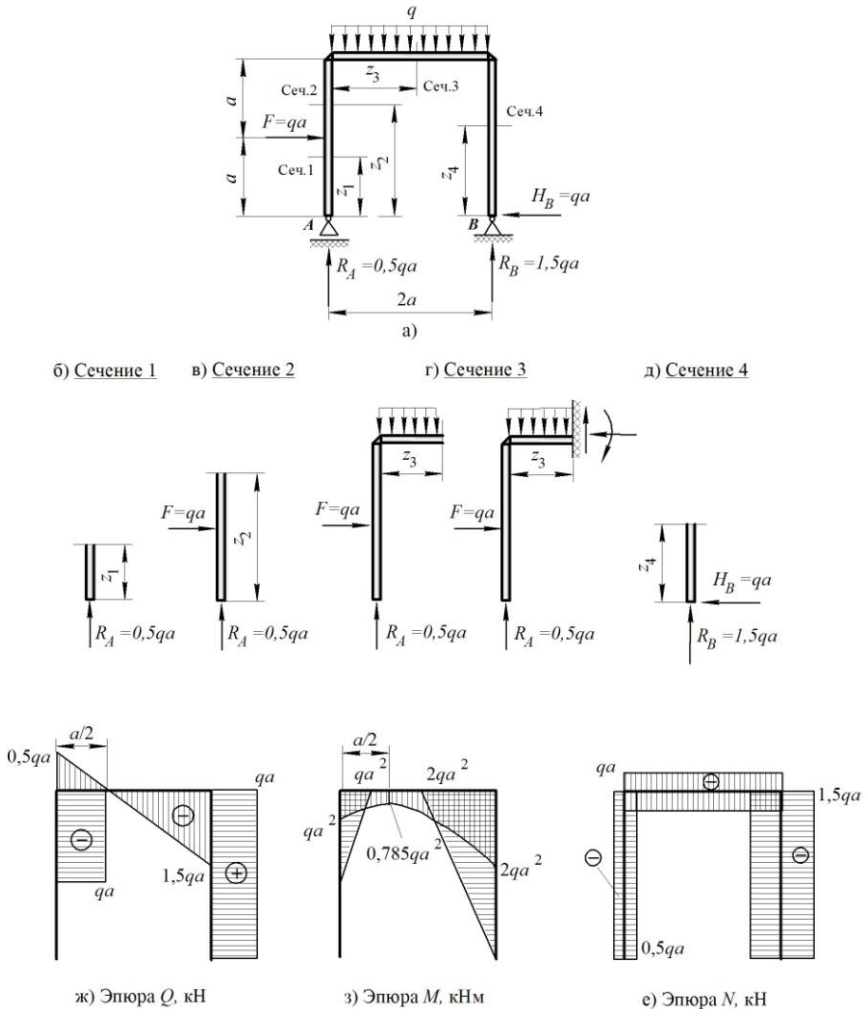


Рис. 23

Сечение 1: $0 \leq z_1 \leq a$ $Q_{z_1} = 0$; $M_{z_1} = 0$; $N_{z_1} = R_A = \frac{qa}{2}$ (сжатие)

Сечение 2: $a \leq z_2 \leq 2a$

$Q_{z_2} = -F = -qa$ – постоянна на участке

$M_{z_2} = -F \cdot (z_2 - a) = -qa \cdot (z_2 - a)$ – изменяется по линейному закону;

$N_{z_2} = R_A = \frac{qa}{2}$ (сжатие) – постоянна на участке.

Сечение 3: $0 \leq z_3 \leq 2a$

Для определения N , Q , M в этом сечении воспользуемся приемом, описанным в примере 15. Мысленно жестко закрепим в сечении рассматриваемую часть рамы (рис. 23, г) и тогда реакции в заделке представляют соответственно N , Q , M в сечении:

$Q_{z_3} = R_A - q \cdot z_3$ – изменяется по линейному закону

$M_{z_3} = -qa^2 + R_A \cdot z_3 - \frac{q \cdot z_3^2}{2}$ – изменяется по квадратной пара-

боле

$N_{z_3} = F = qa$ (сжатие) – постоянна по длине участка

Тогда при $z_3 = 0$ $Q_{z_3} = 0,5 qa$; $M_{z_3} = -Fa = -qa^2$;

