УДК 536.2:519.6

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАГРЕВАНИИ СТЕРЖНЯ

Канд. физ.-мат. наук, доц. ЛАСЫЙ П. Г.,
докт. физ.-мат. наук, проф. МЕЛЕШКО И. Н.

Белорусский национальный технический университет

Рассмотрим задачу о распределении температуры в тонком, однородном, теплоизолированном стержне конечной длины, внутри которого находятся постоянно действующие источники теплоизлучения, а начальная и граничная температуры равны нулю.

Математической моделью этой задачи является неоднородное одномерное уравнение теплопроводности

$$\partial_t T = a^2 \partial_{xx} T + q(x, t), \tag{1}$$

где $T = T(x, t)$ – температура стержня длиной $l > 0$ в точке $x \in [0, l]$ в момент времени $t \geq 0$; a^2 – физическая постоянная (коэффициент температуропроводности), характеризующая теплопроводность материала, из которого изготовлен стержень; $q(x, t)$ –мощность источника теплоизлучения с точностью до постоянного множителя.

Функцию $q(x, t)$ будем предполагать кусочно-монотонной по аргументу t на любом конечном отрезке равномерно по всем $x \in [0, l]$ и удовлетворяющей условию Липшица, т. е. существует константа $L > 0$ такая, что для всех $x_1, x_2 \in [0, l]$ и $t_1, t_2 \geq 0$ выполняется неравенство

$$\left|q(x_1, t_1) - q(x_2, t_2)\right| \leq L\left(\left|x_1 - x_2\right| + \left|t_1 - t_2\right|\right).$$

В начальный момент времени и на концах стержня температура равна нулю, т. е.

$$T(x, 0) = 0, \ x \in [0, l] \tag{2}$$

и

$$T(0, t) = T(l, t) = 0, \ t \geq 0. \tag{3}$$

Благодаря условию Липшица решение смешанной задачи (2), (3) для уравнения (1) может быть представлено в виде равномерно сходящегося на отрезке [0, l] и любом конечном промежутке временной оси ряда [1, с. 552]

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t \exp(-\alpha k^2 s) q_k(t - s) ds \right) \sin k\omega x, \tag{4}$$

где $\omega = \dfrac{\pi}{l}$, $\alpha = (a\omega)^2$; $q_k(t) = \dfrac{2}{l} \int_0^l q(y, t) \sin k\omega y \, dy$; $k \in N$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье по синусам функции $q(x, t)$ на отрезке [0, l].

Приближенное вычисление температуры стержня по формуле (4) связано с большими трудностями, так как приходится вычислять коэффициенты ряда Фурье для функции $q(x, t)$, да и общая оценка допускаемой погрешности весьма затруднительна. В настоящей работе предлагается другой способ решения этой задачи, основанный на представлении температуры с помощью специальной функции, являющейся быстро сходящимся степенным рядом с экспоненциальными по времени коэффициентами. Речь идет о пси-функции [2]

$$\Psi_r(\lambda, t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda k^2 t) k^{-r} z^k, \tag{5}$$

зависящей от действительных переменных $r, \lambda > 0, t \geq 0$ и комплексного аргумента z.

На единичной окружности $z = \exp(i\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\Psi_r(\lambda, t, \exp(i\varphi)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda k^2 t) k^{-r} \cos k\varphi; \\ \operatorname{Im}\Psi_r(\lambda, t, \exp(i\varphi)) &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\lambda k^2 t) k^{-r} \sin k\varphi. \end{aligned} \tag{6}$$

Найдем представление решения (4) поставленной выше смешанной задачи через пси-функцию (5). В самом деле:

$$T(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t \exp(-\alpha k^2 s) \left(\frac{2}{l} \int_0^l q(y, t-s) \sin k\omega y \, dy \right) ds \right) \sin k\omega x =$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^l dy \int_0^t q(y, t-s) \times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\alpha k^2 s) \cos k\omega(y-x) - \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\alpha k^2 s) \cos k\omega(y+x) \right) ds,$$

откуда ввиду первой из формул (6)

$$T(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l dy \int_0^t q(y, t-s) \operatorname{Re} \times$$

$$\times \Big(\Psi_0 \big(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))\big) - \Psi_0 \big(\alpha, s, \exp(i\omega(y+x))\big) \Big) ds. \tag{7}$$

