МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Мосты и тоннели»

А.В. Забавская

СБОРНИК ПРОФЕССИОНАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ
(с использованием электронно-образовательных ресурсов)

для специальностей
1-70 03 01 Автомобильные дороги
1-70 03 02 Мосты, транспортные тоннели и метрополитены

Минск
БНТУ
2019

Рецензенты:

доктор педагогических наук, профессор кафедры «Информатики и методики преподавания информатики» Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка *И. А. Новик*;
кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Мосты и тоннели» Белорусского национального технического университета *В. А. Гречухин;*
кандидат технических наук, доцент кафедры «Математические методы в строительстве» Белорусского национального технического университета *В. А. Акимов;*
кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Высшая математика» Белорусского национального технического университета *В. С. Якимович*

Забавская, А. В.
Сборник профессионально-ориентированных задач и упражнений по математике (с использованием электронно-образовательных ресурсов): для специальностей 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены» / А.В. Забавская. - Минск : БНТУ, 2019. – 58 с.

Сборник содержит более 90 профессионально ориентированных задач из разделов курса математики, *наиболее востребованных* для изучения специальных и общетехнических дисциплин при подготовке инженеров-строителей. Большинство задач снабжены теоретическими обоснованиями и примерами из специальных и общетехнических дисциплин, отражающих важную роль математики в их изучении.
Сборник адресован студентам и магистрантам специальностей 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» и «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены».

Регистрационный № БНТУ/ФТК77-66.2019

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В предложенном экспериментальном сборнике приведены задачи, тематика которых распределена по *наиболее востребованным* разделам курса математики, используемых при изучении специальных дисциплин при подготовке студентов специальностей «Автомобильные дороги» и «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены».

Цель данного пособия состоит в профессиональной направленности обучения математике будущих инженеров, отражающей прикладную функцию математики в содержании специальных и общетехнических предметов. Профессиональная направленность обучения нацелена на усиление мотивации студентов, ведущей к осознанности усвоения математических знаний, и их использования в изучении общетехнических и специальных дисциплинах строительного профиля.

Среди наиболее востребованных разделов математики выявлены:

— «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии»;
— «Введение в математический анализ»;
— «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»;
— «Неопределенный интеграл»;
— «Определенный интеграл и его приложения»;
— «Обыкновенные дифференциальные уравнения»;
— «Основы математической статистики».

Большинство задач и упражнений в сборнике предлагаются с решениями. На их основании у студентов может формироваться общее представление об идеях, приемах, подходах, методах решения задач, возникающих при изучении общетехнических и специальных дисциплин, а также в профессиональной деятельности инженера-строителя. Остальные задачи в пособии предназначены для развития у студентов вышеуказанных приемов, методов и подходов. Поэтому в этих задачах предлагаются только соответствующие указания или ответы. Ряд задач взяты из учебной литературы, рекомендованной для подготовки инженеров-строителей. Авторами данных учебных пособия являются: Ю. Г. Бабаскин («Дорожное грунтоведение и механика земляного полотна»), А. В. Бусел («Ремонт автомобильных дорог»), П. М. Саламахин («Инженерные сооружения в транспортном строительстве»), Я. Н. Ковалев («Производственные предприятия дорожной отрасли»), И. И. Леонович («Диагностика автомобильных дорог»), Н. М. Колоколов («Искусственные сооружения»), В. К. Некрасов («Строительство автомобильных дорог») и др.

В сборнике многие профессионально ориентированные задачи снабжены теоретическими обоснованиями и примерами из специальных и общетехнических дисциплин, отражающих важную роль математики в их изучении.

Последний параграф (§8) содержит задачи, решаемые средствами (в рамках) школьного курса математики. Данные задачи предназначены для адаптации, подготовки (некоторых) студентов к дальнейшему восприятию и решению профессионально ориентированных математических задач вузовского курса.

Сборник задач и упражнений рекомендован студентам специальностей 1-70 03 01 «Автомобильные дороги», 1-70 03 02 «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены» и магистрантам специальности 1-70 80 01 «Строительство зданий и сооружений» и рекомендован к использованию с применением электронно-образовательных ресурсов (ЭОР). При выполнении заданий предлагается применять следующие ЭОР: MS Excel, Mathematica, Mathcad и др. Педагогу в ходе работы с представленными профессионально ориентированными задачами и упражнениями предполагается использование в учебном процессе методов обучения, классифицированных по характеру деятельности студента в учебном процессе. Среди них выделим следующие группы методов: *объяснительно-иллюстративные, репродуктивные, проблемное изложение изучаемого материала, частично-поисковые и исследовательские* [24]. Например, в §1 объяснительно-иллюстративный метод используется при рассмотрении Упражнения 1.1, Задачи 1.12., репродуктивный метод – при решении Задач 1.8 и 1.9. (§1), проблемное изложение используется в Задачах 6.4 (§6) и 7.3 (§3), частично-поисковый метод применяется в решении Задач 3.25 (§3) и 5.1 (§5), исследовательский метод – в Задаче 3.36 (§3) и т. д.

Предложенные задачи подобраны с целью решения их на лекционных, практических, лабораторных работах, а также при выполнении индивидуальных и самостоятельных заданий.

Выражаю благодарность рецензентам работы: доктору педагогических наук, профессору БГПУ им. М. Танка, И. А. Новик, специалистам в области общетехнических и специальных дисциплин («Строительство мостов», «Теоретическая механика») доцентам В. А. Гречухину и В. А. Акимову (БНТУ), а также старшему преподавателю И. А. Голубевой (кафедра «Математические методы в строительстве», БНТУ) за ценные замечания и предложения по содержанию материалов задач и упражнений, внесенные при подготовке рукописи к печати.

1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Во многих профессиональных и экономических дисциплинах необходимы знания о матрицах, операциях над ними, умения решать прикладные задачи с помощью матриц.

Применение матриц отражается в изучении таких дисциплин автодорожного профиля, как «Строительство автомобильных дорог», «Проектирование автомобильных дорог», «Строительные конструкции транспортных сооружений» «САПР», а также в изучении экономических дисциплин «Организация производства и управление предприятием», «Производственные предприятия дорожной отрасли», «Организация, планирование и управление в дорожном хозяйстве», «Анализ производственно-хозяйственной деятельности дорожных организаций» и др.

Например, рассмотрим таблицу расстояний наименьшей расчетной видимости водителем в момент движения (дисциплина «Строительство автомобильных дорог»):

Наименование показателей	Величина видимости в зависимость от категории дороги				
	I	II	III	IV	V
Видимость встречного автомобиля, м	300	250	200	150	100
Видимость поверхности дороги, м	150	125	100	75	50

Данную таблицу можно записать в компактной форме в виде матрицы видимости расстояний в зависимости от категории дороги.

$$A = \begin{matrix} 300 & 250 & 200 & 150 & 100 \\ 150 & 125 & 100 & 75 & 50 \end{matrix}$$

Здесь, например, матричный элемент a_{11} = 300 показывает, сколько метров составляет видимость встречного автомобиля на 1 категории дороги, а элемент a_{22}= 125 - сколько метров составляет видимость поверхности дороги на 2 категории автомобильных дорог [1].

Упражнение 1.1. Представьте ниже предложенную таблицу «Среднечасовой интенсивности движения» в матричном виде [9]:

Интенсивность движения транспортных средств в обоих направлениях, авт./сут.	1000	2000	4500	6000
Доля часовой интенсивности в объеме суточной, %	12	10	6	5,5
Среднечасовая интенсивность транспортных средств в обоих направлениях, авт./сут.	120	200	320	330

Теорию матриц можно применять для определения затрат сырья и общей стоимости сырья.

Задача 1.1.

Предприятие выпускает автодорожный материал трех видов: P_1, P_2, P_3 и использует сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, где каждый элемент a_{ij} ($i=1,2,3$; $j=1,2$) показывает, сколько единиц продукции j- типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой C=(100 80 130), стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$. Определить затраты сырья, необходимые для планового выпуска продукции, и общую стоимость сырья.

<u>Решение.</u>

1 способ. Затраты 1 –го сырья составляют $S_1=2\cdot100+5\cdot80+1\cdot130=730$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение:

$$S = C \cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix}.$$

Тогда общая стоимость сырья $Q=730\cdot30+980\cdot50=70900$ ден. ед. может быть записана в матричном виде $Q=S\cdot B=(CA)B=(70900)$.

Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычислим матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т.е. матрицу: $R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а затем общую стоимость сырья $Q = C \cdot R = C \cdot (AB) = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70900)$.

2 способ. Решить задачу с помощью MS Excel.

<u>Указание.</u> Напомним, что *произведением матрицы A_{mxn} на матрицу B_{nxp}* называется матрица C_{mxp}, у которой элемент $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,p})$, т.е. элемент в j-м столбце равен сумме произведений элементов i- й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Вместе с тем, **основным применением матриц** в инженерной деятельности дорожника является решение линейных уравнений и их систем.

Так, для изучения дисциплин «Организация, планирование и управление в дорожном хозяйстве», «Производственные предприятия дорожной отрасли» будет полезным рассмотрение задач 1.2-1.5.

Задача 1.2.

Производственное предприятие асфальтовых смесей выпускает три вида продукции p_1, p_2, p_3, на производство которых затрачивается четыре вида сырья s_1, s_2, s_3, s_4. Нормы расхода сырья и его запасы заданы в таблице:

Продукция / Сырье	p_1	p_2	p_3	Запасы сырья
s_1	1	1	2	190
s_2	2	0	2	180
s_3	2	1	0	160
s_4	1	2	2	250

Определить план выпуска продукции, при котором расходуется полностью все сырье.

<u>Решение.</u>

Пусть три вида продукции выпускается в количестве x_1, x_2, x_3. Тогда по условиям задачи получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 190 \\ 2x_1 + 2x_3 = 180 \\ 2x_1 + x_2 = 160 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 250 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее к ступенчатому виду:

$$A = (A|B) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 2 & 0 & 2 & 180 \\ 2 & 1 & 0 & 160 \\ 1 & 2 & 2 & 250 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 0 & -2 & -2 & -200 \\ 0 & -1 & -4 & -220 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & -2 & -80 \\ 0 & 0 & -4 & -160 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 190 \\ 0 & 1 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы: $r(A) = r(A|B) = 3$, количество неизвестных $n=3$, значит, система совместна и имеет единственное решение. Запишем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 190 \\ x_2 = 60 \\ x_3 = 40 \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 50, x_2 = 60, x_3 = 40$.

Задача 1.3.

Система канонических уравнений для двухуровнего моста, нагруженного горизонтальной узловой нагрузкой, имеет вид:

$$x_1 - 0{,}1x_2 = 0{,}03$$
$$x_1 - 8x_2 + x_3 = -0{,}8$$
$$x_2 - 8x_3 + x_4 = -1{,}3$$
$$x_3 - 8x_4 + x_5 = -1{,}8$$
$$-0{,}1x_4 + x_5 = 0{,}3$$

где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – искомые угловые перемещения жестких узлов моста. Необходимо вычислить значение угловых перемещений для определения статической неопределимости моста. Решить задачу с помощью программы Mathematica.

Указание. На примере данной задачи демонстрируется применение метода Гаусса к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Большое число профессионально ориентированных математических задач можно отнести к разделу «Аналитическая геометрия», в частности темы «Геометрические векторы», которые ярко демонстрируют использование векторов в решении профессиональных задач инженера при строительстве инженерных сооружений и дорог. Рассмотрим некоторые задачи.

Задача 1.4.

Даны три силы: F_1 (5,3,-2), F_2(2,-4,6), и F_3(1,7,3), приложенные в одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M_1(4,4,6) в положение M_2(7,5,2).

Решение.

Найдем равнодействующую сил:

$F=F_1+F_2+F_3=8i+6j+7k$.

Вектор перемещения $s = M_1M_2$ (3, 1, -4).

Искомую работу вычислим по формуле: $A=(F,s)=8\cdot 3 + 6\cdot 1 + 7\ (-4)\ = 2$ [4, с.70-71].

Задача 1.5.

Площадка для укладки асфальта имеет форму треугольника с вершинами A(-2, -1), B(3,5) и C(-1, 4) (размеры даны в единицах длины). Определить площадь S этой площадки.

Решение. По формуле площади треугольника $S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ имеем:

$$\mathbf{S} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3+2 & -1+2 \\ 5+1 & 4+1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\ (25-6)\ = 9{,}5 \text{ (ед. дл.}^2\text{)}.$$

Важной темой при математической подготовке инженера-строителя из раздела «Аналитическая геометрия» является тема «Кривые второго порядка». Основными кривыми второго порядка, изучаемые в курсе математики при подготовке инженеров при строительстве дорог и мостов являются: *окружность, эллипс, гипербола и парабола,* знание которых широко используется в специальных и общетехнических дисциплинах.

Так, при изучении дисциплины «Строительство автомобильных дорог» в теме «Проезжая часть» используется понятие параболы. Проезжую часть устраивают с выпуклым поперечным профилем для облегчения отвода с нее дождевой и снеговой воды. Очертания поперечного профиля проезжей части в основном делают по дуге параболы (рис.1.1). В связи с этим отметки поверхности проезжей части определяют из уравнения параболы:

$$y = \frac{x^2}{2p}, x = \frac{b}{2} \text{ и } y = f; p = \frac{x^2}{2y} = \frac{b^2}{8f} \text{ и } y = \frac{4f}{b^2}x^2.$$

Здесь f- стрела выпуклости - определяет возвышение осевой точки над кромкой. Отношение стрелы выпуклости f к половине ширины проезжей части $\frac{b}{2}$ характеризует ее наклон[1, с.38-39].

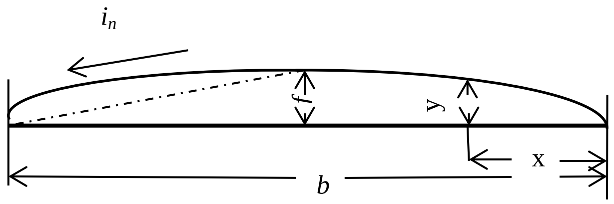


Рис. 1.1.

Рассмотрим математические профессионально ориентированные задачи на тему «Кривые второго порядка».

Задача 1.6.

Даны точки А(-1, 0) и В (2, 0). Точка М движется так, что в треугольнике АМВ угол В остается вдвое больше угла А. Найти уравнение кривой, которую опишет точка М. Построить найденную кривую с помощью программы Mathcad.

<u>Решение.</u>

Взяв точку М с координатами х и у, выразим tgB и tgA через координаты точек А, В и М:

$$tgB = -\frac{y}{x-2} = \frac{y}{2-x}, tgA = \frac{y}{x+1}$$

Согласно условию, получаем уравнение $tgB = tg2A$, т.е. $tgB = \frac{2tgA}{1-tg^2A}$

Подставив в это равенство найденные для tgB и tgA выражения, приходим к уравнению

$\frac{y}{2-y} = \frac{2y/(x+1)}{1-y^2/(1+x)^2}$; после сокращения на у (у≠0) и упрощения получаем $x^2 - \frac{y^2}{3}$=1. Искомая кривая – гипербола [5, с.30].

Задача 1.7.

Тело движется по параболе, вершина которой лежит в точке *A(-4; 2)*, а фокус – в точке *F (-4; 5)*. Найти уравнение и построить эскиз траектории движения тела.

Решение.

Так как абсциссы вершины и фокуса параболы одинаковы, то осью параболы является прямая x + 4 = 0. Ордината фокуса больше ординаты вершины параболы, следовательно, парабола обращается ветвями вверх. Уравнение семейства парабол с вершиной в точке (-4; 2) $(x+4)^2 = 2p(y-2)$. Из условия задачи известно, что расстояние от фокуса до вершины параболы $AF = 3$, следовательно, $\frac{p}{2} = 3; p = 6.$

Искомое уравнение параболы $(x+4)^2 = 2\cdot 6(y-2)$ или $x^2 + 8x - 12y + 40 = 0$. Для построения эскиза параболы найдем точку пересечения ее с осью Oy: $12y = 40$; $y = 3\frac{1}{3}$. Точка пересечения (0; $3\frac{1}{3}$). Так как парабола симметрична прямой x + 4 = 0, то находим еще одну точку, принадлежащую параболе (-8; $3\frac{1}{3}$).

Эскиз параболы дан на рис.1.2.

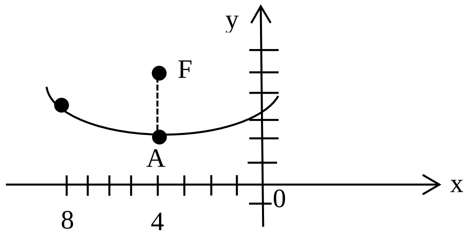


Рис. 1.2.

Рассмотрим задачу, представленную с помощью *параметрически заданной функцией.*

Пусть даны два уравнения $x=\phi(t)$ и $y=\psi(t)$ В которых t принимает значения с отрезка [n_1; n_2]. Каждому значению t соответствуют значения x и y -- координаты точки на плоскости Oxy. Когда t изменяет свое значение на промежутке от n_1 до n_2, точка описывает некоторую кривую. Уравнения $x=\phi(t)$ и $y=\psi(t)$ получили название параметрических для кривой, а t - параметра.

Задача 1.8.

Определить траекторию и место падения груза, сброшенного с самолета, движущегося горизонтально со скорость v_0 на высоте y_0.

Решение.

Допустим, что груз сбрасывается с момент пересечения самолетом оси Oy. Тогда очевидно, что горизонтальное перемещение груза равномерно и имеет постоянную скорость: $x=v_0t$.

А вертикальное перемещение: $s=\frac{gt^2}{2}$.

Следовательно, расстояние от груза до земли в произвольный момент падения: $y = y_0 - \frac{gt^2}{2}$. Уравнения горизонтального и вертикального перемещения тела являются параметрическими. Для того, чтобы исключить временной параметр t, найдем его значение из первого уравнения. $t = \frac{x}{v_0}$. Полученное выражение подставим во второе параметрическое уравнение чтобы найти уравнение траектории: $y = y_0 - \frac{gt^2}{2v_0^2} x^2$. Откуда: $x = v_0 \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$. [20].

Также раздел *«Аналитическая геометрия»* курса математики при подготовке инженеров-строителей незаменим при определении светотехнических характеристик.

В частности, дисциплина «Инженерная геодезия» с первых занятий нуждается в математических знаниях по теме «Полярная система координат» (рис. 1.3) [19, с. 250-252]:

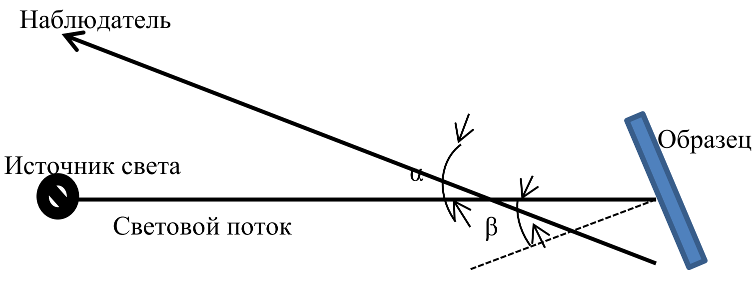
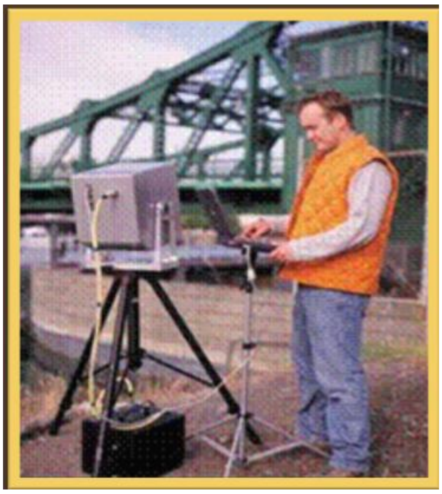


Рис. 1.3.

Рис. 1.3. показывает геометрию освещения образца дорожного знака: α – угол наблюдения, β – угол освещения.

На рис. 1.4.(а). показано применение инженером лазерного сканирования при строительстве автомобильных дорог. Получение координат точек объекта лазерным сканером основано на измерении полярных углов и расстояний до объекта (рис.1.5. (б)).



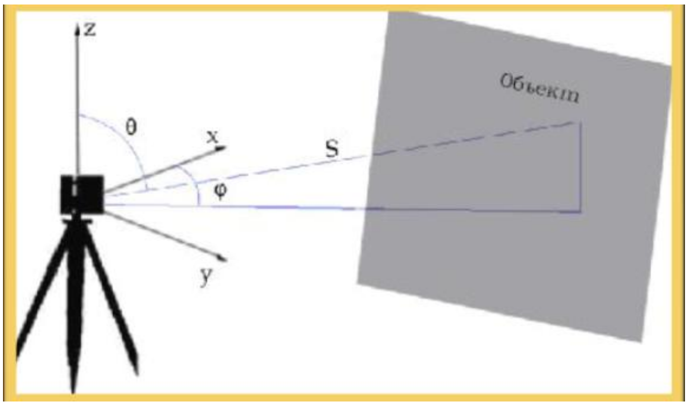


Рис.1.4.(а) Рис. 1.5. (б)

Напомним некоторые теоретические сведения относительно систем координат.

Система координат – это система величин, определяющих положение точки в пространстве или на плоскости.

Наибольшее распространение в геодезии получили: *Географическая* Система координат, *Полярная* система координат, *Плоская прямоугольная* Система координат, *Зональная* система координат.

Географическая система координат

Географическими координатами называются угловые величины *Широта и долгота*, которые определяют положение точки на земном шаре.

Широта точки – это угол, составленный отвесной линией, проходящей через эту точку, и плоскостью экватора. Счет широт ведется от плоскости экватора к северу и югу до 90º. Северная широта положительная, южная – отрицательная.

Долгота точки – это двугранный угол, между плоскостями начального меридиана и меридиана, проходящего через данную точку земной поверхности. Счет долгот ведется от начального (Гринвического) меридиана к востоку и западу на 180º. Восточная долгота положительная, - западня – отрицательная.

Географические координаты определяются по результатам астрономических наблюдений, а выражаются в градусах, минутах и секундах.

Полярная система координат

В противоположность географической системе координат, охватывающих всю Землю, полярная система координат применяется при составлении карт и планов небольших участков.

Положение точки в полярной системе координат определяется относительно некоторой точки, именуемой полюсом О, и полярной оси Ox (рис.1.6.). Точка N соединяется с полюсом О радиусом – вектором ρ, угол между которым и полярной осью Ox называется углом положения θ

.

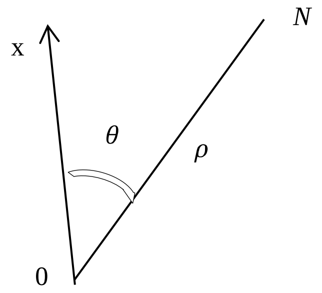


Рис.1.6.

Радиус – вектор ρ и угол положения θ являются полярными координатами точки N. Этих двух величин вполне достаточно для определения положения данной точки. Радиусы – векторы измеряются в метрах, а углы положения, отсчитываются по ходу часовой стрелки, в градусах от 0 º до 360 º.

Плоская прямоугольная система координат

В отличии от географической системы, координаты которой измеряются в градусах, и полярной системы, угол приведения которой тоже измеряется в градусах, плоская прямоугольная система координат характеризуется линейными величинами – абсциссой и ординатой, определяющими положение точки на плоскости [14].

Известно, что переход от полярной системы координат к декартовой возможно с помощью формул:

$$\boxed{x_1 = \rho\cos\varphi,\ y_1 = \rho\sin\varphi.}$$

А также возможен обратный переход от декартовой системы координат к полярной.

Вообще говоря, раздел *«Аналитическая геометрия»* применяется для изучения многих дисциплин дорожного профиля. Так, на основании математической темы «Линейное векторное пространство» рассматриваются задачи определения напряжений, действующих на грани элементарного кубика грунта, которые изучаются инженерами-дорожниками в курсе «Дорожного грунтования и механики дорожного полотна». На рис. 1.1. показана структура элементарного кубика грунта [10]

.

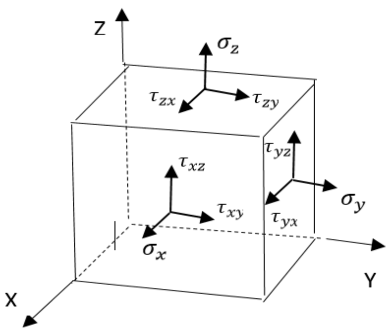


Рис.1.1.

Из множества методов вычислительной математики, которые применяются в профессиональной деятельности инженера-стрителя автомобильных дорог, ставших доступными в условиях системной автоматизации проектных работ (САПР), остановимся на сплайнах и кривых Безье, используемых при автоматизированном трассировании дорог в плане и продольном профиле.

Так, с математической точки зрения, сплайн 1-й степени – это кусочно-непрерывная функция, на каждом отрезке описываемая уравнением вида:

$$y=a_i+b_ix \quad (1)$$

где i-номер рассматриваемого интервала между узлами интерполяции x_i и x_{i+1}. Как видно из формулы (1), на элементарном интервале вид уравнения не отличается от общепринятого выражения прямой. В целом, уравнение ломаной (сплайна 1-й степени) в матричной форме можно записать как:

$$S_1\ x = \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ a_n \end{matrix} + \mathrm{diag} \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_n \end{matrix} \times \begin{matrix} x_{0-1} \\ x_{1-2} \\ \cdots \\ \cdots \\ x_{n-1\ -n} \end{matrix} \qquad (2)$$

Благодаря изучению дисциплины «Диагностика автомобильных дорог», становится известно, что все инженерные задачи, решаемые при строительстве автомобильных дорог и коммуникационных сооружений, могут быть отнесены к плоской и пространственной задачам. В плоской задаче принимается допущение, что напряжения распределяются в одной плоскости. Тогда нагрузка, равномерно распределенная по ширине полосы, может быть определена из системы уравнений:

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi} \cdot (\alpha + \sin\alpha \cdot \cos 2\delta)$$

$$\sigma_x = \cdot\, (\alpha - \sin\alpha \cdot \cos 2\delta) \quad ,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{P_0}{\pi} \cdot \sin\alpha \cdot \sin 2\delta$$

где σ_z – вертикальное нормальное напряжение, σ_x – горизонтальное нормальное напряжение, действующее в направлении оси X, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ – касательные напряжения, действующие по граням параллельно оси Y, α – угол видимости, составлен двумя лучами, соединяющими рассматриваемую площадку с равномерно распределенной нагрузкой, δ - угол, составленных биссектрисой угла α с вертикалью.

При изучении темы «Ровность дорожных покрытий» в этой же дисциплине, указано, что в практике эксплуатации автомобильных дорог неровности неровности подразделяются на случайные и периодические. Неровности периодического характера можно апроксиморовать в виде следующих функций:

а) синусоиды: $y = h_0 \cdot sin2\pi x/S$;

б) параболы: $x - \frac{S}{2} \ \ = 2P \ \ y + h_0$,

в) треугольной кусочно-непрерывной функции:

$$x - k \ \ S + \Delta S \ \ = -\frac{\Delta S y}{h_0} + y, k = 0, 1, 2 \ldots,$$

$y = 0, k \ \ S + \Delta S \ \ \leq x < S + k \ \ S + \Delta S \ \ , k = 0, 1, 2 \ldots$

г) прямоугольной кусочно-прерывной функций:

$$y = 0, k \ \ S + \Delta S \ \ \leq x < S + k \ \ S + \Delta S \ \ , k = 0, 1, 2 \ldots$$

$y = h_0, S + k \ \ S + \Delta S \ \ \leq x < \ \ k - 1 \ \ \ S + \Delta S \ \ , k = 0, 1, 2 \ldots$

$$-h_0 \leq y \leq 0, x = \ \ k - 1 \ \ \ S + \Delta S \ \ , k = 0, 1, 2 \ldots$$

которые описываются с помощью математических понятий, изучаемых в темах «Непрерывность функции в точке», «Дифференциал функции», «Кривые второго порядка» [19, с.16-18]. Большинство же неровностей дорожных покрытий носит случайный характер. Их анализ является достаточно сложной задачей и может быть произведен на основе теории математической статистики.

Упражнение 1.2.

С помощью программ MS Excel или Mathcad построить следующие функций при шаге Δh = *0,3*:

а) синусоиду: $y = h_0 \cdot sin2\pi x/S$;

б) параболу: $x - \frac{S}{2} \ \ = 2P \ \ y + h_0$.

Вопросы к разделу:

1. В задачах <u>с решением</u> ответить на вопрос: какие формулы по математике используются для ее решения?
2. В задачах <u>без решения</u> подумать, какой материал из специальных (общетехнических) дисциплин и математики необходим для их решения?
3. Подготовить задачу(чи), выбранную из специальных дисциплин, отражающую применение математики в этой дисциплине.

2. Введение в математический анализ

Тема «*Приращение функции*» широко используется при изучении предмета «Содержание и ремонт автодорог» в теме «Ремонт трещин и швов, ширина раскрытия трещины» для:

- рассчета длины компенсационного участка: $\Delta \mathrm{l} = \frac{\mathrm{E_н l \alpha \Delta T}}{\sigma_{\mathrm{рн}}}\ 1 - \frac{\sigma_{\mathrm{рн}} \mathrm{d_н}}{\mathrm{E_c d_c \alpha \Delta T}}$, l — длина компенсационного участка, *Ен, Ес* — модули упругости старого и нового слоёв, $d_н$, d_c – толщины нового и старого слоев, d – коэффициент температурной деформации старого покрытия, ΔТ – изменение температуры в покрытии, $\sigma_{\mathrm{рн}}$ – допустимое напряжение растяжения нового слоя [18, с.81].
- вычисления температурной деформации блоков при низких температурах используется приращение функции ΔT, в результате чего получена следующая зависимость [23, с.80-81]: $\Delta \mathrm{l} = \alpha \mathrm{L} \Delta \mathrm{T}$, где $\Delta \mathrm{l}$ – температурная деформация блока покрытия; α – коэффициент температурного деформирования покрытия; L – шаг трещин либо длина блока покрытия; ΔT – изменение температуры в покрытии.

Вычисление погрешностей при измерении величин также является неотъемлемой составляющей в профессиональной деятельности инженера-строителя автомобильных дорог. Особенно это актуально при изучении специальной дисциплины «Инженерная геодезия».

Абсолютная и относительная погрешность

Пусть a – приближенное число, заменяющее собой в вычислениях точное число A.
Абсолютной погрешностью приближенного числа a называется абсолютная величина разности между ним и соответствующим точным числом: $A - a$.
Предельной абсолютной погрешностью называется возможно меньшее число Δ, удовлетворяющее неравенству: $A - a \ \le \Delta$.
Точное число A находится в границах $a - \Delta \le A \le a + \Delta$, или $A = a \pm \Delta$.
Относительной погрешностью приближенного числа a называется отношение абсолютной погрешности этого числа к соответствующему точному числу: $A - a\ /A$.
Предельной относительной погрешностью называется возможно меньшее число δ, удовлетворяющее неравенству: $A - a\ /A \le \delta$.
Так как практически $A \approx a$, то за предельную относительную погрешность принимают число $\delta_0 = \frac{\Delta}{a}$ (выражаемое обычно в процентах).
Справедливо неравенство $a(1 - \delta) \le A \le a(1 + \delta)$.
Говорят, что положительное приближенное число a, записанное в виде десятичного разложения, имеет n верных знаков (цифр), если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы n-го разряда.
При $n>1$ за предельную относительную погрешность приближенного числа a с первой значащей цифрой k можно принять число $\delta = \frac{1}{2k}(\frac{1}{10})^{n-1}$.

Если известно, что

$$\delta \le \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}, (1)$$

то число *a* имеет *n* верных знаков.

Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких числе равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

Относительная погрешность суммы положительных слагаемых не превышает наибольшей из относительных погрешностей этих слагаемых.

Предельная относительная погрешность произведения и частного приближенных числе равна сумме предельных относительных погрешностей этих чисел.

Предельная относительная погрешность степени приближенного числа равна произведению предельной относительной погрешности этого числа на показатель степени [5].

Задача 2.1.

Угол, измеренный теодолитом, оказался равным 22°20′30″±30″. Какова относительная погрешность измерения?

Решение.

Абсолютная погрешность Δ=30″. Тогда относительная погрешность $\delta = \frac{\Delta}{a} = \frac{30''}{22^{\circ}20'30''} \cdot 100\% = 0{,}04\%$. [5, с.136]

Задача 2.2.

Какова предельная относительная погрешность δ числа x = 3,14, заменяющего число π?

Решение.

Так как 3,14$< \pi < 3{,}142$, то абсолютная погрешность Δ_0<0,002. Отсюда

$$\delta_0 = \frac{\Delta_0}{\pi} < \frac{0{,}002}{3{,}14} < 6{,}4 \cdot 10^{-4}$$

Следовательно, можно принять $\delta = 0{,}064\%$.

Задача 2.3.

Определить число верных знаков и дать соответствующую запись приближенной величины ускорения силы тяжести g = 9,806… при относительной погрешности 0,5%.

Решение.

1 способ. Так как первая значащая цифра есть 9, то, воспользовавшись неравенством (1), получим $0{,}005 \le \frac{1}{2\cdot 10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, т.е. n = *2*. Значит, g = 9,8.

2 способ. Решить задачу в программе Mathematica.

Задача 2.4.

Число g = 9,8066 является приближенным значением ускорения силы тяжести (для широты 45°) с пятью верными знаками. Найти его относительную погрешность.

Указание. Темы, необходимые к решению задачи: «Приращение функции», в частности «Абсолютная и относительная погрешность».

Задача 2.5.

Вычислить площадь прямоугольной парковки, стороны которой 92, 73±0,01 (м) и 94, 5′±0,01 (м). Определить относительную погрешность результата и число верных знаков [5, с.136].

Указание. Темы, необходимые к решению задачи: «Приращение функции», в частности «Абсолютная и относительная погрешность».

Вопросы к разделу:

1. В задачах с решением ответить на вопрос: какие формулы по математике используются для ее решения?
2. В задачах без решения подумать, какой материал из специальных (общетехнических) дисциплин и математики необходим для их решения?
3. Подготовить задачу(чи), выбранную из специальных дисциплин, отражающую применение математики в этой дисциплине.

3. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Изучение принципов и условий движения транспортного средства – одна из основных задач инженера-строителя мостов, метрополитенов и автомобильных дорог. К понятию производной приводит задача о вычислении скорости неравномерного движения.

Предположим, что точка M движется по некоторой прямой, которую примем за ось Ox (рис.1). Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = x$. Следовательно, можно сказать, что абсцисса x движущейся точки есть функция времени t:

$$x = f(t).$$

Это уравнение называется *уравнением движения*; оно выражает **закон движения точки**.

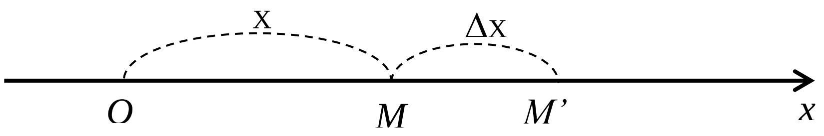


Рис. 3.1

Задача. *Зная закон движения, найти скорость движущейся точки для любого момента времени.*

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка занимает положение M, причем $OM = x$. В момент $t + \Delta t$ точка займет положение M', где $OM' = x + \Delta x = f(t + \Delta t)$. Следовательно, перемещение точки М за время Δt будет:

$$\boxed{\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t).}$$

Задача 3.1.

Зависимость пути от времени при прямолинейном движении самосвала задана уравнением $s = t^5 / 5 + (2/\pi)\sin(\pi t/8)$, (t – в секундах, s – в метрах). Определить скорость его движения в конце второй секунды.

Решение.

Находим производную пути по времени:

$$\frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi t}{8},$$

При $t = 2$, имеем $\frac{ds}{dt} = 16 + \frac{1}{8}\sqrt{2} \approx 16{,}18$. Следовательно, $\vartheta \approx 16{,}18$ м/с. [5, с.161-162]

Задача 3.2.

Зависимость пути от времени задана уравнением $s = t\cdot\ln(t+1)$ (t – в секундах, s – в метрах). Найти скорость движения в конце второй секунды. Решить задачу с помощью программы MS Excel, которая также вычисляет скорость движения в конце произвольно заданной секунды.

<u>Указание.</u> Темы, необходимые к решению задачи: «Производная функции одной переменной», «Прямая в пространстве и на плоскости».

Задача 3.3.
По кубической параболе $y = x^3$ движется точка так, что ее ордината изменяется в зависимости от времени t по закону $y = at^3$. Какова скорость изменения абсциссы в зависимости от времени [5] ?

<u>Указание.</u> Темы, необходимые к решению задачи: «Производная функции одной переменной», «Геометрические векторы», «Прямая в пространстве и на плоскости».

Задача 3.4.
Точка движется в плоскости OXY, занимая в момент времени t, отсчитанный от начального момента $t = 0$, положение $M\ (200-t,\ 100-t)$. В какой момент времени точка достигнет прямой $8x - 6y + 10 = 0$ и каковы ее координаты в этот момент?

<u>Указание.</u> Темы, необходимые к решению задачи: «Производная функции одной переменной», «Геометрические векторы», «Прямая в пространстве и на плоскости».

Задача 3.5.
По параболе $y = x(8 - x)$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = t\sqrt{t}$ (t - в секундах, x – в метрах). Какова скорость изменения ординаты в точке $M\ (1;\ 7)$.

<u>Решение.</u>
Найдем закон изменения ординаты, заменив в уравнении параболы x на $t\sqrt{t}$, получим $y = 8t\sqrt{t} - t^3$. Скорость изменения ординаты есть производная от ординаты по времени: $y'_t = 12\sqrt{t} - 3t^2$. Для точки $M\ (1;\ 7)$ значение t равно 1. Следовательно, $y'_{t=1} = 9$, т.е. скорость изменения ординаты равна 9 м/с.

Производная второго порядка

Для вычисления <u>ускорения движения</u>, надо воспользоваться производной второго порядка. Пусть закон движения точки M по оси Ox выражается уравнением $x = f(t)$. Пусть в момент времени t точка M имеет скорость ϑ, а в момент $t + \Delta t$ – скорость $\vartheta + \Delta\vartheta$.

Таким образом, за промежуток времени Δt скорость точки изменилась на величину $\Delta\vartheta$. Отношение $\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$ называется средним ускорением прямолинейного движения за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \vartheta'(t),$$

называется ускорением точки M в данный момент t. Обозначая ускорение буквой j, можем написать $j = \vartheta'(t)$. Но $\vartheta = f'(t)$. Поэтому

$$\boxed{\vartheta' \ t \ = [f'(t)]' = f'' \ t \ .}$$

Итак, имеем $j = f'' \ t$, т.е. ускорение прямолинейного движения точки равна второй производной от пути по времени.

Задача 3.6.
Автодорожный каток движется вдоль прямой дороги и укатывает асфальтобетон по закону $s = \frac{1}{3}t^3 - 8t + 4$. Найти скорость и ускорение автодорожного катка в момент времени $t = 3\ c$.

Решение.
Скорость автодорожного катка определяется первой производной по времени $v = \frac{ds}{dt} = t^2 - 8$. При $t = 3$ скорость равна $v\ \ t = 3\ \ = 3^2 - 8 = 1c^{-1}$.
Ускорение автодорожного катка определяется второй производной $w = \frac{d^2s}{dt^2} = 2t$. При $t = 3$ ускорение равно $w\ \ t = 3\ \ = 2 \cdot 3 = 6c^{-2}$.

Задача 3.7.
Закон движения точки $x = x_0 + \alpha t + \frac{\beta}{2}t^2$. Найти скорость и ускорение движения.

Указание. Использовать решение предыдущих задач.

Задача 3.8.
Зная уравнение движения точки $x = t - sint$, определить скорость и ускорение этой точки.

Указание. Использовать решение предыдущих задач.

Задача 3.9.
С какой скоростью возрастает площадь круга в тот момент, когда радиус его R = 10 м, если радиус круга растет со скоростью 2 м/с?

Указание. Использовать решение предыдущих задач.

Задача 3.10.
При прямолинейном движении автомобиля зависимость путь от времени задана уравнением $s = \ \overline{t}$. Найти ускорение автомобиля в конце 4-й секунды [5].

Указание. Использовать решение предыдущих задач.

Задача 3.11.
При каком шаге h длина дуги одного витка винтовой линии $x = cost$, $y = sint$, $z = ct$ равна 4π?

<u>Указания</u>. Воспользоваться тем, что при развертывании цилиндра на плоскость один виток винтовой линии превращается в отрезок прямой.

Задача 3.12.
Уравнение движения автогрейдера (машина для земляных работ на строительстве и ременте грунтовых дорог и обочин) имеет вид $r = 3icost + 3jsint + 4tk$, где t – время. Определить скорость и ускорение движения в произвольный момент времени.

<u>Указание.</u> Использовать темы ««Производная функции одной переменной», «Производная функция второго порядка».

Задача 3.13.
Уравнение движения автогудронатора (машина для транспортирования органических вяжущих материалов и их равномерного распределения при устройстве гравийных и щебеночных покрытий) имеет вид $r = ti + t^2j + t^3k$, где t – время. Определить скорость и ускорение движения в момент $t = 1$.

<u>Указание.</u> Использовать решение предыдущих задач.

Угловая скорость и ускорение

Как говорилось ранее, средняя скорость движения точки за промежуток времени Δt определяется отношением приращения пути ΔS ко времени. Чем меньше Δt, тем точнее выражается скорость через среднюю скорость. Скорость движения точки в момент времени t определяется пределом, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

При движении точки по окружности угловой скоростью вращения ω в момент времени t называют предел отношения $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, когда Δt стремится к нулю, т.е.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi.$$

Таким образом, *угловая скорость в данный момент* равна производной от угла поворота φ по времени.

Ускорение точки (ɷ), движущейся по прямой, есть первая производная от скорости по времени $ɷ = \frac{dv}{dt}$ или вторая производная от пути S по времени

$$\boxed{ɷ = \frac{d^2S}{dt^2}.}$$

Угловое ускорение точки есть первая производная от угловой скорости $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ или вторая производная от угла поворота по времени $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Задача 3.14.
Угол поворота шкива в зависимости от времени задан формулой $\varphi = t^2 + 2t + 4$. Найти угловую скорость и ускорение при t = 4 с.

Решение.
Угловая скорость определяется первой производной от угла поворота по времени $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2t + 2$, а угловое ускорение определяется второй: $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2$.
При t = 4 угловая скорость равна $\omega = 2 \cdot 4 + 2 = 10\frac{1}{\text{с}}$, а угловое ускорение постоянно, от времени не зависит, и равно $2\frac{1}{\text{с}^2}$.

Задача 3.15.
Точка, находящаяся на отрезке винта, завинчиваемого в балку моста, описывает винтовую линию

$$x = \mathrm{a}\cos\theta,$$
$$y = \mathrm{a}\sin\theta,$$
$$z = h\theta$$

θ – угол поворота винта; a – радиус винта, h – высота подъема при повороте на один радиан. Определить скорость движения точки.

Указание. $v = \omega\sqrt{a^2 + h^2}$, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ угловая скорость [21].

Задача 3.16.
Движение точки M определяется уравнениями

$$x = a\cos kt,$$
$$y = b\sin kt.$$

Определить направление скорости в момент времени $t = \frac{\pi}{4k}$.

Решение.
Скорость направлена по касательной к траектории. Тангенс угла наклона касательной в момент $t = t_0$ равен

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{bk\cos kt}{-ak\sin kt}\right|_{t=\frac{\pi}{4k}} = -\frac{b}{a}.$$

В момент $t = \frac{\pi}{4k}$ скорость направлена к положительному направлению оси Ox под углом $\varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$ [4].

Решение задач на максимум и минимум

При изучении предмета «Диагностика автомобильных дорог» при рассмотрении характеристик уровней удобства движения, можно вычислить коэффициент насыщения движения, используя формулу

$$\boxed{r = q_z/q_{max},}$$

где q_z - средняя плотность движения, авт./км; q_{max} – максимальная плотность движения авт./км [19].

При решении задач на максимум и минимум из условия следует составить функцию, приняв одну из переменных за основную и выразив все остальные переменные через нее. Далее следует исследовать эту функцию на экстремум по искомой переменной, т.е. найти наибольшее или наименьшее значение полученной функции. Интервал изменения независимой переменной определяется из условий задачи.

Задача 3.17.

Бетоноукладчик движется по закону $S = 21t + 3t^2 - t^3$. Найти его максимальную скорость.

Решение. Обозначим скорость $\upsilon = \frac{dS}{dt}$ за функцию, которую необходимо исследовать: $\upsilon = 21 + 6t - 3t^2$.

Исследуем функцию: $\upsilon' = 6 - 6t$, при $t = 1$ производная $\upsilon' = 0$. Так как $\upsilon'' = -6$ для любого t, то при $t = 1$ функция υ имеет максимум, т.е. $\upsilon_{max} = 24$ ед. скорости.

Задача 3.18.

Проектному дорожно-строительному бюро необходимо рассчитать размеры прямоугольной парковки для велосипедов наибольшей площади, которую следует разместить в треугольник поверхности земли.

Решение.

Обозначим высоту *KL* искомого прямоугольника через *x*, основание *DE* через *y*. Тогда площадь его *U=xy*. (рис. 3.2.). Переменные x и y не являются независимыми, они связаны некоторым соотношением. Действительно, из подобия треугольников *DBE* и *ABC*, учитывая, что высоты из *BK* и *BL* пропорциональны основаниям *DE* и *AC*, имеем: $\frac{BK}{BL} = \frac{DE}{AC}$ или так как BK=h-x, *DE=y, BL=h, AC=b*, следовательно, $\frac{h-x}{h} = \frac{y}{b}$. Отсюда $y = \frac{b}{h}\ h - x$. Исключая y их выражения для *U*, находим *U*=$\frac{b}{h}\ h - x\ x = \frac{b}{h}\ hx - x^2$.(*) Ищем

максимум этой функции. Дифференцируя, получим $U' = \frac{b}{h}\ h - 2x$. Приравнивая производную к нулю, получим h-$2x$=0 или x=$h/2$.
Легко видеть, что это значение x действительно даст максимум функции U. В самом деле, при нахождении второй производной, получим U''=$-\frac{2b}{h} < 0$. Следовательно, при x=$h/2$ площадь U имеет максимум, причем из формулы (*) получаем $U_{max} = \frac{bh}{4}$.

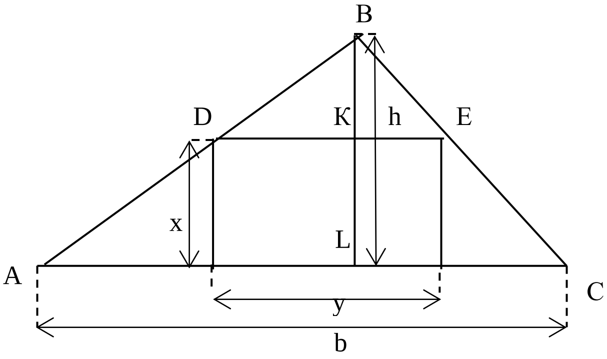


Рис. 3.2.

Таким образом, площадь наибольшего прямоугольника под парковку велосипедов, равна половине площади этого треугольника.
Указания. Для решения данной задачи необходимы знания методов нахождения производной функции первого и второго порядка, условия нахождения и определения экстремума функции одной переменной. Также потребуются знания в составлении отношений сторон у подобных треугольников, решение уравнения с одной неизвестной (но с параметром), формулы площади треугольника и параллелограмма.

Задача 3.19.
Дальность R=OA полета песко-солевой смеси (до -15℃) (в пустоте), выпущенной с начальной скоростью v_0 из распределяющей воронки дорожной машины, наклоненной под углом φ к горизонту, определяется формулой $R = \frac{v_0^2 sin2\varphi}{g}$,(g- ускорение силы тяжести). Определить угол φ, при котором дальность R будет наибольшей при данной начальной скорости v_0.

Решение.
Величина R представляет собой функцию переменного угла φ. Исследуем эту функцию на максимум на отрезке $0 \le \varphi \le \pi/2$:
$\frac{d^2R}{d\varphi^2} = \frac{4v_0^2 cos2\varphi}{g}$, $\frac{4v_0^2 cos2\varphi}{g} = 0$, критическое значение $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $\frac{d^2R}{d\varphi^2} = -\frac{4v_0^2 sin2\varphi}{g}$, $\frac{d^2R}{d\varphi^2}_{\ \varphi=\frac{\pi}{4}} = -\frac{4v_0^2}{g} < 0$. Следовательно, при значении $\varphi = \frac{\pi}{4}$ дальность полета R имеет максимум $R_{\ \varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{v_0^2}{g}$. Значения функции на концах отрезка $[0, \pi/2]$ следующие: $R_{\ \varphi=0} = 0, R_{\ \varphi=\pi/2} = 0$.
Таким образом, найденный максимум будет наибольшее значение R.[3]

Задача 3.20.

Уравнение движения гранулы торкрет-бетонной смеси, вылетающей из ствола торкрет-бетонной установки, с начальной скоростью υ_0 имеет вид

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha\ t,$$

$$y = \upsilon_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2},$$

где $t -$ время, $g -$ ускорение свободного падения, $\alpha -$ угол между горизонтом и направлением вылета.

Определить, под каким углом следует произвести выпуск гранулы, чтобы получить наибольшую дальность полёта, если торкрет-бетонная установка стоит у подножья возвышенности, поверхность которой наклонена под углом β к горизонту (рис. 3.3).

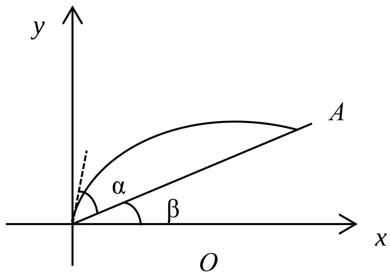


Рис. 3.3.

Решение.

Поскольку требуется найти наибольшую дальность полёта в зависимости от α, то дальность полёта x примем за функцию, а α за независимую переменную. Для этого, исключая из уравнений движения t, запишем уравнение траектории $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2{\upsilon_0}^2\cos^2\alpha}$.

Из условия равенства ординат в точке *A* прямой *OA* (рис. 7.39) $y = x\mathrm{tg}\beta$ и уравнения траектории находим, что $x\mathrm{tg}\beta = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2{\upsilon_0}^2\cos^2\alpha}$ или $x = \frac{{\upsilon_0}^2}{g}(\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha\mathrm{tg}\beta)$. Находим производную от дальности по α

$$\frac{dx}{d\alpha} = 2\frac{{\upsilon_0}^2}{g}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\beta)$$

и приравниваем её к нулю $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\beta = 0$, откуда $\mathrm{ctg}2\alpha = -\mathrm{tg}\beta$, $2\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ или $\alpha = \frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2} + \beta$. Находим вторую производную

$\frac{d^2x}{d\alpha^2} = 4\frac{{\upsilon_0}^2}{g}\ -\sin 2\alpha + \cos 2\,\alpha\mathrm{tg}\beta$. При $\alpha = \frac{1}{2}\ \frac{\pi}{2} + \beta$ вторая производна $\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{d}\alpha^2} < 0$, следовательно, найденный угол α обеспечивает наибольшую дальность полёта.

Задача 3.21

Завод *A* отстоит от железной дороги, проходящей через город *B,* считая по кратчайшему расстоянию, на *a* км. Под каким углом α к железной дороге надо провести шоссе с завода *A,* чтобы доставка грузов из *A* в *B* была наиболее дешёвой, если стоимость перевозок по шоссе в два раза дороже, чем по железной дороге?

<u>Решение.</u>
Обозначим стоимость перевоза груза на расстояние 1км по железной дороге за m руб., тогда стоимость перевоза по шоссе будет $2m$ руб. За b км обозначим расстояние от B до C (рис. 3.4). Из треугольника ACD длина шоссе $AD = \frac{a}{\sin\alpha}$ км. Длина железной дороги $DB = b - a\text{ctg}\alpha$, км.

Отсюда стоимость z перевозки груза с завода A в город B равна $z = \frac{2ma}{\sin\alpha} + m(b - a\text{ctg}\alpha)$.

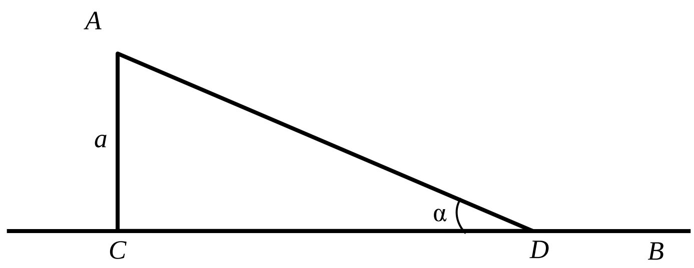


Рис. 3.4

Находим производную $\frac{dz}{d\alpha} = \frac{ma(1-2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$ и приравниваем её к нулю $1 - 2\cos\alpha = 0, \cos\alpha = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{\pi}{3}$. Исследуем функцию на экстремум при $\alpha = \frac{\pi}{3}$ по знаку второй производной:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \frac{2am(1 - cos\alpha + cos^2\alpha)}{sin^2\alpha}, z''\ \frac{\pi}{3}\ > 0.$$

Следовательно, функция имеет минимум и, чтобы доставка груза была наиболее дешевой, то шоссе следует проводить под углом $\alpha = \frac{\pi}{3}$. [4].

Задача 3.22.
Цементно-бетонный завод (ЦБЗ) находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от камнедробильного завода до ближайшего к ЦБЗ склада составляет 285 км. На каком расстоянии от склада надо построить станцию, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижение между ЦБЗ и камнедробильным заводами, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе равна 20 км/ч? [5, с.177]

<u>Указание.</u> Использовать решение предыдущей задачи.

Задача 3.23.
Турист идет из пункта A, находящегося на шоссейной дороге, в пункт B, расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от A до B по прямой составляет 17 км. В каком месте туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее

время прийти в пункт B, если скорость его по шоссе 5 км/ч, а по бездорожью 3 км/ч [5]?

<u>Указание.</u> Использовать решение задачи 3.21.

Задача 3.24.

Каким должен быть угол примыкания α (рис. 3.5) дороги CE к автомагистрали AB, чтобы затраты времени на перевозки по маршруту AEC были наименьшими, если скорость движения автомобилей по магистрали планируется равной v_m, а по подъездной дороге – v_a $(v_m > v_a)$.

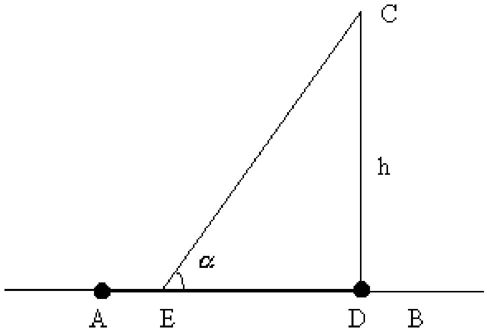


Рис. 3.5

<u>Решение.</u> Проведем из точки C перпендикуляр к прямой AB и обозначим длину отрезка CD через h, а длину отрезка AD через l. Тогда получим:

CE = $\frac{h}{sin\alpha}$, DE = $h \cdot ctg\alpha$

Отсюда находим время движения автомобиля по маршруту AEC:

$t = \frac{l}{v_m} - \frac{hctg\alpha}{v_m} + \frac{h}{v_a sin\alpha}$

Так как точка A в наших рассуждениях зафиксирована условно, определяя лишь направление движения по магистрали, то α может изменяться в промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$.

Задача свелась к отысканию наименьшего значения функции $t(\alpha)$ на указанном промежутке.

Найдем производную: $t'\ \alpha\ = \frac{h}{v_a sin^2\alpha}\ \frac{v_a}{v_m} - cos\alpha$.

Так как $0 < \frac{v_a}{v_m} < 1$, то производная на рассматриваемом промежутке обращается в нуль лишь в одной точке $\alpha_0 = \arccos\frac{v_a}{v_m}$, (1).

Причем $t'(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (0; \alpha_0)$ и $t'(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (\alpha_0; \frac{\pi}{2})$.

Это означает, что на промежутке $(0; \alpha_0]$ функция t убывает, а на промежутке $[\alpha_0; \frac{\pi}{2})$ – возрастает. Следовательно, рассматриваемая функция t при $\alpha = \alpha_0$ достигает наименьшего значения.

Ответ: угол примыкания определяется по формуле $\alpha_0 = \arccos\frac{v_a}{v_m}$

Задача 3.25.

Русла двух рек (в пределах некоторой области) приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Проектному бюро требуется соединить данные реки прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки его провести? Построить заданные кривые в программе Mathcad.

Указание. Канал должен соединять точку параболы $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ с точкой прямой $(\frac{11}{8}, -\frac{5}{8})$; его длина $\frac{7\sqrt{2}}{8}$ [21].

Задача 3.26.
Два уличных фонаря расположены друг от друга на расстоянии 25 м. На прямой, соединяющей эти фонари, найти наименее освещённую точку, если силы света источников относятся, как 27:8.

Решение.
Пусть фонари находятся в точках A и B, причём в точке A находится наиболее сильный источник. Считаем, что точка C наименее освещена и отстоит от точки A на расстоянии x (рис. 3.6), тогда $CB = 25 - x$. Если силу света более сильного источника принять за I, то сила света другого фонаря будет $\frac{8}{27}I$.

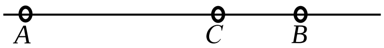


Рис. 3.6

Поскольку освещённость точки прямо пропорциональна силе света и обратно пропорционально квадрату расстояния от точки до источника света, то, учитывая, что выбранная точка освещается обоими фонарями, функция освещённости в зависимости от расстояния примет вид
$$E = \frac{I}{x^2} + \frac{8}{27}\frac{I}{(25-x)^2}.$$
Находим производную $E' = -2\frac{I}{x^2} + \frac{16}{27}\frac{I}{(25-x)^3}$ и приравниваем её к нулю, откуда $(25-x)^3 - \frac{8}{27}x^3 = 0$ или $25 - x = \frac{2}{3}x$. Таким образом, наименее освещённая точка отстоит от источника A на расстоянии x = 15м.

Докажем это. Возьмём вторую производную от освещённости $E'' = 6\frac{I}{x^4} + \frac{48}{27}\frac{I}{(25-x)^4}$. Не трудно заметить, что $E'' > 0$ при x = 15, следовательно, точка C есть точка минимума функции.

Задача 3.27.
Электрическая лампа висит над центром строительной площадки радиуса r . На какой высоте над площадкой должна находится лампа, чтобы строительное оборудование, находящееся на краю площадки, было лучше всего освещено?

Решение.
Обозначим высоту через x (рис. 3.7). Зная, что освещённость E прямо пропорциональна косинусу угла падения и обратно пропорциональна

квадрату расстояния до источника света, составим функцию: $E = k\frac{\cos\alpha}{R^2}$, где $k = const$. Из треугольника SAO находим: $R = \sqrt{x^2 + r^2}$, $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$.Тогда $E = k\frac{x}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$.

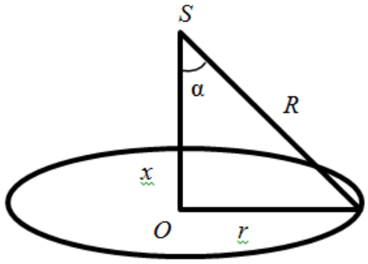


Рис.3.7.

Находим производную $E' = k\frac{r^2-2x^2}{(x^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}$ и приравниваем её к нулю $r^2 - 2x^2 = 0$, откуда $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Чтобы выяснить, имеет ли функция при данном значении x максимум, находим знак второй производной при $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$: $E'' = k\frac{3x(2x^2-3r^2)}{(x^2+r^2)^{\frac{7}{2}}}, E''\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ — следовательно, функция имеет максимум и при высоте лампочки $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ площадка лучше всего освещена.

Задача 3.28.

На какой высоте следует повесить прожектор для освещения места укладки бетонной смеси (строительная площадка представляет собой круг радиуса *a*), чтобы освещенность края площадки была наибольшей?

Указания. Яркость освещения выражается формулой $I = \frac{(k\sin\varphi)}{r^2}$, где φ – угол наклона лучей, r – расстояние источника света от освещаемой площадки, k – сила источника света [5].

Задача 3.29.

Стоимость топлива для грузового автомобиля пропорциональна кубу его скорости. При какой скорости автомобиля общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей, если при скорости 20 км/ч расходы на топливо составляют 40 руб. в час, а остальные расходы 270 руб. в час?

Решение.

Обозначим стоимость топлива через q, тогда $q = k\vartheta^3$, где k – коэффициент пропорциональности найдём из условия $40 = k \cdot 20^3$, $k = 0{,}005$.

Общая стоимость передвижения автомобиля в течение часа в рублях находится по формуле Q = $\alpha + q = \alpha + k\vartheta^3$, где α = 270 руб. остальные расходы. Затраты на 1 км пути выразятся в виде функции $u(\vartheta) = \frac{q}{\vartheta} = \frac{\alpha}{\vartheta} + \alpha\vartheta^2$.

Для нахождения общей наименьшей суммы расходов на 1 км пути вычисляем производную $u' = -\frac{a}{\vartheta^2} + 2k\vartheta$ и приравниваем ее к нулю $2k\vartheta^3 - a = 0$. Подставляя числовые значения, получим $\vartheta = 30$ км/ч. Вторая производная

$$u'' = \frac{2a}{\vartheta^3} + 2k = \frac{540}{27000} + 0{,}01 = 0{,}03 > 0,$$

следовательно, при скорости грузового автомобиля ϑ = 30 км/ч общая стоимость расходов на 1 км пути будет наименьшей и составит

$u = \frac{270}{30} + 0{,}005 \cdot 30^2 = 13{,}5$ руб. [4]

Задача 3.30.

Два автобуса двигаются с одинаковой скоростью ϑ км/ч, в одной плоскости, прямолинейно и под углом 60° друг к другу. В некоторый момент один автобус пришёл в точку пересечения линий движения, а второй не дошёл до нее на α км. Через сколько времени расстояние между автобусами будет наименьшим и чему оно равно?

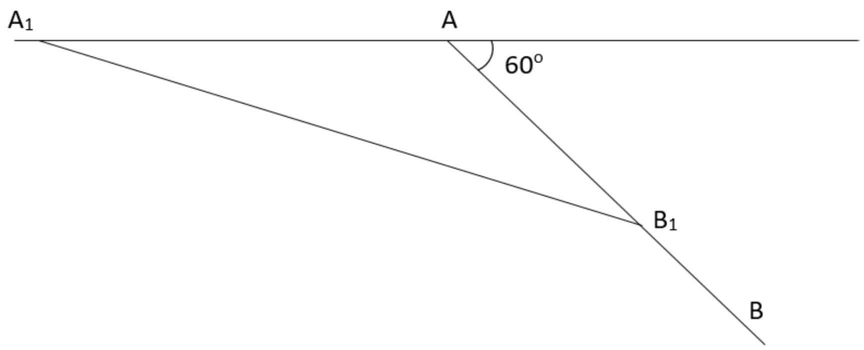


Рис. 3.8

Решение.

По условию, когда один автобус был в точке А, другой был в точке В, отсюда АВ = α (рис. 3.8). За время t автобусы пройдут путь, соответственно: $AA_1 = \vartheta t$, $BB_1 = \vartheta t$. Отсюда $AB_1 = AB - BB_1 = \alpha - \vartheta t$. Пусть расстояние между автобусами A_1B_1 = S, тогда по теореме косинусов получим S = $((\vartheta t)^2 + (\alpha - \vartheta t)^2 - 2\vartheta t(\alpha - \vartheta t)\cos 120°)^{\frac{1}{2}}$ или S = $(\vartheta^2 t^2 - 2\vartheta t + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}$.

Найдём производную $S = \frac{2\vartheta^2 t - \alpha\vartheta}{2(\vartheta^2 t^2 - \alpha\vartheta t + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}$ и приравняем её к нулю: $2\vartheta^2 t - \alpha\vartheta = 0$, t = $\frac{\alpha}{2\vartheta}$. Вторая производная $S = \frac{2\vartheta^2 \; \vartheta^2 t^2 - 2\vartheta t + \alpha^2 \; - \frac{1}{2}(2\vartheta^2 t - \alpha\vartheta)^2}{2 \; \vartheta^2 t^2 - 2\vartheta t + \alpha^2 \; ^{\frac{3}{2}}}$ при t = $\frac{\alpha}{2\vartheta}$ больше нуля, следовательно, функция имеет минимум.

Наименьшее расстояние между автобусами через t = $\frac{\alpha}{2\vartheta}$ будет равно

$$S = \left(\vartheta^2 \frac{\alpha^2}{4\vartheta^2} - \alpha\vartheta \frac{\alpha}{2\vartheta} + \alpha^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha. [4]$$

Задача 3.31.

Канал, ширина которого 27 м, под прямым углом впадает в другой канал шириною 64 м. Какова наибольшая длина плота, который можно сплавлять по этой системе каналов?

Указание. Для решения данной задачи необходимы знания методов нахождения производной функции первого и второго порядка, условия нахождения и определения экстремума функции одной переменной.

Задача 3.32.

Момент сопротивления балки моста прямоугольного сечения на изгиб пропорционален произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты. Каковы должны быть размеры сечения балки, вырезанной из круглого бревна диаметром d, чтобы её сопротивление на изгиб было наибольшим?

Решение.

Обозначим высоту балки через h, ширину через b (рис. 3. 9).

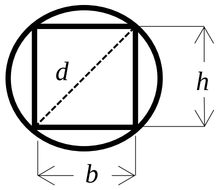


Рис. 3.9

Сопротивление на изгиб определяется функцией $y = bh^2$. Так как $h^2 = d^2 - b^2$, то $y = b(d^2 - b^2)$. Исследуем эту функцию на экстремум: $y' = d^2 - 3b^2$, $d^2 - 3b^2 = 0$, $b = \frac{\sqrt{3}d}{3}$. Найдём вторую производную $y'' = -6b$, при $b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$, $y'' = -2\sqrt{3}d < 0$. Поскольку $y'' < 0$, то сопротивление балки на изгиб при $b = \frac{\sqrt{3}}{3}d$ будет наибольшим, высота балки при этом будет $h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$.

Задача 3.33.

Из круглого бревна диаметром d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть стороны x и y этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление и сжатие?

Решение.

Так как $S = xy$ – площадь прямоугольника в сечении балки и $y = \sqrt{d^2 - x^2}$, где $0 < x < d$.

Найдя производную функции *S(x)* и приравняв ее к нулю, получим единственную стационарную точку $x=\frac{d}{2}$. Значение $x = d$ – точка недифференцируемости функции *S(x)*. Однако последнее значение не имеет смысла, так как в этом случае площадь поперечного сечения балки обращается в нуль. Других критических точек нет.

Так как при $x < \frac{d}{2}$ $S' > 0$, а при $x > \frac{d}{2}$ $S' < 0$, значение $x=\frac{d}{2}$ – точка максимума функции S(x). Найдем это значение

$S_{x=\frac{d}{2}} = \frac{d}{2}\sqrt{d^2 - \frac{d^2}{2}} = \frac{d^2}{2}$. Значит, сопротивление балки на сжатие наибольшее, когда прямоугольник в сечении балки будет квадратом со стороной $x = y = \frac{d}{2}$ и площадью $S = \frac{d^2}{2}$ [25].

Задача 3.34.

При каком отношении глубины к ширине канал прямоугольного сечения имеет гидравлически наивыгоднейший профиль (т.е. возможность обеспечения максимального пропуска воды)?

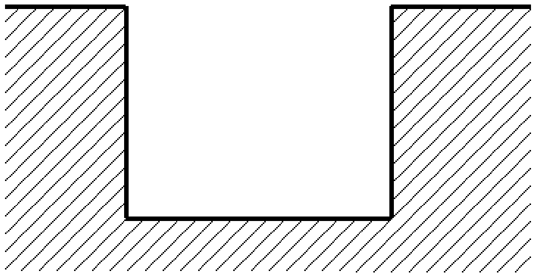


Рис. 3.10

Решение. Пусть x – ширина канала, ω - его живое сечение (рис.3.10). Тогда глубина канала $\frac{\omega}{x}$, а его смоченный периметр (рис. 6) : $X(x) = x + \frac{2\omega}{x}$, $X'(x) = \frac{x^2-2\omega}{x^2}$, $X'(x) = 0$.

Так как $X'(\sqrt{2\omega}) = 0$, $X'(x) < 0$ при $0 < x < \sqrt{2\omega}$ и $X'(x) > 0$ при $x > \sqrt{2\omega}$, то функция X в точке $\sqrt{2\omega}$ достигает наименьшего значения.

Итак, ширина канала в рассматриваемом случае должна быть $\sqrt{2\omega}$, глубина $\frac{\omega}{\sqrt{2\omega}} : \sqrt{2\omega} = \frac{1}{2}$.

Ответ : $\frac{1}{2}$.

Задача 3.35.

Сечение канала для отвода воды в новое русло на период строительства моста – сегмент круга (рис. 3.11). Каким должен быть центральный угол α ($0 < \alpha \leq \pi$), чтобы канал имел гидравлически наивыгоднейший профиль?

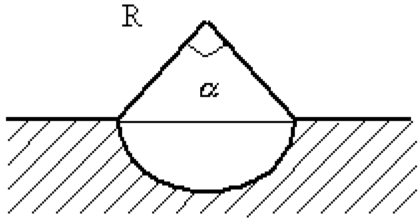


Рис. 3.11

<u>Решение.</u> Пусть R – радиус круга. Живое сечение канала найдем как разность площадей сектора и треугольника: $\omega = \frac{R^2}{2}\ \ \alpha - sin\alpha$.

Отсюда получаем, что $R = \frac{\overline{2\omega}}{\overline{\alpha - sin\alpha}}$, и значит, смоченный периметр $X(\alpha)=R$, $\alpha=$
$= \ \overline{2\omega} \cdot \frac{\overline{\alpha^2}}{\overline{\alpha - sin\alpha}}$

Исследуем более простую функцию $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\alpha - sin\alpha}$. При $0<\alpha<\pi$ имеем:

$f\,'(\alpha) = \alpha \cdot \frac{\alpha\ \ 1+cos\alpha\ \ -2sin\alpha}{(\alpha - sin\alpha)^2} = \alpha\ \ 1 + cos\alpha\ \ \cdot \frac{2(\frac{\alpha}{2} - tg\frac{\alpha}{2})}{(\alpha - sin\alpha)^2}$.

Так как $\sin\alpha \to \alpha$ и $\frac{\alpha}{2} < tg\frac{\alpha}{2}$ на рассматриваемом интервале, то производная на (0;π) определена и отрицательна. Поэтому функция *f*, а значит, и *X* убывает на (0;π). В силу непрерывности функции *X* на промежутке (0;π] заключаем, что *X* убывает и на таком промежутке. Следовательно, функция *X* достигает наименьшего значения при $\alpha=\pi$. В сечении канала должен быть полукруг.

Ответ : $\alpha=\pi$.

Задача 3.36.

Вывести формулу для определения длины стрелы автомобильного крана, с помощью которого можно построить здание придорожного кафе высоты *H* и ширины *2l* с плоской крышей.

<u>Решение</u>

Так как автомобильный кран может перемещаться вокруг всего здания кафе, то крюк его крана достанет до любой точки здания, если он достанет (рис. 3.12) до середины крыши (имеется в виду середина по ширине).

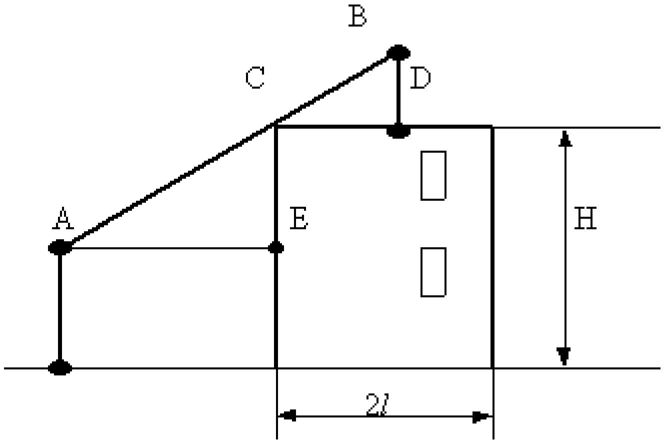


Рис. 3.12

Рассмотрим кран, который находится в точке О, подает деталь на середину крыши. Пусть угол наклона стрелы при этом составляет α. Тогда $BC = \frac{CD}{cos\alpha} = \frac{l}{cos\alpha}$; $AC = \frac{CE}{sin\alpha} = \frac{H-h}{sin\alpha}$, где $h = AO$ – высота подвеса стрелы крана. В таком случае длина стрелы крана $l = \frac{H-h}{sin\alpha} + \frac{l}{cos\alpha}$ (1)

Из формулы (1) видно, что для совершения указанной работы краном, установленным в другой точке (ближе к зданию или дальше от него), потребуется кран с другой длиной стрелы, поскольку при таком перемещении меняется угол α. Определим наивыгоднейшее место установки крана, т.е. такое место, с которого заданная работа может быть выполнена краном с наименьшей длиной стрелы. Для этого, очевидно, достаточно определить, при каком, α из промежутка $(0;\frac{\pi}{2})$ функция l принимает наименьшее значение.

Найдем производную функции l:

$$l'\ \alpha\ = \frac{lsin^3\alpha -\ H-h\ cos^3\alpha}{sin^2\alpha \cdot cos^2\alpha} = \frac{lcos\alpha}{sin^2\alpha}\ tg^3\alpha - \frac{H-h}{l}\ .$$

Производная обращается в нуль лишь в одной точке $\alpha_0 = arctg\sqrt[3]{\frac{H-h}{l}}$ и

функция l достигает своего наименьшего значения при $\alpha_0 = arctg\sqrt[3]{\frac{H-h}{l}}$

Найдя из полученной формулы значение α_0 и подставив его в формулу (1), мы и получим наименьшее возможное значение стрелы.

Задача 3.37.

Каким должно быть отношение диаметра основания к высоте закрытой цилиндрической цистерны для перемешивания асфальтобетона, чтобы при заданном объеме на изготовление цистерны шло как можно меньше материала?

Решение

Пусть r – радиус основания, V – объем цистерны, тогда ее высота равна $\frac{V}{\pi \cdot r^2}$, а полная поверхность $S(r) = 2(\pi r^2 + \frac{V}{r})$. Требуется узнать, при каком r из промежутка (0;+∞), функция S достигает наименьшего значения.

Найдем производную: $S'(r) = 2(2\pi r - \frac{V}{r^2}) = 4\pi\frac{r^3 - \frac{V}{2\pi}}{r^2}$.

Производная всюду на рассматриваемом интервале существует и обращается в нуль только в точке $r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ причем $S'(r) < 0$ при $0 < r < r_0$ и $S'(x) > 0$ при $r > r_0$.

Функция S при $r = r_0$ достигает наименьшего значения. При величине радиуса $r = r_0$ высота цистерны $h_0 = \frac{V}{\pi \cdot r_0^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = 2r_0$, т.е. высота цилиндра должна быть равна его диаметру, а отношение равно 1.
Ответ: 1.

*Дополнительные задачи к разделу «*Экстремум функции нескольких переменных»

При изучении дисциплины «Отраслевая экология» в теме «Дифференциальное уравнение турбулентной диффузии»:
$\frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{K_y}\ \frac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial \mathrm{y}^2} + \mathrm{K_x}\ \frac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial \mathrm{x}^2}\ \mathrm{K_z}\ \frac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial \mathrm{z}^2}$ С — концентрация загрязнителя, K_{xyz} — коэффициенты турбулентной диффузии в направлении трёх координатных осей [13].

Задача 3.38.
Как распределить 900 ден. ед. инвестиций между тремя дорожными предприятиями, если функция полезности $z = x\ x_1, x_2, x_3$ от вложенных в предприятия инвестиций x_1, x_2, x_3 имеет вид $z = x_1 x_2 x_3$? Какое будет решение задачи при следующих функциях?

1) $z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$;

2) $z = x_1^{0,5} x_2^{0,3} x_3^{0,8}$;

3) $z = \sqrt{3x_1}\ \sqrt{2x_2}\ \sqrt{x_3}$;

4) $z = \ln\ 3x_1 + \ln\ 2x_2 + \ln\ x_3$. [6]

Задача 3.39.
Движение точки задано уравнениями $x = 3t^2$; $y = 2t^4$; $z = 4t^6$. С какой скоростью возрастает ее расстояние от начала координат?

Решение.
Расстояние r точки от начала координат определяется формулой $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где x, y и z – координаты точки.

Для решения задачи следует найти $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dr}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dr}{dz}\frac{dz}{dt}$;

$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{dr}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\frac{dr}{dz} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$\frac{dx}{dt} = 6t$; $\frac{dy}{dt} = 8t^3$; $\frac{dz}{dt} = 24t^5$.

Ответ. $\frac{dr}{dt} = \frac{18t+16t^6+96t^9}{\sqrt{9+4t^4+16t^8}}$. [7]

Задача 3.40.
При измерении на местности треугольника земли ABC получены следующие данные: сторона a = 100 м $\pm$ 2 м; сторона b = 200 м $\pm$ 3 м; угол C равен 60° $\pm$ 1. С какой степенью точности может быть вычислена сторона c?

Указание. С точностью до 4 м (точнее 4,25 м) [21].

Вопросы к разделу:

1. В задачах с решением ответить на вопрос: какие формулы по математике используются для ее решения?
2. В задачах без решения подумать, какой материал из специальных (общетехнических) дисциплин и математики необходим для их решения?
3. Подготовить задачу(чи), выбранную из специальных дисциплин, отражающую применение математики в этой дисциплине.

4. Неопределенный интеграл

Из геометрического смысла первообразной следует, что производная функции $y = F(x)$ дает угловой коэффициент касательной к соответствующему графику $y = F(x) + C$. Поэтому задача отыскания первообразной для заданной функции $f(x)$, равносильна задаче нахождения кривой, для которой закон изменения углового коэффициента известен $tg\alpha = f(x)$.

Поскольку кривые отличаются друг от друга на постоянную интегрирования, то для того, чтобы из этого множества кривых выбрать одну кривую, достаточно задать точку (x_0, y_0), через которую кривая должна проходить, т.е. определить постоянную интегрирования.

Из механического истолкования неопределенного интеграла следует, что если задан закон изменения скорости от времени $v = f(x)$, то зависимость пути S от времени определяется интегралом $S = \int f(t)\,dt$, т.к. скорость движения точки есть производная $\frac{dS}{dt}$. Постоянная интегрирования находится из заданного начального условия, иначе получим бесчисленное множество решений.

Задача 4.1.

Скорость легкового автомобиля задана функцией $v = 3t^2$ м/с. Найти закон изменения пути S, если за t = 2 с, автомобиль проехал путь S = 20 м.

Решение.

Имеем: $S = \int v dt = 3\int t^2 dt = t^3 + C$. Согласно начальному условию: $20 = 2^3 + C$, откуда $C = 12$. Таким образом, искомый закон $S = t^3 + 12$ [4].

Задача 4.2.

Найти путь, пройденный автомобилем за 4 секунды от начала движения, если его скорость $v(t)=10t+2$ (м/с).

Решение.

1 способ. Если $v(t) = 10t + 2$ (м/с), то путь, пройденный автомобилем от начала движения (t=0) до конца 4-й секунды, равен $S=\int_0^4 (10t+2)\,dt = 5t^2\big|_0^4 + 2t\big|_0^4 = 80 + 8 = 88$ (м).

2 способ. Решить с помощью программы Mathcad.

Задача 4.3.

На чертеже (рис. 4.1.) изображен график скорости движения автогрейдера. Найти по графику уравнение движения автогрейдера, если он за первые 100 с движения прошел 200 м.

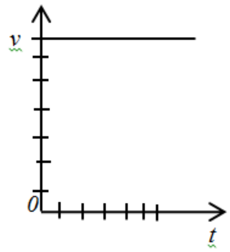


Рис. 4.1.

Решение.

$V = 7$. По определению скорости движения имеем: $\frac{ds}{dt} = 7$. Отсюда $s = 7dt = 7t + C$. Определим постоянную интегрирования: $500 = 700 + C$; $C = -200$. Уравнение движения $s = 7t - 200$ [13].

Вопросы к разделу:

1. В задачах <u>с решением</u> ответить на вопрос: какие формулы по математике используются для ее решения?
2. В задачах <u>без решения</u> подумать, какой материал из специальных (общетехнических) дисциплин и математики необходим для их решения?
3. Подготовить задачу(чи), выбранную из специальных дисциплин, отражающую применение математики в этой дисциплине.

5. Определенный интеграл и его приложения

Если задан закон изменения скорости $v = f(t)$ при неравномерном движении тела, где t – время, то пройденный путь определяется по формуле

$$\boxed{S = \int_a^b v\,dt = \int_a^b f(t)\,dt, (5)}$$

где a, b – значения переменной t на концах пройденного пути.

Вычисление пройденного пути по скорости

Задача 5.1.

Скорость падения груза опреляется по формуле $v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$, где g – ускорение свободного падения, m - масса груза, k – коэффициент пропорциональности, зависящий от размеров груза. Определить, с какой высоты падал груз, если падение продолжалось 20 секунд?

Решение.

Т.к. закон изменения скорости известен, то, на основании формулы (5), получим:

$$S = \int_0^{20} \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) dt = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}\right)\Bigg|_0^{20} = \frac{mg}{k}\left(20 + \frac{m}{k}\left(e^{-\frac{20k}{m}} - 1\right)\right).$$

Задача 5.2.

Скорость движения автодорожного крана $v = 0{,}1te^{-0{,}01t}$ м/с. найти путь, пройденный машиной от начала координат до полной остановки.

Решение.

Пройденный путь определяем из формулы (5), учитывая, что полная остановка машины произойдет при $t \to \infty$

$$S = \int_0^{\infty} 0{,}01te^{-0{,}01t}\,dt.$$

Интегрируя по частям: $t = u$, $e^{-0{,}01t}dt = dv, dt = du, v = -\frac{e^{-0{,}01t}}{0{,}01}$, получим

$$S = 0{,}1\lim_{\beta\to\infty}\left(-\frac{te^{-0{,}01t}}{0{,}01} - \frac{e^{-0{,}01t}}{0{,}01^2}\right)\Bigg|_0^{\beta} = 10\lim_{\beta\to\infty}\frac{t}{e^{0{,}01t}} + 0{,}1\frac{1}{0{,}01^2} = 10^3 \text{ м}.$$

Задача 5.3.

Скорость автогрейдера изменяется по закону $v = 2(6 - t)$ м/с. Найти наибольшее удаление автогрейдера от начала движения.

Решение.

Путь пройденный автогрейдером определяем по формуле (5) с переменным верхним пределом

$$S = \int_0^t 2(6 - t)\,dt = 12t - t^2.$$

Наибольшее удаление автогрейдера находим, рассматривая путь в функции времени: $S' = 12 - 2t$, $S = 0$ при $t = 6$, следовательно, $S_{max} = 12 \cdot 6 - 6^2 = 36$ м [4].

Задача 5.4.

Пусть транспортное средство движется прямолинейно со скоростью $\boldsymbol{v(t) = 5t^2 + 3t + 1}$. Найти путь L, пройденный транспортным средством за промежуток времени [0,4].

Решение. Имеем $\boldsymbol{L = \int_0^4 (5t^2 + 3t + 1)\,dt = \left(\frac{5t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + t\right)\Big|_0^4 = 134{,}667}$ [6].

Задача 5.5.

Скорость прямолинейного движения легкового автомобиля $\boldsymbol{v = te^{-0{,}02t}}$м/с. Найти путь, пройденный автомобилем от начала движения до полной остановки.

Указание. Темы, необходимые к решению задачи: «Определенный интеграл».

Задача 5.6.

Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = 6t^2 + 2t$ м/с, второе — со скоростью $v = (4t+5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение: Искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)\,dt = [2t^3 + t^2]\,\Big|_0^5 = 275 \text{ м}, s_2 = \int_0^5 (4t + 5)\,dt$$
$$= [2t^2 + 5t]\,\Big|_0^5 = 75 \text{ м}, s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200 \text{ м}.$$

Вычисление объема произведенной продукции

Рассмотрим задачу. Пусть производительность труда работника автодорожного хозяйства (объем продукции, изготовленной в единицу времени) в течение рабочего дня меняется и зависимость между производительностью труда y и временем t (в часах) выражается функцией $y = f(t)$. Тогда объем продукции Q, произведенной работником за время от 0 до T часов, определяется по формуле $Q = \int_0^T f(t)\,dt$

Средние издержки производства, к числу которых можно отнести и производство продукции для автодорожной отрасли, при изменении объема продукции от x_1 до x_2 единиц, находятся по формуле:

$$y_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Задача 5.7.

Вычислить среднюю производительность дорожной организации, если она меняется по закону $p(t) = -t^2 + 3t + 40$, $t \in [0,7]$ (из расчета 7 часов рабочего времени в день).

<u>Решение.</u>

$$p_{\text{ср}} = \frac{1}{7-0} \int_0^7 (-t2 + 3t + 40)\,dt = \frac{1}{7}\left(-\frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + 40t\right)\Big|_0^7 = 34{,}16.$$

Рассмотрим применение определенного интеграла при изучении дисциплины «Производственные предприятия дорожной отрасли», в которой рассматриваются вопросы, связанные с теорией производственных процессов. Так, производственный процесс можно рассматривать с позиции энергетических затрат, т.е. как динамическую материальную систему. Производственный процесс имеет свои причины функционирования, движущие силы, текущие и выходные параметры.

Производство продукции за время t характеризуется интенсивностью *И*, которая выражает скорость изменения энергии системы *Э* в единицу времени:

$$\text{И} = \frac{d\text{Э}}{dt},$$

За время *t* происходит превращение энергии *Э*:

$$\text{Э} = \int_{t_j}^{t_{i+1}} \text{И}(t)\,dt = \text{Э}_n + \Delta\text{Э}$$

Где t_{i+1} и t_j – момент времени начала и окончания процесса за время t;

Э_n – энергия на производство продукции данного технологического процесса;

$\Delta\text{Э}$ – производственные потери энергии [11].

Также раздел «Определенный интеграл» применяется при определении деформации толщи, осадке ее поверхности и вместе с тем осадке самого сооружения, необходимо установить функциональные зависимости $p_z=f_1(z)$ и $E_{pz}=f_2(z)$, связанные с глубиной z. Тогда полная осадка загруженной поверхности грунтовой толщи $\eta_{\text{ос}}$ определяется: $\eta_{\text{ос}} = \int_0^\infty \frac{p_z}{E_{pz}} dz$ («Дорожное грунтоведение и механика земляного полотна») [22, с.236].

Вычисление работы и давления

Работа переменной силы $X = f(x)$, действующей в направлении оси Ox на отрезке $[x_0,x_1]$, вычисляется по формуле:

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Для вычисления силы давления жидкости используют закон Паскаля, согласно которому давление жидкости на площадку равно площади S, умноженной на глубину погружения h, на плотность ρ и ускорение силы тяжести g, т.е.

$$P = \rho g h S.$$

Приведем ряд задач по математике, позволяющих *вычислить работу, производимую при поднятии груза*.

Задача 5.8.

Какую работу надо совершить наклонному вибрационному грохоту (устройство для механической сортировки сыпучих материалов), чтобы растянуть пружину между стабилизаторами на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растягивается на 1 см?

Решение.

Согласно закону Гука, сила X Н, растягивающая пружину на x м, равна $X = kx$. Коэффициент пропорциональности k найдем из условия: если $x = 0{,}01$ м, то $X = 1$ Н; следовательно, $k = \frac{1}{0{,}01} = 100$ и $X = 100x$. Тогда

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x\,dx = 50x^2 \Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08 \text{ Дж}.$$

Задача 5.9.

С помощью грузоподъемного крана извлекают железобетонную надолбу со дна реки глубиной 5 м. Какая работа при этом совершается, если надолба имеет форму правильного тэтраэдра с ребром 1 м (рис.5.1)? Плотность железобетона 2500 кг/м^3, плотность воды 1000 кг/м^3.

Решение.

Высота тетраэдра $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$ м, объем тетраэдра $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$ м^3. Вес надолбы в воде с учетом архимедовой силы равен:

$P = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot 2500 \cdot 9{,}8 - \frac{1}{12}\sqrt{2} \cdot 1000 \cdot 9{,}8 = 1225\sqrt{2}$ (Н), поэтому работа при извлечении надолбы до момента появления на поверхности воды ее вершины составляет

$$A_0 = 1225\sqrt{2}\,(5 - h) = 1225\sqrt{2}\left(5 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 7227{,}5 \text{ (Дж)}.$$

Теперь найдем работу A_1 при извлечении надолбы из воды. Пусть вершина тетраэдра вышла на высоту $5 + y$; тогда объем малого тетраэдра, вышедшего из воды, равен $\frac{3\sqrt{3}y^3}{8}$, а вес тетраэдра

$$P(y) = \frac{2500 \cdot 9{,}8}{12}\sqrt{2} - \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{8}y^3 3\sqrt{3}\right) \cdot 1000 \cdot 9{,}8.$$

Следовательно,

$$A_1 = \int_0^h \left(\frac{24500}{12}\sqrt{2} - \frac{9800}{12}\sqrt{2} + \frac{9800}{8}3y^3\sqrt{8}\right) dy =$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \left(1225\sqrt{2} + 3675\sqrt{3}y^3\right) dy = \left(1225\sqrt{2}y + \frac{3675}{4}\sqrt{3}y^4\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} \approx 2082{,}5 \text{ (Дж)}.$$

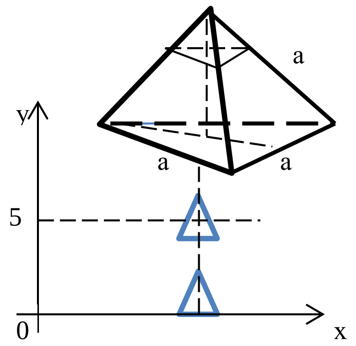


Рис. 5.1

Отсюда $A = A_0 + A_1 = 7227{,}5$ Дж + $2082{,}5$ Дж = 9310 Дж = $9{,}31$ кДж. [5, с.262-263].

Задача 5.10.

Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны. Решить задачу 2-м способом в программе Mathcad.

Решение.

Выделим на глубине x горизонтальный слой высотой dx. Работа A, которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом P на высоту x, равна Px.
Изменение глубины х на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину $dV = nr^2\, dx$ и изменение веса P на величину * $dP = 9807\ r^2\, dx$; при этом совершаемая работа A изменится на величину $dA=9807nr^2\, xdx$. Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до H, получим

$$A = \int_0^H 9807\pi r^2 x dx = 4903\pi r^2 H^2 = 4903\pi \cdot 0{,}25 \cdot 2^2 = 4903\pi \text{ (Дж)}.$$

Задача 5.11.

Найти силу давления бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой $h = 3{,}5$ м и радиусом основания $r = 1{,}5$ м, на его стенки, если $\rho = 900$ кг/м^3.

Решение.

Элемент силы давления на поверхность стенки в выделенной полоске выразится так: $dP = r\rho g 2\pi x dx$. Отсюда

$$P = 2\pi r\rho g \int_0^h x dx = \pi\rho g r h^2 = 9{,}8\pi \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}5^2 \cdot 900\, H = 161700\pi\, H = 161{,}7\pi \text{ кН [5]}.$$

Задача 5.12.

Рессора прогибается под нагрузкой 20 кН (2 тонны) на 4 см. Определить прогиб рессоры, если при ее деформации совершена работа в 900 Дж.
Указания. Для решения использовать темы из раздела «Определенный интеграл» и предыдущую задачу.

Задача 5.13.
Определить давление на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус R, а центр O находится на свободной поверхности воды (рис. 5.2).

Решение.

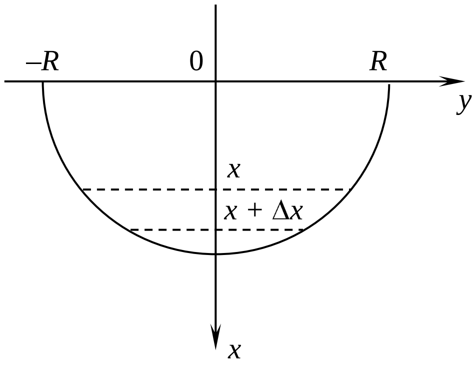


Рис.5.2

1) $P = g \cdot \text{с} \cdot x \cdot S = P(x)$

2) дадим приращение Δx

$$\Delta P = x \cdot g \cdot \text{с} \cdot \Delta x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{R^2 - x^2} =$$

$$= 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \text{с} \cdot g \cdot \Delta x$$

$$P = \text{с} \cdot g \cdot \int_0^R 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

Задача 5.14.
Найти силу давления дизельного топлива, находящегося в цилиндрическом баке высотой $h = 4$ м и радиусом основания $r = 2$ м, (если $\rho = 900$ кг/м$^{3)}$ на стенки бака на каждом метре глубины.

Указания. Элемент силы давления на поверхность стенки в выделенной полоске выразится так: $dP = \rho g \cdot 2\pi r x dx$.

Задача 5.15.
Скорость автомобильного крана с телескопической стрелой марки КС-35715 (МАЗ) изменяется по закону $v = 100 + 8t$ (где v выражается в м/мин). Какой путь пройдет автомобильный кран за промежуток времени [0,10]?
Ответ: 1400 м.

Задача 5.16.
Точка движется по оси *Ox*, начиная от точки *M(1,0)*, так, что скорость ее равна абсциссе. Где она будет через *10 с* от начала движения? [5, с.266]
Ответ: $x = e^{10}$.

Задача 5.17.
Построить график ускорения движения, заданного уравнением $s(t) = 5 - 3t + 2t^2 - \frac{1}{12}t^3, 0 \le t \le 8$.

Решение.
1 способ. a = 4 – 0,5t.

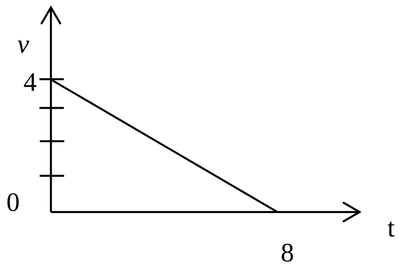


Рис. 5.3.

2 способ. Построить график ускорения движения и вычислить с помощью программы MS Excel.

Рассмотрим задачи по математике на определение *статических моментов и моментов инерции плоских дуг и фигур*.

Задача 5.18.
Найти статические моменты и моменты инерции, передаваемые на транспорт по транспортной развязке с формой дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в I четверти (рис.5.4).

Решение.
В силу симметрии астроиды (рис. 5.4) относительно координатных осей $M_x = M_y$, $I_x = I_y$. Поэтому достаточно вычислить моменты относительно оси Ox. Для I четверти имеем $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Находим

$$dL = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}dt = 3asintcostdt,$$

$$M_x = \int_a^b ydL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cdot sin^3 t \cdot 3asintcostdt = \frac{3a^2}{5} sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5},$$

$$I_x = \int_a^b y^2 dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 sin^6 t \cdot 3asintcostdt = \frac{3}{8} a^3 sin^8 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} a^3$$

Итак, $M_x = M_y = \frac{3a^2}{5}$; $I_x = I_y = \frac{3}{8}a^3$.

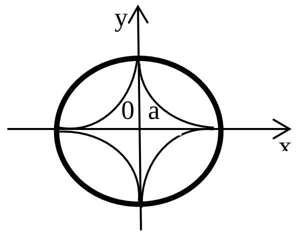


Рис. 5.4

Вопросы к разделу:

1. В задачах <u>с решением</u> ответить на вопрос: какие формулы по математике используются для ее решения?

2. В задачах <u>без решения</u> подумать, какой материал из специальных (общетехнических) дисциплин и математики необходим для их решения?

3. Подготовить задачу(чи), выбранную из специальных дисциплин, отражающую применение математики в этой дисциплине.

6. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Раздел «Обыкновенные дифференциальные уравнения» включает темы: «Основные понятия теории дифференциальных уравнений», «Дифференциальные уравнения первого и высших порядков», «Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения», «Системы дифференциальных уравнений». Математические знания, полученные при изучении этих тем, широко используется при построении моделей реальных ситуаций и решении практико-ориентированных задач в содержании специальных дисциплин. Например, подбор и решение профессионально-ориентированных задач профессиональной направленности по разделу «Обыкновенные дифференциальные уравнения» можно разделить на три группы. А именно:

- задачи, исследующие деформации строительных сооружений и колебательные процессы;
- задачи, связанные с процессами выделения тепла строительных (дорожных) конструкций;
- задачи, в которых рассматривается скорость протекания процессов.

Приведем пример задачи из последней группы, которая используется при изучении специального предмета «Дорожное грунтоведение и механика дорожного полотна» и определяет количество воды, проникающей в грунт за время Δt: $Q = \int_{t_1}^{t_2} \left(a + bt^{-0,5}\right) dt$

a – постоянная, зависит от типа почвы;

b – постоянная, характеризует степень влажности почвы.

Задача 6.1.

Установлено, что скорость V инфильтрации воды в почву, как функция времени t, выражается по формуле $V = a + bt^{-0,5}$, где a и b константы. Постоянная a зависит от типа почвы и представляет собой минимальную скорость, с какой вода просачивается в почву до состояния ее полного насыщения. Постоянная b характеризует степень влажности почвы, при $b = 0$ мы имеем скорость инфильтрации в условиях насыщения почвы. Функция V асимптотически стремится к значению a при $t \to +\infty$. Определить количество воды ΔQ, проникающей в грунт.

Решение.

Количество воды ΔQ, проникающей в грунт за время $\Delta t = t_2 - t_1$, будет равно $\Delta Q = V\Delta t$ или в виде дифференциального уравнения $dQ = Vdt$. Интегрируя последнее уравнение, получаем общее количество воды $Q = \int_{t_1}^{t_2} \left(a + bt^{-0,5}\right) dt$ [10].

Задачи об ортогональных траекториях

Ортогональной траекторией семейства кривых $\Phi(x, y, a) = 0$ называется кривая, пересекающая все кривые этого семейства под углом $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Для отыскания ортогональной траектории составляют дифференциальное уравнение семейства $f(x, y, y') = 0$, исключают параметр a из полученного и данного уравнения и заменяют в полученном уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$ (условие ортогональности). Затем уравнение $f\ (x,\ y,\ -\frac{1}{y'}) = 0$ следует проинтегрировать.

Если семейство кривых задано в полярных координатах $\Phi(\rho, \varphi, \text{a})=0$ то при отыскании ортогональных траекторий в дифференциальном уравнении семейства $f\left(\rho, -\frac{\rho^2}{\rho'}, \varphi\right) = 0$ проинтегрировать.

Задача 6.2.

Найти ортогональные траектории семейства: а) окружностей $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$; б) логарифмических спиралей $\rho = \text{a}e^{\varphi}$

Решение.

а) дифференциальное уравнение семейства окружностей будет $2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$ или $x - a + (y-b)y' = 0$. Заменяя y' на $-\frac{1}{y'}$, получим $x - a = (y-b)\left(-\frac{1}{y'}\right)$ или $\frac{dy}{y-b} = \frac{dx}{x-a}$. Интегрируя последнее уравнение, получим $\ln(y-b) = ln(x-a) + ln\ C$, $y - b = C(x-a)$, т.е. ортогональными траекториями будут прямые.

б) найдем дифференциальное уравнение семейства логарифмических спиралей $\rho = \text{a}e^{\varphi}$. Заменяя ρ' на $-\frac{\rho^2}{\rho'}$, получим $-\frac{\rho^2}{\rho'} = \rho$ или $\rho' = -\rho$. Откуда $\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho$ или $ln\ \rho = -\varphi + ln\ C$, $\rho = \text{C}e^{-\varphi}$ [4].

Если исследуемый процесс $y = f(x)$ протекает так, что его скорость относительно независимой переменной x пропорциональна текущему значению самого процесса y, то он может быть описан уравнением $\frac{dy}{dx} = ky, y = Ce^{kx}$.

Если коэффициент пропорциональности $k>0$, то с возрастанием x процесс y нарастает. Если $k<0$, то с возрастанием x процесс y убывает.

Например, процесс перемешивания автодорожных смесей осуществляется на базе общей теории перемешивания, основным параметром которой является концентрация C одного из компонентов смеси или поверхность раздела S между перемешиваемыми веществами («Производственные предприятия дорожного хозяйства».)

Закон развития процесса перемешивания состоит в том, сто изменение основного параметра в единицу времени пропорционально величине самого параметра. В дифференциальной форме запишем:

$$\boxed{\frac{dC}{dt} = -mC}$$

здесь t – время перемешивания;
m –коэффициент, характеризующий интенсивность протекания процесса в данных условиях.

Интегрирование с учетом начальных и конечных условий приводит к закономерностям:

$$\boxed{C = C_0 \ 1 - e^{-mt} \ ,}$$

где C_0 – концентрация вещества при абсолютно однородном распределении его (начальная концентрация равна нулю) [11].

Задача 6.3.
Найти зависимость растворившегося вещества x от времени, если количество вещества, дающего насыщенный раствор, равно P.

<u>Решение.</u>
Пусть скорость растворения твердого тела в жидкости пропорциональна количеству этого вещества, еще могущего раствориться в жидкости до насыщения последней. Тогда дифференциальное уравнение растворения твердого тела имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = k \ \ P - x \ \ ,$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные и интегрируя, будем иметь $\frac{dx}{P-x} kdt; x = P + Ce^{-kt}$. При $t = 0$, т.е. в начальный момент времени $x = 0$. Отсюда $C = -P$, и окончательно получим $x = P(1 - e^{-kt})$.

Следует отметить дифференциальное уравнение переноса примесей в атмосфере по Г.И. Марчуку, которое рассматривается при изучении дисциплины «Дорожная климатология» и имеющее вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

где $\varphi \ \ x, y, z, t \ \ -$ интенсивность мигрирущей в атмосфере аэрозольной субстанции; x, y, z – простанственные координаты; t – время; u, v, ω – коэффициенты переноса [12].

Основным законом динамики точки является второй закон Ньютона, который в проекциях на неподвижные оси координат имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

где m – масса точки; $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ проекции ускорения на оси координат; X, Y, Z – проекции силы на те же оси.

Силы сопротивления среды принимают часто пропорциональными скорости, т.е. первой производной. Поскольку силы сопротивления и упругие силы направлены в сторону, противоположную движению, в уравнения движения они входят со знаком минус. Полагая силы, действующие на точку зависящими от времени, запишем основное уравнение динамики в проекции, например, на ось X

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta\frac{dx}{dt} - cx + X(t),(2)}$$

где β – коэффициент пропорциональности скорости движения; c – коэффициент жесткости.

Уравнение движения (2) линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Если $X\ t\ = 0$, т.е. на точку не действуют внешние силы, то точка находится под действием сил, связанных со средой.

Задача 6.4.
За сколько времени доставленная битумная смесь, нагретая до 100°, в подземном гараже с температурой T_0 = 20°, охладится до 25°, если до 60° оно охладится за 10 мин.?

Решение.
По закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур $\frac{dT}{dt} = k\ T - T_0$. Откуда $\frac{dT}{T-20} = kdt; ln\ T - 20\ = kt + lnC$. При $t = 0$, $T = 100°$, таким образом $ln80 = lnC$; $C = 80$. За время $t = 10$ мин. Температура стала $T = 60°$, следовательно, $ln40 = 10k + ln80$; $k = -\frac{1}{10}ln2$. Таким образом, $T - 20 = 80e^{kt}$ или $T = 20 + 80e^{-\frac{1}{10}ln2} = 20 + 80(\frac{1}{2})^{\frac{t}{10}}$. Отсюда находим время, за которое битум охладится до 25°: $25 = 20 + 80(\frac{1}{2})^{\frac{t}{10}}$; $(\frac{1}{2})^4 = (\frac{1}{2})^{\frac{t}{10}}; t = 40$, т.е. битум охладится за 40 мин.

Задача 6.5.
Автомобиль массой m кг в момент выключения двигателя шел со скоростью 20 м/с. Через 25 с скорость автомобиля уменьшилась до 5 м/с. Принимая, что сопротивление движения пропорционально его скорости, найти уравнение скорости и определить. Через сколько секунд от начала движения без работы двигателя его скорость окажется равной 1,25 м/с?

Решение.
По второму закону Ньютона $F = ma = m\frac{dv}{dt}$. Из условия имеем, что $F = -kv$, где k – коэффициент пропорциональности. Так как сила сопротивления движению автомобиля имеет направление, противоположное направлению

его скорости, то взят знак минус пере kv. Следовательно, $m\frac{dv}{dt} = -kv$. Отсюда, $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt$; $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\ \ dt; lnv = lne^{-\frac{kt}{m}} + lnC$ или $v = Ce^{-\frac{kt}{m}}$. Для нахождения k и C воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ и $v = 20$ $C = 20$; при $t = 25$ и $v = 5$, $5 = 20e^{-\frac{25k}{m}}$. $e^{-\frac{25k}{m}} = \frac{1}{4}$; $e^{-\frac{25k}{m}} = 2^{-2}$; $e^{-\frac{k}{m}} = 2^{-\frac{2}{25}}$; $e^{-\frac{k}{m}} = 2^{-\frac{2t}{25}}$. Следовательно, $v = 20\cdot 2^{-\frac{2t}{25}}$. Мы получили уравнение скорости движения автомобиля без работы двигателя. Для определения времени, при котором скорость автомобиля станет равной 1,25 м/с, подставим в уравнение скорости $v = 1{,}25$ и найдем t : $2^{-\frac{2}{25}} = \frac{1{,}25}{20}$; $2^{-0{,}08t} = 2^{-4}$; $-0{,}08t = -4; t = 50$ с [13].

Задача 6.6.

Ускорение прямолинейного движения автомобиля выражается формулой $a = 2t - 10$ м/с^2. Найти уравнение движения точки, если при $t = 0$ сек. $S = 4$ м и при $t = 3$ сек. $S = 13$ м, и мгновенную скорость автомобиля при $t = 10$ сек [13]. Построить уравнение движения точки в программе Mathematica.

Указание. Использовать решение предыдущей задачи.

Вопросы к разделу:

1. В задачах <u>с решением</u> ответить на вопрос: какие формулы по математике используются для ее решения?

2. В задачах <u>без решения</u> подумать, какой материал из специальных (общетехнических) дисциплин и математики необходим для их решения?

3. Подготовить задачу(чи), выбранную из специальных дисциплин, отражающую применение математики в этой дисциплине.

7. Основы математической статистики

При *классическом определении вероятность* события определяется равенством

$$\boxed{P(A) = m/n}$$

где m — число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A; n — общее число возможных элементарных исходов испытания.

Задача 7.1.
Радар автоинспектора имеет точность 10 км/ч и округляет свои показания в ближайшую сторону. Определить, что происходит чаще — радар округляет скорость «*в пользу водителя*» или «*в пользу ГАИ*»?
Ответ: одинаково.

Задача 7.2.
Ёмкость цистерны для хранения бензина на автозаправочной станции равна 50 т. Найти вероятности событий, состоящих в том, что при случайной проверке в цистерне будет обнаружено: а) менее 5 т бензина; б) более 20 т бензина; в) хотя бы 1 т бензина.
Ответ: а) 0,1; б) 0,6; в) 0,98 [17].

Простейший поток событий

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.
Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает следующими тремя свойствами: стационарностью, «отсутствием последствия» и ординарностью.
Замечание.
Свойство стационарности состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка времени и не зависит от начала его отсчета. Другими словами, вероятность появления k событий за промежуток времени длительностью t есть функция, зависящая только от k и t.
Свойство «отсутствия последствий» состоит в том, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка. Другими словами, предыстория потока не влияет на вероятности появления событий в ближайшем будущем.
Свойство ординарности состоит в том, что появление двух или более событий за малый промежуток времени практически невозможно. Другими словами, вероятность появления более одного события за малый промежуток

времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события.

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.
Если постоянная интенсивность потока λ известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона

$$\boxed{P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.}$$

Таким образом, формулу Пуассона можно рассматривать как математическую модель простейшего движения потока транспортных средств.

Задача 7.3.
Доказать, что непрерывная случайная величина T – время между появлениями двух последовательных событий в технологическом процессе строительства дорожных одежд (простейшего) потока с заданной интенсивностью λ – имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0)$.

Решение. Предположим, что в момент t_0 наступило событие A_1 потока. Пусть $t_1 = t_0 + t$. Если хотя бы одно событие потока, следующее за событием A_1, произойдет в интервале, заключенном *внутри* интервала (t_0,t_1), например, в интервале (t_0,t_2), то время T между появлениями двух последовательных событий окажется меньшим t, т.е. окажется, что $T < t$.
Для того, чтобы найти вероятность $P(T < t)$, примем во внимание, что события – «внутри интервала (t_0,t_1) появилось хотя бы одно событие потока» и «внутри интервала (t_0,t_1) не появилось ни одного события потока» - противоположны (сумма их равна единице).
Вероятность непоявления за время t на одного события потока

$$P_t(0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, интересующая нас вероятность противоположного события $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, или (по определению функции распределения $F(t) = P(T < t)$) имеем $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, что и требовалось доказать.

Задача 7.4.
Задана интенсивность транспортного (простейшего) потока $\lambda = 5$. Найти:
а) математическое ожидание;
б) дисперсию;
в) среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины Т – времени между появлениями двух последовательно движущимися автотранспортными средствами потока.

Указание. Использовать решение предыдущей задачи.

Задача 7.5.
На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины T – времени ожидания очередной машины контролером, - если поток машин простейший и время (в часах) между прохождениями машин через контрольный пункт распределено по показательному закону $f(t) = 5e^{-5t}$.

Задача 7.6.
Среднее число заказов асфальтобетонной смеси, поступающих на диспетчерский пункт за один час, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 часа поступит: а) четыре вызова; б) менее четырех вызовов; в) не менее четырех вызовов.

Решение. По условию, λ=3, t=2, k=4. Воспользуемся формулой Пуассона: $P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$.
а) искомая вероятность того, что за 2 часа поступит 4 вызова

$$P_2(4) = \frac{(6)^4 \cdot e^{-6}}{4!} = \frac{1296 \cdot 0{,}0025}{24} = 0{,}135$$

б) событие «поступило менее 4 вызовов» произойдет, если наступит одно из следующих несовместных событий: 1) поступило 3 вызова; 2) поступило 2 вызова; 3) поступил один вызов; 4) не поступило ни одного вызова. Эти события несовместны, поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий: $P_2(k<4) = P_2(3) + P_2(2) + P_2(1) + P_2(0) = \frac{(6)^3 \cdot e^{-6}}{3!} + \frac{(6)^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{(6)^1 \cdot e^{-6}}{1!} + e^{-6} = e^{-6}(36 + 18 + 6 + 1) = 0{,}0025 \cdot 61 = 0{,}1525$

в) события «поступило менее 4 вызово» и «поступило не менее четырех вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 2 часа поступит не менее 4 вызовов, $P(k \geq 4) = 1 - P(k<4) = 1 - 0{,}1525 = 0{,}8475$.

В заключении необходимо сказать, что темы раздела «Статистическая обработка данных» необходимы для изучения:

- микропрофиля автомобильной дороги, т.е. ровности, которая отражает характер неровностей и скорость движения автомобиля: $R(\tau) = 2\int_0^\infty s(\omega)\cos\omega\tau d\omega, s(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty R(\tau) cos\omega\tau d\tau$, где $R(\tau)$ – корреляционная функция, $s(\omega)$ – спектральная плотность [19, с.23];
- надежности дорожных одежд (Рис. 7.1.), где широко применяется закон нормального распределения случайной величины («Производственные предприятия дорожной отрасли») [11];

•объема деформированного покрытия применяется формула $a(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_a}^{0} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$, z – нормированная плотность распределения («Содержание и ремонт автодорог») [18, с.42].

•формула расчета среднеквадратического отклонения упругих прогибов на характерном участке дороги: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(L-L_i)^2}{n-1}}$, L – среднеарифметическое значение упругого прогиба, мм; Li – значение упругого прогиба в i-й точке, мм; n – количество измерений упругих прогибов на характерном участке («Ремонт автомобильных дорог») [18].

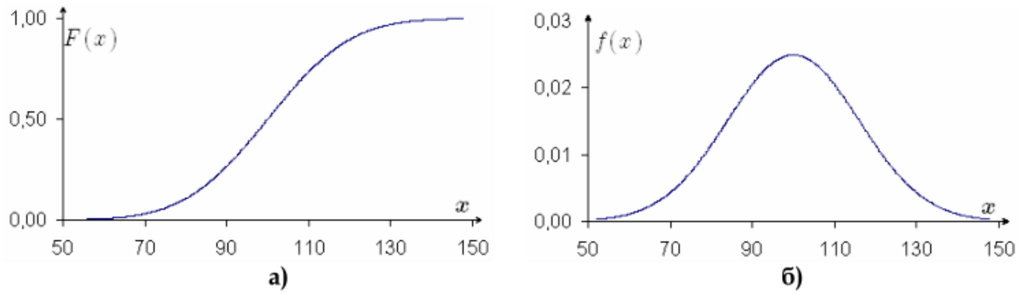


Рис. 7.1. Кривая интегральной функции распределения

График кривой интегральной функции распределения модулей упругости дорожной одежды F(E) (а); гистограмма распределения модулей упругости и выравнивающая кривая (б) [11].

Вопросы к разделу:

1. В задачах <u>с решением</u> ответить на вопрос: какие формулы по математике используются для ее решения?
2. В задачах <u>без решения</u> подумать, какой материал из специальных (общетехнических) дисциплин и математики необходим для их решения?
3. Подготовить задачу(чи), выбранную из специальных дисциплин, отражающую применение математики в этой дисциплине.

8. Профессионально ориентированные задачи в школьном курсе математики

Рассмотрим применение математического аппарата, изучаемого в курсе средней школы в освоении специальных дисциплин дорожного профиля.

Так, использование *суммы убывающей геометрической прогрессии* $S_\infty = \frac{a_1}{1-q}, (-1 < q < 1)$ применяется для решения профессионально-ориентированных задач в следующих дисциплинах: «Анализ производственно-хозяйственной деятельности дорожных организаций», «Организация, планирование и управление в дорожном хозяйстве» и др. Рассмотрим одну из них.

Задача 8.1

Компания, предлагающая напрокат дорожно-строительные машины, обнаружила, что ее чистая прибыль за год от проката определенных дорожно-строительных машин ежегодно уменьшается на 10%. Чистый доход с определенной машины в этом году составил 400 фунтов. Определить всю возможную прибыль от проката этой машины в будущем (предполагаем, что машина вечная).

Решение. Чистая прибыль (в фунтах) образует следующую последовательность: 400 + 400·0,9 + 400·0,9·0,9 + 400·0,9·0,9·0,9…, которая является геометрической прогрессией с $a_1 = 400$ и $q = 0,9$. Вычисляем сумму бесконечной геометрической прогрессии:

$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{400}{1-0,9} = 4000$ (фунтов), которая является полной будущей прибылью [8].

Приведем примеры задач (8.2-8.3), решаемые с помощью систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Задача 8.2.

Двум дорожно-строительным бригадам поручено строительство шоссейной дороги между пунктами А и В. В течение 40 дней бригады работали отдельно, сначала первая, потом вторая, причем одна из них выполнила 1/3, а другая 1/6 всей работы. На 41 день бригады стали работать совместно и оставшуюся часть дороги построитли за 18 дней. Определить, за сколько дней каждая бригада, работая отдельно, могла бы построить шоссе [2, с.109-110].

Указание. Решение задачи сводится к составлению СЛАУ.
(Ответ: 90 и 60 или 48 и 144).

Задача 8.3.

Колонне автомашин было дано задание перевезти со склада в речной порт 60 т груза. В связи с неблагоприятными условиями погоды на каждый автомобиль пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось ранее. В связи с этим колонну пополнили еще четырьмя машинами. Сколько автомобилей было в колонне первоначально? [2, с.32]

Указание. Для решения задачи необходимо применение СЛАУ.

Рассмотрим задачу (8.4.) *определения объема геометрической фигуры* в разных единицах измерения.

Задача 8.4.
Бак для перемещения жидкого битума имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной 5 м, шириной 375 см и высотой 150 см. Определить объем бака в м^3, см^3, литрах.

Решение. Объем прямоугольного параллелепипеда равен $l \times b \times h$.
$V_{\text{бака}} = 5 \times 2{,}5 \times 1{,}5 = 18{,}75$ м^3.
1 м^3 = 10^6 см^3; значит, 18,75 м^3 = $18{,}75 \times 10^6$ = 18750000 см^3.
1 л = 1000 см^3; значит, 18750000 см^3 = $\frac{18750000}{1000} = 18750$ л.

Познакомимся с задачей, использующей в своем решении математические знания из раздела геометрии в средней школе.

Задача 8.5.
Плафон дорожного фонаря имеет форму усеченного конуса (рис. 8.1). Высота конуса равна 25 ед. длины, нижний и верхний диаметры – 20 и 10 ед. длины соответственно. Определить с точностью до 3 значащих цифр площадь материала, необходимого для изготовления плафона дорожного фонаря.

Решение.
Известно, что площадь конической поверхности усеченного конуса равна: $S = \pi l(R + r)$. Так как верхний и нижний диаметры известны по условию, то опираясь на рис. 1 находим: r=5 ед. длины, R=10 ед. длины и $l = \sqrt{25^2 + 5^2} = 25{,}5$ (по теореме Пифагора).
Следовательно, площадь конической поверхности равна:
$$S = \pi \; 25{,}5 \quad 10 + 5 \quad = 1201{,}7 \text{ кв.ед.},$$
т.е. площадь необходимого для изготовления плафона дорожного фонаря равна 1200 кв.ед. с точностью до 3 значащих цифр. [8]

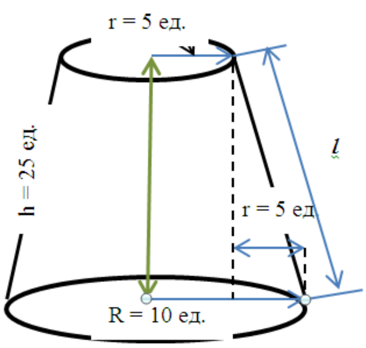


Рис.8.1.

Приведем ряд примеров, отражающих важную роль понятия *логарифма* в изучении специальных дисциплин, которые мы используем в качестве иллюстрации применения математического аппарата в курсе подготовки инженеров дорожной отрасли.

Пример 1. При строительстве дорожных сооружений часто необходимо учитывать *величину звуковой изоляции I стены* (в децибелах), которая выражается приближенной формулой $I = 12 + 14{,}3lgG$, где G - вес стены, соответствующий 1 м^2 ее поверхности в килограммах.

Пример 2. Величина концентрации водородных ионов является важнейшим показателем контроля производственных процессов химических технологий, в том числе при производстве строительных дорожных материалов. За водородный показатель (*pH*) принят взятый с противоположным знаком десятичный логарифм активности ($a_н$) ионов в растворе: $pH = -lg\ a_н$. Например, при определении качества битумов (наилучшее сцепление при 8< *pH*<9), определении прочности извести и цементов в зависимости от pH воды, в которой они разводятся. На практике величина *pH* определяется потенциометром.

Познакомимся с математическими задачами (8.6-8.7), использующими в своем решении понятие *логарифма,* и которые можно предложить студентам-дорожникам.

Задача 8.6.

Прочность бетона в возрасте 30 дней (R_{30}) составляла 1 кг/см^2 [1]. Через сколько дней прочность бетона составит 2 кг/см^2, если известно, что прочность бетона через *n* дней вычисляется по формуле $R_n = R_{30}\frac{lgn}{lg30}$?

Решение.

Так как $R_n = 2$ кг/см^2 по условию задачи, $R_{30} = 1$ кг/см^2 согласно Стандарту прочности бетона, то из формулы:

$R_n = R_{30}\frac{lgn}{lg30}$ $\quad lgn = \frac{R_n lg30}{R_{30}} = 2lg30$, и, то $lgn = lg30^2$, $n = 900$ дней [15, с. 59].

Итак, *прочность бетона* возрастает в зависимости от времени *n* по формуле

$$R_n = R_{30}\frac{lgn}{lg30},$$

где R_{30} – прочность бетона в возрасте 30 дней.

Задача 8.7.

Вычислить среднюю быстроту действия вращательного масляного вакуумного насоса, при помощи которого в течение $t = 5$ с давление в

[1] Плотность бетона по Стандарту измеряется на 28 день

баллоне снизилось от $p_1 = 760$ мм рт.ст. до $p_2 = 460$ мм рт.ст. Объем баллона $v = 10$ л., средняя быстроте действия S насоса вычисляется по формуле:

$$S = 2{,}3\frac{v}{t}lg\frac{p_1}{p_2}$$

<u>Решение.</u>

$S = 2{,}3\cdot\frac{10}{5}lg\frac{760}{460} = 4{,}6\ \ 2{,}881 - 2{,}663\ \ = 1{,}003; S \approx 1$ л/с [15].

Список использованной литературы

1. Некрасов, В.К. Строительство автомобильных дорог. – М. : Автотрансиздат, 1957. – 487 с.
2. Кутепов А.К., Рубанов А.Т. Задачник по алгебре и элементарным функциям. Учеб. Пособие для средних спец. Уч. Заведений. М., «Высшая школа», 1969., 288 с.
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. В 2 т./ Н.С. Пискунов. –13 изд.- М.: Наука, 1985. – 1 т.- 432 с.
4.Черненко, В.Д. Высшая математика в примерах и задачах : учеб. пособие для вузов. В 3 т.: Т.1. – СПб.: Политехника, 2003. – 803 с.: ил.
5. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч.1./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – 4-е изд., испр. И доп. – М.: Высш. Шк., 1986. – 304 с.
6. Высшая математика : учеб пособие : в 3 ч. / А.И. Астровский, М.П. Дымков. – Минск : БГЭУ, 2011. – Ч.2. – 413 с.
7.Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике : учеб. пособие / И.А. Каплан. – 3-е изд. – Харьков : изд-во университетское, 1967. – 946 с.
8. Берд, Д. Инженерная математика / Джон Берд. – Мос. : Додэка – XXI, 2008. – 540 с. (Серия «Карманный справочник»)
9. Ремонт автомобильных дорог: Учеб. пособие / А.В. Бусел. – Мн.: АртДизайн, 2004. – 208 с.
10. Дорожное грунтоведение и механика земляного полотна : учеб. пособие для студ. спец. «Автомомобильные дороги», «Мосты, транспортные тоннели и метрополитены» / Ю.Г.Бабаскин. – Минск : Новое знание ; Москва : Инфра-М, 2013. – 461 с. : ил., табл.
11. Производственные предприятия дорожной отрасли / Я.Н. Ковалев и др.] – Минск : АртДизайн, 2009 – Ч. 1: Теоретический курс. 2009. – 239 с.
12. Миронов, А.А. Автомобильные дороги и охрана окружающей среды / под ред. В.М. Могилевича. – Томск : Изд-во Том. Ун-та, 1986. – 280 с.
13. Рябоволов Г.И. Контрольные работы по высшей математике. Мн., «Вышэйшая школа», 1971. – 192 с.
14. Введение в геодезию. Лекция 2. – Землеустройство. Электронный источник: kadastrua.ru.
15. Практические задачи по алгебре на прогрессии и логарифмы / А.М. Палей – Минск : «Народная Асвета», 1963. – 86 с.
16. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для студ. Вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – М. : Высш.шк., 2004. – 404 с.
17. Теория вероятностей в примерах и задачах: Учебное пособие / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина, В. И. Соловьёв и др.; ГУУ. – М., 2001. – 87 с.
18. Ремонт автомобильных дорог / А. В. Бусел. — Минск : Арт Дизайн, 2004. — 205 с.
19. Диагностика автомобильных дорог / И. И. Леонович, С. В. Богданович, И. В.Нестерович. — Минск : Новое знание ; М. : Инфра-М, 2011. — 349 с., цв. ил.
20. Справочники от Автор24 : Режим входа: spravochnick.ru.

21. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Г.С.Бараненков, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко, М.: ООО "Астрель", 2004. - 495 с.
22. Маслов, Н.Н. Основы инженерной геологии и механики грунтов: Учеб. Для вузов. – М.: Высш. Школа, 1982. – 511 с.
23. Дорожно-строительные материалы: Учебник для автомобильно-дорожных ин-тов / И.М. Грушко, И.В. Королев, И.М. Борщ, Г.М. Мищенко. – М.: Транспорт, 1983. – 383 с.
24. Использование электронных образовательных ресурсов нового поколения в учебном процессе: научно-методические материалы / Бордовский Г.А., Готская И.Б., Ильина С.П., Снегурова В.И. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2007. – 31 с.
25. Голубева И.А. Использование обыкновенных дифференциальных уравнений для решения задач инженерно-строительных специальностей: Учебно-методическое пособие. – Мн. : Старпринт, 2007. – 38 с.
26. Инженерные сооружения в транспортном строительстве. В 2 кн. Кн.1: учеб. для студ. Высш. Учеб. заведений в двух книгах / П. М. Саламахин [и др.] ; под общ. Ред. П.М. Саламахина. – М.: Изд. Центр «Академия», 2008. – 352 с.
27. Инженерные сооружения в транспортном строительстве. В 2 кн. Кн.2: учеб. для студ. Высш. Учеб. заведений в двух книгах / П. М. Саламахин [и др.] ; под общ. Ред. П.М. Саламахина. – М.: Изд. Центр «Академия», 2008. – 272 с.