$z_3 = 2a$ $Q_{z_3} = -1,5 qa$; $M_{z_3} = -2 qa^2$;

$z_3 = a/2$ $Q_{z_3} = 0$; $M_{z_3} = M_{\max} = -0,875 qa^2$;

Сечение 4: $0 \leq z_4 \leq 2a$

В сечении $Q_{z_4} = H_B = qa$ и постоянна на участке, $N_{z_4} = 1,5 qa$ (сжатие) – также постоянна на участке, а $M_{z_4} = -H_B z_4$ и изменяется по линейному закону:

– при $z_4 = 0$ $M_{z_4} = 0$; – при $z_4 = 2a$ $M_{z_4} = -2 qa^2$

По полученным данным строим эпюры N , Q , M (рис. 23, ж, з, е).

В рамках принято ординаты продольных сил откладывать симметрично по обе стороны от оси.

Пример 17

Построить эпюры N , Q , M для плоской рамы, изображенной на рис. 24, а.

Решение:

Опорные реакции находим из уравнений равновесия:

$$\sum Z=0: F_1 - H_A = 0 \quad \boxed{H_A = F_1 = 40 \text{ кН}}$$

$$\sum M_A=0: -q \cdot 4 \cdot 2 + F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 6 - m + R_B \cdot 4 = 0 \quad \boxed{R_B = 32,5 \text{ кН}}$$

$$\sum M_B=0: q \cdot 4 \cdot 2 - F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 2 - m - R_A \cdot 4 + H_A \cdot 4 = 0 \quad \boxed{R_A = 27,5 \text{ кН}}$$

Проверка:

$$\sum Y=0: R_A + R_B - q \cdot 4 - F_2 = 0; 27,5 + 32,5 - 10 \cdot 4 - 20 = 0$$

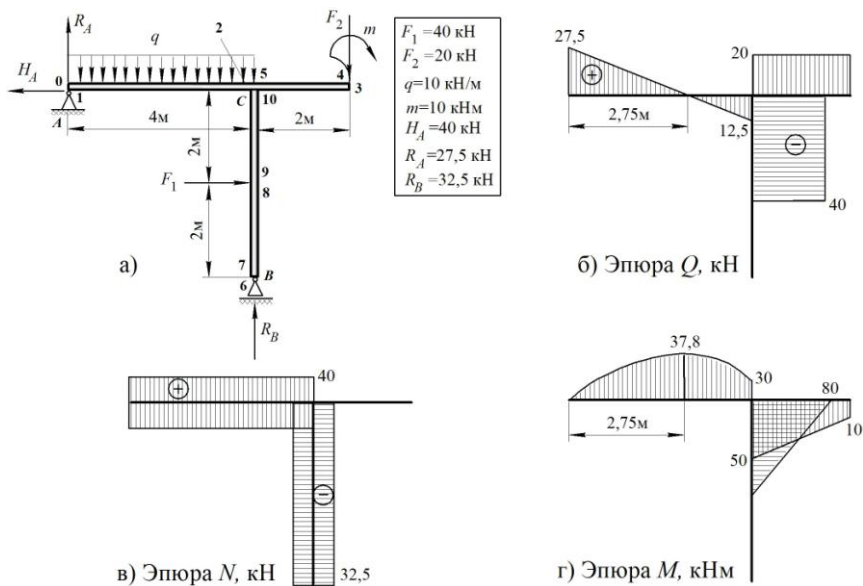


Рис. 24

При построении эпюр N , Q , M воспользуемся методом характерных точек —

Точка 0: $N=0$; $Q=0$; $M=0$;

Точка 1: $N=40$ кН; $Q=27,5$ кН; $M=0$;

Точка 2: $N=40$ кН; $Q=-12,5$ кН; $M=30$ кНм;

Точка 3: $N=0$; $Q=0$; $M=0$;

Точка 4: $N=0$; $Q=20$ кН; $M=-10$ кНм;

Точка 5: $N=0$; $Q=20$ кН; $M=-50$ кНм;

Точка 6: $N=0$; $Q=0$; $M=0$;

Точка 7: $N=-32,5$ кН; $Q=0$; $M=0$;

Точка 8: $N=-32,5$ кН; $Q=0$; $M=0$;