Займемся приближенным вычислением температуры (7). Зафиксируем $t > 0$ и разобьем прямоугольник $[0, l] \times [0, t]$ прямыми:

$$x = x_m = mh, \ m = \overline{0, m_1}, \ h = \frac{l}{m_1}; \ t = t_n = n\tau, \ n = \overline{0, n_1}, \ \tau = \frac{t}{n_1}$$

на $m_1 n_1$ прямоугольников и заменим под знаком интеграла в правой части формулы (7) в каждом из прямоугольников $[x_{m-1}, x_m] \times [t_{n-1}, t_n]$, $m = \overline{1, m_1}$,

$n=\overline{1, n_1}$ функцию $q(y, t-s)$ ее значением в средней точке прямоугольника. В результате, использовав формулы (6), после несложного интегрирования получим:

$$T(x, t)\approx\frac{1}{l}\sum_{m=1}^{m_1}\sum_{n=1}^{n_1}\int_{x_{m-1}}^{x_m}dy\int_{t_{n-1}}^{t_n}q\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}, t-t_{n-1}-\frac{\tau}{2}\right)\times$$
$$\times\operatorname{Re}\left(\Psi_0\left(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))\right)-\Psi_0\left(\alpha, s, \exp(i\omega(y+x))\right)\right)ds=$$
$$=\frac{1}{\alpha\pi}\sum_{m=1}^{m_1}\sum_{n=1}^{n_1}q\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}, t-t_{n-1}-\frac{\tau}{2}\right)\times$$
$$\times\operatorname{Im}\left(\Psi_3\left(\alpha, s, \exp(i\omega(y+x))\right)-\Psi_3\left(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))\right)\right)\Big|_{t_{n-1}}^{t_n}\Big|_{m-1}^{x_m}.$$

Таким образом, мы нашли следующую формулу для приближенного вычисления решения смешанной задачи (1)–(3)

$$T(x, t)\approx T_{m_1n_1}(x, t)=$$
$$=\frac{1}{\alpha\pi}\sum_{m=1}^{m_1}\sum_{n=1}^{n_1}q\left(x_{m-1}+\frac{h}{2}, t-t_{n-1}-\frac{\tau}{2}\right)\times$$
$$\times\operatorname{Im}\left(\Psi_3\left(\alpha, s, \exp(i\omega(y+x))\right)-\Psi_3\left(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x))\right)\right)\Big|_{t_{n-1}}^{t_n}\Big|_{m-1}^{x_m}. \quad (8)$$

Прежде чем вычислить погрешность формулы (8), найдем одну полезную оценку для пси-функции $\Psi_2(\alpha, t, \exp(i\omega x))$.

Зафиксируем $\gamma\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и обозначим

$$a_k(t, s)=\frac{1-\exp(-\alpha k^2(t-s))}{k^{2\gamma}};\ b_k(x, s)=\frac{\exp(-\alpha k^2 s)\cos k\omega x}{k^{2-2\gamma}},\ k\in N.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\Psi_2\left(\alpha, z, \exp(i\omega x)\right)\Big|_s^t=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp(-\alpha k^2 t)-\exp(-\alpha k^2 s)}{k^2}\cos k\omega x=$$
$$=-\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t, s)b_k(x, s) \quad (9)$$

и при всех $t\ge s\ge 0,\ x\in R$ ряд (9) сходится равномерно и имеет место неравенство

$$\left|\operatorname{Re}\Psi_2(\alpha, z, \exp(i\omega x))\Big|_s^t\right|\le\frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma}\left(\frac{2\alpha}{5\gamma}\right)^{\gamma}(t-s)^{\gamma}. \quad (10)$$

Для доказательства рассмотрим неотрицательную функцию

$$\varphi_k(y)=\frac{1-\exp(-\alpha k^2 y)}{k^{2\gamma}},\ k\in N,\ y\ge 0.$$

Очевидно, $\varphi_k(y) \le \dfrac{1}{k^{2\gamma}}$ и, значит:

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(y) = 0 \text{ равномерно по } y \ge 0. \qquad (11)$$

Далее, обозначив $\alpha k^2 y = v,$ получим:

$$\varphi_k(y) = \alpha^\gamma \chi(v) y^\gamma;\ \chi(v) = \frac{1-\exp(-v)}{v^\gamma}. \qquad (12)$$

Производная функции $\chi(v)$ равна $\chi'(v) = \dfrac{v+\gamma-\gamma\exp v}{v^{\gamma+1}\exp v}$, и поскольку $\chi'\left(\dfrac{5\gamma}{2}\right) > 0,$ а $\chi'\left(\dfrac{2(1-\gamma)}{\gamma}\right) < 0,$ то единственная точка максимума v_0 данной функции принадлежит интервалу $\left(\dfrac{5\gamma}{2}, \dfrac{2(1-\gamma)}{\gamma}\right)$. Тогда $\chi(v) < \left(\dfrac{2}{5\gamma}\right)^\gamma$, $v \ge 0$ и, как следует из (12):

$$\varphi_k(y) \le \left(\frac{2\alpha}{5\gamma}\right)^\gamma y^\gamma,\ k \in N,\ y \ge 0.$$

Так как $a_k(t,\ s) = \varphi_k(t-s),\ k \in N,$ то

$$a_k(t,\ s) \le \left(\frac{2\alpha}{5\gamma}\right)^\gamma (t-s)^\gamma,\ k \in N. \qquad (13)$$

Из приведенного выше исследования функции $\chi(v)$ и (12) следует, что при фиксированных t и s последовательность $a_k(t,\ s),\ k \in N$ возрастает, если $\alpha k^2(t-s) \le v_0,$ и убывает, если $\alpha k^2(t-s) > v_0.$ Благодаря же (11) эта последовательность равномерно бесконечно мала при всех $t \ge s \ge 0.$

Поскольку

$$|b_k(x,\ s)| = \left|\frac{\exp(-\alpha k^2 s)\cos k\omega x}{k^{2-2\gamma}}\right| \le \frac{1}{k^{2-2\gamma}},\ k \in N,$$

то при любом натуральном n и $x \in R,\ s \ge 0$

$$|B_n(x,\ s)| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x,\ s)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2-2\gamma}} \le 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-2\gamma}} = \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma}. \qquad (14)$$

Учитывая (14) и свойства последовательности $a_k(t,\ s),\ k \in N,$ установленные выше, мы можем утверждать, что ряд (9) сходится равномерно при $t \ge s \ge 0$ и $x \in R$ по признаку Дирихле [3, с. 432].

Для доказательства оценки (10) применим преобразование Абеля [3, с. 307] к частичной сумме ряда (9)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(t,\,s)b_k(x,\,s)=a_n(t,\,s)B_n(x,\,s)+\sum_{k=1}^{n-1}\big(a_k(t,\,s)-a_{k+1}(t,\,s)\big)B_k(x,\,s).$$

Отсюда, использовав (14), получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t,\,s)b_k(x,\,s)\right|\le\frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma}\left(a_n(t,\,s)+\sum_{k=1}^{n-1}\left|a_k(t,\,s)-a_{k+1}(t,\,s)\right|\right).$$

Обозначим через k_0 максимальное из натуральных чисел k, для которых $\alpha k^2(t-s)\le v_0$. Тогда, раскрыв модули в предыдущем неравенстве, можем переписать его в виде

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t,\,s)b_k(x,\,s)\right|\le$$

$$\le\frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma}\Big(a_{k_0}(t,\,s)+a_{k_0+1}(t,\,s)+\left|a_{k_0}(t,\,s)-a_{k_0+1}(t,\,s)\right|-a_1(t,\,s)\Big),$$

откуда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t,\,s)b_k(x,\,s)\right|\le\frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma}\max\left\{a_{k_0}(t,\,s),\,a_{k_0+1}(t,\,s)\right\}$$

и, следовательно, ввиду (13) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t,\,s)b_k(x,\,s)\right|\le\frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma}\left(\frac{2\alpha}{5\gamma}\right)^{\gamma}(t-s)^{\gamma}$, что при $n\to\infty$ и доказывает (10).

Займемся теперь оценкой погрешности формулы (8). Эта погрешность представляется в виде

$$T(x,\,t)-T_{m_1n_1}(x,\,t)=\frac{1}{\alpha l}\sum_{m=1}^{m_1}\sum_{n=1}^{n_1}\left(I_{mn}^{(1)}-I_{mn}^{(2)}\right),$$

где

$$I_{mn}^{(1)}=\alpha\int_{x_{m-1}}^{x_m}dy\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(q(y,\,t-s)-q\left(x_{m-1}+\frac{h}{2},\,t-t_{n-1}-\frac{\tau}{2}\right)\right)\times$$
$$\times\operatorname{Re}\Psi_0\big(\alpha,\,s,\,\exp(i\omega(y-x))\big)ds;$$

$$I_{mn}^{(2)}=\alpha\int_{x_{m-1}}^{x_m}dy\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(q(y,\,t-s)-q\left(x_{m-1}+\frac{h}{2},\,t-t_{n-1}-\frac{\tau}{2}\right)\right)\times$$
$$\times\operatorname{Re}\Psi_0\big(\alpha,\,s,\,\exp(i\omega(y+x))\big)ds.$$

Для интеграла $I_{mn}^{(1)}$ используем сначала вторую теорему о среднем значении [3, с. 119] по аргументу s, разбив, если потребуется, отрезок $[t_{n-1},\,t_n]$

на части, внутри каждой из которых функция $q(y, t-s)$ монотонна. Для простоты предположим, что эта функция монотонна на всем отрезке $[t_{n-1}, t_n]$. В результате после интегрирования мы получим:

$$I_{mn}^{(1)} = \alpha \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left(\left(q(y, t-t_{n-1}) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2} \right) \right) \times \right.$$

$$\times \int_{t_{n-1}}^{s_n} \operatorname{Re} \Psi_0 \left(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x)) \right) ds +$$

$$\left. + \left(q(y, t-t_n) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2} \right) \right) \int_{s_n}^{t_n} \operatorname{Re} \Psi_0 \left(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x)) \right) ds \right) dy =$$

$$= -\int_{x_{m-1}}^{x_m} \left(\left(q(y, t-t_{n-1}) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2} \right) \right) \operatorname{Re} \Psi_2 \left(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x)) \right) \Big|_{t_{n-1}}^{s_n} + \right.$$

$$\left. + \left(q(y, t-t_n) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2} \right) \right) \operatorname{Re} \Psi_2 \left(\alpha, s, \exp(i\omega(y-x)) \right) \Big|_{s_n}^{t_n} \right) dy,$$

где $s_n \in [t_{n-1}, t_n]$.

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем значении, найдем:

$$I_{mn}^{(1)} = -\left(\left(q(y_m, t-t_{n-1}) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2} \right) \right) \times \right.$$

$$\times \operatorname{Re} \Psi_2 \left(\alpha, s, \exp(i\omega(y_m - x)) \right) \Big|_{t_{n-1}}^{s_n} +$$

$$+ \left(q(y_m, t-t_n) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2} \right) \right) \times$$

$$\left. \times \operatorname{Re} \Psi_2 \left(\alpha, s, \exp(i\omega(y_m - x)) \right) \Big|_{s_n}^{t_n} \right) h, \ y_m \in [x_{m-1}, x_m].$$

Отсюда, учитывая липшицевость функции $q(x, t)$ и неравенство (10), получим:

$$\left| I_{mn}^{(1)} \right| \le \left| q(y_m, t-t_{n-1}) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2} \right) \right| \left| \operatorname{Re} \Psi_2 (\alpha, s, \exp(i\omega(y_m - x))) \Big|_{t_{n-1}}^{s_n} \right| +$$

$$+ \left| q(y_m, t-t_n) - q\left(x_{m-1} + \frac{h}{2}, t - t_{n-1} - \frac{\tau}{2} \right) \right| \left| \operatorname{Re} \Psi_2 (\alpha, s, \exp(i\omega(y_m - x))) \Big|_{s_n}^{t_n} \right| h \le$$

$$\le L \left(\frac{h}{2} + \frac{\tau}{2} \right) \frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma} \left(\frac{2\alpha}{5\gamma} \right)^{\gamma} \left((s_n - t_{n-1})^{\gamma} + (t_n - s_n)^{\gamma} \right) h \le \frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma} \left(\frac{2\alpha}{5\gamma} \right)^{\gamma} L(h+\tau) h \tau^{\gamma}.$$

Совершенно аналогично:

$$\left|I_{mn}^{(2)}\right| \le \frac{4(1-\gamma)}{1-2\gamma}\left(\frac{2\alpha}{5\gamma}\right)^{\gamma} L(h+\tau)h\tau^{\gamma}$$

и, следовательно:

$$\left|T(x,t)-T_{m_1n_1}(x,t)\right| = \frac{1}{\alpha l}\left|\sum_{m=1}^{m_1}\sum_{n=1}^{n_1}\left(I_{mn}^{(1)}-I_{mn}^{(2)}\right)\right| \le \frac{1}{\alpha l}\sum_{m=1}^{m_1}\sum_{n=1}^{n_1}\left(\left|I_{mn}^{(1)}\right|+\left|I_{mn}^{(2)}\right|\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha l}\sum_{m=1}^{m_1}\sum_{n=1}^{n_1}\frac{8(1-\gamma)}{1-2\gamma}\left(\frac{2\alpha}{5\gamma}\right)^{\gamma} L(h+\tau)h\tau^{\gamma} = \frac{8(1-\gamma)}{\alpha^{1-\gamma}(1-2\gamma)}\left(\frac{2}{5\gamma}\right)^{\gamma} Lt(h+\tau)\tau^{\gamma-1}.$$

Зафиксируем произвольное $\beta \in (0, 1)$. Тогда при $h \le \tau^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}$ из предыдущего неравенства вытекает равномерная по $x \in [0, l]$ оценка погрешности приближенного решения (8)

$$\left|T(x,t)-T_{m_1n_1}(x,t)\right| \le \frac{8(1-\gamma)}{\alpha^{1-\gamma}(1-2\gamma)}\left(\frac{2}{5\gamma}\right)^{\gamma} Lt(h^{\beta}+\tau^{\gamma}). \quad (15)$$

Все проведенные выше исследования позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *При сделанных предположениях относительно функции* $q(x, t)$ *точное решение смешанной задачи* (2), (3) *для неоднородного уравнения теплопроводности* (1) *выражается через пси-функцию* (5) *по формуле* (7), *а приближенное – по формуле* (8). *Допускаемая при этом погрешность вычисления для произвольных фиксированных t*> 0, $\beta \in (0, 1)$, $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *равномерно по* $x \in [0, l]$ *не превышает величины*

$$\frac{8(1-\gamma)}{\alpha^{1-\gamma}(1-2\gamma)}\left(\frac{2}{5\gamma}\right)^{\gamma} Lt(h^{\beta}+\tau^{\gamma}),$$

где $h = \frac{l}{m_1}$; $\tau = \frac{t}{n_1}$; $h \le \tau^{\frac{1-\gamma}{1-\beta}}$ *и, таким образом, имеет порядок* $O\left(h^{\beta}+\tau^{\gamma}\right)$.

Пример. Рассмотрим смешанную задачу (2), (3) для уравнения теплопроводности

$$\partial_t T = \partial_{xx} T + (x - x^2 + 2t)\sin(2xt) - 2t^2(1-x)\cos(2xt),\ x \in [0, 1],\ t \ge 0.$$

Точным решением этой задачи является функция

$$T(x, t) = (1-x)\sin^2(xt).$$

Тестирование приближенного решения этой задачи по формуле (8), проведенное в среде компьютерной алгебры Mathematica, показало, что уже при $m_1 = 50,\ n_1 = 150$ во всех внутренних узлах сетки x_k = 0,1k,

$k=\overline{0,10}$, $t_j = j,\ j=\overline{0,10}$ точное решение отличается от приближенного по абсолютной величине меньше, чем на 10^{-2}.

ВЫВОД

С помощью специальной пси-функции найдено точное и приближенное представления решения однородной смешанной задачи для неоднородного одномерного уравнения теплопроводности. Приведена также оценка погрешности приближенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дифференциальные уравнения математической физики / Н. С. Кошляков [и др.]. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 767 с.
2. Ласый, П. Г. Приближенное представление решения одной смешанной задачи теории теплопроводности с помощью специальных функций / П. Г. Ласый, И. Н. Мелешко //Энергетика… (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). – 2009. – № 1. – С. 53–58.
3. Фихтенгольц,Г. М.Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М.: ГИФМЛ, 1962. –Т. 2. –807 с.

Представлена кафедрой
высшей математики № 2 Поступила 21.11.2012

УДК 621.57+620.97

ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ГРУНТОВЫХ ТЕПЛООБМЕННИКОВ

Асп. ФИЛАТОВ С. О.

Белорусский государственный технологический университет

В последнее время за рубежом все большее развитие получает направление в нетрадиционной энергетике, основанное на утилизации низкопотенциальной теплоты грунта [1–4]. В большинстве случаев такие системы включают в себя один или несколько вертикальных грунтовых теплообменников (ВГТО), работающих совместно с тепловым насосом (ТН). При этом ВГТО соединен с испарителем ТН. В качестве ВГТО могут быть использованы коаксиальные (рис. 1а), U-образные ВГТО с одной (рис. 1б) или несколькими трубами (рис. 1в, г, е), а также ВГТО с каналами более сложной формы [5] (рис. 1д). Кроме того, известен частный случай ВГТО – энергосваи, представляющие собой строительные сваи с трубами теплообменника, по которым циркулирует промежуточный теплоноситель (рис. 1е).