

УДК 539.3

ПРОНКЕВИЧ
Сергей Александрович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ, КОЛЕБАНИЙ И КОНТАКТНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Минск, 2013

Работа выполнена в Белорусском национальном техническом университете

Научный руководитель **Чигарев Анатолий Власович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теоретической механики
Белорусского национального технического
университета

Официальные оппоненты: **Кулак Михаил Иосифович**,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой полиграфических
производств УО «Белорусский государственный
технологический университет»;

Старовойтов Эдуард Иванович,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой строительной механики
УО «Белорусский государственный университет
транспорта»

Оппонирующая
организация УО «Белорусский государственный аграрный
технический университет»

Защита состоится 27 декабря 2013 в 16⁰⁰ часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220013, г. Минск, пр. Независимости, 65, 1-й корпус, ауд. 202, тел. ученого секретаря (+375297) 292-24-04.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан «27» ноября 2013 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций,
кандидат физ.-мат. наук, доцент

Акимов В.А.

© Пронкевич С.А., 2013

© Белорусский национальный
технический университет, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации обусловлена тем, что двумерное напряженно – деформированное состояние реализуется во многих конструкциях, находящихся применение в различных областях машиностроения, строительства, приборостроения. Развитию методов моделирования и расчета двумерных задач в контактной механике, в теории упругой устойчивости, в теории колебаний посвящено громадное число публикаций, в которых рассматриваются различные подходы, начиная от методов экспериментальной механики и кончая методами функционального анализа, топологии, теории групп. В последние годы важную роль в решении этих задач играют численные методы, основанные на методе конечных элементов и системах CAD/FEM, позволяющих получить дополнительную информацию о характере напряженно-деформируемого состояния в двумерной упругой области с достаточно сложной геометрией и различными граничными условиями. Однако разработка аналитических методов решения контактных задач и задач нахождения спектра собственных значений и собственных функций остается актуальной. Сочетание аналитических и численных методов позволяет решать задачи, получать оценки погрешности между решениями, полученными разными авторами или экспериментальными данными. Реализация принципа взаимодополняемости численного и аналитического анализа позволяет не только продвинуться в решении поставленных задач, но и прогнозировать конкретный вид решений для двумерных областей сложной формы и нерегулярных граничных условий.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами Тема диссертации соответствует п. 12.1. «Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук» Перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы, утвержденного Постановлением Совета Министров Республики Беларусь 19.04.2010 № 585. Работа выполнялась в рамках НИР ГБ №1911-218 «Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния в неоднородных средах применительно к решению задач мехатроники, биомеханики, наномеханики».

Цель и задачи исследования Цель работы – использование методов численного и аналитического анализа для решения двумерных задач

устойчивости, колебаний и контактного взаимодействия деформируемых тел в случае различных граничных условий, вариациях геометрических форм упругих областей, контактных площадок.

Для достижения поставленной цели требовалось решить следующие задачи:

- исследовать влияние нерегулярности граничных условий на характер распределения деформаций в круглой пластине;

- оценить влияние малых нерегулярностей в геометрии, неоднородности в граничных условиях, нелинейности среды на спектр собственных частот и собственной функции.

- исследовать влияние предельного перехода непрерывного негладкого деформирования вписанного и описанного многоугольников в круг, оценить погрешность приближения собственных функций и спектра многоугольных областей круговыми;

- построить численно-аналитическое решение задачи о внутреннем контакте двух цилиндрических тел.

Объект и предмет исследования Объектом исследования являются плоские задачи теории упругости. Предметом исследования являются контактное взаимодействие плоских тел, а также потеря устойчивости и собственные колебания пластин.

Положения, выносимые на защиту

1. Численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для задачи И. Я. Штаермана о внутреннем контакте двух цилиндрических тел. Предложенное численно-аналитическое решение позволяет находить давление в области контакта и имеет преимущество в скорости решения перед методом И. Векуа и методом конечных элементов.

2. Влияние величины задаваемых изгибов и перемещений контура круглой пластины на форму ее деформирования. Влияние неоднородной продольной нагрузки, изменяющейся по тригонометрическому закону, на форму потери устойчивости круглой пластины.

3. Влияние перфорации на значения критической нагрузки для прямоугольной пластины в следующих случаях: соотношения диаметра отверстия и его расположение, при которых значения критической нагрузки для ослабленной одиночным отверстием прямоугольной пластины превосходят величину критической нагрузки пластины без отверстия; диаметр и порядок расположения отверстий перфорированной прямоугольной пластины приводящий к появлению форм потери устойчивости, отличных от форм пластины без перфораций.

4. Численные оценки влияния величины неоднородности (расположение и величина сосредоточенной массы, расположение и диаметр

перфорации, нелинейности геометрии, неоднородности граничных условий) на спектр и формы собственных колебаний круглой пластины.

Личный вклад соискателя

Представленные в работе результаты получены автором лично. Научный руководитель, д. ф. – м. н., проф. Чигарев А.В. принимал участие в постановке задач и анализе полученных результатов. Разработка численно-аналитических методов решения задачи о контакте согласованных поверхностей и изгиба пластин при неравномерных граничных условиях, изложенных в работе, выполнена совместно с д. ф. – м. н., проф. И.Н. Мелешко. Другим соавторам принадлежат результаты, не вошедшие в работу.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты работы прошли апробацию на следующих международных и республиканских конференциях и семинарах:

XLIII Республиканский научно-методический семинар «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании» (Минск, 5–6 февраля 2013)

V Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике «Механика-2011», (Минск, 26–28 октября 2011 года)

XLIII Республиканский научно-методический семинар «Применение методов компьютерной механики в инженерии, науке, образовании» (Минск, 7–8 февраля 2011)

VI Международный симпозиум по трибофатике (Минск, 25 октября–1 ноября 2010 г)

Международная научно-техническая конференция «Инновации в машиностроении» (Минск, 26–29 октября 2010 г).

Опубликованность результатов диссертации По теме диссертации опубликовано 13 статей, из них 6 в научных журналах, рекомендованных для публикации ВАК (общим объемом 1,25 авторских листа), 7 статей в сборниках материалов и тезисах докладов научных конференций и семинаров.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав основного текста с краткими выводами, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем диссертации составляет 109 страниц, из которых 100 страниц основной текст с рисунками и таблицами, 9 страниц содержат список источников. В приложении к диссертации приведены таблицы и иллюстрации вспомогательного характера.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Как известно, постановка и решение задачи упругой устойчивости стержня впервые была дана Эйлером. Дальнейшие исследования для двумерных и трехмерных задач привели к созданию теории ветвления решений, имеющей общезначимые результаты в прикладных и теоретических аспектах. Хронологически следующая граничная задача, относящаяся к теме диссертации, это задача Герца, которая положила начало развитию контактной механики, трибологии и другим дисциплинам, важным с точки зрения теории и практики. Релеем были доказаны теоремы о влиянии на спектр и формы собственных колебаний жесткостных, инерционных, геометрических, вязких свойств. Гильбертом была сформулирована задача о влиянии геометрии колеблющейся области на распределение собственных частот и колебаний этой области, а Вейлем было установлено, что изометричные области имеют одинаковые спектры частот и собственных колебаний. В дальнейшем этой проблемой занимались многие исследователи, трудами которых сформировалась область науки, называемая спектральной теорией операторов (Данфорд, Шварц). В рамках аналитических подходов к решению этих задач разработаны методы приближенного вычисления наименьшего собственного значения и собственной функции с помощью метода Ритца. Однако вопросы нахождения частот и гармоник более высоких порядков для областей с формами сложнее, чем круг и прямоугольник оставались недостаточно исследованными. Доказан ряд теорем о влиянии варьирования геометрии области на спектр и собственные колебания, разработана классификация задач, составлены таблицы, однако полного решения проблемы пока не получено.

