

НОВЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

Канд. физ.-мат. наук, доц. КОРЗНИКОВ А. Д.

Белорусский национальный технический университет

Математические модели широкого круга прикладных проблем могут быть сформулированы в терминах теории графов. В частности, многие такие модели приводят к задаче построения максимального потока в сети с множеством источников и стоков. Известные алгоритмы решения этой задачи основываются на методе расстановки пометок при поиске в сети увеличивающего пути, что предполагает ее графическое представление. Это делает их неудобными для программной реализации. В статье развита идея осуществления тернарных операций над элементами сети [1], на основе чего разработан алгоритм решения задачи о максимальном потоке с рациональными исходными данными, использующий лишь матричное представление сети (матрица пропускных способностей дуг), лишенный указанных выше недостатков, а увеличение потока на каждой итерации на максимально возможную величину приводит к уменьшению их числа.

Пусть сеть $G(V, U)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ и множеством дуг $U = \{(i, j)\}$ задана матрицей пропускных способностей дуг $D = \|d_{ij}\|_{n \times n}$, ее элемент d_{ij} равен пропускной способности дуги (i, j) , ведущей из вершины i в вершину j . Естественно полагать $d_{ij} = d_{ji}$, если дуга (i, j) неориентирована, отсутствие дуги (i, j) означает, что $d_{ij} = 0$. Обозначим через S и T множество индексов вершин, которые являются источниками и стоками соответственно, а через $a_i, i \in S, b_j, j \in T$ – их мощности (a_i – количество потока, которое может выходить из источника $i \in S, b_j$ – количество потока, которое может принять сток $j \in T$). Задача заключается

в отыскании максимального суммарного потока из всех источников в стоки, при этом для любой вершины сети, не являющейся источником или стоком величины входящих и выходящих потоков, равны. Таким образом, требуется определить дуговые потоки x_{ij}^o по дугам $(i, j) \in U$ ($0 \leq x_{ij}^o \leq d_{ij}$), т. е. потоковую матрицу $X^o = \|x_{ij}^o\|_{n \times n}$, которая дает решение сформулированной выше задачи.

Прежде чем перейти к описанию алгоритма, определим тернарные операции для матрицы $\|d_{ij}\|_{n \times n}$, введенные в [2] для вершин сети. Тернарной операцией над матрицей $\|d_{ij}\|_{n \times n}$ по индексу k называется операция

$$d_{ij} = \max(d_{ij}, \min(d_{ik}, d_{kj})) \text{ для всех } i \neq j \neq k. \quad (1)$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу $R = \|r_{ij}\|_{n \times n}$, элементы которой $r_{ij} = j, i = \overline{1, n}$. Одновременно с выполнением операции (1) изменяются элементы матрицы R по следующему правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} r_{ij}, & \text{если } d_{ij} \geq \min(d_{ik}, d_{kj}); \\ r_{ik}, & \text{если } d_{ij} < \min(d_{ik}, d_{kj}). \end{cases} \quad (2)$$

Операции (1), (2) являются основой метода построения максимального потока в многополюсной сети. Опишем вначале алгоритм решения задачи, а затем приведем его обоснование.

Подготовительный этап. Для начальной потоковой матрицы $X^o = \|x_{ij}^o\|_{n \times n}$ (как правило, на начало работы алгоритма $x_{ij}^o = 0$, для всех

$i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$) формируем кососимметричную матрицу $X = \|x_{ij}\|_{n \times n}$, где $x_{ji} = -x_{ij}^o, x_{ij} = x_{ij}^o$, если $x_{ij} > 0$, и модифицированную матрицу пропускных способностей $D^* = \|d_{ij}^*\|_{n \times n}$, полагая $d_{ij}^* = d_{ij} - x_{ij}^o, i, j = \overline{1, n}$.

