



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Белорусский национальный  
технический университет**

---

**Кафедра «Сопротивление материалов  
машиностроительного профиля»**

**ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ  
СОСТАВНЫХ БАЛОК  
ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

**Учебно-методическое пособие**

**Минск  
БНТУ  
2013**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
Белорусский национальный технический университет

---

Кафедра «Сопротивление материалов  
машиностроительного профиля»

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ  
СОСТАВНЫХ БАЛОК  
ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие  
для студентов специальности 1-36 01 03 «Технологическое  
оборудование машиностроительного производства»

*Рекомендовано учебно-методическим объединением  
в сфере высшего образования Республики Беларусь  
по образованию в области машиностроения*

Минск  
БНТУ  
2013

УДК 620.172.251.224(075.8)

ББК 34.41я7

О-75

А в т о р ы :

*А. И. Дудяк, А. А. Хмелев,  
Т. А. Сахнович, О. И. Гурковская*

Рецензенты:

зав. кафедрой «Теоретическая механика» БГАТУ,  
д-р техн. наук, профессор *А. Н. Орда*;  
зав. кафедрой «Машины и технология обработки металлов  
давлением» БНТУ, д-р техн. наук, профессор *К. Е. Белянин*

Особенности расчета на прочность составных балок из неоднородных материалов : учебно-методическое пособие для студентов специальности 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства» / А. И. Дудяк [и др.]. – Минск : БНТУ, 2013. – 27 с.

ISBN 978-985-550-204-4.

В данном пособии рассмотрена теоретическая задача расчета на прочность стержней, состоящих из двух разнородных материалов, прочно соединенных между собой и работающих на изгиб как единое целое. Установлены зависимости для определения местоположения нейтрального слоя и показана методика по определению нормальных и касательных напряжений, возникающих в поперечных сечениях стержня.

УДК 620.172.251.224(075.8)

ББК 34.41я7

ISBN 978-985-550-204-4

© Белорусский национальный  
технический университет, 2013

## Введение

Во многих областях техники применяют стержни, составленные из различных материалов. Типичным примером являются стержни биметаллических пар, составленные из металлов с разными значениями модулей Юнга и работающие на изгиб как консольные или двухопорные балки. Другим примером являются конструкции или детали, изготовленные из композитных материалов. Идея здесь состоит в том, что при создании комбинированного материала основу армируют большим количеством тонких нитей из другого материала, более прочного и жесткого. В результате получают стержень, имеющий в наиболее нагруженных частях сечения материал с повышенными упругими и прочностными характеристиками. В итоге сечение такой балки является составленным из двух и более материалов с соотношениями модулей упругости  $E_1 \neq E_2$ .

При этом обе части указанных стержней на всей длине надежно соединены между собой либо за счет сил сцепления, либо создания специальных устройств в виде упоров, отгибов и т. п. Поэтому они работают при продольных деформациях стержня совместно, как единое монолитное сечение, и к такому составному стержню применима гипотеза плоских сечений, считая при этом справедливой гипотезу ненадавливания продольных волокон друг на друга в поперечном направлении.

Однако расчеты на прочность составных балок из неоднородных материалов имеют и существенные отличия от классических методов расчета балок из однородных материалов. Покажем это на примерах расчетов составных консольных и двухопорных балок из неоднородных материалов при  $E_1 \neq E_2$ .

# 1. Теоретический расчет нормальных напряжений

Рассмотрим случай чистого изгиба консольной балки прямоугольного сечения составленного из двух неоднородных материалов, обладающих различными значениями модулей упругости, т. е.  $E_1 > E_2$  при неравных площадях их сечений  $A_1 < A_2$  (рис. 1).

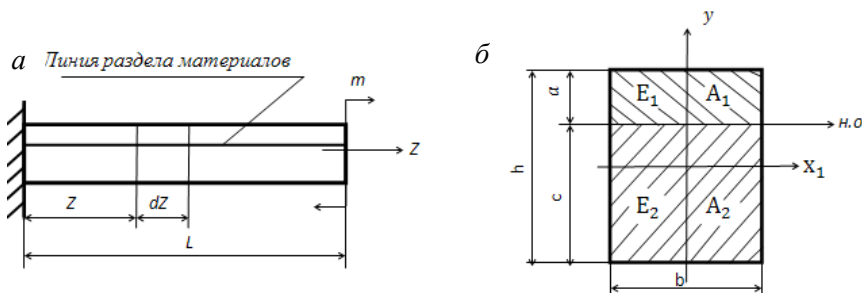


Рис. 1. Схема нагружения (а) и форма сечения балки (б)

Для упрощения расчетов условно примем, что нейтральная ось сечения не совпадает с главной центральной осью  $x_1$ , а проходит по границе раздела двух материалов (рис. 1, б). Составляющие сечения балки площади  $A_1$  и  $A_2$ , не равные между собой, соединены жестко и работают как единое целое.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние участка балки длиной  $dZ$  (рис. 2). В результате деформации верхние слои участка будут растянуты, а нижние сжаты, правое сечение балки этого участка повернется относительно левого сечения на угол  $d\theta$ .

Относительные деформации верхнего и нижнего слоев сечения будут

$$\varepsilon_1 = \frac{y_1}{\rho} = \frac{a}{\rho}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{y_2}{\rho} = -\frac{c}{\rho},$$

где  $\rho$  – радиус кривизны нейтрального слоя;

$y_1, y_2$  – расстояния от нейтрального слоя до верхнего и нижнего слоев сечения соответственно;

$a$  и  $c$  – толщина слоев составного сечения.