Важным вопросом в теоретическом и практическом аспектах является переход при варьировании области к вырожденным случаям, характеризующимся слиянием частот и появлением двух и более независимых мод для одной и той же кратной частоты. Большое количество исследований посвящено изучению влияния не только формы области, но и связей, а также других параметров задачи на характер статической потери устойчивости, а также колебаний и спектр собственных частот. Например, влияние неоднородности и нелинейности может приводить к переходу детерминированных колебаний в хаотические.

Первая глава посвящена обзору и формулировке основных граничных задач, аналитическим методам определения частот и форм собственных колебаний пластин, определению критических нагрузок и форм потери устойчивости пластин, а также двумерным контактными задачам теории упругости.

Для плоского деформированного состояния граничные задачи и методы их решения формулируются в классической форме.

Рассмотрены контактные задачи для плоской задачи теории упругости и теории пластин в случае малой области контакта (модель Герца) и в случае контакта согласованных цилиндрических поверхностей (задача И.Я. Штаермана).

Во второй главе развиваются аналитические и численные методы решения контактных задач и задач статической устойчивости для двумерных тел.

В первом параграфе приведено сравнение решения точечного контакта цилиндра и цилиндрической полости на основе теории Герца, с решением, полученным на основе метода конечных элементов. Приведены выражения, описывающие величину области контакта, сближения тел δ и максимального давления p_0 .

Во втором параграфе рассмотрено влияние области контакта соприкасающихся поверхностей на решение. Рассмотрена задача И.Я. Штаермана о внутреннем контакте цилиндра и цилиндрической полости (рисунок 1), когда линейный размер области контакта соизмерим с радиусами тел.

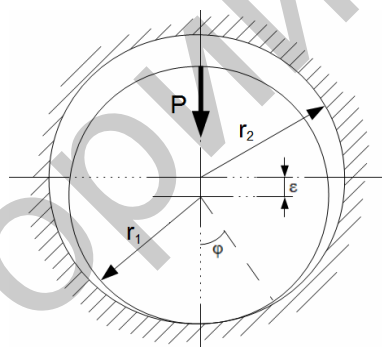


Рисунок 1 – Контакт двух цилиндрических тел с почти равными радиусами

В этом случае в области контакта выполняется соотношение:

$u_{1r} + u_{2r} = \alpha \cos \varphi - \varepsilon(1 - \cos \varphi)$, где u_1 и u_2 – нормальные упругие перемещения точек цилиндра и полости, α – сближение тел при сжатии. Сближение тел α зависит от величины внешней нагрузки и механических свойств соприкасающихся поверхностей.

Задача, в итоге, сводится к решению интегро-дифференциального уравнения Прандтля:

$$H \frac{p(x)}{(1+x^2)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p'(t)}{t-x} dt = f(x), \quad -1 < x < 1,$$

описывающего искомое давление $p(x)$, возникающее при контакте согласованных поверхностей под действием нагрузки P (H – константа, зависящая от свойств соприкасающихся поверхностей, $f(x)$ – функция, зависящая от нагрузки P).

Решение представляется в виде ряда:

$$p(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{-n}^n A_k(x) u_k,$$

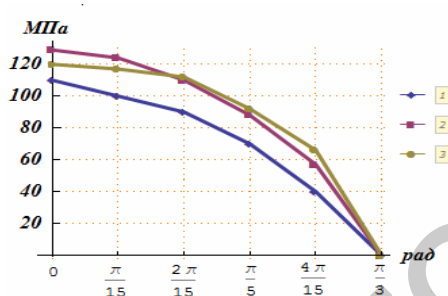
где

$$A_k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\left(x_k + \frac{h}{2} - x \right) H \left(x, x_k + \frac{h}{2} \right) - \left(x_k - \frac{h}{2} - x \right) H \left(x, x_k - \frac{h}{2} \right) \right] + \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \left(x_k + \frac{h}{2} \right) - \arcsin \left(x_k - \frac{h}{2} \right) \right]$$

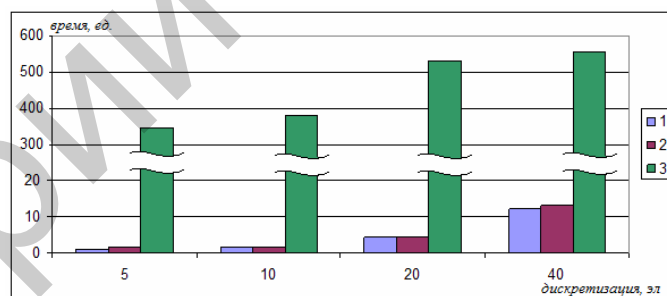
$H \left(x, x_k \pm \frac{h}{2} \right)$ – выражения, зависящие от механических свойств

контактирующих поверхностей.

Изложенным методом проведен расчет контактного давления $p(x)$ и угла контакта φ . На рисунке 2,а) показано контактное давление для частного случая сжатия стального цилиндра и стального охватывающего тела силой P . На рисунке 2,б) показано время расчета в зависимости от дискретизации полосы контакта.



а)



б)

- 1 – конечно-элементное решение, полученное в системе ANSYS;
- 2 – решение, предложенное И. Векуа;
- 3 – рассмотренное в работе решение

- 1 – конечно-элементное решение, полученное в системе ANSYS;
- 2 – решение, предложенное И. Векуа;
- 3 – рассмотренное в работе решение

Рисунок 2 – Сравнение контактного давления (а) и угла контакта (б) в согласованных поверхностях, полученное на основе теории И.Я. Штаермана и методом конечных элементов

Предложенный метод работает в среднем до 10% быстрее, метода И. Векуа, приведенного И.Я. Штаерманом, и значительно быстрее 10%, чем метод конечных элементов, реализованный в системе ANSYS.