Общая итерация. $\overline{D}^* = D^*$. Осуществляем тернарные операции (1) и (2) над матрицей $\overline{D}^* = \|\overline{d}_{ij}^*\|_{n \times n}$ последовательно по всем индексам $k = 1, 2, \dots, n$.

Если $\max_{\substack{i \in S \\ j \in T}} [\min(a_i, \overline{d}_{ij}^*, b_j)] = 0$ – алгоритм заканчивает работу. В противном случае вычисляем

$$\max_{\substack{i \in S \\ j \in T}} [\min(a_i, d_{ij}^*, b_j)] = [\min(a_l, d_{lp}^*, b_p)] = \delta_{lp} > 0.$$

С помощью вспомогательной матрицы $R = \|r_{ij}\|_{n \times n}$ находим путь $L_{lp} = (l, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_k, p)$, вдоль которого можно увеличить поток на максимально возможную величину δ_{lp} . Здесь $i_1 = r_{lp}, i_2 = r_{i_1 p}, i_3 = r_{i_2 p}, \dots, p = r_{i_k p}$.

Шаг 1. Полагаем:

$$\begin{aligned} x_{ij} &:= \begin{cases} x_{ij} + \delta_{lp}, x_{ji} - \delta_{lp}, & i, j \in L_{lp}; \\ x_{ij}, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\ d_{ij}^* &:= \begin{cases} d_{ij}^* - \delta_{lp}, d_{ji}^* + \delta_{lp}, & i, j \in L_{lp}; \\ d_{ij}^*, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\ a_l &:= a_l - \delta_{lp}, b_p := b_p - \delta_{lp}. \end{aligned} \quad (3)$$

Замечание. На самом деле, после общей итерации получено $|S| \times |T|$ увеличивающих путей. Поэтому шаг 1 может быть осуществлен последовательно для всех L_{st} путей $s \in S, t \in T, s, t \neq l, p$, для которых величина $\min_{(i,j) \in L_{st}} a_s, \min_{(i,j) \in L_{st}} (d_{ij}^*), b_t = \delta_{st} > 0$. При этом на каждом шаге поток будет увеличен на величину δ_{st} . После этого переходим к общей итерации.

После окончания работы алгоритма мы получим матрицу $X = \|x_{ij}\|_{n \times n}$, элементы которой x_{ij} равны дуговым потокам по дуге (i, j)

(если $x_{ij} < 0$, то поток переносится из вершины j в вершину i). Поточковая матрица X^o , которая одновременно и решение задачи линейного программирования, являющейся математической моделью задачи о максимальном потоке, получается из матрицы X следующим образом: $x_{ij}^o = \eta \cdot x_{ij}, i, j = \overline{1, n}$, где $\eta \cdot$ – функция Хевисайда. Кроме того, получены пути, по которым переносится поток, максимальный по сравнению с потоками по другим путям, ведущим из источников в стоки.

Обоснуем корректность описанного алгоритма. Заметим вначале, что теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе [3] не имеет места, если мощность источника или стока ограничена даже для задачи с одним источником и стоком. После завершения работы алгоритма имеем $\max_{\substack{i \in S \\ j \in T}} [\min(a_i, \overline{d}_{ij}^*, b_j)] = 0$.

Если $a_i = 0, i \in S$ или $b_j = 0, j \in T$, то ситуация тривиальна (использованы все мощности источников или стоков). Пусть $I = \{i \in S / a_i > 0\}, J = \{j \in T / b_j > 0\}$, тогда увеличение потока возможно только из источников множества I в стоки множества J . Но так как $d_{ij}^* = 0 \forall i \in I, j \in J$, то, как было показано в [2], любой путь, ведущий из источника множества I в сток множества J , содержит дугу, пропускная способность которой равна нулю. Таким образом, увеличение потока невозможно. То есть получен максимальный суммарный поток из источников множества S в стоки множества T , найдена потоковая матрица X^o и получены пути переноса потока с указанием его объема.

Сходимость приведенного алгоритма, если исходные данные – целые числа (задача с рациональными исходными данными легко сводится к целочисленному случаю), легко следует из следующих соображений. Любой поток, полученный в процессе работы алгоритма, определяет базисное решение соответствующей задачи линейного программирования. В силу унимодулярности матрицы ограничений последней, поток, полученный на каждой итерации, будет целочисленным [4], а следовательно, величина увеличения потока – целое число. Поскольку величина потока ограничена (пропускной спо-

собностью любого разреза), алгоритм сходится за конечное число итераций.

Проиллюстрируем работу алгоритма на следующем примере. Рассмотрим задачу построения многополюсного потока в сети, заданной матрицей пропускных способностей дуг

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 15 & 20 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 8 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 15 & 8 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 0 & 5 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 10 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

где вершины $S = 1, 2$ являются источниками потока, а множество вершин $T = 6, 7$ – стоками. Мощность источника 2 ограничена и равна $a_2 = 30$ единиц. Сеть, заданная матрицей D , изображена на рис. 1 (числа около дуг – их пропускные способности).

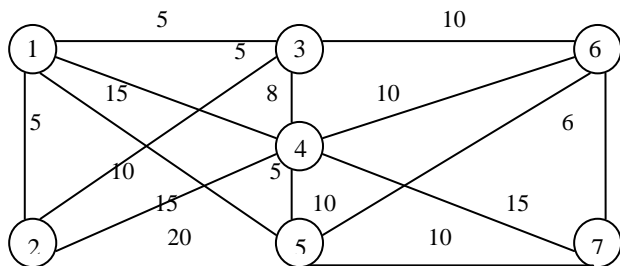


Рис. 1

Полагаем элементы потоковой матрицы $X^o = \|x_{ij}^o\|_{7 \times 7}$ равными нулю. Тогда $D^* = D$.

Общая итерация. $\bar{D}^* = D^*$. Осуществив тернарные операции (1) и (2) над матрицей $\bar{D}^* = \|\bar{d}_{ij}^*\|$, получаем:

$$\bar{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 10 & 15 & 15 & 10 & 15 \\ 15 & 0 & 10 & 15 & 20 & 10 & 15 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 10 & 0 & 15 & 10 & 15 \\ 15 & 20 & 10 & 15 & 0 & 10 & 15 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 0 & 10 \\ 15 & 15 & 10 & 15 & 15 & 10 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\delta_{17} = \max_{\substack{i \in S \\ j \in T}} [\min(a_i, \bar{d}_{ij}^*, b_j)] = \bar{d}_{17}^* = 15 > 0.$$

Находим путь L_{17} : $r_{17} = 5, r_{57} = 2, r_{27} = 4, r_{47} = 7, L_{17} = 1, 5, 2, 2, 4, 4, 7$.

Шаг 1. Полагаем

$$\begin{aligned} x_{15} &:= x_{52} := x_{24} := x_{47} := 0 + 15 := 15; \\ x_{74} &:= x_{42} := x_{25} := x_{51} := 0 - 15 := -15; \\ d_{15}^* &:= d_{24}^* := d_{47}^* := 15 - 15 := 0; \quad d_{52}^* := 5; \\ d_{74}^* &:= d_{42}^* := d_{51}^* := 15 + 15 := 30; \\ d_{25}^* &:= d_{25}^* + 15 := 20 + 15 := 35; \\ a_1 &:= a_1 - \delta_{17} = \infty - 15 = \infty; \\ b_7 &:= b_7 - \delta_{17} = \infty - 15 = \infty. \end{aligned}$$

Далее последовательно для путей:

$$\begin{aligned} L_{27} &= 2, 4, 4, 7; \quad L_{16} = 1, 5, 5, 6; \\ L_{26} &= 2, 3, 3, 6 \end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned} \delta_{27} &= \min_{(i,j) \in L_{27}} (a_i, d_{24}^*, d_{47}^*, b_j) = \min(30, 0, 0, \infty) = 0; \\ \delta_{16} &= \min_{(i,j) \in L_{16}} (a_i, d_{15}^*, d_{56}^*, b_6) = \min(\infty, 0, 10, \infty) = 0; \\ \delta_{26} &= \min_{(i,j) \in L_{26}} (a_i, d_{23}^*, d_{36}^*, b_6) = \min(30, 10, 10, \infty) = 10 > 0. \end{aligned}$$

Шаг 1. Полагаем:

$$\begin{aligned} x_{23} &:= x_{23} + \delta_{26} = 10; \quad x_{36} := x_{36} + \delta_{26} = 10; \\ x_{63} &:= x_{63} - \delta_{26} = -10; \quad x_{32} := x_{32} - \delta_{26} = -10; \\ d_{23}^* &:= d_{23}^* - \delta_{26} = 0; \quad d_{36}^* := d_{36}^* - \delta_{26} = 0; \\ d_{63}^* &:= d_{63}^* + \delta_{26} = 20; \quad d_{32}^* := d_{32}^* + \delta_{26} = 20; \\ a_2 &:= a_2 - 10 = 20; \quad b_6 := b_6 - 10 = \infty. \end{aligned}$$

Матрица X имеет вид:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ -15 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полагаем $r_{ij} := j, i, j = \overline{1,7}$.

Общая итерация. $\overline{D}^* = D^*$. После осуществления операций (1), (2) над матрицей $\overline{D}^* = \|\overline{d}_{ij}^*\|$ и матрицей $R = \|r_{ij}\|$ получаем:

$$\overline{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 30 & 0 & 10 & 10 & 35 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 0 & 10 & 20 & 10 & 10 \\ 30 & 30 & 10 & 0 & 30 & 10 & 10 \\ 30 & 10 & 10 & 10 & 0 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 20 & 10 & 20 & 0 & 10 \\ 30 & 30 & 10 & 30 & 30 & 10 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 6 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем $\max_{\substack{i \in S \\ j \in T}} [\min(a_i, \overline{d}_{ij}^*, b_j)] = \delta_{26} = 10 > 0$.

Находим путь $L_{26} = 2, 5, 5, 6$.

Шаг 1. По формулам (3) пересчитываем элементы:

$$\begin{aligned} x_{25} &:= x_{25} + 10 = -15 + 10 = -5; \\ x_{56} &:= x_{56} + 10 = 0 + 10 = 10; \\ x_{52} &:= x_{52} - 10 = 15 - 10 = 5; \\ x_{65} &:= x_{65} - 10 = 0 - 10 = -10; \\ d_{25}^* &:= d_{25}^* - \delta_{26} = 35 - 10 = 25; \\ d_{52}^* &:= d_{52}^* + \delta_{26} = 15; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{56}^* &:= d_{56}^* - \delta_{26} = 10 - 10 = 0; \\ d_{65}^* &:= d_{65}^* + \delta_{26} = 10 + 10 = 20; \\ a_2 &:= a_2 - \delta_{26} = 20 - 10 = 10; \\ b_6 &:= b_6 - \delta_{26} = \infty - 10 = \infty. \end{aligned}$$

Последовательно для путей:

$$L_{27} = 2, 5, 5, 7; L_{16} = 1, 4, 4, 6;$$

$L_{17} = 1, 2, 2, 5, (5,7)$ находим

$$\delta_{27} = \min(a_2, d_{25}^*, d_{57}^*, b_7) = \min(10, 25, 10, \infty) = 10 > 0.$$

Шаг 1. По формулам (3) пересчитываем компоненты матриц D^* и X :

$$\begin{aligned} x_{25} &:= x_{25} + \delta_{27} = -5 + 10 = 5; \\ x_{57} &:= x_{57} + \delta_{27} = 0 + 10 = 10; \\ x_{52} &:= x_{52} - \delta_{27} = 5 - 10 = -5; \\ x_{75} &:= x_{75} - \delta_{27} = 0 - 10 = -10; \\ d_{25}^* &:= d_{25}^* - \delta_{27} = 25 - 10 = 15; \\ d_{57}^* &:= d_{57}^* - \delta_{27} = 10 - 10 = 0; \\ d_{52}^* &:= d_{52}^* + \delta_{27} = 15 + 10 = 25; \\ d_{75}^* &:= d_{75}^* + \delta_{27} = 10 + 10 = 20; \\ a_2 &:= a_2 - \delta_{27} = 10 - 10 = 0; \\ b_7 &:= b_7 - \delta_{27} = \infty - 10 = \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{16} &= \min_{(i,j) \in L_{16}} (a_i, d_{ij}^*, b_j) = \min(a_1, d_{14}^*, d_{46}^*, b_6) = \\ &= \min(\infty, 5, 10, \infty) = 5 > 0. \end{aligned}$$

Шаг 1:

$$\begin{aligned} x_{14} &:= x_{14} + \delta_{16} = 0 + 5 = 5; \\ x_{46} &:= x_{46} + \delta_{16} = 0 + 5 = 5; \\ x_{41} &:= x_{41} - \delta_{16} = -5; \\ x_{64} &:= x_{64} - \delta_{16} = 0 - 5 = -5; \\ d_{14}^* &:= d_{14}^* - \delta_{16} = 5 - 5 = 0; \\ d_{46}^* &:= d_{46}^* - \delta_{16} = 10 - 5 = 5; \\ d_{41}^* &:= d_{41}^* + \delta_{16} = 5 + 5 = 10; \\ d_{64}^* &:= d_{64}^* + \delta_{16} = 10 + 5 = 15; \\ a_1 &:= a_1 - \delta_{16} = \infty - 5 = \infty; \\ b_6 &:= b_6 - \delta_{16} = \infty - 5 = \infty; \end{aligned}$$

$$\delta_{17} = \min(a_1, d_{12}^*, d_{25}^*, d_{57}^*) = \min(\infty, 5, 15, 0, \infty) = 0.$$

Получена новая матрица X

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ -5 & -15 & 0 & 0 & 0 & 5 & 15 \\ -15 & -5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -5 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полагаем $r_{ij}^* := j, i, j = \overline{1,7}$. Переходим к общей итерации. После осуществления третьей общей итерации получим матрицы:

$$\overline{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 15 & 0 & 5 & 5 & 15 & 5 & 5 \\ 15 & 20 & 0 & 8 & 15 & 5 & 5 \\ 15 & 30 & 8 & 0 & 15 & 5 & 5 \\ 30 & 25 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 20 & 20 & 20 & 15 & 20 & 0 & 6 \\ 20 & 30 & 8 & 30 & 20 & 6 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $a_2 = 0$, то $\max_{\substack{i \in S \\ j \in T}}[\min(a_i, \overline{d}_{ij}^*, b_j)] = \overline{d}_{16}^* = \overline{d}_{17}^* = 5 > 0$. С помощью матрицы R найдем путь $L_{17} = 1, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 7$.

Шаг 1. По формулам (3) пересчитываем элементы потоковой матрицы X , матрицы модифицированных пропускных способностей \overline{D}^* и мощности a_1, a_2, b_6, b_7 .

Для пути $L_{16} = 1, 3, 3, 4, 4, 6$ величина

$$\delta_{16} = \min(a_1, d_{13}^*, d_{34}^*, d_{46}^*, b_6) = \min(\infty, 0, 3, 0, \infty) = 0.$$

Матрица X имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -10 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 \\ -5 & -15 & -5 & 0 & 0 & 10 & 15 \\ -15 & -5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & -10 & -10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & -10 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полагая $r_{ij} := j, i, j = \overline{1,7}$, переходим к общей итерации, после осуществления которой получаем:

$$\overline{D}^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 15 & 20 & 0 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 15 & 30 & 13 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 30 & 25 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 0 & 1 \\ 20 & 30 & 13 & 30 & 20 & 11 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 2 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Так как $\max_{\substack{i \in S \\ j \in T}}[\min(a_i, \overline{d}_{ij}^*, b_j)] = 0$, то полученный двухполюсный поток является максимальным.

Сеть с найденным потоком изображена на рис. 2. Первое число – пропускная способность дуги, второе – дуговой поток.

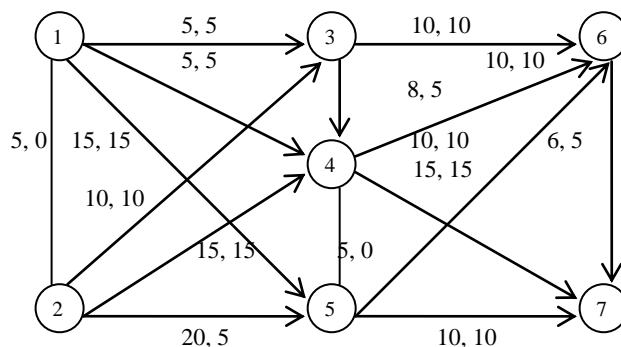


Рис. 2

Потоковая матрица

$$X^o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 15 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку элементы $\bar{d}_{ij}^* = 0$; $i=1, 2$; $j=6, 7$, то величину потока нельзя увеличить, даже если мощности источников и стоков будут не ограничены. Это означает, что любой путь, ведущий из источника в сток, содержит дугу с нулевой пропускной способностью («насыщенную» дугу). Множество таких дуг образует минимальный разрез R, \bar{R} , отделяющий источники от стоков. В случае необходимости, минимальный разрез R, \bar{R} легко находится с помощью матрицы \bar{D}^* . Действительно, вершины множества S и все вершины j , для которых хотя бы для одного $i \in S, \bar{d}_{ij}^* > 0$, относятся к множеству R , остальные ($\bar{d}_{ij}^* = 0 \forall i \in S$) – к множеству \bar{R} . В рассматриваемом примере $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\bar{R} = \{6, 7\}$, минимальный раз-

рез $R, \bar{R} = \{(3, 6), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7)\}$ имеет пропускную способность, равную 55 единиц и равную величине максимального суммарного потока из источников $S = \{1, 2\}$ в сток $T = \{6, 7\}$.

ВЫВОД

Разработан новый алгоритм нахождения максимального потока в многополюсной сети, который основан лишь на матричном ее описании и не требует графического представления последней. В силу этого программная реализация данного алгоритма является очень простой, и он может быть использован при решении широкого круга проблем, математические модели которых могут быть сформулированы в терминах теории графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Floyd, R. W.** Aigorithm 97: Shortest Path. Communication of ACM / R. W. Floyd – 1962. – № 5 (6). – 345 p.
2. **Корзников, А. Д.** Моделирование и оптимизация процесса перемещения грузов в логистической транспортной системе / А. Д. Корзников, В. А. Корзников // Вестник БНТУ. – 2003. – № 6. – С. 54–60.
3. **Форд, Л. Р.** Потоки в сетях / Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон. – М.: Мир, 1963. – 276 с.
4. **Veinott, A. F.** Integer Extrimе Points / A. F. Veinot, Jr. and G. B. Dantzig // SIAM. Revjew. – 1968. – No 10 (3). – P. 371–372.

Поступила 22.04.2013

УДК 517.977

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СУЩЕСТВЕННО РАЗНОТЕМПОВЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Канд. физ.-мат. наук, доц. **КОПЕЙКИНА Т. Б.¹⁾**, **ГРЕКОВА А. В.²⁾**

¹⁾Белорусский государственный технологический университет,
²⁾Белорусский национальный технический университет

В [1] была рассмотрена проблема управляемости разнотемповой сингулярно возмущенной динамической системы (РСВДС):

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1u; \\ \mu \dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2u; \\ \mu^2 \dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3u, \end{cases} \quad (1)$$