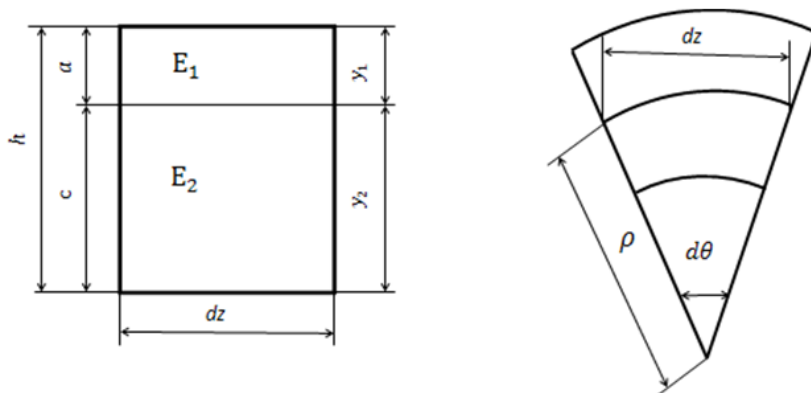


Рис. 2. Деформированное состояние участка  $dZ$  длины балки

По закону Гука напряжения растяжения и сжатия в этих слоях будут

$$\sigma_{z1} = E_1 \frac{y_1}{\rho}, \quad \sigma_{z2} = -E_2 \frac{y_2}{\rho}. \quad (1)$$

Сумма элементарных сил  $\sigma dA$  равна значению элементарной силы в сечении, которая при чистом изгибе равна нулю, поэтому

$$N_z = \int_{A_1} E_1 \frac{y_1}{\rho} dA_1 - \int_{A_2} E_2 \frac{y_2}{\rho} dA_2 = 0.$$

Учитывая, что

$$\int_{A_1} y_1 dA_1 = S_{X1}, \quad \int_{A_2} y_2 dA_2 = S_{X2} -$$

статические моменты верхней и нижней частей площади сечения, получим

$$E_1 S_{X1} - E_2 S_{X2} = 0, \quad (2)$$

где  $S_{X1} = b \frac{a^2}{2}$  и  $S_{X2} = b \frac{c^2}{2}$ .

Подставив значения  $S_{X1}$  и  $S_{X2}$  в уравнение (2), получим

$$E_1 a^2 - E_2 c^2 = 0. \quad (3)$$

Учитывая, что  $c = h - a$ , и решая уравнение (3) относительно величины « $a$ », определим его значение, считая, что центральный слой совпадает с границей раздела двух материалов:

$$a = \frac{h \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}}{1 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}} \quad \text{или} \quad a = \frac{h \sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}, \quad (4)$$

где  $n = E_2 / E_1$ .

При значении  $n = 1$  для сечения составной балки, состоящей из двух половин одного и того же материала, нейтральная ось будет проходить при значении  $a = \frac{h}{2}$ , что соответствует положению центра тяжести площади сечения. В случае, если  $n$  отлично от единицы, то нейтральная ось будет смещена от центра тяжести площади сечения.

Эпюра распределения напряжений по высоте сечения балки при совпадении нейтральной оси с линией раздела двух материалов приведена на рис. 3.

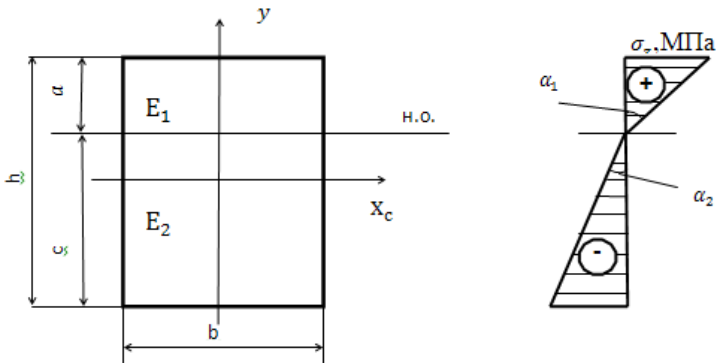


Рис. 3. Распределение напряжений по сечению балки

Из рис. 3 следует, что значение угла  $\alpha_1 > \alpha_2$  если  $E_1 > E_2$ .

Общий случай распределения напряжений по высоте сечения консольных балок для варианта, когда  $E_1 > E_2$ , а нейтральная ось проходит по площади материала с большим значением  $E$ , приведен на рис. 4. Откуда следует, что при определении напряжений по формулам (1) на границе раздела двух материалов получается разрыв эпюры, так как в точках соприкосновения материалов напряжения будут отличаться в  $n$  раз.

