

Кудин В.В., Авсиевич А.М., Качанов И.В., Пронкевич С.А.,  
Самойлов И.Р., Кругликов А.А.

**МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ВИБРОАКТИВНОСТИ НА ОСНОВЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЛОЖНОСОСТАВНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕ-  
СКОЙ СИСТЕМЫ И ПРИМЕР ЕЕ РЕАЛИЗАЦИИ**

*Белорусский национальный технический университет  
Минск, Беларусь*

*Представлена методика составления математической и динамической модели сложного технологического оборудования на примере плоскошлифовального станка. Приведена система уравнений для математического описания колебаний элементов системы и способы ее решения. Показано влияние на колебательный процесс изменений массовых, жесткостных и диссипативных параметров. Разработанная модель позволяет оценить влияние колебательных процессов на точность механической обработки.*

Разработка методики исследования виброактивности проводилась на примере плоскошлифовального станка модели ЗГ71. Колебательные процессы в различных типах станков, и в целом в машинах, однотипны, подчиняются одним и тем же физическим законам и описываются одинаковыми по виду дифференциальными уравнениями [1].

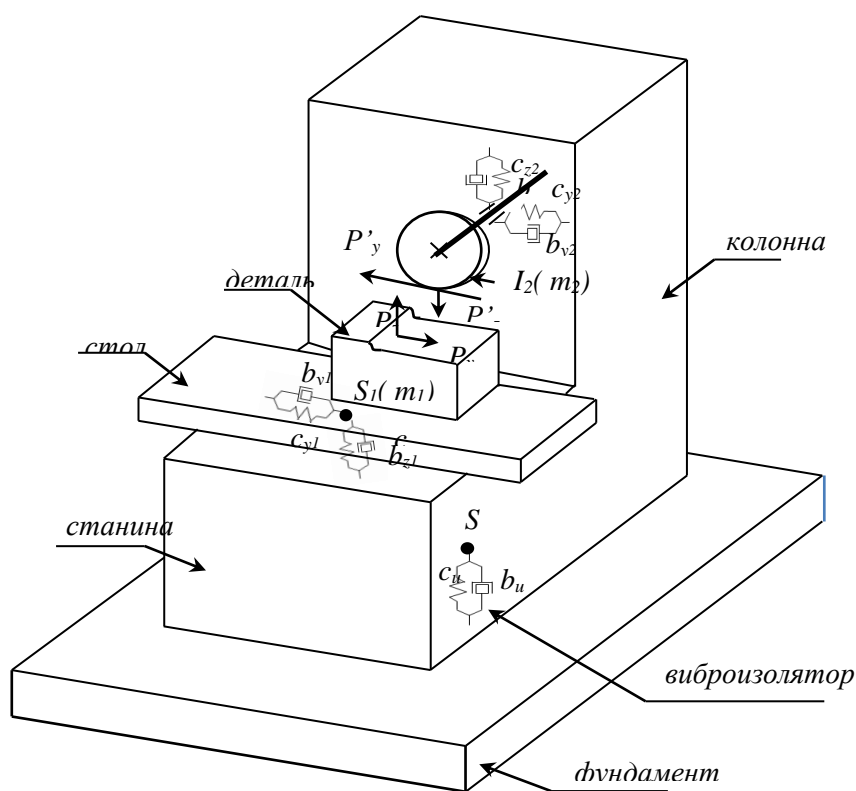


Рис. 1. Динамическая модель колебательной системы плоскошлифовального станка ЗГ71

На основе анализа конструкции сложносоставной системы, в данном случае плоскошлифовального станка, траекторий движения точек ответственных элементов (стола с закрепленной на нем деталью и шлифовального круга) составляют динамическую модель. Для плоскошлифовального станка модель изображена на рисунке 1.

Основными элементами модели являются: 1) станина с жестко присоединенной колонной и крестовым суппортом приняты как неподвижное жесткое звено; 2) стол с закрепленной массой детали перемещается в направлении продольной подачи; 3) шлифовальная головка, включающая в себя привод главного движения и шлифовальный круг.

Такое выделение элементов модели позволит адекватно рассчитать колебания ответственных элементов системы при рабочем процессе. В данной упрощенной системе не выделяются элементы конструкции, обеспечивающие поперечную и вертикальную подачи, так эти движения выполняются периодически в моменты, когда круг не контактирует с деталью и не совпадают по времени с процессом резания. Однако массы всех элементов учитываются и приводятся к узлам, указанным в динамической модели. Модель учитывает, что фундамент, на котором смонтирована станина, может совершать колебания по всем координатным осям, описываемые по гармоническому или иному закону. Кинематическое возмущение от фундамента передается на станину, соединение станины с фундаментом характеризуется приведенными коэффициентами жесткости и диссипации.

Дифференциальные уравнения колебательной системы станка будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \ddot{z}_1 + m_1 L_1 \cos \alpha_1 \ddot{\phi}_1 + b_{z_1} \dot{z}_1 + c_{z_1} z_1 = P_0 \cos \alpha \sin \omega t; \\ m_1 \ddot{z}_2 + b_{z_2} \dot{z}_2 + c_{z_2} z_2 = -P_0 \cos \alpha \sin \omega t; \\ m_1 \ddot{y}_1 + m_1 L_1 \sin \alpha_1 \ddot{\phi}_1 + b_{y_1} \dot{y}_1 + c_{y_1} y_1 = P_0 \sin \alpha \sin \omega t; \\ m_2 \ddot{y}_2 + b_{y_2} \dot{y}_2 + c_{y_2} y_2 = -P_0 \sin \alpha \sin \omega t; \\ (I_1 + m_1 L_1^2) \ddot{\phi}_1 + m_1 L_1 \cos \alpha_1 \ddot{z}_1 + m_1 L_1 \sin \alpha_1 \ddot{y}_1 + c_{\phi_1} \phi_1 = P_0 R \sin \omega t; \\ I_2 \ddot{\phi}_2 + b_{\phi_2} \dot{\phi}_2 + c_{\phi_2} \phi_2 = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $m_1$  - масса стола и детали;

$m_2$  - масса шпиндельной головки;

$I_1, I_2$  - соответствующие моменты инерции;

$c_{z_1}, c_{y_1}$  - жесткости стыков между столом и суппортом в направлении осей  $z, y$ ;

$c_{z_2}, c_{y_2}$  - жесткости стыков на колонне и в подшипниках вала шпинделя в направлении осей  $z, y$ ;

$b_{z_1}, b_{z_2}$  - коэффициенты диссипации в стыках стола по осям координат  $z, y$ ;

$b_{z_1}, b_{z_1}$  - коэффициенты диссипации шлифовальной головки и главного вала по

направлениям осей  $z, y$ ;

$b_{z_1}, b_{z_1}$  - крутильная жесткость стыков;

$R$  - радиус шлифовального круга;

$P_0$  - амплитуда силы резания;

$\alpha$  - угол наклона силы резания к оси  $z$ ;

$L_1$  - координата центра жесткости стола с деталью относительно начала координат;

$\alpha_1$  - угол между вектором центра жесткости  $L_1$  и осью  $z$ .

Данная система уравнений составлена для описания колебательных движений двух взаимосвязанных элементов сложносоставной системы, совершаемых в одной

плоскости. Для решения пространственной задачи необходимо составлять три системы с шестью уравнениями в каждой из них и решать их совместно с учетом взаимовлияния колебательных процессов в разных плоскостях.

Система уравнений типа (1) может быть применена для анализа собственных колебаний системы. Для этого правые части уравнений следует приравнять нулю. Построение зависимостей собственных колебаний от времени позволит выявить собственные частоты и, соответственно, избегать совпадения их с частотой вынуждающей силы для недопущения резонансных явлений.

В правую часть уравнений системы типа (1) могут быть подставлены выражения, описывающие отдельные гармоники вынуждающей силы при разложении ее в ряд Фурье, что позволит получить аналитическое описание колебаний элементов системы по отдельным гармоникам.

Для решения систему уравнений (1) приводят к общему виду

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{z}_1 + a_{15}\ddot{\varphi}_1 + b_{11}\dot{z}_1 + c_{11}z_1 = P_0 \cos \alpha \sin \omega t \\ a_{22}\ddot{z}_2 + b_{22}\dot{z}_2 + c_{22}z_2 = -P_0 \cos \alpha \sin \omega t \\ a_{32}\ddot{y}_1 + a_{35}\ddot{\varphi}_1 + b_{33}\dot{y}_1 + c_{33}y_1 = P_0 \sin \alpha \sin \omega t \\ a_{44}\ddot{y}_2 + b_{44}\dot{y}_2 + c_{44}y_2 = -P_0 \sin \alpha \sin \omega t \\ a_{55}\ddot{\varphi}_1 + a_{51}\ddot{z}_1 + a_{54}\ddot{y}_1 + b_{55}\dot{\varphi}_1 + c_{65}\varphi_2 = P_0 R \sin \omega t \\ a_{66}\ddot{\varphi}_2 + b_{66}\dot{\varphi}_2 + c_{66}\varphi_2 = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где  $a_{ij}$ -инерционные коэффициенты;

$b_{ij}$ - диссипативные коэффициенты;

$c_{ij}$ - жесткостные коэффициенты матрицы жесткости колебательной системы;

где  $i = 1, 2, 3, \dots, 6$ .

Для шлифовального станка значения соответствующих коэффициентов равны

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1, a_{15} = m_1 L_1 \cos \alpha_1, a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{16} = 0; \\ a_{21} &= 0, a_{22} = m_2, a_{23} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = 0; \\ a_{31} &= 0, a_{32} = 0, a_{33} = 0, a_{34} = 0, a_{35} = m_1 L_1 \sin \alpha_1, a_{36} = 0; \\ a_{41} &= a_{42} = a_{43} = 0, a_{44} = m_1, a_{45} = a_{46} = 0; \\ a_{51} &= m_1 L_1 \cos \alpha_1, a_{52} = 0, a_{53} = m_1 L_1 \sin \alpha_1, a_{55} = I_1 + m_1 L_1^2, a_{56} = 0; \\ a_{61} &= a_{62} = a_{63} = a_{64} = a_{65} = 0, a_{66} = I_2; \\ b_{11} &= b_{z_1}, b_{12} = b_{13} = b_{14} = b_{15} = b_{16} = 0; \\ b_{21} &= 0, b_{22} = b_{z_2}, b_{23} = b_{24} = b_{25} = b_{26} = 0; \\ b_{31} &= b_{32} = 0, b_{33} = b_{y_1}, b_{34} = b_{35} = b_{36} = 0; \\ b_{41} &= b_{42} = b_{43} = 0, b_{44} = b_{y_2}, b_{45} = b_{46} = 0; \\ b_{51} &= b_{52} = b_{53} = b_{54} = 0, b_{55} = b_{\varphi_1}, b_{56} = 0; \\ b_{61} &= b_{62} = b_{63} = b_{64} = b_{65} = 0, b_{66} = b_{\varphi_2}; \\ c_{11} &= c_{z_1}, c_{12} = c_{13} = c_{14} = c_{15} = c_{16} = 0; \\ c_{21} &= 0, c_{22} = c_{z_2}, c_{23} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{31} = c_{32} = 0, \quad c_{33} = c_{y_1}, \quad c_{34} = c_{35} = c_{36} = 0; \\
c_{41} = c_{42} = c_{43} = 0, \quad c_{44} = c_{y_2}, \quad c_{45} = c_{46} = 0; \\
c_{51} = c_{52} = c_{53} = c_{54} = 0, \quad c_{55} = c_{\varphi_1}, \quad c_{56} = 0; \\
c_{61} = c_{62} = c_{63} = c_{64} = c_{65} = 0, \quad c_{66} = c_{\varphi_1}.
\end{aligned}$$

Решение системы дифференциальных уравнений по заданным начальным условиям для параметров шлифовального станка позволит получить зависимости  $z_1(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  и производится при заданных общих начальных условиях. Сопоставление зависимостей всех указанных координат от времени позволит определить влияние колебаний ответственных элементов системы на точность обработки.

Используя преобразование Лапласа, приводим систему дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned}
& \left[ a_{15} \frac{P_0 \cos \alpha \omega}{(p^2 + \omega^2)p^2} - Z_1(p) \frac{[a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11}]}{a_{15}p^2} \right] [a_{55}p^2 + b_{55}p] + \\
& + a_{51}p^2 Z_1(p) + a_{51}p^2 \left[ \frac{P_0 \sin \alpha \omega}{(p^2 + \omega^2)(a_{32}p^2 + b_{32}p + c_{33})} - \frac{a_{35}p\Phi(p)}{a_{32}p^2 + b_{33}p + c_{33}} \right] = \frac{P_0 R \omega}{p^2 + \omega^2}; \\
& \left[ \frac{P_0 \cos \alpha \omega}{(p^2 + \omega^2)p^2} - Z_1(p) \frac{[a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11}]}{a_{15}p^2} \right] \left[ a_{55}p^2 + b_{55}p - \frac{a_{54}a_{35}p^3}{a_{32}p^2 + b_{32}p + c_{33}} \right] + \\
& + a_{51}p^2 Z_1(p) + \frac{a_{54}p^2 P_0 \sin \alpha \omega}{(p^2 + \omega^2)(a_{32}p^2 + b_{32}p + c_{33})} = \frac{P_0 R \omega}{p^2 + \omega^2}; \\
& Z_1(p) \left[ a_{51}p + \frac{a_{54}a_{35}p^3}{a_{32}p^2 + b_{32}p + c_{33}} \cdot \frac{a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11}}{a_{15}p^2} - \frac{(a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11})(a_{55}p^2 + b_{55}p)}{a_{15}p^2} \right] = \\
& = \frac{P_0 R \omega}{p^2 + \omega^2} - \frac{a_{54}p^2 P_0 \sin \alpha \omega}{(p^2 + \omega^2)(a_{32}p^2 + b_{32}p + c_{33})} - \\
& - \frac{P_0 \cos \alpha \omega}{a_{15}(p^2 + \omega^2)p^2} \left[ a_{55}p^2 + b_{55}p - \frac{a_{54}a_{35}p^3}{a_{32}p^2 + b_{32}p + c_{33}} \right]
\end{aligned}$$

Затем получаем выражения для зависимостей координат в форме изображений

$$\left\{ \begin{aligned} Z_1(p)[a_{11}p^2 + b_{11}p + c_{11}] + a_{15}p^2\Phi(p) &= \frac{p_0 \cos(\alpha\omega)}{p^2 + \omega^2} \end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Z_2(p) &= \frac{p_0 \cos(\alpha\omega)}{(p^2 + \omega^2)[a_{22}p^2 + b_{22}p + c_{22}]} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Y_1(p)[a_{32}p^2 + b_{33}p + c_{33}] + a_{35}p\Phi(p) &= \frac{p_0 \sin(\alpha\omega)}{p^2 + \omega^2} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} Y_2(p) &= -\frac{p_0 \sin(\alpha\omega)}{(p^2 + \omega^2)[a_{44}p^2 + b_{44}p + c_{44}]} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(p)[a_{55}p^2 + b_{55}p] + a_{51}p^2 Z_1(p) + a_{54}p^2 Y_1(p) + c_{65}\Phi_2(p) &= \frac{p_0 R \omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_2(p) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Проводим обратное преобразование и получаем необходимые функции. В работе используем систему символьной алгебры “Mathematica” (программный пакет Wolfram Mathematica 9.0).

Также численное решение системы уравнений (1) можно получить, используя метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Результаты расчета представляются в виде графиков и показаны на рис. 2. Предел изменения аргумента функции (расчетного времени протекания колебательного процесса) задается таким образом, чтобы однозначно выделить периодичность изменения координаты. Из рисунка видно, что колебательный процесс по всем шести координатам устанавливается в течение 0...0,3 секунды.

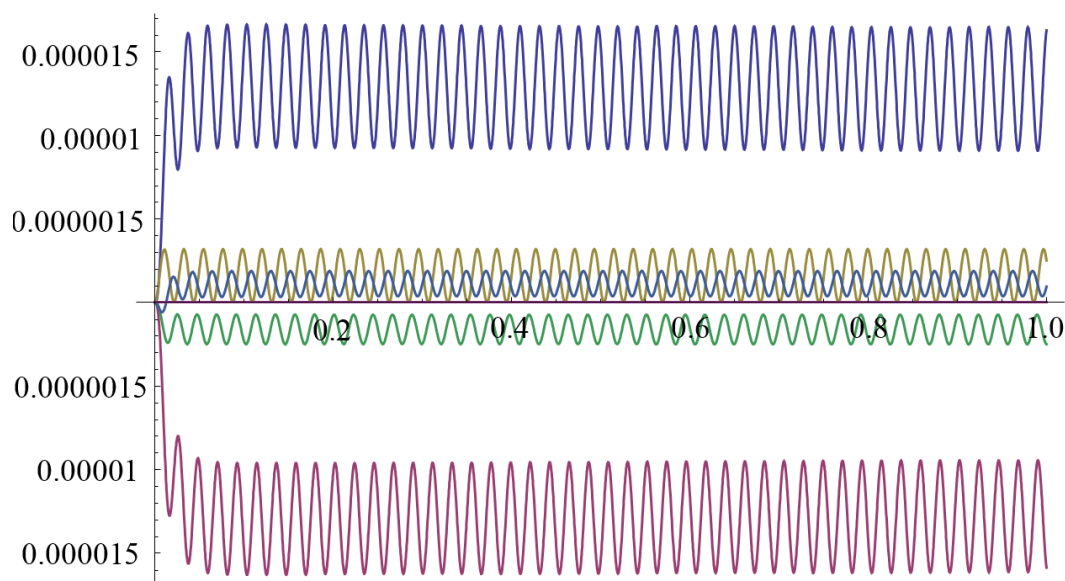


Рис. 2. Расчетные графики изменения координат всех элементов системы

При исследовании колебаний элементов металлорежущего станка наибольший интерес для практики представляют колебания детали и инструмента. В рассматриваемом примере это изменения координат стола с деталью и шпинделя по оси  $z$ .

Расчеты показывают, что с момента начала колебательного процесса происходит упругое перемещение элементов под действием приложенной силы относительно начальных положений на некоторую величину и относительно ее периодическое изменение координаты, т.е. непосредственно колебания. Сопоставление амплитуд и фаз колебаний позволяет сделать вывод о величинах амплитуд колебаний инструмента относительно детали и, соответственно, точности обработки.

Разработанная методика позволяет производить расчеты колебаний элементов систем при различных начальных условиях и конструктивных параметрах элементов системы. Так, например, варьирование массами стола с деталью и шпиндельной головки показало, что изменение массы одного элемента практически не сказывается на колебательном процессе другого, то есть взаимное влияние элементов в этом аспекте отсутствует. Но величина колебаний элемента с увеличением его массы уменьшается (рис. 3). Частота и фаза колебаний обоих элементов практически совпадают. При близости значений масс элементов, амплитуды их колебаний также близки по значению. Такая совокупность конструктивных параметров обеспечивает минимальные величины амплитуд относительных колебаний и, соответственно, максимально высокую точность обработки.

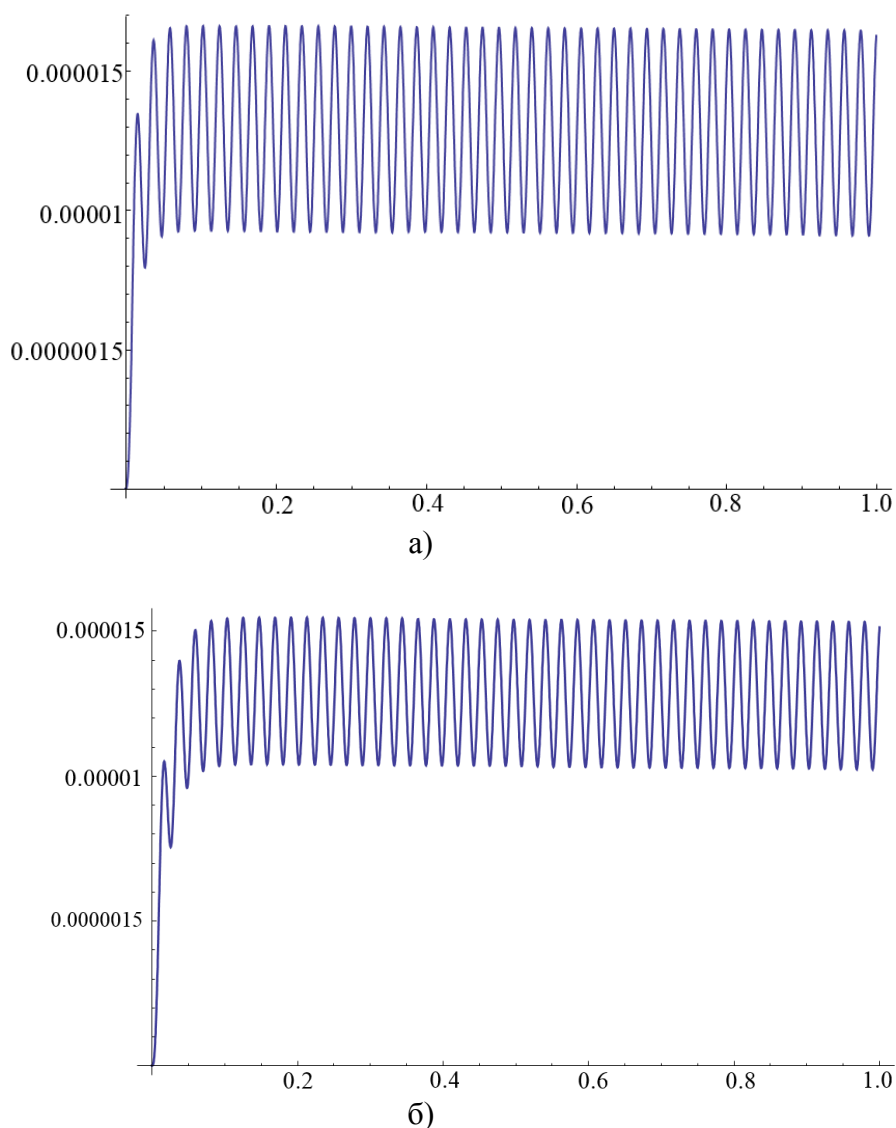


Рис. 3. Расчетное изменение координаты  $z_1$  (перемещение стола с закрепленной деталью в вертикальном направлении) при массе стола с деталью:  
 $a$  – 300 кг;  $b$  – 50 кг

Расчеты показали, что на форму графиков изменения координат при колебательном процессе наиболее существенно влияет коэффициент диссипации. При прочих одинаковых значениях увеличение коэффициента диссипации  $b_{z_1}$  в два раза привело к уменьшению амплитуды колебаний стола с деталью по оси  $z$  с 7-ми до 6-ти микрометров (рис. 4) при уменьшении величины отклонения от начального положения.

Разработана методика виртуального исследования колебательного процесса, позволяющая получить зависимости изменения координат виброперемещений элементов сложносоставных технологических систем по осям координат, что позволяет исследовать влияние колебательных процессов на показатели качества и надежности работы машин и оборудования, в частности на точность обработки деталей на металлорежущих станках.

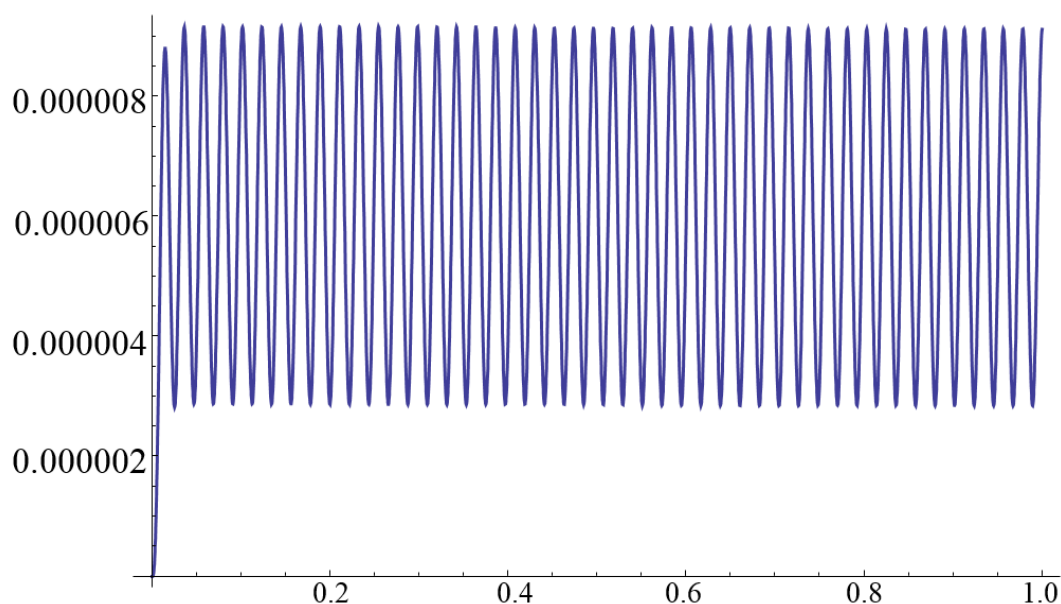


Рис. 4. Расчетное изменение координаты  $z_1$ : (перемещение стола с деталью в вертикальном направлении) при двукратном увеличении коэффициента диссипации

Для повышения эффективности методики необходим анализ точности решения системы дифференциальных уравнений обоими математическими методами, а также совершенствование подходов к составлению структурных схем реальных систем, на основании которых составляются исходные дифференциальные уравнения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин, Б.В. Расчет динамических характеристик металлорежущих станков. – М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1962. – 112с.

УДК 621.91.04

**Пантелеенко Ф.И., Данилов А.А.**

### **АНАЛИЗ И РЕАЛИЗАЦИЯ СХЕМ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФИЛЯ ПОВЕРХНОСТИ В ВИДЕ ТРЕУГОЛЬНИКА РЕЛО МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНОГО СЛЕДА**

*Белорусский национальный технический университет»*

*г. Минск, Беларусь*

*Рассмотрены схемы некруглого, кругового и полигонального формирования методом непрерывного следа профиля поверхности в виде треугольника Рело. Установлены область рационального применения и пути реализации этих схем при обработке некруглых поверхностей резанием и поверхностным пластическим деформированием. Показана эффективность способа кругового точения деталей с таким профилем по сравнению с известным, основанного на применении охватывающего многолезвийного режущего инструмента и сообщении ему вращательного движения со скоростью резания. Аналити-*