В третьем параграфе исследовано влияние неравномерности граничных условий на распределение деформаций в круглой пластине. Как известно, изгиб круглой пластины единичного радиуса, без поперечной нагрузки, описывается бигармоническим уравнением вида:

$$\Delta \Delta W = 0, \text{ где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1)$$

С учетом неравномерности кинематических граничных условий:

$$W(r, \varphi)|_{r=1} = g(\varphi), \quad \frac{\partial W}{\partial r} = l(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (2)$$

аналитическое выражение для изгиба пластины представляется в виде логарифмического ряда:

$$W(r, \varphi) = \sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) g(\varphi_k) - \frac{1-r^2}{2} \left[\sum_{-n}^n A_k(r, \varphi) l(\varphi_k) - \sum_{-n}^n B_k(r, \varphi) g'(\varphi_k) \right] \quad (3)$$

где

$$A_k(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[h + 2 \operatorname{Im} \left(\ln \left(1 - ze^{-i\left(\varphi_k + \frac{h}{2}\right)} \right) - \ln \left(1 - ze^{-i\left(\varphi_k - \frac{h}{2}\right)} \right) \right) \right],$$

$$B_k(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\ln \left(1 - ze^{-i\left(\varphi_k - \frac{h}{2}\right)} \right) - \ln \left(1 - ze^{-i\left(\varphi_k + \frac{h}{2}\right)} \right) \right]$$

Произведено сравнение полученных аналитических результатов с конечно-элементным моделированием в системе ANSYS. На рисунке 3 представлено сравнение изгиба круглой пластины под действием кинематических граничных условий, полученное в системе конечно-элементного моделирования ANSYS и численно – аналитическим методом, изложенным выше.

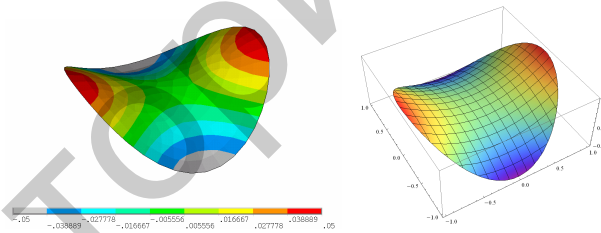


Рисунок 3 – Сравнение изгиба пластины, полученного на основе метода конечных элементов и на основе предложенного логарифмического ряда

Оценка расхождения результатов вычисления прогибов по аналитическим формулам и численно дает погрешность около 5%.

В четвертом параграфе рассматривается устойчивость круглой пластины с различными граничными условиями, приведено аналитическое решение, которое сравнивается с численным, полученным в системе ANSYS.

Рассмотрена круглая пластинка радиуса c , заземленная по контуру, и находящаяся под действием равномерного радиального сжимающего усилия p . Заземление контура пластины исключает его прогиб и поворот, но не препятствует его смещению в срединной плоскости.

Дифференциальное уравнение изгиба пластины имеет вид

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w = q \quad (4)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

Для жесткого закрепления контура: $w = 0; \frac{dw}{dr} = 0$. (5)

Для шарнирно-опертого контура: $w = 0; M_r = 0$;

Для свободной пластины: $M_r = 0; Q_r = 0$

На рисунке 4 представлено аналитическое решение форм потери устойчивости при шарнирном оперении по контуру, полученное в системе компьютерной алгебры Mathematica.

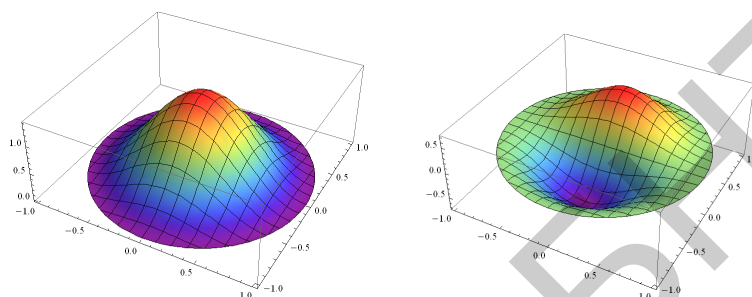


Рисунок 4 – Первая и вторая формы потери устойчивости равномерно сжатой пластины

При численном моделировании в системе ANSYS появляются формы потери устойчивости, соответствующие практически одинаковой критической нагрузке (различие составляет менее 1%) и формы выпучивания, различающиеся лишь углом поворота (приблизительно $\frac{\pi}{n}$, n – число волн по окружности) (рисунок 5).

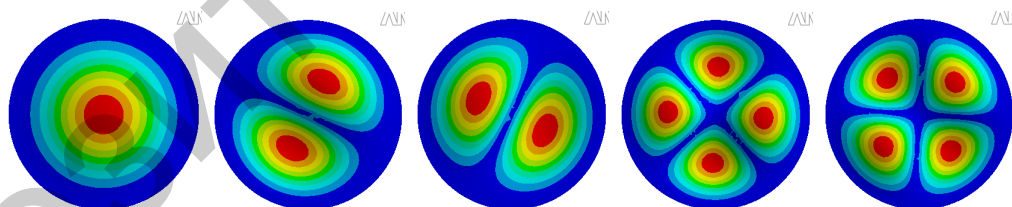


Рисунок 5 – Первые 5 форм потери устойчивости равномерно сжатой пластины

В случае неравномерного по периметру окружности нагружения аналитическое решение найти не удастся, хотя это имеет важный теоретический и практический интерес.

В этом же параграфе рассмотрена пластина, шарнирно опертая по контуру, нагруженная сжимающей нагрузкой, заданной по синусоидальному закону:

$$p = p_0 \sin 2\varphi$$

Сравнение результатов равномерно сжатой пластины и по закону синуса показывает существенное влияние характера нагрузки на формы потери

устойчивости. Неравномерность нагружения ведет к усложнению собственных форм и спектра для высших гармоник (рисунок 6).

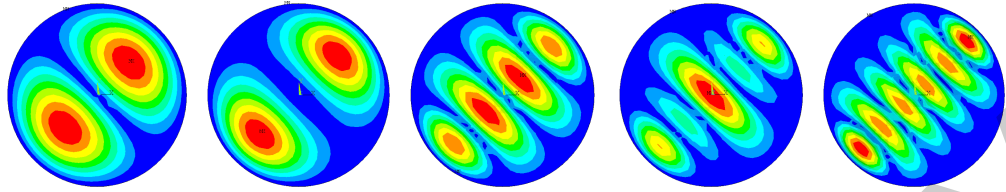


Рисунок 6 – Формы потери устойчивости пластины, сжимаемой силами, изменяющимися по закону синуса

Характер ветвления решений также изменяется, что представлено в виде схемы бифуркаций решения в зависимости от собственных значений (критической нагрузки).

Также рассмотрены задачи потери устойчивости пластины, со смешанными неравномерными граничными условиями: часть пластины закреплена, часть нагружена (рисунок 7).

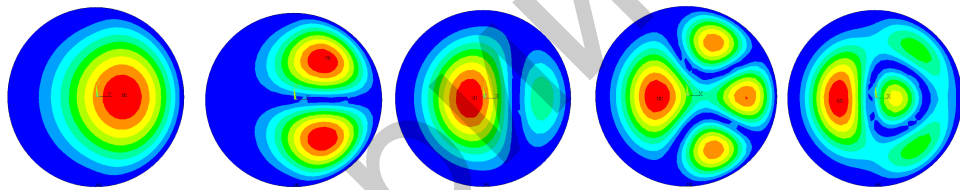


Рисунок 7 – Формы потери устойчивости при закреплении половины пластины

Видно, что меняется спектр собственных форм выпучивания, причем нерегулярным образом. При увеличении неравномерности нагружения и закрепления увеличивается отличие формы потери устойчивости от симметричного случая нагружения, но не происходит разрушения бифуркации.

В пятом параграфе рассматривается устойчивость прямоугольных пластин, сравнивается аналитическое и численное решение, влияние неоднородных граничных условий.

Рассмотрена эталонная задача – сжатие прямоугольной пластины, при граничных условиях, когда две стороны пластины $x=0, x=a$ свободно оперты и в направлении оси x действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка (рисунок 8,а). Далее рассмотрена прямоугольная пластина, шарнирно опертая по длинным сторонам и сжимаемая по коротким сторонам напряжениями N_x . (Рисунок 8,б)

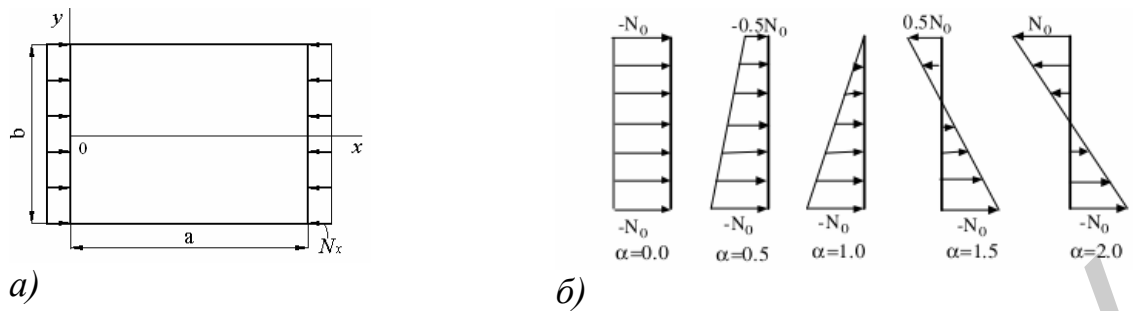


Рисунок 8 – Схема нагружения задачи потери устойчивости прямоугольной пластины, нагруженной переменными силами (а); варианты изменения нагрузки N_x (б)

Дифференциальное уравнение изгиба пластины при исследовании устойчивости имеет вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left(N_x(y) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right),$$

где $N_x(y) = \alpha N_{0x}(y)$

При свободном оперании кромок граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x=0, a \quad W=0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= 0, \\ y=0, b \quad W=0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Решение представляется в форме двойного тригонометрического ряда, каждый член которого удовлетворяет граничным условиям (6):

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Ниже на рисунке 9 представлены некоторые формы потери устойчивости прямоугольной пластины:

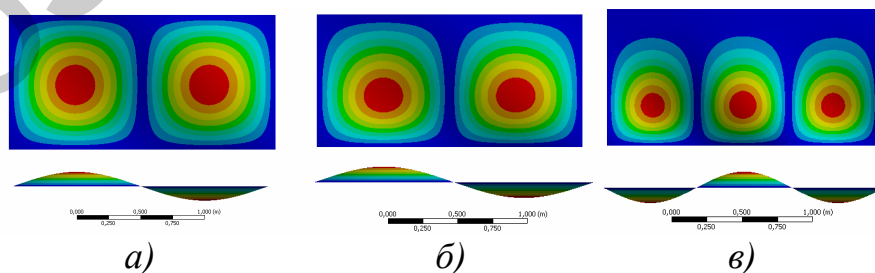


Рисунок 9 – Первая и четвертая формы потери устойчивости прямоугольной пластины в случае $\alpha = 0$ (а), $\alpha = 1$ (б), $\alpha = 2$ (в)

Рассмотрено влияние несовершенств типа одиночного отверстия на величину критической нагрузки (рисунок 10,а)

В зависимости от позиционирования отверстия наблюдается увеличение критической нагрузки для пластины с отверстием, по сравнению с пластиной без отверстия.

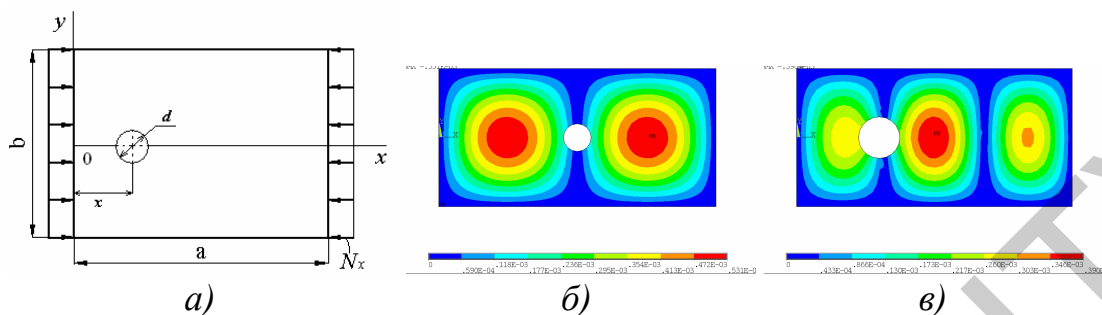


Рисунок 10 – Расчетная схема пластины с отверстием (а); Формы потери устойчивости прямоугольной пластины с отверстием, значения критической нагрузки для которой превосходят критическую нагрузку без отверстия б) $d/b=0,2$ $x=1$ вторая частота; в) $d/b=0,3$ $x=0,6$ третья частота

Увеличение критической нагрузки наблюдается в случае, если отверстие находится на узловой линии между волнами потери устойчивости. На рисунке 10,б-в) показаны формы потери устойчивости пластины с отверстием, для которых значения критической нагрузки превосходят соответствующие значения для пластины без отверстия.

В шестом параграфе рассматривается решение задач устойчивости для регулярно перфорированных пластин. Рассмотрена прямоугольная пластина с соотношением сторон $a/b = 1,2,3$ с различными вариантами расположения и размера перфораций (рисунок 11).

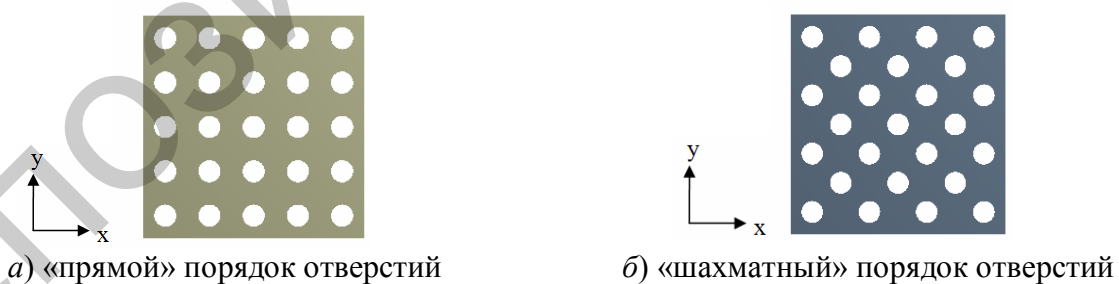


Рисунок 11 – Варианты расположения перфораций в квадратной пластине

Получены зависимости значения критической нагрузки и формы потери устойчивости от расположения и диаметра отверстий. Показано, что формы потери устойчивости для перфорированных пластин в подавляющем большинстве случаев совпадают с формами потери устойчивости для пластин без отверстий, что согласуется с результатами, полученными Арнольдом В.М.;

критическая нагрузка перфорированной пластины уменьшается при увеличении отношения диаметра отверстия к ширине пластины (d/b); зависимость изменения критической нагрузки от диаметра отверстия является практически линейной; порядок расположения отверстий мало влияет на величину критической нагрузки (особенно при малом отношении диаметра к ширине пластины ($d/b < 0,1$)), но при большом количестве отверстий значительного диаметра ($d/b = 0,15$ и выше) меняется форма потери устойчивости.

В *седьмом параграфе* исследуется потеря устойчивости пластины, перфорированной несимметрично, вдоль одной из сторон. В качестве сравнения использовались величины критической нагрузки для соответствующего отношения сторон, полученной для прямоугольной пластины без отверстий и перфорированных пластин в предыдущих параграфах.

Во всех рассмотренных случаях для первых четырех значений критической нагрузки форма потери устойчивости частично перфорированной пластины практически не отличается от форм потери устойчивости полностью перфорированной пластины. Для форм потери устойчивости выше четвертой асимметрия явно выражена и прогибы смещаются в область перфорации. Величина критической нагрузки, как и следовало ожидать, в случае частичного перфорирования выше, чем для полного перфорирования. Таким образом, несовершенства, расположенные симметрично относительно средней плоскости на разрушение бифуркации не влияют, а только меняют характер выпучивания.

Третья глава посвящена определению форм и частот собственных колебаний (модальному анализу) круглых и некруглых пластин, возможности использования различных приближений и оценки влияния формы пластины на ее спектр и собственные колебания.

В *первом параграфе* рассматривается аналитическое решение о колебаниях круглой пластины, закрепленной по контуру

На рисунке 12,*а*) представлены первые 3 формы собственных колебаний, полученных на основе аналитических формул с использованием функций Бесселя.

Во *втором параграфе* представлено численное решение задачи определения форм и частот собственных колебаний круглой пластины с помощью метода конечных элементов в системе ANSYS. Для сравнения на рисунке 12,*б*) представлены эти же формы собственных колебаний полученных в системе ANSYS. Из сравнения рисунков 12,*а*) и 12,*б*) можно видеть, что формы собственных колебаний полученные аналитическим и численным методом для первых частот совпадают. Тесты показывают возможность использовать ANSYS для исследования более сложных задач.

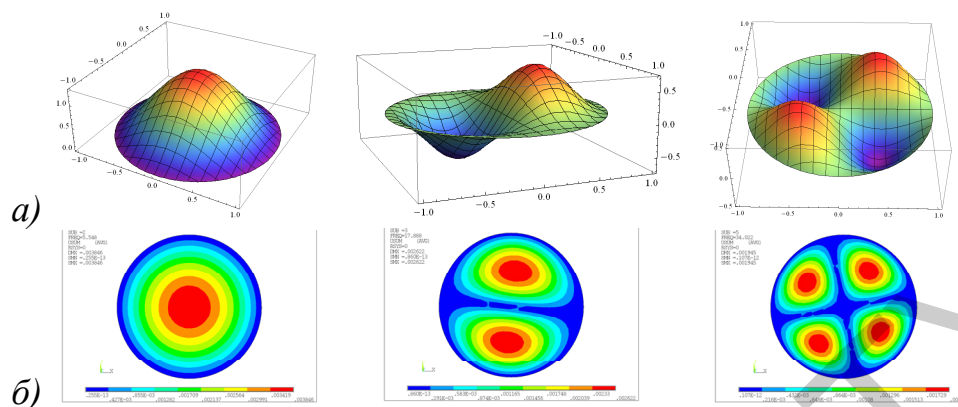
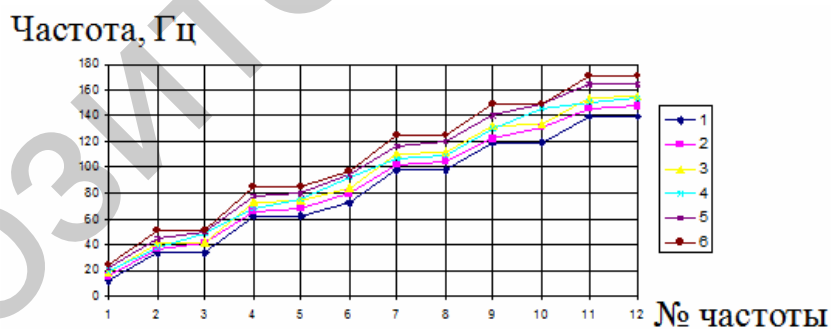


Рисунок 12 – Формы колебаний круглой пластины, опертой по контуру, полученные в системе Mathematica (а) и ANSYS (б)

В *третьем параграфе* рассматривается численное решение задачи определения частот и форм собственных колебаний круглых пластин с неоднородными граничными условиями (часть окружности закреплена, часть оперта). Полученные результаты свидетельствуют о том, что распределение спектра собственных частот при различных соотношениях для граничных условий, заданных на контуре, лежит между случаями защемления и шарнирного операния по всему контуру. Смещение спектра частот в большую или меньшую сторону пропорционально величине той или иной заделки (рисунок 13). Т.о. установлено влияние вида связи от односторонней удерживающей, до двухсторонней удерживающей.



1 – защемление по всему контуру; 2 – защемление на контуре $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, шарнирное закрепление $\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$; 3 – защемление на контуре $0 \leq \varphi \leq \pi$, шарнирное закрепление $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$; 4 – защемление на контуре $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $\pi \leq \varphi \leq 3\pi/2$, шарнирное закрепление $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$, $3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$; 5 - защемление на контуре $0 \leq \varphi \leq 3\pi/2$, шарнирное закрепление $3\pi/2 \leq \varphi \leq 2\pi$; 6 – шарнирное закрепление по всему контуру

Рисунок 13 – График изменения частот собственных колебаний в зависимости от вида граничных условий

В *четвертом параграфе* рассматривается влияние неоднородности круглой пластины единичного радиуса ($R=1$) за счет внесения отверстия и

точечной массы на спектр собственных частот. Исследуется влияние расположения и радиуса отверстия ($r=0,1..0,5R$) на величины и формы частот собственных колебаний (рисунок 14). Исследуется влияние расположения точечной массы и ее величины (масса варьируется от 25% до 300% массы пластины) на спектр собственных частот и формы колебаний.

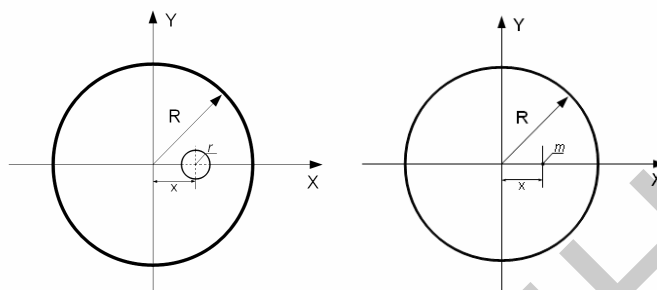


Рисунок 14 – Схема расположения неоднородностей рассматриваемых пластин

В результате моделирования показано, что отверстие малого радиуса ($r=0,1R \div 0,3R$) не оказывает какого-либо значительного влияния на форму колебаний. При этом частота собственных колебаний снижается по сравнению с соответствующими частотами сплошной пластины. Внесение отверстий большего радиуса ($r \geq 0,4R$) при смещении вдоль радиуса приводит к изменению форм колебаний и увеличению, начиная с четвертой, значений частот собственных колебаний.

Неоднородность при свободных внутренних границах не приводит к перестройке спектра и собственных колебаний. В рамках заданной погрешности картина стоячих волн не изменяется, не появляется локализация колебаний в области слабых мест (отверстий).

Внесение перфораций в зависимости от их расположения приводит как к уменьшению величин частот собственных колебаний, так и к увеличению, т.о. варьирование расположением и диаметром отверстия позволяет уменьшить материалоемкость конструктивных элементов, и внести коррективы в спектр собственных частот.

При смещении сосредоточенной массы вдоль радиуса возникают несимметричные формы колебаний, в местах расположения сосредоточенной массы наблюдается возникновение узловых линий, не свойственных колебаниям пластины без сосредоточенной массы.

Рассмотренные несовершенства не приводят разрушению бифуркаций, а только к изменению формы и положению точек бифуркации. Устойчивость макроформ тела к микроизменениям, определяет живучесть конструкции к повреждениям типа отверстий, дефектов массы.

В четвертой главе рассмотрен подход к выбору конечных элементов и построению конечно-элементной модели в зависимости от области разбиения и наличия в ней несовершенств.

В первом параграфе на примере задачи определения частот собственных колебаний квадратной пластины были рассмотрены следующие варианты конечно-элементного разбиения:

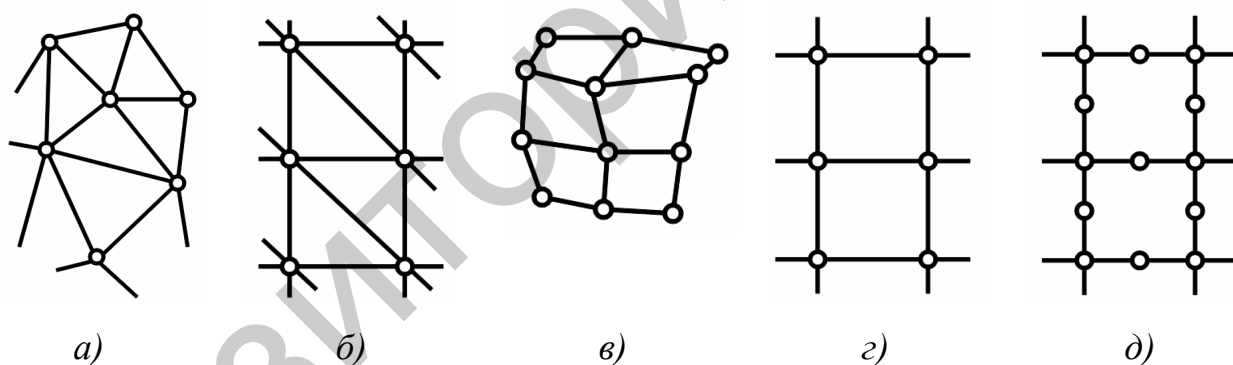
– Произвольная треугольная сетка (линейные или квадратичные конечные элементы) (рисунок 15,а)

– Регулярная треугольная сетка (линейные или квадратичные конечные элементы) (рисунок 15,б)

– Произвольная четырехугольная сетка (предпочтительно прямоугольные линейные или квадратичные конечные элементы) (рисунок 15,в)

– Регулярная четырехугольная сетка (преимущественно квадратные, или прямоугольные конечные элементы с соотношением сторон близким к 1, с линейной или квадратичной аппроксимирующей функцией) (рисунок 15,г)

– Регулярная четырехугольная сетка, составленная из элементов высокого порядка (аппроксимирующий полином имеет порядок не ниже третьего) (рисунок 15,д)



а – произвольная треугольная сетка; б – регулярная треугольная сетка;
в – произвольная четырехугольная сетка; г – регулярная четырехугольная сетка;
д – регулярная четырехугольная сетка высокого порядка

Рисунок 15 – Варианты разбиения области на конечные элементы

Для каждого варианта сетки были использованы элементы с размером стороны конечного элемента от 0,025 до 0,5 от стороны пластины.

Показано, что сетка, составленная из четырехугольных конечных элементов первого порядка предпочтительней регулярной сетки, составленной из конечных элементов треугольной формы и по точности результата сопоставима с треугольными элементами второго порядка, однако требует меньших затрат на вычисления; четырехугольные элементы второго порядка предпочтительней, чем треугольные элементы второго порядка, несмотря на их большую площадь; использование конечных элементов с аппроксимирующей

функцией выше второго порядка не дает существенного выигрыша в точности расчета, но ведет к увеличению времени расчета.

Во *втором параграфе* было рассмотрено влияние неоднородности в виде выреза в пластине на выбор размера и типа конечного элемента (рисунок 16).

Были использованы конечные элементы с длиной стороны, равной величине неоднородности, с аппроксимирующей функцией первого и второго порядков, с размером элемента, составляющим $1/2$ и $1/4$ величины разреза.

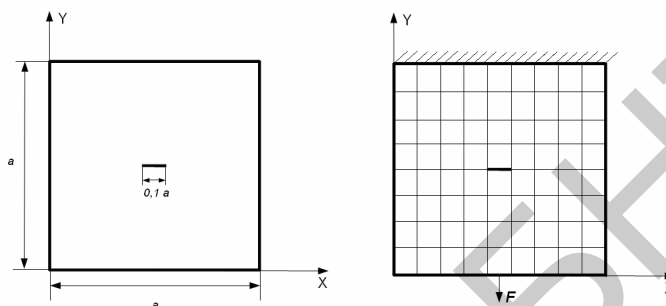


Рисунок 16 – Схема расположения неоднородности и конечно-элементная модель, используемая при расчете

Показано, что мелкая сетка требуется там, где ожидается появление неоднородности (отверстие, выточка, трещина и т. п.) приводящей к большому градиенту деформаций или напряжений. В то же время крупная сетка может применяться в зонах с малоизменяющимися относительными деформациями или напряжениями. В связи с этим перед созданием конечно-элементной сетки необходимо выделить предполагаемые области концентрации напряжений.

При расчете методом конечных элементов при учете неоднородности требуется, чтобы размер конечного элемента был, по меньшей мере, в 2-4 раза меньше неоднородности. Дальнейшее уменьшение размера конечного элемента приводит к уточнению результата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В результате работы получены следующие новые результаты:

1. Получено новое численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для задачи И. Я. Штаермана о внутреннем контакте двух цилиндрических тел. Предложенное численно-аналитическое решение нахождения контактного давления, при одинаковой дискретизации области контакта, сходится до 10% быстрее по сравнению с решением методом И. Векуа, и более 10% по сравнению с методом конечных элементов, при проведении которого требуется дискретизация не только области контакта, но и самих соприкасающихся тел [2, 5, 6, 11].

2. Влияние величины изгибов и перемещений контура круглой пластины на форму ее деформирования. Показано, что варьированием неоднородных кинематических граничных условий (изгибов и перемещений) можно добиться различных форм выпучивания круглой пластины. Влияние неоднородной продольной нагрузки, изменяющейся по тригонометрическому закону, приводит к образованию в круглой пластине форм потери устойчивости, свойственной прямоугольной пластине [1, 3, 13].

3. Влияние перфорации на значения критической нагрузки для прямоугольной пластины: соотношения диаметра отверстия и его расположение, при которых значения критической нагрузки для ослабленной одиночным отверстием прямоугольной пластины превосходят на 1-5% величину критической нагрузки пластины без отверстия. Показано, что при перфорации прямоугольной пластины с соотношением сторон 1:3 отверстиями с отношением диаметра к ширине пластины $d/b = 0,15$ и более возникают формы потери устойчивости, отличные от форм потери устойчивости пластины без перфораций. При соотношении сторон пластины 1:1 и 1:2 изменений форм потери устойчивости не наблюдается [12].

4. Численные оценки влияния величины неоднородности (сосредоточенной массы, перфорации, нелинейности геометрии, неоднородности граничных условий, способа конечно-элементного разбиения) на спектр и формы собственных колебаний круглой пластины: отверстия радиуса составляющего менее 25% от радиуса пластины мало влияют на форму и частоту собственных колебаний; отверстия радиуса более 25% от радиуса пластины приводят к значительному изменению форм колебаний и увеличению, начиная с четвертой, значений частот собственных колебаний; расположение сосредоточенной массы в центре пластины независимо от ее величины приводит к уменьшению амплитуды колебаний, но не изменяет форму; смещение сосредоточенной массы вдоль радиуса приводит к образованию узловых линий в области

приложения сосредоточенной массы; при различных соотношениях свободного операния или жесткого защемления по контуру круглой пластины спектр частот собственных колебаний лежит между спектрами полностью защемленной и полностью опертой пластины; формы колебаний пластины в форме правильного многоугольника практически повторяют форму колебаний круглой пластины, при использовании для расчета частот собственных колебаний пластины в форме правильного многоугольника круглой пластины с радиусом $\rho = (4r + R)/5$, (где r и R – соответственно радиусы вписанной в многоугольник пластины и описанной вокруг него круглой пластины) погрешность составляет 3-6%.

При решении задачи расчета частот собственных колебаний квадратной пластины методом конечных элементов четырехугольные конечные элементы дают погрешность в среднем на 10% меньшую, чем треугольные. Конечные элементы высокого порядка требуют в среднем в 2,5-3 раза больше расчетного времени, по сравнению с конечными элементами первого порядка. Их использование при размере стороны конечного элемента менее 5% от стороны пластины нецелесообразно [4, 7, 8, 9, 10].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Выбор параметров контакта (материалы, радиусы кривизны, допустимые зазоры) сопрягающихся тел в подвижных сочленениях влияет на явления связанные с процессом трения: энергетические потери, нагрев, изнашивание. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при расчете контактного взаимодействия деталей машин и снизить материальные затраты на проектирование.

Пластины с конструктивными особенностями (вырезы, сосредоточенные массы, перфорации, неоднородные условия закрепления по контуру) широко используются в приборостроении, машиностроении, строительстве. Полученные в работе диссертации позволяют прогнозировать поведение таких пластин при конструировании или эксплуатации.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Статьи в журналах, входящих в перечень научных изданий, рекомендованных ВАК

1. Мелешко, И.Н. Изгибание тонких пластин при отсутствии поперечного нагружения / И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич, А.В. Чигарев // Известия национальной академии наук. Серия физико – технических наук. – Минск, 2010. – № 3. – С. 51–57.

2. Дрозд, Е.С. Моделирование упругого взаимодействия острия зонда атомно – силового микроскопа с биологической клеткой / Е.С. Дрозд, С.А. Пронкевич, С.А. Чижик // Механика машин, механизмов и материалов. – Минск, 2011. – № 3. – С. 64–67.

3. Мелешко, И.Н. Потеря устойчивости круглой пластины при неравномерном нагружении / И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2013. – № 28. – С. 248–252.

4. Мелешко, И.Н. Численное определение частот и форм собственных колебаний круглых пластин при неоднородных граничных условиях / И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2013. – № 28. – С. 148–152.

5. Авсиевич, А.М. Моделирование нагруженности элементов вращательных кинематических пар / А.М. Авсиевич, С.А. Пронкевич, Н.О. Балышева, А.В. Хват, А.Ю. Иванов // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2013. – № 28. – С. 173–177.

6. Мелешко, И.Н. Численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для твердых тел с согласованными контактными поверхностями / И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич, А.В. Чигарев // Наука и техника. – Минск, 2013. – № 6. – С. 79–83.

Статьи в других научных изданиях

7. Pronkevich, S.A., Using of finite element method for solving problems of resistance of materials / S.A. Pronkevich, I. Senk // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2007. – № 22. – С. 266–270.

8. Ковеня, Т.А., Сравнение различных вариантов конечно-элементного моделирования стальной двутавровой балки в среде ANSYS WORKBENCH / Т.А. Ковеня, С.А. Пронкевич // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2008. – № 23. – С. 84–89.

9. Пронкевич, С.А. Применение МКЭ к решению плоских задач теории упругости / С.А. Пронкевич, А.А. Орловская // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2009. – № 24. – С. 233–236.

10. Солошенко, Д.С. Зависимость результатов расчета от типа конечных элементов и типа сетки / Д.С. Солошенко, С.А. Пронкевич // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2010. – № 25. – С. 235–238.

11. Авсиевич, А.М. Исследование напряженного состояния в местах силового контакта / А.М. Авсиевич, С.А. Пронкевич, Н.О. Бальшева // Машиностроение. Республиканский межведомственный сборник научных трудов. – Минск, 2009. – № 24. – С.139–142.

12. Пронкевич С.А. Потеря устойчивости прямоугольной перфорированной пластины, в зависимости от вида и размера перфораций / Аспирант и соискатель. – М., 2013. – № 5. – С. 121–123.

Материалы конференций

13. Чигарев, А.В. Изгибание тонких пластин с учетом кинематических граничных условий / А.В. Чигарев, И.Н. Мелешко, С.А. Пронкевич // Трибофатика = Tribo-fatigue: труды VI-го Международного симпозиума по трибофатике (ISTF 2010), 25 октября – 1 ноября 2010 г.: в 2 ч. / Редкол.: М.А. Журавков (пред.) [и др]. – Минск: БГУ, 2010. – Ч. 2. – С. 50–53.