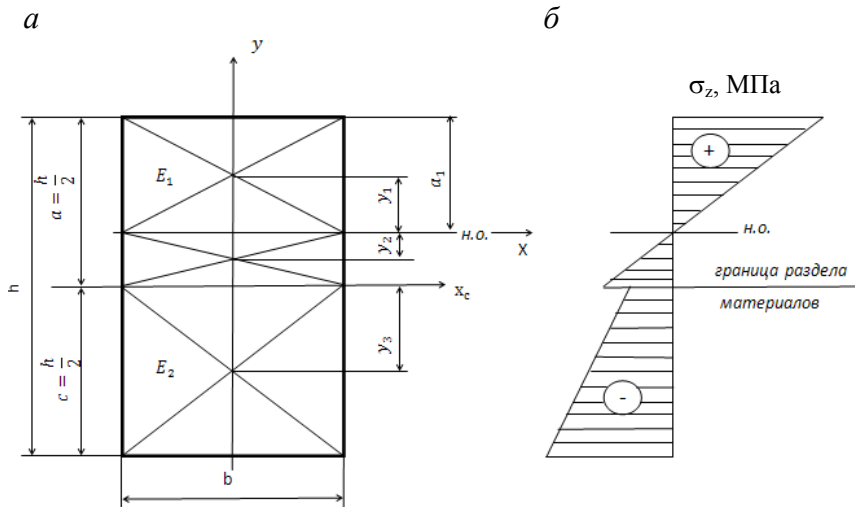


Рис. 4. Напряжения в составной балке при  $E_1 > E_2$



Из рис. 4 следует, что в большинстве случаев составных балок нейтральная ось сечения не будет совпадать с главной центральной осью  $x_c$ , а будет смещаться, оставаясь параллельной оси  $x_c$ , в сторону материала с большим значением модуля Юнга. В связи с этим для определения значения осевого момента инерции площади сечения балки следует применять метод его определения при параллельном переносе осей. Для данного сечения представим, что нейтральный слой проходит через ось  $x$ . В итоге новая главная ось  $x$  делит площадь сечения на три части, для которых надо определить значения статических моментов  $S_{X1}$ ,  $S_{X2}$ ,  $S_{X3}$  и осевых моментов инерции  $I_{X1}$ ,  $I_{X2}$ ,  $I_{X3}$ . Определим значение  $a_1$  как расстояние от верхней кромки сечения до оси  $x$ .

Из условия равенства нулю продольной силы  $N_z$  в сечении балки при чистом изгибе имеем

$$N_z = \int_{A_1} E_1 \frac{y_1}{\rho} dA_1 - \int_{A_2} E_1 \frac{y_2}{\rho} dA_2 - \int_{A_3} E_2 \frac{y_3}{\rho} dA_3 = 0.$$

После ряда преобразований получим

$$E_1 S_{X1} - E_1 S_{X2} - E_2 S_{X3} = 0, \quad (5)$$

где  $S_{X1} = b \frac{a_1^2}{2}$ ;  $S_{X2} = b \frac{(\frac{h}{2} - a_1)^2}{2}$  и  $S_{X3} = b \frac{h}{2} (\frac{h}{4} + (\frac{h}{2} - a_1))$ .

Подставив значения статических моментов площадей в формулу (5), получим

$$E_1 \frac{ba_1^2}{2} - E_1 \frac{b(\frac{h}{2} - a_1)^2}{2} - E_2 b \frac{h}{2} (\frac{h}{4} + (\frac{h}{2} - a_1)) = 0.$$

После ряда преобразований получим

$$a_1 = \frac{h(E_1 + 3E_2)}{4(E_1 + E_2)} = \frac{h(1 + 3n)}{4(1 + n)}. \quad (6)$$

Значение  $a_1$  определяет место положения нейтрального слоя.

Известно, что значение изгибающего момента в сечении  $z$  записывается в виде

$$M_z = \int_A \sigma_z y dA,$$

которое для общего случая составного сечения балки можно записать в виде

$$M_z = \int_{A_1} E_1 \frac{y_1}{\rho} y_1 dA_1 + \int_{A_2} E_1 \frac{y_2}{\rho} y_2 dA_2 + \int_{A_3} E_2 \frac{y_3}{\rho} y_3 dA_3 = 0.$$

Учитывая, что  $\int_A y^2 dA = I_x$  – момент инерции площади сечения, получим

$$M_z = \frac{E_1}{\rho} I_{x1} + \frac{E_1}{\rho} I_{x2} + \frac{E_2}{\rho} I_{x3},$$

откуда определим значение  $\frac{1}{\rho}$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E_1 I_{x1} + E_1 I_{x2} + E_2 I_{x3}}, \quad (7)$$

где

$$I_{X1} = \frac{ba_1^3}{12} + ba_1\left(\frac{a_1}{2}\right)^2,$$
$$I_{X2} = \frac{b\left(\frac{h}{2} - a_1\right)^3}{12} + b\left(\frac{h}{2} - a_1\right)\left(\frac{\frac{h}{2} - a_1}{2}\right)^2,$$
$$I_{X3} = \frac{b\left(\frac{h}{2}\right)^3}{12} + b\frac{h}{2}\left(\frac{h}{4} + \left(\frac{h}{2} - a\right)\right)^2.$$

В этом случае напряжения в точках верхнего участка сечения балки относительно нейтральной оси с модулем упругости  $E_1$  определим по формуле

$$\sigma_{Z1} = \frac{M_z E_1}{E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3}} y_1. \quad (8)$$

На участке сечения балки с модулем Юнга  $E_1$ , расположенного ниже нейтральной оси, напряжение определяют по формуле

$$\sigma_{Z2} = -\frac{M_z E_1}{E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3}} y_2. \quad (9)$$

На третьем нижнем участке сечения балки с модулем упругости  $E_2$  напряжение определим по формуле

$$\sigma_{Z3} = -\frac{M_z E_2}{E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3}} y_3. \quad (10)$$

Эпюра напряжений и разрыв значений напряжений на границе раздела материалов приведены на рис. 4.

## 2. Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки действуют два внутренних силовых фактора: поперечная сила  $Q_z$  и изгибающий момент  $M_z$ .

Схема нагружения составной консольной балки прямоугольного сечения и эскиз ее сечения приведены на рис. 5.

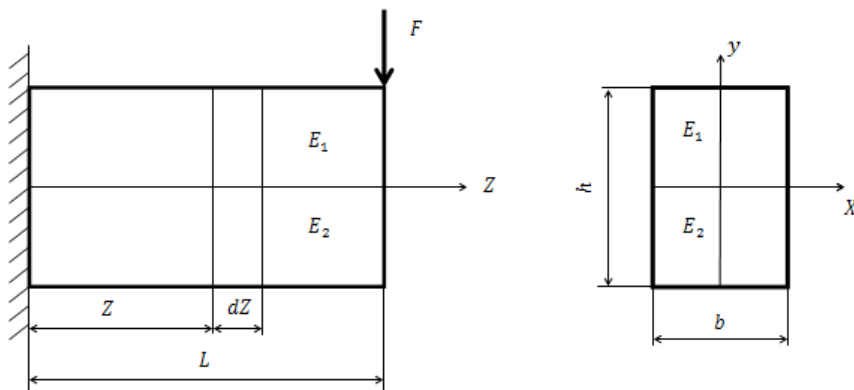


Рис. 5. Схема нагружения и форма сечения балки

В сечениях балки действуют нормальные напряжения  $\sigma_z$  и касательные напряжения  $\tau_{zy}$ . Значения касательных напряжений проще всего вычислить через значения парных напряжений  $\tau_{yz}$ , возникающих в продольных сечениях балки.

Рассмотрим элемент длины балки  $dZ$  (рис. 6), когда модуль упругости материала верхнего слоя балки  $E_1 > E_2$  нижнего слоя балки. В этом случае нейтральная ось сечения балки должна проходить по площади сечения верхнего материала балки, см. формулу (4).

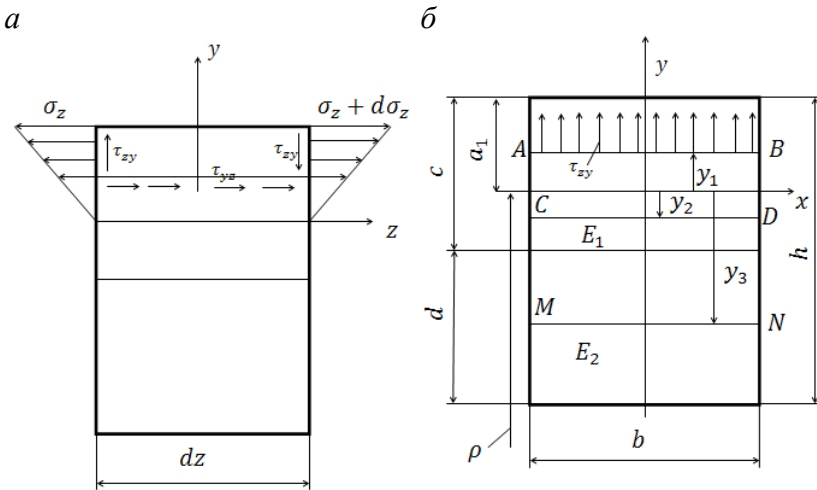


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$ , касательных напряжений  $\tau_{zy}$  и  $\tau_{yz}$  выше нейтрального слоя  $x$  по высоте сечения составной балки

Равнодействующая сил, вызванная действием нормальных напряжений  $\sigma_z$  и касательных напряжений  $\tau_{zy}$ , должна быть равна нулю, что можно представить следующим образом:

$$\int_A (\sigma_z + d\sigma_z) dA - \int_A \sigma_z dA - \tau_{yz} b dz = 0.$$

Данное уравнение приводим к виду

$$\tau_{yz} b dz = \int_A d\sigma_z dA. \quad (11)$$

С учетом уравнения (8), полученного для значения  $\sigma_z$ , производная для  $\sigma_{z1}$  будет иметь вид

$$d\sigma_{z1} = \frac{dM_z E_1}{E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3}}. \quad (12)$$

Совместное решение уравнений (11) и (12) дает

$$\tau_{yz}bdz = \frac{dM_z E_1}{E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3}} \int_A y_1 dA_1,$$

где  $\int_A y_1 dA_1 = S_{X1}^{\text{отс}}$  – статический момент отсеченной площади

сечения, т. е. площади, лежащей выше прямой  $AB$  (рис. 6, б).

Значение касательных напряжений, действующих выше нейтрального слоя балки, с учетом статического момента отсеченной площади можно выразить следующим образом:

$$\tau_{yz} = \frac{dM_z}{dz} \frac{E_1 S_{X1}^{\text{отс}}}{b(E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3})}. \quad (13)$$

Так как  $\frac{dM_z}{dz} = Q_z$ , уравнение (13) получает вид

$$\tau_{yz} = \frac{Q_z S_{X1}^{\text{отс}} E_1}{b(E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3})}, \quad (14)$$

где  $S_{X1}^{\text{отс}} = b(a_1 - y_1)(y_1 + \frac{a_1 - y_1}{2})$ .

