УДК 539.3

ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

[1] Зеленая А.С.

[1] *Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

Введение. Исследование деформаций изгиба трехслойных конструкций на сегодняшний день является достаточно актуальным в связи с широким распространением в промышленности, строительстве, машиностроении. Спрос на них объясняется тем, что трехслойные конструкции отличаются малым весом, но в то же время обладают высокой прочностью и жесткостью.

Колебания круглых трехслойных пластин под действием различных типов поверхностных нагрузок рассмотрены в статье [1]. Исследование круговых трехслойных пластин при действии импульсных локальных нагружений приведено в работе [2]. В статье [3] рассмотрен термоупругий изгиб трехслойной кольцевой пластины на упругом основании. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании и основании Пастернака рассмотрено в работах [4]–[5]. В статье [6] исследовано деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками.

Здесь выполнена постановка и решение задачи о статическом деформировании физически нелинейной прямоугольной трехслойной пластины в температурном поле, получены уравнения равновесия в усилиях и перемещениях.

Постановка задачи. Рассматривается изгиб несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, несущие слои которой выполнены из упругопластического материала, а заполнитель – нелинейно упругий. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1). Предположим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешняя распределенная нагрузка q, проекции которой на координатные оси: $q(x,y)$, $p_x(x,y)$, $p_y(x,y)$, и тепловой поток интенсивностью q_t, направленный перпендикулярно первому несущему слою.

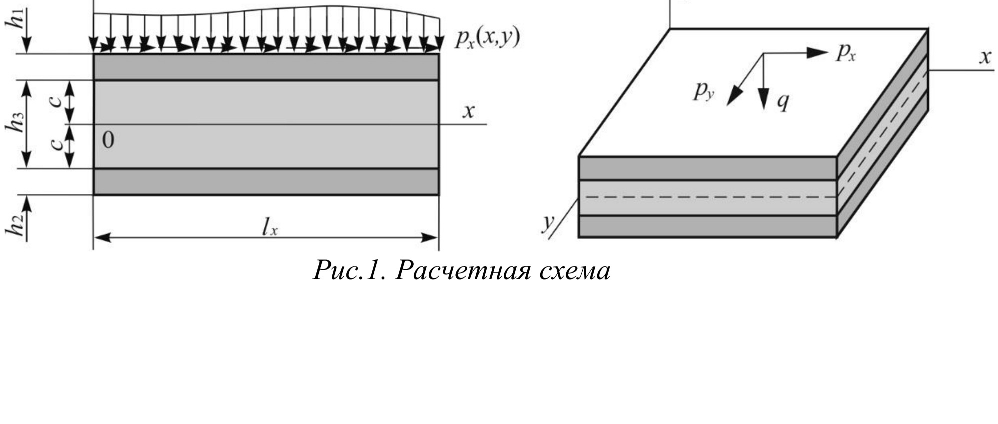

Рис.1. Расчетная схема

В слоях пластины используются физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций с учетом температуры:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k\left(T_k\right)\left(1-\omega^{(k)}\left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k\right)\right)э_{ij}^{(k)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T_k) \quad (i, j = x, y, z,\ k = 1,2,3), \tag{1}$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений;

$э_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций;

$\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформации в k-м слое; $\omega^{(k)}\left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k\right)$ – функции пластичности Ильюшина в несущих слоях, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_т^{(k)}\omega^{(k)}\left(T_k\right)$ равны нулю;

$\varepsilon_т^{(k)}\left(T_k\right)$ – предел текучести материала;

$\omega^{(3)}\left(\varepsilon_u^{(3)}, T_k\right)$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя, равная нулю при $\varepsilon_u^{(3)} \le \varepsilon_s^{(3)}\left(T_k\right)$;

$\varepsilon_s^{(3)}\left(T_k\right)$ – предел физической нелинейности заполнителя;

$G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материалов слоев;

α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения;

ΔT_k – приращение температуры, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0.