Точка 9: $N=-32,5$ кН; $Q=-40$ кН; $M=0$;

Точка 10: $N=-32,5$ кН; $Q=-40$ кН; $M=-80$ кНм;

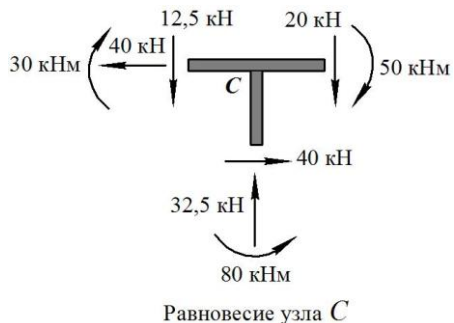
Строим эпюры N , Q , M , соединяя линиями значения ординат соседних точек в соответствии с правилами (рис. 24, б, в, г).

Максимальная ордината между точками 1 и 2 на эпюре моментов расположена на расстоянии $z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{27,5}{10} = 2,75$ м от опоры A и равна:

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \cdot 27,5 \cdot 2,75 = 37,8 \text{ кНм}$$

Проверкой правильности построения эпюр изгибающих моментов, поперечных и продольных сил является равновесие вырезанного узла C под действием внутренних силовых факторов:

$$\sum Z=0; \quad \sum Y=0; \quad \sum M_C=0;$$



Пример 18

Построить эпюры N , Q , M для рамы, показанной на рис. 25, а.

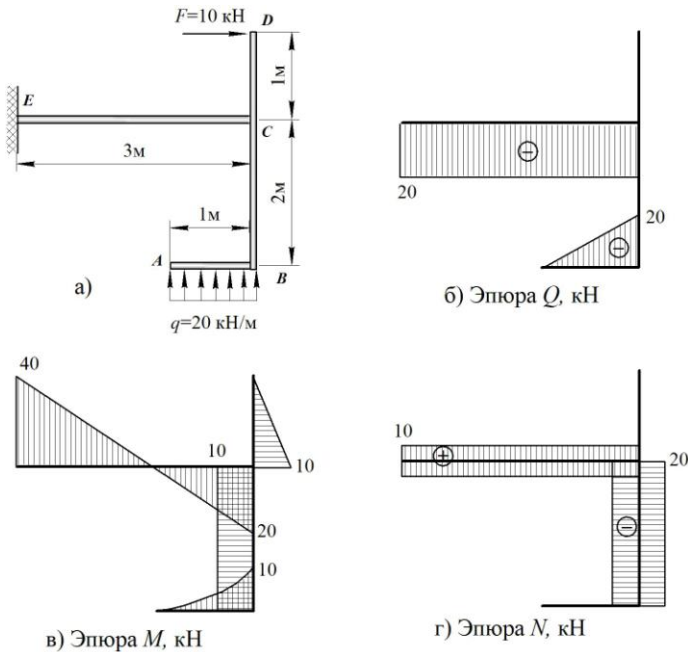


Рис. 25

Решение:

Построение эпюр N , Q , M проведем методом прохода, перемещаясь от точки A к точке B , C и затем от точки D к точке C , и затем от точки C к E .

На рис. 25, б, в, г приведены эпюры N , Q , M .

5.4. Построение эпюр для ломаного пространственного стержня

При нагружении пространственной конструкции в стержнях возникают все шесть внутренних силовых факторов. Определение значений внутренних силовых факторов в сечениях осуществляется

также как и в плоских рамах. Однако при переходе через узлы, изгибающие моменты предыдущего участка трансформируются в изгибающие и крутящие моменты в начале следующего участка, а поперечные силы трансформируются в поперечные и продольные силы. При расчетах на *прочность и жесткость* наибольший интерес представляют эпюры изгибающих и крутящих моментов.

Рассмотрим простейшие примеры построения эпюр этих силовых факторов.

Пример 19

Построить эпюры изгибающих моментов $M_{и}$ в плоскостях $X-Y$ (M_x, M_y) и крутящих моментов M_k для пространственного стержня, нагруженного сосредоточенной силой F , как показано на рис. 26, а.