Для определения касательных напряжений на участке сечения, расположенного между нейтральным слоем и линией раздела материалов, необходимо учитывать значение касательных напряжений, действующих на третьем участке балки:

$$\tau_{yz} = \frac{Q_z (S_{X3}^{\text{отс}} E_2 + S_{X2}^{\text{отс}} E_1)}{b(E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3})}, \quad (15)$$

где  $S_{X2}^{\text{отс}} = b(c - a_1 - y_2)(y_2 + \frac{c - a_1 - y_2}{2})$ ,  $S_{X3}^{\text{отс}} = bd(c - a_1 + \frac{d}{2})$ .

На участке сечения ниже раздела двух материалов

$$\tau_{yz} = \frac{Q_z S_{X4}^{\text{отс}} E_2}{b(E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3})}, \quad (16)$$

где  $S_{X4}^{\text{отс}} = b(h - a_1 - y_3)(y_3 + \frac{h - a_1 - y_3}{2})$ .

По формулам (14), (15) и (16) построена эпюра касательных напряжений (рис. 7) по высоте сечения балки  $h$ .

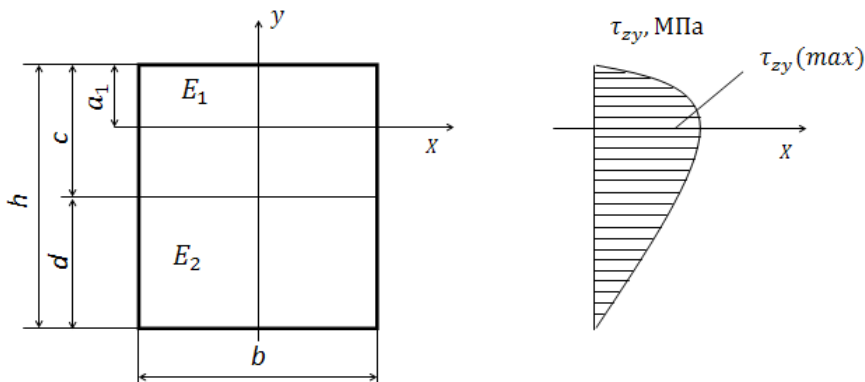


Рис. 7. Распределение касательных напряжений по высоте сечения балки

Из рис. 7 следует, что максимальные касательные напряжения в сечении балки действуют на уровне расположения нейтрального слоя  $x$ , что подтверждает известную классическую закономерность их распределения.

### 3. Пример расчета составной консольной балки с разными значениями модуля Юнга

На рис. 8 приведена расчетная схема и сечение консольной составной балки со значениями  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа, а  $E_2 = 1 \cdot 10^5$  МПа. Сечение балки прямоугольное, состоящее из двух одинаковых по высоте частей, равных 50 мм. Ширина балки  $b = 50$  мм, а высота ее сечения  $h = 100$  мм.

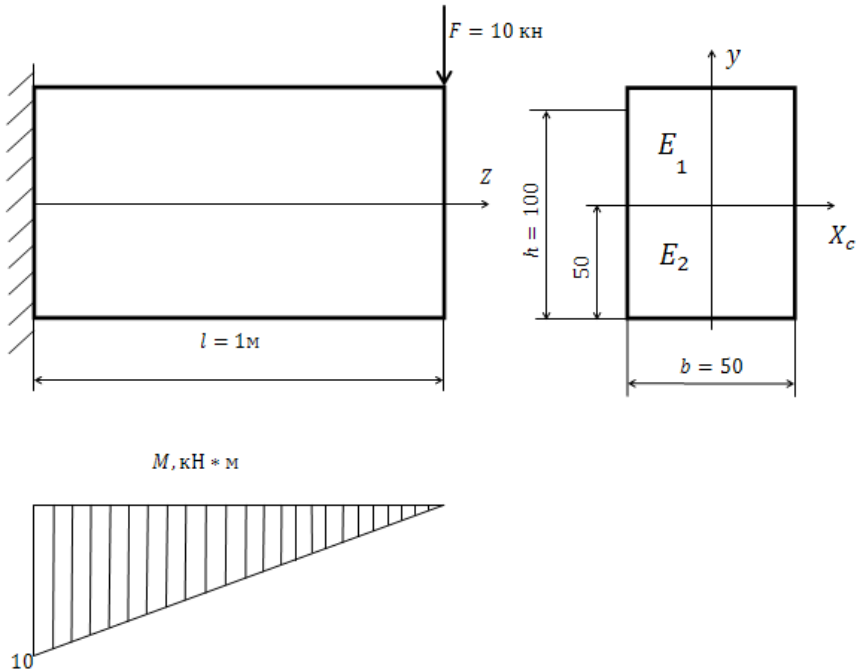


Рис. 8. Расчетная схема и эскиз сечения составной балки

Требуется определить значения нормальных и касательных напряжений в характерных точках сечения и построить эпюры этих напряжений.

На рис. 8 условно нейтральная ось сечения балки совпадает с центром тяжести площади сечения, но так как  $E_1 > E_2$  по условию задачи, нейтральная ось (н. о.) будет проходить по площади материала балки со значением  $E_1$ , т. е. выше условно принятого положения оси  $X_c$ . По формуле (6) определим положение нейтральной оси, обозначив его значением  $a_1$ , отсчитывая его положение от верхней кромки общего сечения балки:

$$a_1 = \frac{h(E_1 + 3E_2)}{4(E_1 + E_2)} = \frac{100(2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 1 \cdot 10^5)}{4(2 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^5)} = 41,67 \text{ мм.}$$



Тогда расстояние до нейтральной оси сечения от центральной оси  $X_C$  составит

$$l = \frac{h}{2} - a = \frac{100}{2} - 41,67 = 8,33 \text{ мм.}$$

Отложим полученные значения на эскизе площади сечения (рис. 9).

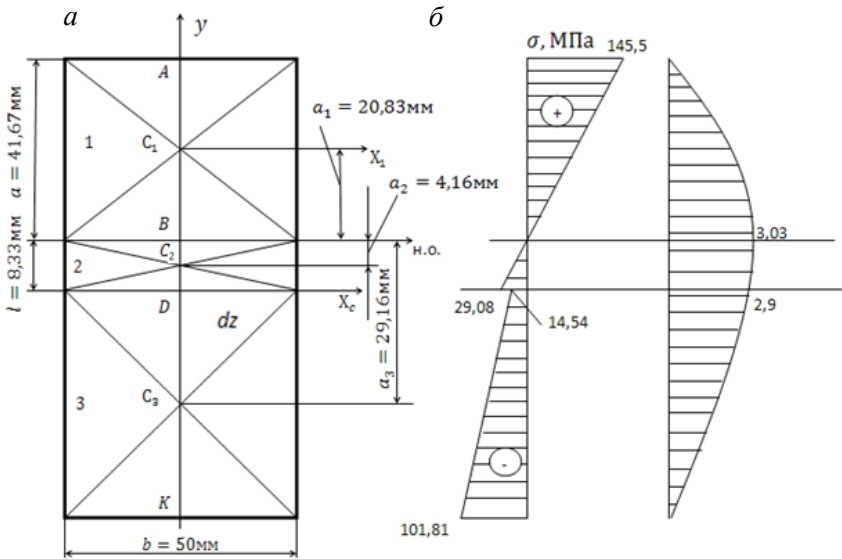


Рис. 9. Положение нейтральной оси в сечении (а) балки и эпюры нормальных и касательных напряжений (б)

Из рис. 9 следует, что нейтральная ось сечения разделила это сечение на три участка, которые пронумерованы 1, 2, 3 соответственно. Для каждого из этих участков определим значения осевых моментов инерции относительно нейтральной оси (н. о.) с учетом параллельного переноса осей:

$$I_{X1} = \frac{50 \cdot 41,67^3}{12} + 50 \cdot 41,67 \left(\frac{41,67}{2}\right)^2 = 12,06 \cdot 10^5 \text{ мм}^4;$$

$$I_{X2} = \frac{50 \cdot 8,33^3}{12} + 50 \cdot 8,33 \cdot \left(\frac{8,33}{2}\right)^2 = 9,63 \cdot 10^3 \text{ мм}^4;$$

$$I_{X3} = \frac{50 \cdot 50^3}{12} + 50 \cdot 50(25 + 8,33)^2 = 32,98 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Значение  $1/\rho$  определим по формуле (7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{M_z}{E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3}} = \\ &= \frac{M_z}{2 \cdot 10^5 (12,06 \cdot 10^5 + 9,63 \cdot 10^3) + 1 \cdot 10^5 \cdot 32,98 \cdot 10^5} = \frac{M_z}{57,29 \cdot 10^{10}}. \end{aligned}$$

Напряжение в точке  $A$  (рис. 9) определим по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_{Z(A)} &= \frac{M_z E_1}{E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3}} \cdot y_A = \\ &= \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5 \cdot 12,06 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5 \cdot 0,96 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^5 \cdot 32,98 \cdot 10^5} \cdot 41,67 = \\ &= \frac{20 \cdot 10^6 \cdot 41,67}{57,29 \cdot 10^5} = 145,5 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Напряжения в точке  $B$ , расположенной на нейтральной линии, равны нулю.

На границе раздела материалов в точке  $D$  в материале с модулем упругости  $E_1$  напряжение  $\sigma_z$  определяется из выражения (9):

$$\begin{aligned}\sigma_{Z(D)} &= -\frac{M_z E_1}{E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3}} y_D = \\ &= -\frac{10 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^5}{57,29 \cdot 10^{10}} 8,33 = -29,08 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

На границе раздела материалов в точке  $D$  в материале с модулем упругости  $E_2$  напряжение  $\sigma_z$  определим из выражения (9):

$$\begin{aligned}\sigma_{Z(D)} &= -\frac{M_z E_2}{E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3}} \cdot y_D = \\ &= -\frac{10 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^5}{57,29 \cdot 10^{10}} \cdot 8,33 = -14,54 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Напряжение в точке  $K$  определим по формуле (10) при  $y_k = 58,33$  мм:

$$\begin{aligned}\sigma_{Z(K)} &= -\frac{M_z E_2}{E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3}} \cdot y_K = \\ &= -\frac{10 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^5}{57,29 \cdot 10^{10}} \cdot 58,33 = -101,81 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Эпюра нормальных напряжений по высоте сечения балки приведена на рис. 9, где на границе раздела материалов получаем скачок напряжений, равный  $n = E_1 / E_2 = 2 \cdot 10^5 / (1 \cdot 10^5) = 2$ , что подтверждает правильность решения задачи.

Определяем значения касательных напряжений в характерных точках по высоте сечения балки (рис. 9). Напряжения в точках  $A$  и  $K$  равны нулю.

Касательные напряжения в точке  $B$  определим по формуле (14):

$$\tau_{yz(B)} = \frac{Q_z S_{XB}^{\text{отс}} E_2}{b(E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3})},$$

где  $S_{XB}^{\text{отс}} = 50 \cdot 41,67 \cdot \frac{41,67}{2} = 0,434 \cdot 10^5 \text{ мм}^3$ ;

$$\tau_{yz(B)} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,434 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^5}{50 \cdot 57,29 \cdot 10^{10}} = 3,03 \text{ МПа.}$$

Напряжение в точке  $D$  определим по формуле (15):

$$\tau_{yz(D)} = \frac{Q_z S_{XD}^{\text{отс}} E_2}{b(E_1 I_{X1} + E_1 I_{X2} + E_2 I_{X3})},$$

где  $S_{XD}^{\text{отс}} = 50 \cdot 50 \cdot \left(\frac{50}{2} + 8,33\right) = 83325 \text{ мм}^3$ ;

$$\tau_{yz(D)} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 83325 \cdot 2 \cdot 10^5}{50 \cdot 57,29 \cdot 10^5} = 2,9 \text{ МПа.}$$

Эпюра касательных напряжений по высоте сечения балки приведена на рис. 9.

#### **4. Нормальные напряжения при плоском изгибе прямого стержня, возникающие в результате надавливания волокон друг на друга**

В данной работе приводится доказательство, что в продольных сечениях бруса при поперечном изгибе, вызванном действием сосредоточенной силы, возникают нормальные напряжения в результате надавливания волокон друг на друга. Из курсов «Сопротивление материалов» и «Теория упругости» известно, что при таком изгибе в поперечных сечениях бруса

возникают только нормальные напряжения в поперечном направлении, а в перпендикулярном поперечному направлению они отсутствуют.

Рассмотрим двухопорную балку прямоугольного сечения, нагруженную сосредоточенной силой на середине пролета (рис. 10).

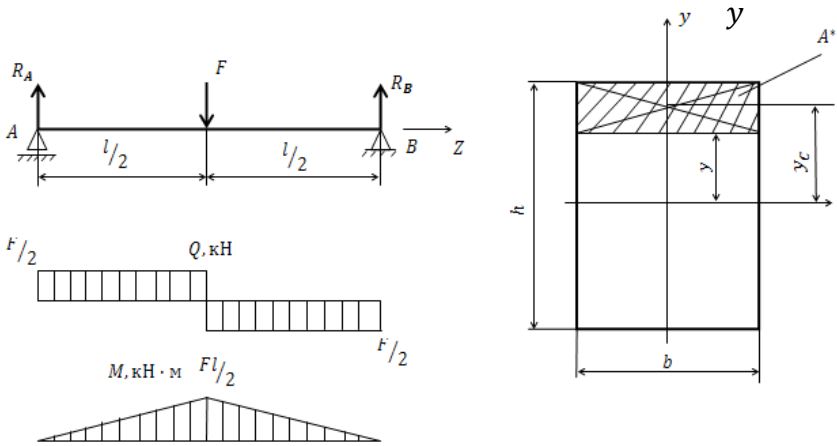


Рис. 10. Схема нагружения и форма сечения балки

Из курса «Сопrotивление материалов» расчетные формулы для определения нормальных и касательных напряжений в сечениях балки, без учета гипотезы о надавливании волокон в поперечном направлении, имеют вид

$$\sigma_z = \frac{M_z}{I_x} \cdot y, \quad (17)$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_z \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b}, \quad (18)$$

где

$$S_x^{\text{отс}} = A \cdot y_c = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right) = \frac{bh^2}{8} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) = \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2).$$

Подставив значение  $S_x^{\text{отс}}$  в формулу (18), получим

$$\tau_{zy} = \frac{Q_z \cdot \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2)}{I_x b} = \frac{Q_z (h^2 - 4y^2)}{8I_x}. \quad (19)$$

Уравнения равновесия для плоской задачи без учета компонента объемных сил имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Из первого уравнения системы уравнений (20) следует, что

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = -\int \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \partial y + c_1, \quad (21)$$

тогда, используя уравнение (17), получим

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial M_z}{\partial z} \cdot \frac{y}{I_x} = \frac{Q_z}{I_x} \cdot y. \quad (22)$$

Решая совместно уравнения (22) и (21), получим

$$\tau_{zy} = -\int \frac{Q_z}{I_x} y \partial y + c_1. \quad (23)$$

Постоянную интегрирования определим из граничных условий при  $y = \pm \frac{h}{2}$ ,  $\tau_{zy} = 0$ :

$$-\frac{Q_z}{2I_x} \cdot \frac{h^2}{4} + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad c_1 = \frac{Q_z h^2}{8I_x}. \quad (24)$$

Совместное решение (23) и (24) дает

$$\tau_{zy} = \frac{Q_z}{8I_x} (h^2 - 4y^2). \quad (25)$$

Выражение для  $\tau_{zy}$  полностью совпадает с уравнением (19), полученным с помощью методов сопротивления материалов.

Из второго уравнения системы уравнений (20) следует, что

$$\sigma_y = -\int \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \partial y + c_2, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \frac{\partial Q_z}{\partial z} \cdot \frac{1}{8I_x} (h^2 - 4y^2) = \frac{q_z}{8I_x} (h^2 - 4y^2), \quad (27)$$

где  $q_z$  – интенсивность распределенной нагрузки в рассматриваемом слое изгибаемой балки, значение которой можно рассматривать как величину касательных напряжений  $\tau_{zy}$  в данном слое (рис. 11).

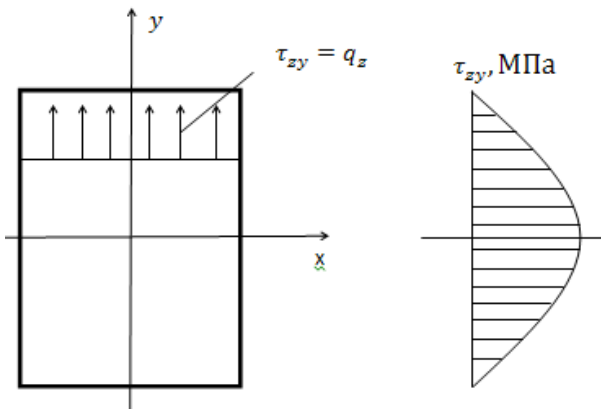


Рис. 11. Вариант эквивалентности  $\tau_{zy}$  и  $q_z$

Решая совместно уравнения (25) и (26) получим

$$\sigma_y = -\int \frac{q_z}{8I_x} (h^2 - 4y^2) dy + c_2,$$

$$\sigma_y = -\frac{q_z}{8I_x} (h^2 y - \frac{4}{3} y^3) + c_2.$$

С учетом того, что в рассматриваемом слое  $q_z = \tau_{zy}$ , получим

$$\sigma_y = -\frac{Q_z}{8I_x} (h^2 - 4y^2) \cdot \frac{1}{8I_x} (h^2 y - \frac{4}{3} y^3) + c_2.$$

После ряда преобразований получим

$$\sigma_y = -\frac{Q_z}{64I_x^2} (h^2 - 4y^2) (h^2 y - \frac{4}{3} y^3) + c_2.$$

Значение постоянной  $c_2$  определим из граничного условия  $y = \pm \frac{h}{2}$ ,  $\sigma_y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ .

В итоге получаем окончательное уравнение для определения нормальных напряжений в сечениях балки, вызванных надавливанием горизонтальных слоев балки при плоском поперечном изгибе:

$$\sigma_y = \frac{Q_z}{64I_x^2} (h^2 - 4y^2) (\frac{4}{3} y^3 - h^2 y). \quad (28)$$

Эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по высоте сечения балки, полученные по формулам (25) и (28) приведены на рис. 12 для положительного значения поперечной силы  $Q_z$ .



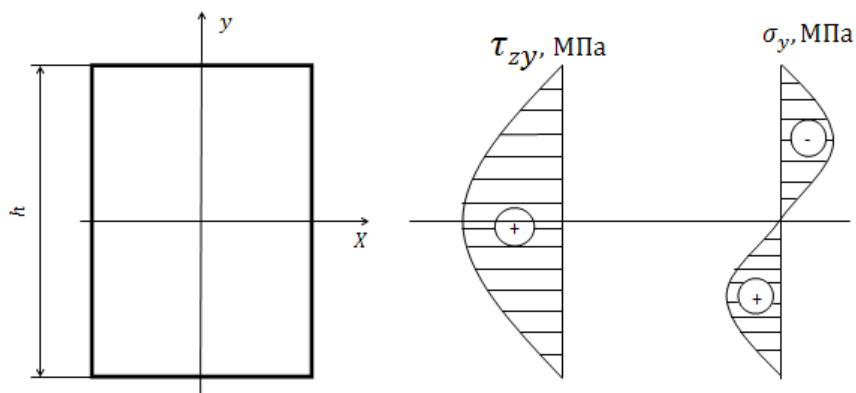


Рис. 12. Распределение касательных и нормальных напряжений по высоте сечения балки

Из приведенных на рис. 12 эпюр следует, что при  $y = 0$  и при  $y = \pm h/2$  нормальные напряжения в продольных волокнах стержня  $\sigma_y$  будут равны нулю и достигают своего максимального значения при  $y = \pm h/4$ . Изменения этих напряжений по высоте бруса описывается кубической параболой в соответствии с формулой (28).

## Список литературы

1. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1972. – 541 с.
2. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко [и др.]. – Киев : Техніка, 1967. – 783 с.
3. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1972 – 559 с.

## Содержание

|   |    |
|---|----|
| Введение .....  | 3  |
| 1. Теоретический расчет нормальных напряжений.....  | 4  |
| 2. Касательные напряжения при плоском поперечном изгибе.....  | 11 |
| 3. Пример расчета составной консольной балки с разными значениями модуля Юнга.....  | 14 |
| 4. Нормальные напряжения при плоском изгибе прямого стержня, возникающие в результате надавливания волокон друг на друга..... | 19 |
| Список литературы.....  | 25 |

Учебное издание

**ДУДЯК** Александр Иванович  
**ХМЕЛЕВ** Александр Афанасьевич  
**САХНОВИЧ** Татьяна Александровна  
**ГУРКОВСКАЯ** Ольга Игоревна

**ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НА ПРОЧНОСТЬ  
СОСТАВНЫХ БАЛОК  
ИЗ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Учебно-методическое пособие  
для студентов специальности 1-36 01 03 «Технологическое  
оборудование машиностроительного производства»

Редактор *Т. А. Зезюльчик*  
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 19.06.2013. Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 1,57. Уч.-изд. л. 1,23. Тираж 100. Заказ 350.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.