УДК 519.6:517.5

О ПРИБЛИЖЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛОГАРИФМАМИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

д.ф.-м.н. [1] **Мелешко И.Н.**, к.ф.-м.н. [1] **Ласый П.Г.**, к.ф.-м.н. [1] **Ширвель П.И.**

[1] *Белорусский национальный технический университет, Минск*

Многие важные прикладные задачи приводят к вариационной проблеме относительно функции двух переменных. Например, задача теории упругости о равновесии растянутой упругой мембраны приводит к задаче о минимуме интеграла

$$\iint_D \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 - 2u\right] dxdy, \quad u = u(x,y),$$

Если мембрана однородная, то этот двойной интеграл с точностью до постоянного множителя определяет ее потенциальную энергию при малых прогибах.

В свою очередь, задача о минимуме такого интеграла, когда область D – единичный круг при граничном условии Дирихле эквивалентна следующей краевой задаче для уравнения Пуассона в единичном круге:

$$\Delta u = -1, \qquad r < 1, \tag{1}$$

$$u_{|r=1} = f(\varphi), \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \tag{2}$$

Приближенное представление логарифмами вариационной задачи о минимуме интеграла конструируется на основе точного решения соответствующей краевой задачи (1)-(2).

1. Точное представление решения краевой задачи (1)-(2). Представим искомую функцию u в виде двух слагаемых

$$u = u_1 + u_2,$$

первое из которых является решением первой краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta u_1 = 0, \qquad r < 1, \tag{3}$$

$$u_{1|r=1} = f(\varphi), \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \tag{4}$$

Второе же слагаемое удовлетворяет уравнению Пуассона (1) и на границе круга принимает нулевое значение

$$\Delta u_2 = 0,$$

Известно (см., например, [1], [2]), что решение краевой задачи (3)-(4) может быть найдено при помощи интеграла Пуассона

$$u_1(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau, \quad r > 1, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \tag{5}$$

С помощью теории логарифмического потенциала и рядов Фурье [3] функция u_2 может быть представлена следующим интегралом:

$$u_2(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\iint_{|t|<1} \ln\frac{|1-z\bar{t}|}{|t-z|}d\tau, \; t = \rho e^{i\tau}, \; z = re^{i\varphi}. \tag{6}$$

Следовательно, точное решение краевой задачи (1)-(2)

$$u\ (r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\tau\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)+r^2}d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|<1}\ln\frac{\left|1-z\bar{t}\right|}{\left|t-z\right|}d\sigma \qquad (7)$$

2. Приближенное решение краевой задачи (3)-(4).

Зададим на отрезке [-π; π] систему точек

$$\varphi_k=kh,\ \ k=-n,...,-1,0,1,...,n,h=\frac{2}{2n+1}$$

и приблизим плотность $f(\varphi)$ интеграла Пуассона на этом отрезке по формуле

$$f(\varphi)\approx\tilde{f}(\varphi)=\sum_{-n}^{n}\Theta_k(\varphi)f(\varphi_k), \qquad (8)$$

где

$$\Theta_k(\varphi)=\begin{cases}1,\ \varphi\in\left[\varphi_k-\frac{h}{2},\ \varphi_k+\frac{h}{2}\right];\\ 0,\ \varphi\notin\left[\varphi_k-\frac{h}{2},\ \varphi_k+\frac{h}{2}\right].\end{cases}$$

Тогда подставляя в представление (5) решение краевой задачи (3)-(4) интегралом Пуассона вместо плотности ее приближение по формуле (8), получим приближенную формулу

$$u_1(r,\varphi)\approx\tilde{u}_1(r,\varphi)=\sum_{-n}^{n}A_k(r,\varphi)f(\varphi_k), \qquad (9)$$

где коэффициенты

$$A_k(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)\ +r^2}d\tau. \qquad (10)$$

Теорема 1. Коэффициенты приближенной формулы (9) $A_k(r,\varphi)$ неотрицательны

$$\sum_{-n}^{n}A_k(r,\varphi)\equiv1,\quad r<1,\ -\pi\le\varphi\le\pi, \qquad (11)$$

а для их вычисления имеет место единая формула

$$A_k(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\left[h+2\operatorname{Im}\left(\ln\left(1-ze^{-i(\varphi_k+h/2)}\right)-\ln\left(1-ze^{-i(\varphi_k-h/2)}\right)\right)\right], \qquad (12)$$

где $z=re^{i\varphi}$, а для логарифмической функции выбрана ветвь, принимающая на промежутке (-1,1) действительной оси действительные значения.

Доказательство.

Так как ядро интеграла Пуассона

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)\ +r^2}>0,\qquad r\neq1,$$

то из представления (10) для коэффициентов $A_k(r,\varphi)$ следует, что все они неотрицательны для всех r и φ $(r<1,-\pi\le\varphi\le\pi)$.

Очевидно, что

$$\sum_{-n}^{n}A_k(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)\ +r^2}d\tau. \qquad (13)$$

Но, как известно, значение интеграла Пуассона с плотностью равной единице также равняется единице. Следовательно, справедливо равенство (11).

Заметив, что ядро интеграла Пуассона

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)\ +r^2}=1+2\operatorname{Re}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{t^m}\right)=1+2\sum_{m=1}^{\infty}r^m\cos m(\tau-\varphi).$$

а затем, представив $\dfrac{1}{1-\mathrm{z}/\mathrm{t}}$ в виде ряда геометрической прогрессии, получим

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)\ +r^2}=1+2\operatorname{Re}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{t^m}\right)=1+2\sum_{m=1}^{\infty}r^m\cos m(\tau-\varphi).$$

Подставляя теперь это представление ядра Пуассона тригонометрическим рядом в выражение для коэффициентов $A_k(r,\varphi)$ (10), получаем следующие равенства:

$$A_k(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}d\tau+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}r^m\int_{\varphi_k-\frac{h}{2}}^{\varphi_k+\frac{h}{2}}\cos m(\tau-\varphi)d\tau= \tag{14}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[h+2\operatorname{Im}\left(\ln\left(1-ze^{-i(\varphi_k+h/2)}\right)-\ln\left(1-ze^{-i(\varphi_k-h/2)}\right)\right)\right],$$

приводящие к формуле (12).

Таким образом, для приближенного решения краевой задачи (3)-(4) из (9) вытекает следующая формула:

$$u_1(r,\varphi)\approx\tilde{u}_1(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n}\left(\left[h+2\operatorname{Im}\left(\ln\left(1-ze^{-i(\varphi_k+h/2)}\right)-\ln\left(1-ze^{-i(\varphi_k-h/2)}\right)\right)\right]\right)f(\varphi_k). \tag{15}$$

Получим теперь неравенства для оценки погрешности приближенной формулы (13).

Теорема 2. Пусть плотность интеграла Пуассона $f(\varphi)$ *непрерывна на отрезке* $[-\pi,\pi]$*, тогда имеет место равномерная по* r *и* φ ($r\le 1,\ -\pi\le\varphi\le\pi$) *следующая оценка погрешности приближенной формулы (13):*

$$\left|u_1(r,\varphi)-\tilde{u}_1(r,\varphi)\right|\le\omega\left(f;h\right), \tag{16}$$

где $\omega\left(f;h\right)$ *– модуль непрерывности функции* $f(\varphi)$.

Если же $f(\varphi)$ *- непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то*

$$\left|u_1(r,\varphi)-\tilde{u}_1(r,\varphi)\right|\le\frac{M_1}{2}h,\qquad r\le 1,\ -\pi\le\varphi\le\pi, \tag{17}$$

$M_1=\max\limits_{\varphi\in[-\pi,\pi]}\left|f'(\mathrm{x})\right|.$

Доказательство.

$$u_1(r,\varphi)-\tilde{u}_1(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(\tau)-\tilde{f}\left(\tau\right)\right]\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)\ +r^2}d\tau\ ,$$

где функция $\tilde{f}\left(\varphi\right)$ определена формулой (8). В силу положительности ядра Пуассона

$$\left|u_1(r,\varphi)-\tilde{u}_1(r,\varphi)\right|\le\max_{\varphi\in[-\pi,\pi]}\left|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)\right|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)\ +r^2}d\tau. \tag{18}$$

Но если функция $f(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, то

$$\left|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)\right|\le\omega\left(f;h\right),\qquad -\pi\le\varphi\le\pi. \tag{19}$$

Если же $f(\varphi)$ непрерывно дифференцируемая функция на этом отрезке, то легко установить с помощью формулы Тейлора, что

$$\left|f(\varphi)-\tilde{f}(\varphi)\right|\le\frac{M_1}{2}h,\qquad -\pi\le\varphi\le\pi. \tag{20}$$

Так как значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\tau-\varphi)\ +r^2}d\tau\equiv 1,$$

то из неравенств (16-18) следуют неравенства (14), (15).

3. Приближенное решение краевой задачи (1)-(2).

Преобразуем интеграл правой части формулы (6).

Развернув $\ln|1-z\bar{t}|$ ($z=re^{i\varphi},\quad t=\rho e^{i\tau}$) в тригонометрический ряд, получаем равенства:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|t|<1}\ln|1-z\bar{t}|\,d\sigma=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\iint_{|t|<1}\rho^k\cos k(\varphi-\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos k(\varphi-\tau)d\tau\int_0^1\rho^k d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{r^k\sin k(\pi-\varphi)}{k^2(k+2)}-\frac{r^k\sin k(-\pi-\varphi)}{k^2(k+2)}\right]=0$$

Далее,

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{|t|<1}\ln\frac{1}{t-z}d\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}d\tau\int_0^1\rho\ln\left|\rho e^{i\tau}-re^{i\varphi}\right|d\rho=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^r\rho\ln\left|1-\frac{\rho}{r}l^{i(\tau-\varphi)}\right|d\rho+\int_0^r\rho\ln r d\rho+\int_r^1\rho\ln\left|1-\frac{\rho}{r}l^{i(\varphi-\tau)}\right|d\rho+\int_r^1\rho\ln\rho d\rho\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-r^2\right).$$

Таким образом, находим, что

$$u_2(r,\varphi)=\frac{1}{4}\left(1-r^2\right)\tag{21}$$

Складывая приближенное равенство (13) и точное равенство (19), получаем приближенное решение краевой задачи (1)-(2) и эквивалентной ей вариационной задачи о минимуме интеграла

$$u(r,\varphi)\approx\tilde{u}(\tilde{r},\varphi)=\frac{1}{4}\left(1-r^2\right)+\frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n}\left(\left[h+2\,\mathrm{Im}\left(\ln\left(1-ze^{-i(\varphi_k+h/2)}\right)-\ln\left(1-ze^{-i(\varphi_k-h/2)}\right)\right)\right]\right)f(\varphi_k)\tag{22}$$

Так как

$$u(r,\varphi)-\tilde{u}(r,\varphi)=u_1(r,\varphi)-\tilde{u}_1(r,\varphi),$$

то для оценки погрешности приближенной формулы (22) можно пользоваться неравенствами (14), (15).

Примечание. Функции комплексного переменного z, определяемые в круге единичного радиуса степенными рядами

$$L^S(\mathrm{z})=\sum_{1}^{\infty}\frac{z^k}{k^s},$$

где s – целое положительное число, названы полилогорифмами [4] (см. также [5]), где с помощью полилогорифмов найдены новые формулы для приближенного вычисления интегралов типа Коши и решения некоторых краевых задач теории теплопроводности и термоупругости.

При s=1 полилогорифмы представляют собой логарифмическую функцию $(L'(\mathrm{z})=-\ln(1-\mathrm{z}))$. Следовательно, логарифмические функции, входящие приближенные формулы (13) и (22) можно понимать также как полилогорифмы первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тиханов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тиханов, А.А. Самарский – М.: Наука, 1977. – 735 с.*
2. *Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.*
3. *Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.*
4. *Пыхтеев, Г.Н. Полилогорифмы, их свойства и методы вычисления / Г.Н. Пыхтеев, И.Н. Мелешко – Минск, 1976.*
5. *Мелешко, И.Н. Специальные формулы для интегралов типа Коши и их приложения. – Минск, 1999 – 197с.*
6. *Мелешко И.Н. О приближенном решении одной задачи теории теплопроводности для полуплоскости при граничных условиях первого рода/ И.Н. Мелешко, П.И. Ширвель// ТПМ. Выпуск 31. 2016. С. 56-59.*