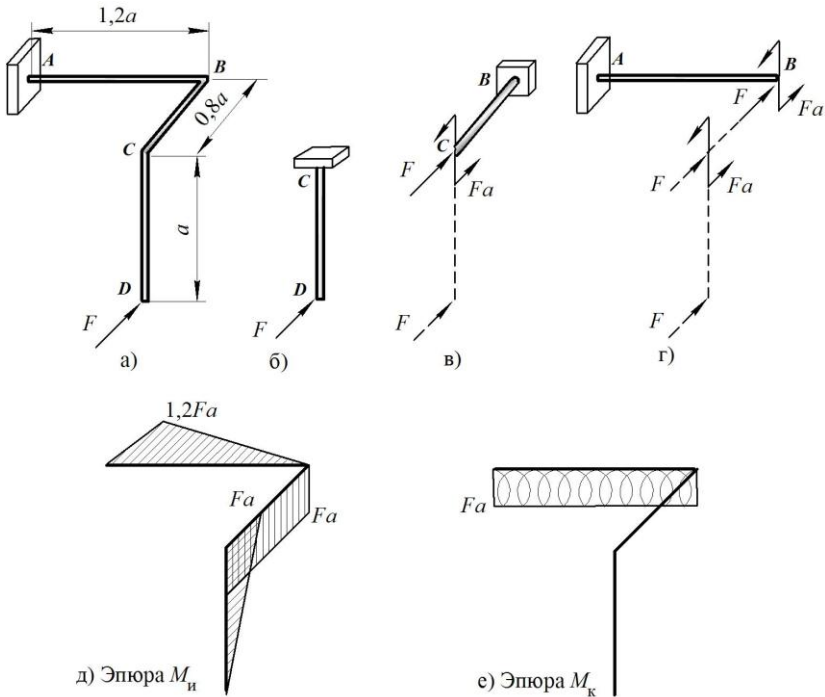


Рис. 26

Решение:

Построение эпюр ведем по участкам от точки D к точке A , не определяя реакции в заделке.

Рассмотрим участок DC , мысленно закрепив его в точке C (рис. 26, б). Участок испытывает изгиб в вертикальной плоскости. Изгибающий момент возрастает от нуля в точке D и до значения $M = F \cdot a$ в точке C .

Эпюру моментов строим со стороны сжатых волокон.

Участок CB (рис. 26, в) испытывает чистый изгиб с моментом $M = F \cdot a$. На участке BA (рис. 26, г) возникает поперечный изгиб от силы F с моментом в точке A , равным $M = 1,2Fa$, и кручение моментом $M_k = Fa$.

Эпюры изгибающих M_u и крутящих M_k моментов представлены на рис. 26, д, е.

Пример 20

Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов для пространственного стержня:

- а) стержень нагружен сосредоточенной силой (рис. 27);
- б) стержень нагружен сосредоточенным моментом (рис. 28).

Решение:

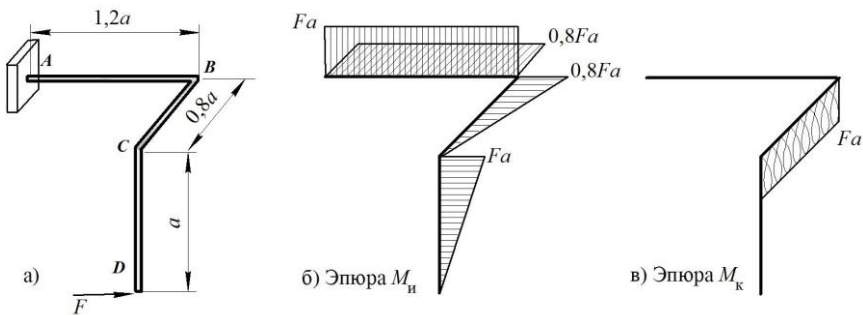


Рис. 27

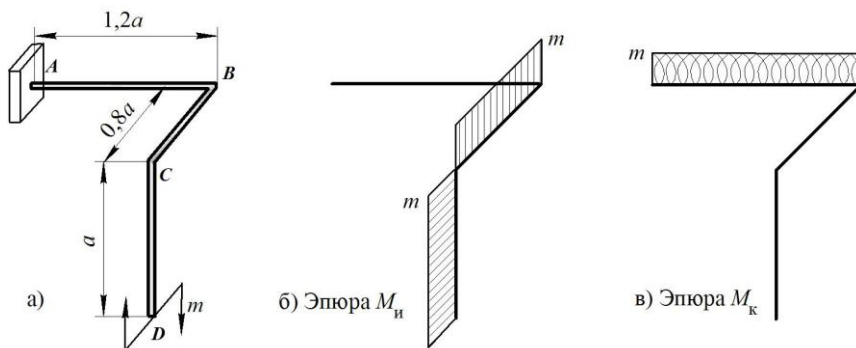


Рис. 28

5.5. Построение эпюр для плоского кривого бруса

Внутренние усилия в поперечных сечениях кривого бруса определяются также как в балках и рамах — методом сечений. Построение эпюр производится в полярной системе координат, где положение сечения определяется углом φ , который является независимой переменной в выражениях продольной и поперечной сил, а также изгибающего момента.

Правила знаков для продольных и поперечных сил, а также для изгибающих моментов остаются такими же, как для балок и рам. Ординаты при построении эпюр откладываются в радиальных направлениях, при этом положительное значение внутреннего усилия откладывается наружу бруса, отрицательное — внутрь. На эпюре поперечных сил следует обязательно ставить знак, а на эпюре изгибающих моментов знак не указывается, так как ординаты моментов откладываются в сторону сжатых волокон.

Пример

Построить эпюры N , Q , M для плоского кривого бруса (рис. 29).

Решение:

Записываем выражения внутренних силовых факторов на первом участке как функции угла φ_1 , границы которого имеют пределы $0 \leq \varphi_1 \leq 90^\circ$:

$$N_{\phi} = F \cos \phi_1; \quad Q_{\phi} = F \sin \phi_1; \quad M_{\phi} = -F(R_0 - R_0 \cos \phi_1) = -FR_0(-\cos \phi_1)$$

$$\begin{aligned} \phi_1 = 0: & \quad N_{\phi_1} = 20 \text{ кН} & \quad Q_{\phi_1} = 0 & \quad M_{\phi_1} = 0 \\ \phi_1 = 30^0: & \quad N_{\phi_1} = 17,3 \text{ кН} & \quad Q_{\phi_1} = 10 \text{ кН} & \quad M_{\phi_1} = -2,68 \text{ кНм} \\ \phi_1 = 60^0: & \quad N_{\phi_1} = 10 \text{ кН} & \quad Q_{\phi_1} = 17,3 \text{ кН} & \quad M_{\phi_1} = -10 \text{ кНм} \\ \phi_1 = 90^0: & \quad N_{\phi_1} = 0 & \quad Q_{\phi_1} = 20 \text{ кН} & \quad M_{\phi_1} = -20 \text{ кНм} \end{aligned}$$

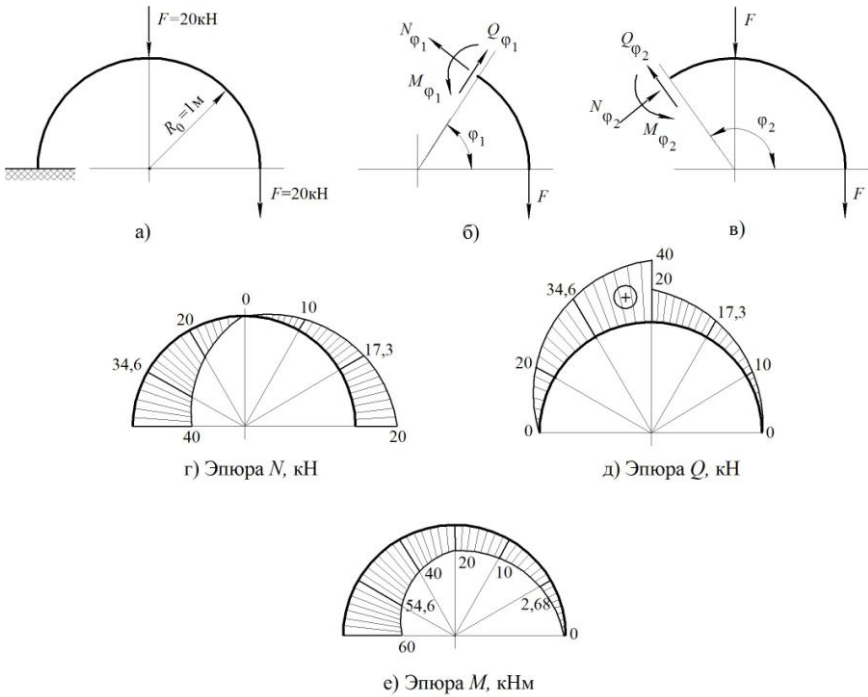


Рис. 29

Записываем выражения внутренних силовых факторов на втором участке как функции угла ϕ_2 , границы которого имеют пределы $90^0 \leq \phi_2 \leq 180^0$:

$$N_{\phi_2} = -2F \sin(\phi_2 - 90^\circ); \quad Q_{\phi_2} = 2F \cos(\phi_2 - 90^\circ); \quad M_{\phi_2} = -FR_0 - 2FR_0 \sin(\phi_2 - 90^\circ)$$

$$\phi_2 = 90^\circ: \quad N_{\phi_2} = 0 \quad Q_{\phi_2} = 40 \text{ кН} \quad M_{\phi_2} = -20 \text{ кНм}$$

$$\phi_2 = 120^\circ: \quad N_{\phi_2} = -20 \text{ кН} \quad Q_{\phi_2} = 34,6 \text{ кН} \quad M_{\phi_2} = -40 \text{ кНм}$$

$$\phi_2 = 150^\circ: \quad N_{\phi_2} = -34,6 \text{ кН} \quad Q_{\phi_2} = 20 \text{ кН} \quad M_{\phi_2} = -54,6 \text{ кНм}$$

$$\phi_2 = 180^\circ: \quad N_{\phi_2} = -40 \text{ кН} \quad Q_{\phi_2} = 0 \quad M_{\phi_2} = -60 \text{ кНм}$$

По вычисленным значениям строим эпюры N , Q , M , откладывая полученные ординаты по радиусам (рис. 29, z , ∂ , e).

Следует отметить, что для кривого бруса также справедливы дифференциальные зависимости, приведенные выше для прямых балок. Так, например, на первом участке:

$$Q_{\phi_1} = \frac{dM_{\phi_1}}{dS} = \frac{dM_{\phi_1}}{R_0 d\phi} = \frac{d \left[FR_0 (1 - \cos \phi_1) \right]}{R_0 d\phi} = F \frac{d(-\cos \phi_1)}{d\phi} = F \sin \phi_1,$$

где S – длина участка кривого бруса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высшая школа, 2000. – 559 с.
2. Алмаметов, Ф. З. Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов / Ф. З. Алмаметов [и др.]. – М. : Высшая школа, 2003. – 367 с.
3. Биргер, И. А. Сопротивление материалов / И. А. Биргер, Р. Р. Мавлютов. – М. : Наука, 1986. – 560 с.
4. Макаров, Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad / Е. Г. Макаров. – СПб. : Питер, 2003. – 448 с.
5. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролюбов [и др.]. – М. : Высшая школа, 1985. – 400 с.
6. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – Киев. : Наука, 1975. – 400 с.

7. Подскребко, М. Д. Сопротивление материалов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 796 с.
8. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 560 с.
9. Шалашилин, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Шалашилин, А. Г. Горшков, В. Н. Трошин. – М. : МАИ, 2000. – 615 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Внутренние силы. Основные понятия _____	3
2. Метод сечений. Определение внутренних силовых факторов _	5
3. Построение эпюр внутренних силовых факторов _____	8
4. Практические правила построения и контроля эпюр_____	11
5. Примеры построения эпюр для различных видов нагружения брусьев _____	13
5.1. Растяжение (сжатие) _____	13
5.2. Кручение _____	16
5.3. Изгиб _____	19
5.3.1. Статически определяемые балки _____	19
5.3.2. Плоские рамы _____	42
5.4. Построение эпюр для ломаного пространственного стержня _____	47
5.5 Построение эпюр для плоского кривого бруса _____	50
Литература _____	53

Учебное издание

СИДОРОВ Виктор Александрович
РЕУТ Лариса Ефимовна
ХМЕЛЕВ Александр Афанасьевич

**ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ
СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ**

Методическое пособие
к решению задач по механике материалов
для студентов машиностроительных специальностей

Технический редактор *О. В. Песенько*

Подписано в печать 09.07.2012. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 3,20. Уч.-изд. л. 2,50. Тираж 100. Заказ 558.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск