

**ОПИСАНИЕ
ИЗОБРЕТЕНИЯ
К ПАТЕНТУ**
(12)

РЕСПУБЛИКА БЕЛАРУСЬ



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ
СОБСТВЕННОСТИ

(19) **ВУ** (11) **7056**
(13) **С1**
(46) **2005.06.30**
(51)⁷ **G 01V 7/00**

(54) **СПОСОБ ИЗМЕРЕНИЯ ПРИВЕДЕННОГО ПЕРИОДА
СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА**

(21) Номер заявки: а 20020551

(22) 2002.06.26

(43) 2003.12.30

(71) Заявитель: Белорусский националь-
ный технический университет (ВУ)

(72) Автор: Джилавдари Игорь Захарович
(ВУ)

(73) Патентообладатель: Белорусский на-
циональный технический университет
(ВУ)

(56) Юзефович А.П. Гравиметрия. - М.: Не-
дра, 1980. -С. 62-65.

(57)

1. Способ измерения приведенного периода свободных колебаний маятника, включающий сообщение маятнику свободных колебаний, задание начальной амплитуды колебаний и фиксацию начального и конечного моментов прохождения маятником положения равновесия, **отличающийся** тем, что измеряют длительности \tilde{T}_i последовательных циклов колебаний, каждый из которых включает заданное число n колебаний, выбирают рабочий интервал значений \tilde{T}_i , включающий заданное число N колебаний, выбирают один из циклов в рабочем интервале в качестве опорного, строят экспериментальную зависимость длительности цикла колебаний от номера цикла, аппроксимируют ее решением уравнения регрессии вида

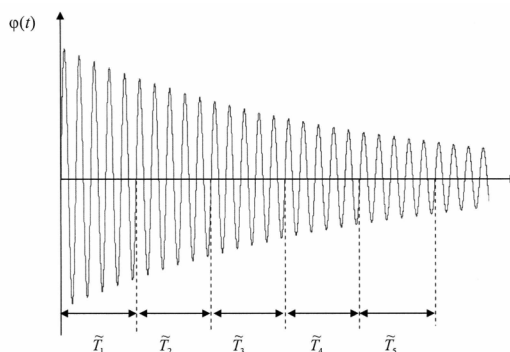
$$T(x) = \tilde{T}_{on} [1 + f(x - i_{on})],$$

где \tilde{T}_{on} - параметр регрессии;

x - безразмерный параметр;

i_{on} - номер опорного цикла;

$f(x - i_{on})$ - функция, вид которой подбирается из соображений достижения необходимой точности оценки параметра \tilde{T}_{on} ,



Фиг. 1

ВУ 7056 С1 2005.06.30

ВУ 7056 С1 2005.06.30

находят из этого уравнения параметр регрессии \tilde{T}_{on} и вычисляют значение приведенного периода свободных колебаний T_α по формуле

$$T_\alpha = \frac{\tilde{T}_{on}}{n},$$

причем n выбирают, исходя из условия

$$1 \leq n \leq \frac{N}{m+1},$$

где m - число параметров регрессии в уравнении зависимости $\tilde{T}(x)$.

2. Способ по п. 1, **отличающийся** тем, что границы рабочего интервала и положение опорного цикла выбирают, исходя из допустимой погрешности оценки приведенного периода колебаний T_α .

Изобретение относится к области измерительной техники и может быть использовано при абсолютных и относительных измерениях ускорения свободного падения.

Наиболее близким к предлагаемому способу является способ измерения приведенного периода свободных колебаний маятника [1, с. 64, с. 79], в котором засекают моменты прохождения маятником положения равновесия, измеряют время τ заданного числа N колебаний, задают начальную α_0 и измеряют конечную α_n амплитуды, вычисляют методическую погрешность, обусловленную конечностью амплитуды, и определяют приведенный период T_0 по формуле

$$T_0 \approx \frac{\tau}{N} \left(1 - \frac{\bar{\alpha}^2}{16} \right) \quad (1)$$

где

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2} \quad (2)$$

среднее значение амплитуды колебаний.

В данном способе измерение времени колебаний τ начинают спустя 40 с после того, как амплитуда маятника приняла заданное значение [1, с. 93, пункт 7], а измерение конечной амплитуды осуществляют спустя 40 с после завершения измерения времени колебаний [1, с. 94, пункт 9]. Практически это означает, что измерение времени колебаний маятника начинают при заданном значении амплитуды колебаний.

Основной недостаток данного способа состоит в низкой точности, т.к. формула (1) получена из теории идеального физического маятника. Эта теория состоит в следующем.

