

УДК 621.317.08

Цифровизация измерений спектров в базисе Фурье – тенденции развития и проблемы

О.В. Пономарева, А.В. Пономарев, Н.В. Смирнова

Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова,
ул. Студенческая, 7, г. Ижевск 426069, Россия

Поступила 12.02.2018

Принята к печати 23.08.2019

На современном этапе развития цифровых информационных технологий происходит интенсивная цифровизация (компьютеризация) как прямых, так и косвенных методов измерения. Прямым следствием компьютеризации измерений стало, во-первых, появление нового класса средств измерения – процессорных измерительных средств (ПриИС); во-вторых, повышение уровня формализации измерительных процедур; в-третьих, создание новой, революционной технологии – технологии виртуальных приборов (ВП). Цель статьи – анализ развития цифровых технологий измерений спектров, выявление возникающих при этом проблем и формулирование первоочередных научных и прикладных задач по их разрешению.

Теоретическими и прикладными исследованиями установлено, что цифровые технологии измерений спектра, кроме существенных преимуществ, обладают и определенными недостатками. Показано, что недостатки цифровых технологий измерений спектров вытекают как из природы цифровых методов, так и из аналитических и стохастических свойств базисов применяемых преобразований при измерениях спектров. Анализ цифровых методов измерений спектров показал, что методы, основанные на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ), сохраняют свою ведущую роль и эффективны практически во всех предметных областях. Однако есть и проблемы цифровизации измерений спектров сигналов на основе ДПФ, которые связаны, прежде всего, с проявлением ряда негативных эффектов, которые отсутствуют при аналоговых методах измерения спектров на основе преобразования Фурье. Это эффект периодизации измерительного сигнала и его спектра, эффект частотола, а также эффект наложения. Как показал анализ, существующие методы борьбы с негативными эффектами цифровизации измерений спектров разрешают проблемы внедрения цифровых технологий лишь отчасти. Для борьбы с негативными эффектами цифровизации измерений спектров в работе предложено обобщение ДПФ в виде параметрического ДПФ (ДПФ-П).

Сформулированы основные научные и прикладные задачи компьютеризации измерений спектров сигналов: развитие теории цифровых методов измерения спектров сигналов, создание новых и усовершенствование существующих цифровых методов измерений спектров сигналов, разработка алгоритмического, программного и метрологического обеспечений ПриИС и ВП для реализации ДПФ-П.

Ключевые слова: косвенные методы измерений, цифровизация измерений, модель измерения, процессорное измерительное средство спектр сигнала.

DOI: 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280

Адрес для переписки:

О.В. Пономарева
Ижевский государственный технический университет
имени М.Т. Калашникова,
ул. Студенческая, 7, г. Ижевск 426069, Россия
e-mail: ponva@mail.ru

Address for correspondence:

O.V. Ponomareva
Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
Studencheskaya str., 7, Izhevsk 426069, Russia
e-mail: ponva@mail.ru

Для цитирования:

О.В. Пономарева, А.В. Пономарев, Н.В. Смирнова
Цифровизация измерений спектров в базисе Фурье – тенденции
развития и проблемы.
Приборы и методы измерений.
2019. – Т. 10, № 3. – С. 271–280.
DOI: 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280

For citation:

O.V. Ponomareva, A.V. Ponomarev, N.V. Smirnova
[Digitalization of Spectral Measurements in the Fourier Basis –
Development Trends and Problems].
Devices and Methods of Measurements.
2019, vol. 10, no. 3, pp. 271–280 (in Russian).
DOI: 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280

Digitalization of Spectral Measurements in the Fourier Basis – Development Trends and Problems

O.V. Ponomareva, A.V. Ponomarev, N.V. Smirnova

Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
Studencheskaya str., 7, Izhevsk 426069, Russia

Received 12.02.2018

Accepted for publication 23.08.2019

Abstract

At the present stage of development of digital information technologies intensive digitalization (computerization) of both direct and indirect measurement methods is taking place. The direct consequence of the computerization of measurements was, firstly, the emergence of a new class of measuring instruments – Processor measuring instruments (PRIS), secondly, increasing the level of formalization of measuring procedures, thirdly, the creation of a new, revolutionary technology – Virtual Instrument (VI). The purpose of the article is to analyze the development of digital technologies for measuring spectra, identifying the problems that arise in this case and formulating priority scientific and applied problems for their resolution.

Theoretical and applied research has established that digital spectrum measurement technologies, in addition to significant advantages, have certain disadvantages. It has been shown that the disadvantages of digital technologies for measuring spectra arise both from the nature of digital methods and from the analytical and stochastic properties of the bases of the applied transformations in measuring the spectra. An analysis of digital methods for measuring spectra showed that methods based on Discrete Fourier Transform (DFT) retain their leading role and are effective in almost all subject areas. However, there are also problems of digitalization of measurements of the spectra of signals based on the DFT, which are associated, first of all, with the manifestation of a number of negative effects that are absent with analog methods for measuring spectra based on the Fourier transform. This is the periodization effect of the measuring signal and its spectrum, the stockade effect, as well as the aliasing effect. As the analysis showed, existing methods of dealing with the negative effects of digitalization of spectrum measurements solve the problems of introducing digital technologies only partially. To combat the negative effects of digitalization of spectral measurements, a generalization of the DFT in the form of a parametric DFT (DFT-P) (Parametric Discrete Fourier Transform – DFT-P) is proposed.

The main scientific and applied problems of computerization of signal spectrum measurements are formulated: the development of the theory of digital methods for measuring signal spectra, the creation of new and improvement of existing digital methods for measuring signal spectra, the development of algorithmic, software and metrological software for PRIS and VI for the implementation of DFT-P.

Keywords: indirect measurement, digitalization of measurements, measurement model, processor measuring tool, signal spectrum.

DOI: 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280

Адрес для переписки:

О.В. Пономарева
Ижевский государственный технический университет
имени М.Т. Калашникова,
ул. Студенческая, 7, г. Ижевск 426069, Россия
e-mail: ponva@mail.ru

Address for correspondence:

O.V. Ponomareva
Kalashnikov Izhevsk State Technical University,
Studencheskaya str., 7, Izhevsk 426069, Russia
e-mail: ponva@mail.ru

Для цитирования:

О.В. Пономарева, А.В. Пономарев, Н.В. Смирнова
Цифровизация измерений спектров в базисе Фурье – тенденции
развития и проблемы.
Приборы и методы измерений.
2019. – Т. 10, № 3. – С. 271–280.
DOI: 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280

For citation:

O.V. Ponomareva, A.V. Ponomarev, N.V. Smirnova
[Digitalization of Spectral Measurements in the Fourier Basis –
Development Trends and Problems].
Devices and Methods of Measurements.
2019, vol. 10, no. 3, pp. 271–280 (in Russian).
DOI: 10.21122/2220-9506-2019-10-3-271-280

Введение

Начиная с 1970-х годов процесс развития измерительной техники проходит при возрастающем влиянии цифровых информационных технологий (*Digital Information Technologies – DIT-технологии*) [1–15]. В результате их внедрения был запущен механизм цифровизации (компьютеризации) измерений, при котором компьютеры стали использоваться не только для обработки результатов измерений, но и были непосредственно включены в состав измерительных процедур. Прямым следствием компьютеризации измерений стало, во-первых, появление нового класса средств измерения – процессорных измерительных средств (ПрИС); во-вторых, повышение уровня формализации измерительных процедур; в-третьих, создание новой, революционной технологии – технологии виртуальных приборов¹ (ВП), получившей широкое распространение при создании приборов измерения и измерительных систем, включая их моделирование и тестирование. Внедрение *DIT-технологий* в практику решения измерительных задач потребовало дальнейшего совершенствования модели измерения (уравнения измерений), создания новых подходов к формализованному описанию измерительных процедур (методов и алгоритмов).

Наиболее общая форма уравнения измерений предложена в монографиях [14, 15] в виде обобщенного оператора:

$$\lambda^* = L[\gamma(t)] = R_2 K R_1[\gamma(t)], \quad (1)$$

где λ^* – результат измерения физической величины λ ; $\gamma(t)$ – измерительный сигнал (сигнал, содержащий количественную информацию об измеряемой физической величине); L – обобщенный оператор, представляющий алгоритм измерения – последовательность измерительных преобразований, выполняемых при измерении; R_1 – оператор преобразований, осуществляемых в аналоговом виде; K – сравнение величины $R_1[\gamma(t)]$ с принятой образцовой единицей измерения (осуществляется с помощью аналого-цифрового преобразователя); R_2 – оператор преобразований, осуществляемых в цифровом виде.

Преимущества такого подхода к модели измерения заключаются в том, что путем разби-

ения обобщенного оператора, исходя из соответствующей априорной информации, на некоторую последовательность операторов, мы получаем возможность детализировать уравнение измерений [9, 10].

Отметим, что цифровизация измерительных средств сопровождалась повышением уровня формализации соответствующих моделей измерений, что продемонстрировано на рисунке 1, на котором приведены этапы эволюции средств измерительной техники и развитие соответствующих им форм модели измерений [15].

Проблемы цифровизации измерений спектров в базисе Фурье

Проведя, согласно уравнению измерения (1), преобразование исходного аналогового измерительного сигнала в цифровую форму с помощью аналого-цифрового преобразователя, мы получаем возможность применять *DIT-технологии* для измерения параметров цифровых измерительных сигналов на конечных интервалах (ЦИСнКИ), как во временной, так и в частотной областях. Отметим, что измерение некоторых параметров предпочтительней проводить во временной области, например, длительностей фронта и спада импульсов, огибающей, выбросов, биений и др. Измерение других параметров предпочтительней проводить в частотной области, например, амплитуд, частот, фаз составляющих исходного измерительного сигнала, искажений.

Измерения в частотной области приобрели особую роль благодаря широкому распространению частотных моделей измерительного сигнала в таких предметных областях, как виброакустическое функциональное диагностирование механических объектов, экологическая безопасность, медицинская диагностика, пассивная и активная гидролокация, распознавание речи и изображений, обработка музыкально-акустических сигналов, сейсмология, геофизика и др. [6–17]. Определение параметров частотных моделей позволяет получить методами и средствами измерений точные и достоверные знания о состоянии исследуемых объектов, явлениях и процессах, происходящих в них.

¹Термин «виртуальный прибор» нельзя признать удачным. Средства измерений, разработанные по данной цифровой информационной технологии, не являются виртуальными в истинном понимании этого слова, поскольку осуществляют реальные измерения. Появление термина «виртуальный» в названии измерительного средства объясняется компьютерной (виртуальной) имитацией соответствующих функций разрабатываемого измерительного прибора математическими и программными методами.

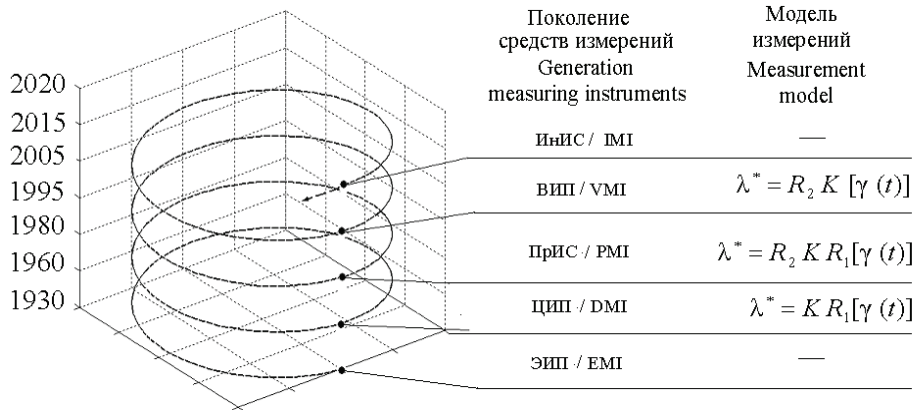


Рисунок 1 – Этапы эволюции измерительных средств: ЭИП – электромеханические и электронные измерительные приборы; ЦИП – цифровые измерительные приборы; ПРИС – процессорные измерительные средства; ВИП – виртуальные измерительные приборы; ИИС – интеллектуальные измерительные средства; λ^* – результат измерения физической величины λ

Figure 1 – Evolution of measuring instruments: EMI – electromechanical and electronic measuring instruments; DMI – digital measuring instruments; PPM – processor measuring means; VMI – virtual measuring instruments; IMM – intellectual measuring means; λ^* – the result of measuring the physical quantity λ

ЦИСнКИ $x(n)$; $n = 0, (N-1)$ на конечном интервале длительностью N отсчетов можно представить в виде суммы ортогональных сигналов с определенными амплитудами (весовыми значениями), частотами и фазами. Совокупность квадратов этих амплитуд принято называть энергетическим спектром, а совокупность амплитуд и фаз – векторным спектром в выбранной базисной системе. На практике наибольшее применение получила базисная система дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ):

$$\text{def}_N(p, l) = \exp(-j \frac{2\pi}{N} pl) = W_N^{pl} = \cos(\frac{2\pi}{N} pl) - j \sin(\frac{2\pi}{N} pl), \quad p, l = \overline{0, N-1}. \quad (2)$$

Система дискретных экспоненциальных функций, заданная на интервале N , является полной системой, так как число независимых базисных функций в системе равно N и число отсчетов каждой базисной функции также равно N . Данная базисная система позволяет измерять частотный спектр методом дискретного преобразования Фурье (ДПФ) ЦИСнКИ на k нормированных частотах² $f_k = k / N$ одновременно. ДПФ может быть представлено в двух формах алгебраической и матричной.

²Переход от нормированной частоты $f_k = k / N$ к «истинной» частоте $f_{\text{ист}}$ осуществляется согласно выражению: $f_{\text{ист}} = f_k \cdot F_D$, где F_D – частота дискретизации измерительного сигнала $x(n)$.

Алгебраическая форма ДПФ задается следующим соотношением:

$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}; \quad k = \overline{0, (N-1)}, \quad (3)$$

где $S_N(k)$ – коэффициенты (бины³) ДПФ на нормированной частоте f_k .

Матричная форма ДПФ задается следующим матричным уравнением:

$$S_N = \frac{1}{N} F_N X_N, \quad (4)$$

где $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление ЦИСнКИ $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N -мерного линейного пространства; T – знак транспонирования; $S_N = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэффициентов разложения X_N по системе ДЭФ, задаваемой матрицей F_N :

$$F_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (5)$$

³Отдельные коэффициенты (отсчеты) ДПФ называют также бинами («Bin») – в переводе с английского «хранилище»), что подчеркивает тот факт, что энергия сигнала под кривой $\frac{\sin(N \cdot x / 2)}{N \sin(x / 2)}$ (передаточная характеристика фильтра ДПФ) попадает в «хранилище» данного коэффициента ДПФ.

Измерение спектра на k -й нормированной частоте f_k является, согласно рекомендациям по межгосударственной стандартизации – РМГ 29-2013, линейным косвенным измерением. Как известно, в данном виде измерений искомое значение физической величины Q находят на основании известной линейной функциональной зависимости:

$$Q = \sum_{i=1}^m b_i \cdot Q_i, \quad (6)$$

где b_i – постоянный коэффициент i -го аргумента Q_i ($Q_i, i=1, m$ – значения физических величин, полученные при прямых измерениях); m – число аргументов.

Сравнивая (6) и (3) нетрудно видеть, что каждое k -е, $k = 0, (N-1)$ значение коэффициента (бина) ДПФ (каждое значение частотного спектра на определенной нормированной частоте k/N) представляет собой линейное косвенное измерение величины, в котором в качестве функциональной зависимости используется k -я дискретная базисная функция ДПФ определенной частоты – k -я ДЭФ. Отметим, что широкое применение ДПФ при измерениях спектра цифровых измерительных сигналов связано, во-первых, со значительными преимуществами *DIT*-технологий; во-вторых, с широким распространением полигармонических ЦИСнКИ: периодической, ангармонической и почти периодической структур в системах естественного и искусственного происхождения; в-третьих, с адекватностью аппарата ДПФ этим видам ЦИСнКИ.

Не трудно убедиться, что измерение всех величин, $S_N(k)$, согласно соотношению (7), даже при умеренных значениях N требует огромных вычислительных затрат. Это обстоятельство являлось серьезной проблемой для внедрения *DIT*-технологий вплоть до 1965 года. Появление метода быстрого вычисления ДПФ (Cooley J.W., Tukey J.W. 1965 г.), сократившего время вычислений ДПФ на несколько порядков и получившего название алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) резко изменило положение дел. Появление алгоритмов БПФ [1] дало мощный толчок развитию *DIT*-технологий, широкому их внедрению во многие области науки и техники [2–21].

Практика внедрения *DIT*-технологий, основанных в той или иной мере на ДПФ, выявила и недостатки данного преобразования, которые

существенно снижали результативность и эффективность решения измерительных задач.

DIT-технологии на основе методов прямого ДПФ и обратного ДПФ вносят свои погрешности измерений значений спектра. Кроме погрешностей, присущих аналоговым методам измерения значений спектра, связанных с проявлением эффекта утечки и гребешкового эффекта, при применении *DIT*-технологий дополнительно проявляются эффекты периодизации, частотокола и наложения.

В то же время системный анализ приложений цифровых методов измерений величин, основанных на прямом ДПФ и обратном ДПФ, показал, что, во-первых, эти методы сохраняют свою ведущую роль в измерениях спектров ЦИСнКИ; во-вторых, результаты и эффективность методов могли бы быть более значимыми, если бы не принципиальные недостатки прямого ДПФ и обратного ДПФ. Отметим, что существующие методы снижения влияния негативных эффектов (эффектов периодизации, частотокола и наложения, а также эффекта утечки и гребешкового эффекта) на результаты измерений спектров ЦИСнКИ [2–7] разрешают проблемы, возникающие при внедрении *DIT*-технологий, лишь отчасти.

Обобщение дискретного преобразования Фурье

С целью решения проблем внедрения *DIT*-технологий на основе методов прямого ДПФ и обратного ДПФ в работах [18–21] предложено обобщение ДПФ в виде параметрического дискретного преобразования Фурье (ДПФ-П), которое представляет собой разложение дискретного сигнала по базису параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П):

$$\text{def}_{N,p}(k, n, \theta) = W_N^{(k+\theta)n} = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N}(k+\theta)n\right], \quad (7)$$

$$0 \leq \theta < 1.$$

Очевидно, что при значении параметра $\theta = 0$ ДПФ-П тождественно ДПФ. ДПФ-П, как и ДПФ, может быть представлено в двух формах – алгебраической и матричной.

Алгебраическая форма ДПФ-П задается следующим соотношением:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad (8)$$

$$k = 0, (N-1); \quad 0 \leq \theta < 1,$$

где θ параметр ДПФ-П.

Матричная форма ДПФ-П задается следующим матричным уравнением:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N; \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (9)$$

где $S_{N,\theta} = [s(0,\theta), s(1,\theta), \dots, s((N-1),\theta)]^T$ – вектор коэффициентов (бинов) ДПФ-П, полученных путем измерения спектра в системе ДЭФ-П, которая задается матрицей $F_{N,\theta}$; T – знак транспонирования.

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^\theta & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ 1 & W_N^{(1+\theta)} & \dots & W_N^{(1+\theta)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (10)$$

В рамках аппаратов ДПФ и ДПФ-П вводятся понятия энергетических спектров $G_N(k)$ и $G_N(k, \theta)$, а также соответствующих спектров мощности $P_N(k)$ и $P_N(k, \theta)$:

$$G_N(k) = \frac{P_N(k)}{\Delta f} = N |S_N(k)|^2, \quad P_N(k) = |S_N(k)|^2, \quad (11)$$

$$G_N(k, \theta) = \frac{P_N(k, \theta)}{\Delta f} = N |S_N(k, \theta)|^2, \quad P_N(k, \theta) = |S_N(k, \theta)|^2, \quad (12)$$

где $\Delta f = \frac{1}{N}$ – интервал по частоте между отсчетами $S_N(k, \theta)$.

При равенстве интервалов по частоте между отсчетами $S_N(k)$ и между отсчетами $S_N(k, \theta)$, сетки частот ДПФ и ДПФ-П смещены друг относительно друга на $0 \leq \theta < 1$ (напомним, что при $\theta = 0$ ДПФ-П «переходит» в ДПФ).

Рассмотрим решение задачи измерения частоты гармонического сигнала методами ДПФ и ДПФ-П.

Измерение частоты гармонического сигнала методами дискретного преобразования Фурье и параметрического дискретного преобразования Фурье

Пусть задан гармонический сигнал $x(n)$ на конечном интервале $n = \overline{0, (N-1)}$ с единичной амплитудой, частотой $k_1 = m + \Delta m = 14 + 0,51$ и фазой $\alpha = \frac{2\pi}{N} p$, $p = \overline{0, N-1}$, полученный дискретизацией аналогового сигнала $x(t)$ с частотой F_D :

$$x(n) = \cos \left\{ \left[\frac{2\pi}{N} (m + \Delta m)n \right] + \alpha \right\}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (8) получим:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\begin{matrix} \sin \left(\frac{2\pi(m + \Delta m - k - \theta)n}{N} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{2\pi(m + \Delta m + k + \theta)n}{N} + \alpha \right) + \\ -j \cos \left(\frac{2\pi(m + \Delta m - k - \theta)n}{N} + \alpha \right) + j \cos \left(\frac{2\pi(m + \Delta m + k + \theta)n}{N} + \alpha \right) \end{matrix} \right). \quad (14)$$

Представим спектр $S_N(k, \theta)$ в виде суммы двух членов: $A_N(k, \theta)$ и $B_N(k, \theta)$, значения которых определяются значениями спектра $S_N(k, \theta)$,

расположенными соответственно на положительных частотах – $A_N(k, \theta)$ и на отрицательных частотах⁴ – $B_N(k, \theta)$:

$$A_N(k, \theta) = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sin \left(\frac{2\pi(m + \Delta m - k - \theta)n}{N} + \alpha \right) - j \cos \left(\frac{2\pi(m + \Delta m - k - \theta)n}{N} + \alpha \right) \right); \quad (15)$$

$$B_N(k, \theta) = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sin \left(\frac{2\pi(m + \Delta m + k + \theta)n}{N} + \alpha \right) + j \cos \left(\frac{2\pi(m + \Delta m + k + \theta)n}{N} + \alpha \right) \right). \quad (16)$$

⁴При применении ДПФ и ДПФ-П значения переменной k общепринято отождествлять с частотой: при $k = 0, (N/2)$ – положительные частоты, при $k = (N/2 + 1), (N-1)$ – отрицательные частоты.

Нетрудно видеть, что из выражения (16) непосредственно следует, что эффект утечки спектра для ДПФ-П отсутствует не только при $\Delta m = \theta = 0$ (рисунок 2а), но и при $\Delta m = \theta = 1/2$ (рисунок 3а). В то время, как

для ДПФ это самый «тяжелый» случай (рисунок 2б). При значении параметра $\Delta m = \theta \neq 1/2$ эффект утечки на положительных частотах (15) отсутствует, а на отрицательных частотах присутствует (рисунок 3б).

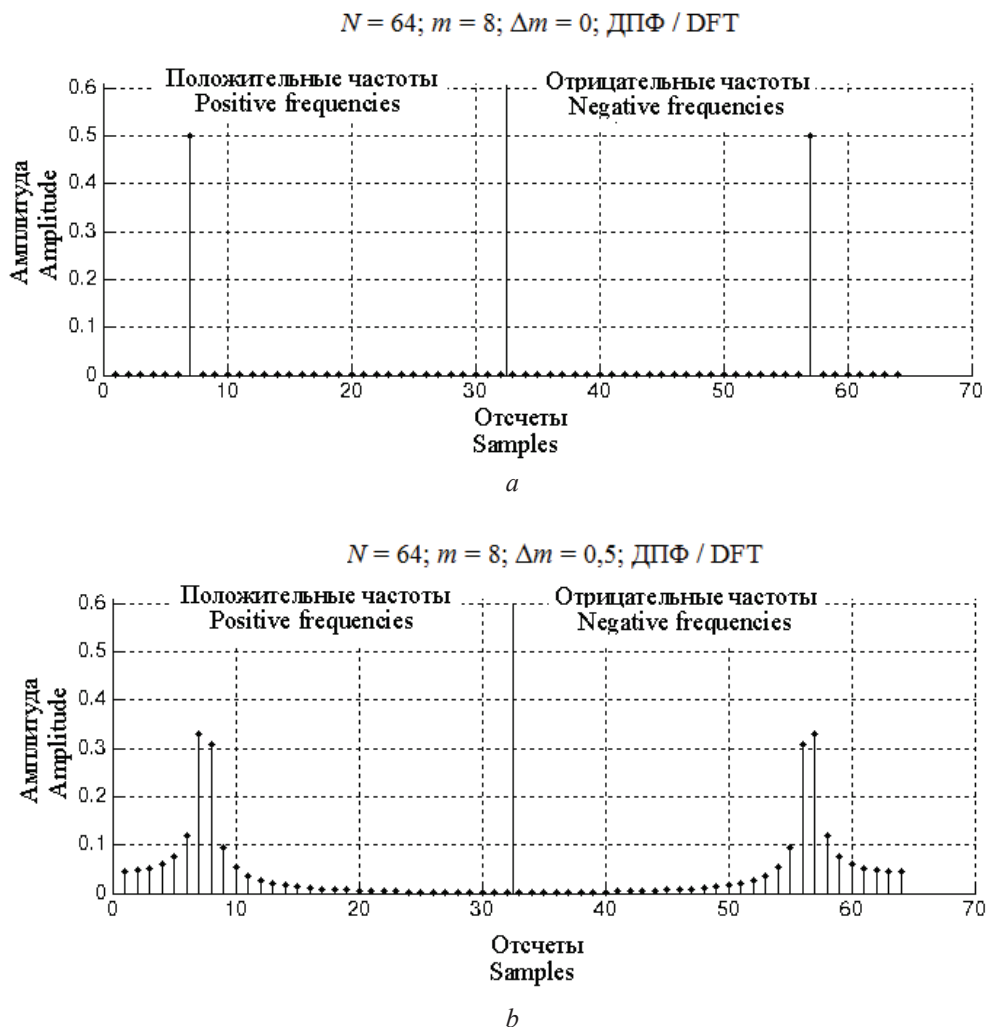


Рисунок 2 – Эффект утечки спектра при применении дискретного преобразования Фурье для значений параметра $\theta = 0$ (а); $\theta = 0,5$ (б)

Figure 2 – The effect of spectrum leakage when using the discrete fourier transform for parameter values $\theta = 0$ (а); $\theta = 0,5$ (б)

В силу того, что при значении параметра ДПФ-П $\theta = \Delta m$ эффект утечки на положительных частотах отсутствует, то измерение частоты гармонического сигнала (13) можно провести с заданной точностью, решая задачу:

$$\max_{k, \theta} [\text{abs} [S_N(k, \theta)]; \overline{\quad\quad\quad}; k = 0, N/2 - 1; 0 \leq \theta < 1. \quad (17)$$

Для реализации преимуществ ДПФ-П перед ДПФ нужны быстрые процедуры его осуществления (аналогичные БПФ), поскольку измери-

тельное преобразование ДПФ-П требует выполнения N^2 комплексных умножений и сложений.

В работе [19] доказано существование для ДПФ-П быстрых алгоритмов – параметрических БПФ (БПФ-П). Поскольку базис ДЭФ-П (7) является мультипликативным лишь по одной переменной n , то существует только один класс алгоритмов БПФ-П – класс алгоритмов БПФ-П с прореживанием по времени. На рисунке 4 в качестве примера приведен граф алгоритма БПФ-П без замещения.

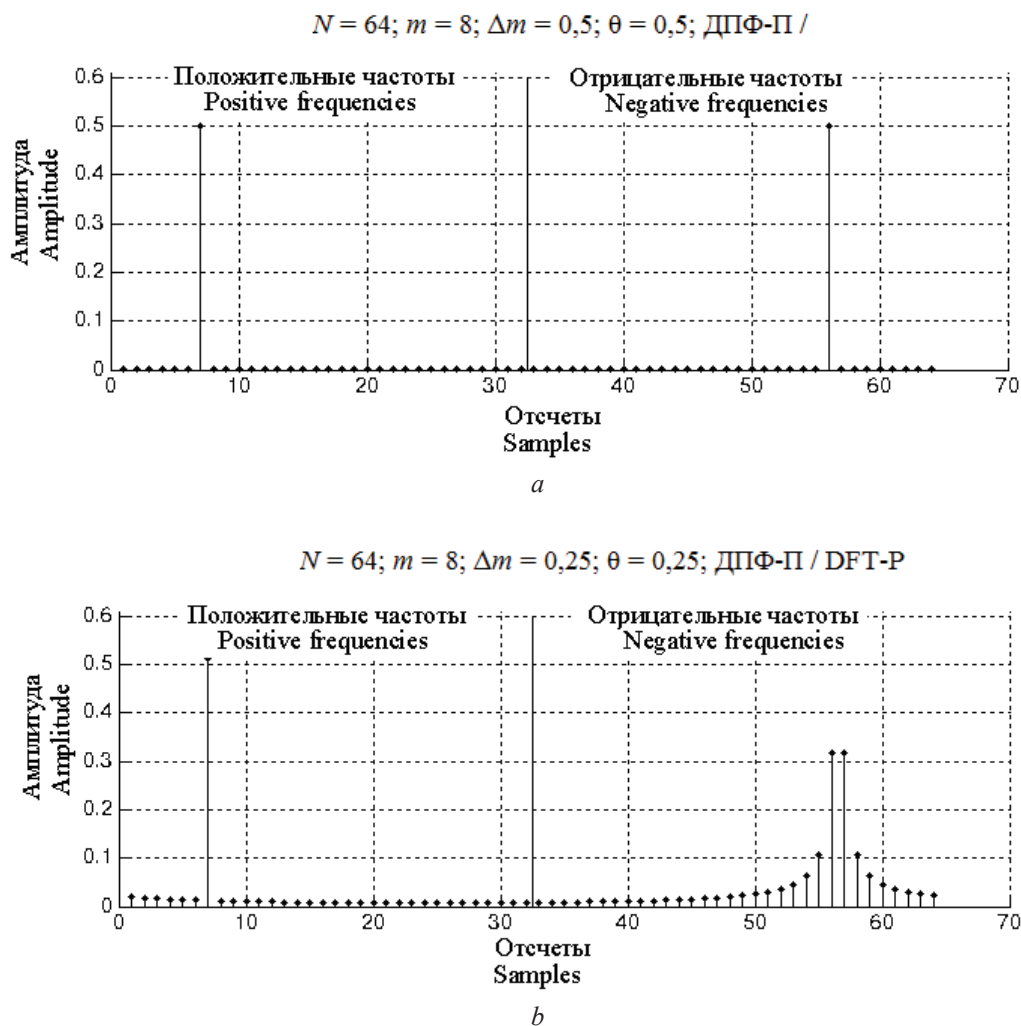


Рисунок 3 – Эффект утечки спектра при применении параметрического дискретного преобразования Фурье для значений параметра $\theta = 0,5$ (a); $\theta = 0,25$ (b)

Figure 3 – The effect of spectrum leakage when using the parametric discrete Fourier transform for parameter values $\theta = 0,5$ (a); $\theta = 0,25$ (b)

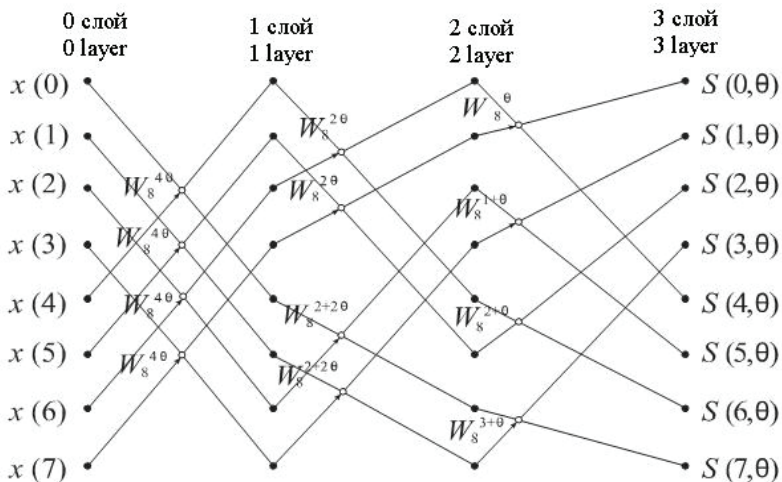


Рисунок 4 – Граф алгоритма параметрического быстрого преобразования Фурье без замещения

Figure 4 – Parametric discrete Fourier algorithm graph without substitution

Алгоритм имеет естественный порядок отсчетов на входе и выходе, что, безусловно, является преимуществом данного алгоритма.

Заключение

С целью решения проблем внедрения цифровых информационных технологий, основанных в той или иной мере на дискретном преобразовании Фурье, предложено его обобщение в виде параметрического дискретного преобразования Фурье, которое за счет введения нового базиса Фурье – базиса Фурье с варьируемым параметром, позволяет устранить или значительно снизить влияние негативных эффектов, сопровождающих применение измерительных технологий на базе преобразований Фурье.

Проведена, путем численного моделирования, экспериментальная проверка полученных теоретических результатов по измерению частоты дискретного гармонического сигнала на конечном интервале методом параметрического дискретного преобразования Фурье. Проверка доказала результативность разработанного метода цифрового измерения спектра гармонических сигналов на конечных интервалах. Действительно, в случае применения для измерения частоты дискретного гармонического сигнала дискретного преобразования Фурье погрешность фиксирована и равна половине расстояния между двумя бинами, в то время как применение параметрического дискретного преобразования Фурье позволяет провести измерение частоты с необходимой точностью путем варьирования параметра введенного преобразования. Например, при численном моделировании, рассмотренном в работе, точность измерения частоты была повышена в 50 раз.

Эффективность приложений параметрического дискретного преобразования Фурье предполагает, прежде всего, наличие быстрых алгоритмов его получения, существование которых позволяет снизить вычислительные затраты на порядок и более. Базис параметрического дискретного преобразования Фурье является мультипликативным лишь по одной переменной (в отличие от базиса дискретного преобразования Фурье, который мультипликативен по двум переменным). Поэтому существует только один класс быстрых алгоритмов параметрического дискретного преобразования Фурье – класс алгоритмов с прореживанием по времени.

Список использованных источников

1. Cooley, J. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series / J. Cooley, J. Tukey // *Math. Comput.* – 1965. – Vol. 19, no. 90. – P. 297–301. DOI: 10.2307/2003354
2. Oppenheim, A.V. Discrete-Time Signal Processing / A.V. Oppenheim, R.W. Schaffer // Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2009. – 1120 p.
3. Sumathi, S. LabVIEW based Advanced Instrumentation Systems / S. Sumathi, P. Surekha // Springer, 2007. – 728 p.
4. Bress, T. Effective Labview Programming / T. Bress // New York: NTC Press, 2013. – 720 p.
5. Folea, S. LabVIEW – Practical Applications and Solutions / S. Folea // InTech, 2011. – 472 p.
6. Richard, G. Lyons. Understanding Digital Signal Processing (3rd Edition) 3rd Edition / G. Richard // Prentice-Hall, 2010. – 210 p.
7. Финкелстайн, Л. Наука об измерениях: анализ состояния и направлений развития / Л.Финкелстайн // Датчики и системы. – 2010. – № 2. – С. 53–57.
8. Yaroslavsky, L.P. Compression, restoration, resampling, ‘compressive sensing’ fast transforms in digital imaging / L.P. Yaroslavsky // *Journal of Optics.* – 2015. – Vol. 17, no. 7. – P. 073001.
9. Favorskaya, M.N. Development of mathematical theory in computer vision / M.N. Favorskaya, L.C. Jain // *Intelligent Systems Reference Library.* – 2015. – Vol. 73. – P. 1–8. DOI: 10.1007/978-3-319-10653-3_1
10. Gonzalez, R.C. Digital Image Processing / R.C. Gonzalez, R.E. Woods // 4th Ed. Published by Pearson, 2018. – P. 1168.
11. Ханян, Г.С. Аналитическое исследование и оценка погрешностей в задаче измерения параметров гармонического сигнала методом преобразования Фурье / Г.С. Ханян // *Измерительная техника.* – 2003. – № 8. – С. 3–10.
12. Petrovsky, N.A. Two-dimensional non-separable quaternionic paraunitary filter banks / N.A. Petrovsky, E.V. Rybenkov, A.A. Petrovsky // *IEEE Int. conf. on Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications* // Poznan, Poland. – 2018. – P. 120–125. DOI: 10.23919/SPA.2018.8563311
13. Цветков, Э.И. Процессорные измерительные средства / Э.И. Цветков // Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 224 с.
14. Цветков, Э.И. Основы математической метрологии / Э.И. Цветков // СПб.: Политехника, 2005. – 510 с.
15. Мелентьев, В.С. Аппроксимационные методы и системы измерения и контроля параметров периодических сигналов / В.С. Мелентьев, В.И. Батищев // М.: Физматлит, 2011. – 240 с.

16. Prokhorov, S.A. Orthogonal models of structure functions / S.A. Prokhorov, V.V. Grafkin // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2011. – Vol. 47, no. 1. – P. 39–46.

DOI: 10.3103/S8756699011010067

17. John, W. Multidimensional signal, image, and video processing and coding / W. John // Academic Press is imprint of Elsevier, 2006.

18. Ponomareva, O. Evolution of forward and inverse discrete fourier transform / O. Ponomareva, A. Ponomarev, V. Ponomarev // *IEEE East-West Design & Test Symp.* – 2018. – P. 313–318.

DOI: 10.1109/EWDTS.2018.8524820

19. Ponomarev, V.A. Method for Effective Measurement of a Sliding Parametric Fourier Spectrum / V.A. Ponomarev, O.V. Ponomareva, A.V. Ponomarev // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing* // 2014. – Vol. 50, iss. 2. – P. 132–138.

DOI: 10.3103/S8756699014020046

20. Пономарев, В.А. Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // *Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника.* – 2014. – № 2. – С. 8–16.

21. Пономарев, В.А. Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов / В.А. Пономарев, О.В. Пономарева // *Метрология.* – 2017. – № 1. – С. 20–32.

References

1. Cooley J., Tukey J. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. *Math. Comput.*, 1965, vol. 19, no. 90, pp. 297–301.

DOI: 10.2307/2003354

2. Oppenheim A.V., Schaffer R.W. Discrete-Time Signal Processing. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey*, 2009, p. 1120.

3. Sumathi S., Surekha P. LabVIEW based Advanced Instrumentation Systems. *Springer*, 2007, 728 p.

4. Bress T. Effective Labview Programming. New York: *NTC Press*, 2013, 720 p.

5. Folea S. LabVIEW - Practical Applications and Solutions. *InTech*, 2011, 472 p.

6. Richard G. Lyons. Understanding Digital Signal Processing (3rd Edition) 3rd Edition. *Prentice-Hall*, 2010, 210 p.

7. Finkelstajn L. [The science of measurements: analysis of the state and directions of development]. *Datchiki i sistemy* [Sensors and systems], 2010, no. 2, pp. 53–57 (in Russian).

8. Yaroslavsky L.P. Compression, restoration, resampling, ‘compressive sensing’ fast transforms in digital imaging. *Journal of Optics*, 2015, vol. 17, no. 7, p. 073001.

9. Favorskaya M.N., Jain L.C. Development of mathematical theory in computer vision. *Intelligent Systems Reference Library*, 2015, vol. 73, pp. 1–8.

DOI: 10.1007/978-3-319-10653-3_1

10. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing. 4th Ed. Published by Pearson, 2018, 1168 p.

11. Hanyan G.S. [Analytical research and error estimation in the problem of measuring the parameters of a harmonic signal by the Fourier transform]. *Izmeritel'naya tekhnika* [Measuring technique], 2003, no. 8, pp. 3–10 (in Russian).

12. Petrovsky N.A., Rybenkov E.V., Petrovsky A.A. Two-dimensional non-separable quaternionic paraunitary filter banks. *IEEE Int. conf. on Signal Processing: Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications*, Poznan, Poland, 2018, pp. 120–125.

DOI: 10.23919/SPA.2018.8563311

13. Cvetkov E.I. *Protseessornye izmeritel'nye sredstva* [Processor measuring tools]. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1989, 224 p.

14. Cvetkov E.I. *Osnovy matematicheskoy metrologii* [Fundamentals of Mathematical Metrology]. Saint-Petersburg, Politekhnik Publ., 2005, 510 p.

15. Melent'ev V.S., Batishchev V.I. *Approximatsionnye metody i sistemy izmereniya i kontrolya parametrov periodicheskikh signalov* [Approximation methods and systems for measuring and controlling the parameters of periodic signals]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2011, 240 p.

16. Prokhorov S.A. Orthogonal models of structure functions. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 39–46.

DOI: 10.3103/S8756699011010067

17. John W. Multidimensional signal, image, and video processing and coding. *Academic Press is imprint of Elsevier*, 2006.

18. Ponomareva O., Ponomarev A., Ponomarev V. Evolution of forward and inverse discrete fourier transform. *IEEE East-West Design & Test Symp.*, 2018, pp. 313–318. **DOI:** 10.1109/EWDTS.2018.8524820

19. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Method for Effective Measurement of a Sliding Parametric Fourier Spectrum. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2014, vol. 50, iss. 2, pp. 132–138. **DOI:** 10.3103/S8756699014020046

20. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. Invariance of the current energy Fourier spectrum of complex discrete signals at finite intervals. *News of higher educational institutions of Russia. Radio electronics*, 2014, no. 2, pp. 8–16 (in Russian).

21. Ponomarev V.A., Ponomareva O.V. Trends in the development of discrete indirect measurements of the parameters of electrical signals. *Metrology*, 2017, no. 1, pp. 20–32 (in Russian).