РЭЗІЮМЭ

Пранкевіч Сяргей Аляксандравіч

Мадэляванне і колькасна-аналітычнае рашэнне дзвумерных задач ўстойлівасці, ваганняў і кантактнага ўзаемадзеяння

Ключавыя словы: уласныя ваганні, страта ўстойлівасці, пругкасць, пласціны, кантакт, метады канчатковых элементаў.

Мэта работы: Распрацоўка метадаў, якія дазваляюць разлічваць уласныя ваганні, а таксама страту ўстойлівасці шматкутных пласцін пры розных умовах замацавання па контуры. Вызначэнне залежнасці частоты уласных ваганняў ад формы пласціны. Вызначэнне залежнасці формы страты ўстойлівасці і крытычнай нагрузкі ад формы пласціны. Вызначэнне выгібаў пласцін пры кінематычных межавых умовах па контуры. Распрацоўка лікава - аналітычных метадаў вызначэння выгібу пласцін.

Метады даследавання: пабудова матэматычных мадэляў з выкарыстаннем класічнай тэорыі выгібу пласцін, лікава - аналітычных метадаў, метаду канчатковых элементаў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна:

1. Прапанавана лічбава – аналітычнае вырашэнне раўнання Прандтля для задачы І.Я. Штэярманна аб унутраным кантакце дзвух цыліндрычных цел на аснове шэрагаў. Атрыманая рашэнне пазваляе знайсці ціск у вобласці кантакта і мае большую хуткасць, чым метады І. Векуа і метады канчатковых элементаў.

2. Даследаван уплыў нераўнамернасці межавых умоў на размеркаванне напружанняў і дэфармацый ў круглай пласціне, а таксама уплыў на велічыню крытычнай нагрузкі і форму страты ўстойлівасці. Паказана, што пры нераўнамерных межавых умовах спектр выпінання змяняецца нерэгулярным чынам. Пры павелічэнні нераўнамернасці нагружэння і замацавання павялічваецца адрозненне формы страты ўстойлівасці ад сіметрычнага выпадку, але не адбываецца разбурэння біфуркацыі.

3. Даследаван уплыў перфаравання на значэнні крытычнай нагрузкі для прамавугольнай пласціны. Паказана, што пры перфараванні мноствам адтулін на велічыню крытычнай нагрузкі, а таксама форму страты ўстойлівасці істотны уплыў аказвае не толькі дыяметр адтулін, але і парадак перфаравання.

4. Атрыманы лічбавыя ацэнкі ўплыву параметраў задачы на спектр і формы ўласных ваганняў: засяроджаных мас, нелінейнасці, неаднастайнасці, спосабу канчаткова-элементнага разбіцця.

Вобласць ужывання: вынікі працы могуць быць выкарыстаны пры канструяванні ў машынабудаванні, прыборабудаванні, авіякасічнай вобласці.

РЕЗЮМЕ

Пронкевич Сергей Александрович

Моделирование и численно-аналитическое решение двумерных задач устойчивости, колебаний и контактного взаимодействия

Ключевые слова: собственные колебания, потеря устойчивости, упругость, пластины, контакт, метод конечных элементов.

Цель работы. Использование методов численного и аналитического анализа собственных функций и собственных значений бигармонических операторов при решении задач устойчивости и колебаний в случае различных граничных условий и геометрии контакта на границе.

Методы исследования: построение математических моделей с использованием классической теории изгиба пластин, численно – аналитических методов, метода конечных элементов.

Полученные результаты и их новизна:

1. Предложено численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для задачи И. Я. Штаермана о внутреннем контакте двух цилиндрических тел. Полученное решение позволяет находить давление в области контакта и имеет преимущество в скорости перед методом И. Векуа и методом конечных элементов.

2. Исследовано влияния неравномерности граничных условий на распределение напряжений и деформаций в круглой пластине, а также влияние на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости. Показано, что в неравномерных граничных условиях спектр выпучивания меняется нерегулярным образом.

3. Исследовано влияние перфорации на значения критической нагрузки для прямоугольной пластины. Показано, что при перфорации одиночным отверстием получены соотношения, при которых значения критической нагрузки оказывается выше, чем для сплошной пластины; при перфорации прямоугольной пластины множеством отверстий на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости существенное влияние оказывает не только диаметр отверстий, но и порядок перфорации.

4. Получены численные оценки влияния параметров задачи (сосредоточенных масс, нелинейности, неоднородности, способа конечно – элементного разбиения) на спектр и формы собственных колебаний. Получена зависимость влияния величины сосредоточенной массы на спектр форм и частот собственных колебаний круглой пластины.

Область применения: результаты работы могут быть использованы при конструировании в машиностроении, приборостроении, авиакосмической области.

SUMMERY

Pronkevich Sergei Alexandrovich

Modeling and numerical-analytical solution of two-dimensional problems of stability, vibration and contact interaction

Key words: natural vibrations, loss of stability, elasticity, plates, contact the finite element method.

Objective: Develop methods to calculate the natural vibrations and loss of stability of polygonal plates under various conditions of consolidation along the contour. Determination of the frequency of natural oscillations of the shape of the plate. Depending on the definition of buckling and the critical load on the shape of the plate. Determination of bending of plates with the kinematics boundary conditions on the contour. The development of numerical - analytical methods for determining the bending of the plates.

Methods: the construction of mathematical models using the classical theory of bending of plates, numerically - analytical methods, finite element method.

These results and their novelty:

1. A numerical-analytical solution for the problem of Prandtl I.A. Shtaerman about the internal contact between two cylindrical bodies on the basis of the series. It is shown that for the same sample of the proposed numerical-analytical solution is more speed than using I. Vekua method and the finite element method.

2. Investigated the influence of boundary conditions on the uneven distribution of stresses and strains in a circular plate, and the impact on the critical load and buckling. It is shown that non-uniform boundary conditions buckling range varies irregularly.

3. The effect of perforation on the values of the critical load for a rectangular plate. It is shown that for single perforation opening ratio obtained in which the critical load value is higher than a continuous plate, with a rectangular perforated plate a plurality of holes on the critical loads and buckling significant influence not only the diameter of the holes, but the order of perforations.

4. Numerical evaluation of the influence of parameters of the problem (concentrated masses, nonlinearity, heterogeneity way finite - element of the partition) on the spectrum and form of natural oscillations. The dependence of the effect of the value of a concentrated mass on the spectrum of shapes and natural frequencies of a circular plate.

Scope: results can be used in the design of mechanical engineering, instrument making, airspace area.

Научное издание

ПРОНКЕВИЧ Сергей Александрович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ
ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ, КОЛЕБАНИЙ И КОНТАКТНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ**

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Подписано в печать 20.11.2013. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,09. Тираж 60. Заказ 1241.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет. ЛИ № 02330/0494349 от 16.03.2009. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.