Известно, что если маятник - идеальный, т.е. его ось вращения фиксирована и трение отсутствует, то процесс свободных колебаний описывается дифференциальным уравнением [2, с. 63,66]

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad (3)$$

где φ - отклонение маятника от положения равновесия;

ω_0 - собственная циклическая частота, которая выражается через приведенный период T_0 по формуле

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \quad (4)$$

Период T_0 связан с ускорением свободного падения g известной формулой

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (5)$$

где l - приведенная длина маятника.

BY 7056 C1 2005.06.30

В данном способе под периодом T_0 понимают период, которым обладал бы идеальный маятник, амплитуда α колебаний которого бесконечно мала ($\alpha = 0$). Существующие способы измерения g с помощью маятниковых гравиметров, так или иначе связаны с оценкой периода T_0 . Однако этот период непосредственно измерить нельзя.

Из теории колебаний следует, что при конечной (но малой) амплитуде колебаний период идеального маятника зависит от амплитуды по формуле [2, с. 66)]

$$T \approx \frac{T_0}{1 - \frac{\alpha^2}{16}} \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2 \right) \quad (6)$$

В данном способе, период T_0 выражают через период T по формуле

$$T_0 \approx T - \frac{1}{16} T \alpha^2 = T \left(1 - \frac{1}{16} \alpha^2 \right) \quad (7)$$

Вследствие потерь энергии на трение амплитуда колебаний маятника постепенно уменьшается и период маятника изменяется. В описываемом способе в качестве периода колебаний T используют его среднее за время колебаний значение $T_{\text{cp}} = \frac{\tau}{N}$. Подставляя в

(7) вместо периода T значение T_{cp} и вместо амплитуды α ее среднее значение $\bar{\alpha}$, получают формулу (1).

Величину

$$q \approx \frac{T}{16} \bar{\alpha}^2, \quad (8)$$

рассматривают как методическую погрешность и называют поправкой к периоду за амплитуду [1, с. 64]. С помощью этой поправки средний период колебаний маятника "приводят" к значению периода при $\alpha = 0$.

Погрешность формулы (1), в первую очередь, обусловлена тем, что параболическая зависимость (6) периода T от амплитуды α , на самом деле, не наблюдается. В реальном маятниковом гравиметре ось вращения маятника не фиксирована. Здесь опорой маятника является опора качения. Она изначально имеет сложную непредсказуемую геометрию, множество дефектов [1, с. 69] и деформируется под действием веса маятника. В процессе качаний маятника имеет место проскальзывание подвижной и неподвижной поверхностей опоры относительно друг друга и их износ [1, с. 70; 3, с. 39].

Кроме того, как показано в [4], при вычислении периода T_0 замена амплитуды ее средним значением также вносит дополнительные погрешности в оценку приведенного периода. Здесь необходимо учитывать закон затухания амплитуды $\alpha(t)$.

Указанные причины приводят к тому, что динамика реального маятника существенно отличается от динамики идеального физического маятника. Более того, эта динамика постепенно может изменяться и в процессе колебаний. Реальное поведение маятника трудно предсказать с высокой точностью. "При исследовании маятников различных типов обнаружилось, что теоретическая поправка за амплитуду не полностью исправляет период колебаний, и существует остаточное влияние амплитуды, индивидуальное у разных маятников и достигающее нескольких десятков единиц 10^{-8} с в рабочем диапазоне амплитуд" [1, с. 64-65].

Единственным методом определения реальной зависимости T от α может быть только ее экспериментальное определение. В данном способе эта возможность отсутствует.

Отсутствие возможностей получить сведения о реальной зависимости T от α в прототипе не позволяет следить за изменениями динамических свойств маятника от опыта к опыту, например, вследствие износа и изменения характера трения. В данном способе "чтобы учесть эти изменения, периодически возвращаются на исходный пункт для повторных наблюдений, а сами наблюдения выполняют не с одним маятниковым прибором, а с комплектом из трех-пяти приборов, повторяют гравиметрическую связь независимо

ВУ 7056 С1 2005.06.30

несколько раз" [1, с. 63]. Очевидно, что это приводит к значительным дополнительным затратам времени и финансов.

Из сказанного следует, что по существу данный способ основан на некорректной экстраполяции среднего значения периода колебаний маятника, измеренного в некотором интервале конечных значений амплитуд α (в прототипе $\alpha = 30-40$ угл. минут), к значению периода при $\alpha = 0$, т.е. к значению, где зависимость $T(\alpha)$ не известна и не может быть измерена. Теория этого способа и расчетные формулы построены на модели идеального физического маятника, далекой от реальной модели.

Задачей изобретения является увеличение точности измерений приведенного периода свободных колебаний маятника.

Решение поставленной задачи обеспечивается тем, что в известном способе измерения приведенного периода свободных колебаний маятника, включающем сообщение маятнику свободных колебаний, задание начальной амплитуды колебаний и фиксацию начального и конечного моментов прохождения маятником положения равновесия, дополнительно:

измеряют длительности \tilde{T}_i последовательных циклов колебаний, каждый из которых включает заданное количество n колебаний,

выбирают рабочий интервал значений \tilde{T}_i , включающий N колебаний;

выбирают один из циклов в рабочем интервале в качестве опорного;

строят экспериментальную зависимость длительности цикла колебаний от номера цикла;

аппроксимируют эту зависимость решением уравнения регрессии вида

$$\tilde{T}(x) = \tilde{T}_{on} [1 + f(x - i_{on})], \quad (9)$$

где \tilde{T}_{on} - параметр регрессии;

x - безразмерный параметр;

i_{on} - номер опорного цикла;

$f(x - i_{on})$ - функция, вид которой выбирается из соображений достижения необходимой точности оценки параметра \tilde{T}_{on} ;

находят из этого уравнения параметр регрессии \tilde{T}_{on} и вычисляют значение приведенного периода колебаний T_α по формуле

$$T_\alpha = \frac{\tilde{T}_{on}}{n}. \quad (10)$$

причем n выбирают из условия

$$1 \leq n \leq \frac{N}{m+1}, \quad (11)$$

где m - число параметров регрессии в уравнении зависимости $\tilde{T}(x)$.

В частности, в предлагаемом способе границы рабочего интервала и положение опорного цикла выбирают, исходя из допустимой погрешности оценки приведенного периода T_α .

Измерение длительностей последовательных циклов колебаний (они показаны на фиг. 1 и обозначены как $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{T}_3, \dots$) позволяет установить характер изменения длительностей циклов в некотором диапазоне изменения амплитуды колебаний и провести сравнительный анализ различных участков изменения этих циклов.

Измерение длительностей циклов колебаний, каждый из которых включает заданное количество n колебаний, позволяет обеспечить статистическую независимость соседних измеряемых циклов. Значения же соседних периодов колебаний коррелированы между собой. Действительно, если представить, что в какой то момент времени маятник получил толчок вследствие вибраций основания, то амплитуда и длительность данного и последующих периодов изменятся. В случае же измерения длительностей циклов, включаю-

ших несколько периодов, корреляция между периодами разрушится под действием других толчков.

Статистическая независимость соседних циклов колебаний увеличивает точность оценки приведенного периода.

Рабочий интервал значений \tilde{T}_i включает несколько циклов колебаний (и, естественно, несколько значений \tilde{T}_i). Выбор именно рабочего интервала позволяет из всей сложной кривой зависимости \tilde{T}_i от номера цикла i или от амплитуды α (см. фиг. 2-3) выбрать тот участок, где разброс значений \tilde{T}_i минимален (т.е. зависимость \tilde{T}_i от i максимально гладкая) и где связь между \tilde{T}_i и i можно описать простой аналитической зависимостью наиболее точно. Это позволяет существенно увеличить точность оценки приведенного периода колебаний.

Выбор одного из циклов рабочего интервала значений \tilde{T}_i в качестве опорного позволяет "привести" период колебаний к наиболее предпочтительной точке рабочего интервала, например, в которой зависимость \tilde{T}_i от i является наиболее стабильной.

Определение в рабочем интервале закона зависимости $\tilde{T}(x) = \tilde{T}_{он} [1 + f(x - i_{он})]$ длительности циклов \tilde{T}_i колебаний от их номера методом регрессионного анализа [5] позволяет увеличить точность измерения длительности опорного цикла, т.к. значение параметра регрессии $\tilde{T}_{он}$ представляет собой улучшенную (уточненную) оценку длительности этого цикла. Действительно, процедура измерения длительностей \tilde{T}_i каждого из циклов представляет собой единичное измерение. Погрешность этого измерения определяется, главным образом, погрешностью оптоэлектрического датчика и уровнем вибраций основания. Использование процедуры регрессионного анализа позволяет заменить процедуру единичных измерений процедурой многократных измерений, поскольку уравнение регрессии позволяет установить детерминированную связь между длительностями соседних циклов с помощью уравнения регрессии (9) и уменьшить влияние случайных погрешностей за счет их усреднения.

Вид функции $f(x)$ вытекает из положения опорного цикла в рабочем интервале значений \tilde{T}_i , выбранного метода анализа, например, из линейности или нелинейности уравнения регрессии, а также из необходимой точности оценки значения параметра $\tilde{T}_{он}$.

Определение зависимости $\tilde{T}(x)$ позволяет установить индивидуальное уравнение динамики для каждого маятника и следить за этой динамикой при каждом измерении. Изменение вида этой зависимости будет свидетельствовать о нарушении установленного режима измерений. Уравнение (9) можно рассматривать как "паспорт" каждого маятника.

Помимо параметра $\tilde{T}_{он}$, уравнение (9) может содержать еще несколько параметров регрессии, значения которых находятся с помощью метода наименьших квадратов.

Вычисление приведенного периода колебаний маятника по формуле (10) является очевидным. Здесь период предстает как средний по n колебаниям период в опорном цикле. Поэтому в предлагаемом способе приведенный период определяется из реальной динамики маятника. В отличие от формулы (1), в формуле (10) автоматически учитывается реальный закон зависимости периода колебаний от амплитуды $T(\alpha)$. Это обеспечивает максимально возможную точность вычисления приведенного периода T_α .

Выбор границ рабочего интервала и положение опорного цикла в рабочем интервале, исходя из обеспечения допустимой погрешности оценки T_α , позволяет дополнительно увеличить точность вычисления приведенного периода. Эта погрешность характеризуется средним квадратическим отклонением значений функции (9) при $x = i$ от значений \tilde{T}_i .

BY 7056 C1 2005.06.30

Меняя длину и положение рабочего интервала, а также выбирая положение опорного цикла в рабочем интервале, можно добиться минимального значения указанного среднего квадратического отклонения и максимальной точности оценки приведенного периода.

Условие (11) вытекает из следующих соображений. Минимальное значение $n = 1$ является очевидным: в этом случае каждый цикл состоит из одного колебания, и тогда число циклов равно числу колебаний маятника. Если N - полное число колебаний в рабочем интервале, при $n > 1$ количество циклов в этом интервале равно N/n . Если m - число параметров регрессии в уравнении (9), вычисляемых методом наименьших квадратов, то, как известно [5], применение этого метода требует выполнения условия $N/n \geq m + 1$.

На фиг. 1 схематически представлена виброграмма свободных затухающих колебаний маятника и показаны циклы колебаний и их длительности.

На фиг. 2 в виде отдельных точек показана зависимость длительностей циклов колебаний от амплитуды для маятника с опорой качения, выполненной из двух стальных шариков диаметром 4 мм, катающихся по плоской полированной поверхности сапфировых пластин.

На фиг. 3 эти же циклы показаны в зависимости от номера цикла колебаний.

На фиг. 4 в виде отдельных точек показан график зависимости длительностей циклов колебаний от их номера в выбранном рабочем интервале и показан в виде пунктирной кривой график уравнения регрессии вида (9), аппроксимирующий эту зависимость.

Зависимости, представленные на фиг. 2 и фиг. 3 получены путем натуральных измерений. На фиг. 2 и фиг. 3 циклы колебаний включают по $n = 10$ периодов колебаний маятника каждый.

Из фиг. 2 видно, что зависимости $T(\alpha)$ совершенно не соответствуют параболической зависимости формулы (6), используемой в прототипе.

На фиг. 3 рабочий интервал значений длительностей циклов колебаний выделен между значениями $i = 3$ и $i = 8$. Опорный цикл колебаний имеет номер 4 и находится в минимуме кривой.

Предлагаемый способ реализуют, например, следующим образом:

1. Отклоняют маятник от положения равновесия и отпускают его.
2. После того как амплитуда маятника достигнет заданного значения, измеряют длительности циклов, включающие в себя по $n = 10$ полных периодов колебаний.
3. Строят график зависимости \tilde{T}_i от номера цикла i (фиг. 3).
4. Выбирают рабочий интервал с минимальным уровнем разброса значений \tilde{T}_i . На фиг. 3 - это участок с номерами циклов от $i = 0$ до $i = 10$.
5. Выбирают опорный цикл колебаний. Это цикл с номером $i = 4$, т.е. $i_{on} = 4$. При выборе руководствовались тем, что опорный цикл находится в минимуме кривой и значение \tilde{T}_4 воспроизводится при повторных измерениях наиболее стабильно.
6. Осуществляют линейную аппроксимацию зависимости длительности цикла на рабочем интервале с помощью уравнения регрессии вида

$$\tilde{T}(x) = \tilde{T}_{on} (1 + p_1(x - 4) + p_2(x - 4)^2 + p_3(x - 4)^3 + p_4(x - 4)^4) \quad (12)$$

и проводят вычисления параметров регрессии \tilde{T}_{on} , p_1 , p_2 , p_3 и p_4 с помощью известной компьютерной программы "Mathcad".

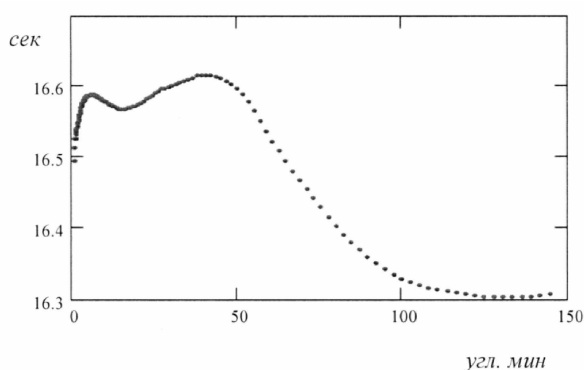
7. Уточняют границы рабочего участка. При этом, меняя начальное и конечное значения i , находят, что для циклов с номерами от 3 до 8 погрешность аппроксимации минимальна и равна $1,89 \cdot 10^{-6}$ сек. На этом участке получают следующие значения параметров регрессии: $\tilde{T}_{on} = 16,3037594$ сек; $p_1 = 1,07877 \cdot 10^{-3}$; $p_2 = 1,58958 \cdot 10^{-4}$; $p_3 = 6,94444 \cdot 10^{-7}$; $p_4 = 2,29167 \cdot 10^{-6}$. Длительности циклов, принадлежащих рабочему интервалу, и функция (12), аппроксимирующая зависимость этих длительностей от номера цикла, показаны на фиг. 4.

8. Вычисляют значение приведенного периода по формуле (10) и получают значение $T_{\alpha} = 1,6303759$ сек.

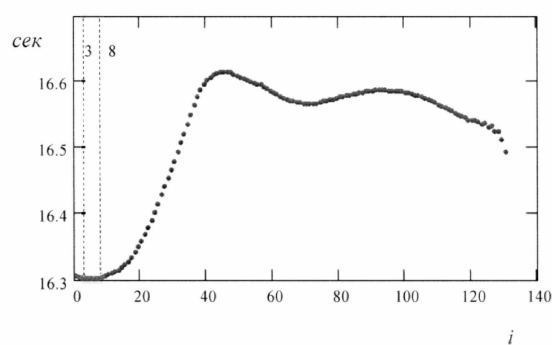
Дополнительным преимуществом предлагаемого способа является малое время измерений. Действительно, если "паспорт" маятника известен, рабочий интервал выбран и не меняется при повторных измерениях, то время измерений τ равно сумме длительностей циклов в рабочем интервале. В приведенном выше примере $\tau \approx 98$ секунд. В прототипе это время составляет от 17 до 34 минут [1, с. 91-92].

Источники информации:

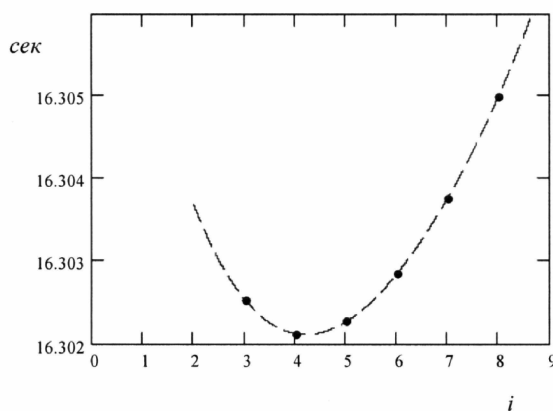
1. Юзефович А.П., Огородова. Гравиметрия. - М.: Недра, 1980.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний: - М.: Наука, 1974.
3. Цубои Т. Гравитационное поле Земли. - М.: Мир, 1982.
4. Джиладари И.З. Влияние трения на точность маятникового гравиметра // Материалы Международной научно-практической конференции "Метрологическое обеспечение качества 2000"/ - Минск, 28-30 ноября 2000 г.
5. Прикладной статистический анализ / Алексашин С.В. и др. - М.: ПРИОР, 2001.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4