УДК 517.8

Об одном новом решении дифференциального уравнения k-го порядка

Акимов В. А.
Белорусский национальный технический университет

В результате опыта работы с кратными дифференциальными операторами [1] автор приходит к следующим утверждениям:

Теорема 1. Частное решение дифференциального уравнения произвольного порядка $\left(d_x^2/\delta_n^2+1\right)^k * f(x)=\sin\delta_n x$ имеет вид:

$$f^*(x)=A_k x^k \sin\delta_n x\text{, если } k \text{ – четное и } f^*(x)=A_k x^k \cos\delta_n x\text{,}$$

если k – нечетное натуральное число.

Доказательство данной теоремы основано на лемме

Лемма. Если $1\le m\le k-1$, то $\left(d_x^2/\delta_n^2+1\right)^k * \left[x^m\cos\delta_n x\right]=0$, смысл доказательства которой, базируется на том основании, что после однократного применения оператора, стоящего в круглых скобках, степень полинома понижается на единицу.

На основании теоремы 1 можно сформулировать и теорему 2.

Теорема 2. Общее решение дифференциального уравнения

$$\left(d_x^2/\delta_n^2+1\right)^k * f(x)=\sin\delta_n x \text{ имеет вид:}$$

$$f(x)=\sum_{m=0}^{m=k-1} x^m\left(C_m\sin\delta_n x+D_m\cos\delta_m x\right)+A_k x^k\sin\delta_n x,\text{ если } k \text{ – четное и}$$

$$f(x)=\sum_{m=0}^{m=k-1} x^m\left(C_m\sin\delta_n x+D_m\cos\delta_m x\right)+A_k x^k\cos\delta_n x,\text{ если } k \text{ – нечетное}$$

натуральное число. Причем $A_k=-\dfrac{\delta_n^k}{2^k k!}$, если k – нечетное и $A_k=\dfrac{\delta_n^k}{2^k k!}$, если k – четное.

Нахождение частного решения полностью основано на теореме 1. Попутно заметим, что именно в этом и заключается роль первой теоремы, так как нахождение частного решения, например методом вариации произвольной постоянной, носит весьма проблематичный характер.