Исходя из соотношений (1) выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом «ω») слагаемые, которые будут включать температурные добавки:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_k(T_k)э_{ij}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)}\delta_{ij},$$

$$\sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k)\omega^{(k)}э_{ij}^{(k)} + 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k. \tag{2}$$

Для рассматриваемой пластины получим:

- в несущих слоях $\left(k = 1,2\right)$

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \sigma_{xx}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)0} = 2G_k(T_k)э_{xx}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)} = K_k^+(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^-(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k)э_{xx}^{(k)}\omega^{(k)} + 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k = \frac{2}{3}G_k(T_k)\left(2\varepsilon_{xx}^{(k)} - \varepsilon_{yy}^{(k)}\right)\omega^{(k)} + +3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k,$$

$$\sigma_{yy}^{(k)} = \sigma_{yy}^{(k)0} - \sigma_{yy}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)0} = 2G_k(T_k)э_{yy}^{(k)} + 3K_k(T_k)\varepsilon^{(k)} = K_k^+(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)} + K_k^-(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k)э_{yy}^{(k)}\omega^{(k)} + 3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k = \frac{2}{3}G_k(T_k)\left(2\varepsilon_{yy}^{(k)} - \varepsilon_{xx}^{(k)}\right)\omega^{(k)} +$$
$$+3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k,$$

$$\sigma_{xy}^{(k)} = \sigma_{xy}^{(k)0} - \sigma_{xy}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{xy}^{(k)0} = 2G_k(T_k)э_{xy}^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xy}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k)э_{xy}^{(k)}\omega^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)}\omega^{(k)};$$

- в заполнителе

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \sigma_{xx}^{(3)0} - \sigma_{xx}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{xx}^{(3)0} = 2G_3(T_3)э_{xx}^{(3)} + 3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)} = K_3^+(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-(T_3)\left(\varepsilon_{yy}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)}\right),$$

$$\sigma_{xx}^{(3)\omega}=2G_3(T_3)э_{xx}^{(3)}\omega^{(3)}+3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3=$$
$$=\frac{2}{3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{xx}^{(3)}-\varepsilon_{yy}^{(3)}-\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\omega^{(3)}+3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3,$$
$$\sigma_{yy}^{(3)}=\sigma_{yy}^{(3)0}-\sigma_{yy}^{(3)\omega},$$
$$\sigma_{yy}^{(3)0}=2G_3(T_3)э_{yy}^{(3)}+3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)}=K_3^{+}(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)}+K_3^{-}(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)}+K_3^{-}(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)},$$
$$\sigma_{yy}^{(3)\omega}=2G_3(T_3)э_{yy}^{(3)}\omega^{(3)}+3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3=$$
$$=\frac{2}{3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{yy}^{(3)}-\varepsilon_{xx}^{(3)}-\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\omega^{(3)}+3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3,$$
$$\sigma_{zz}^{(3)}=\sigma_{zz}^{(3)0}-\sigma_{zz}^{(3)\omega},$$
$$\sigma_{zz}^{(3)0}=2G_3(T_3)э_{zz}^{(3)}+3K_3(T_3)\varepsilon^{(3)}=K_3^{+}(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)}+K_3^{-}(T_3)\left(\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{yy}^{(3)}\right),$$
$$\sigma_{zz}^{(3)\omega}=2G_3(T_3)э_{zz}^{(3)}\omega^{(3)}+3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3=$$
$$=\frac{2}{3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{zz}^{(3)}-\varepsilon_{xx}^{(3)}-\varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\omega^{(3)}+3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3,$$
$$\sigma_{xy}^{(3)}=\sigma_{xy}^{(3)0}-\sigma_{xy}^{(3)\omega},\quad \sigma_{xy}^{(3)0}=2G_3(T_3)э_{xy}^{(3)}=2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)},$$
$$\sigma_{xy}^{(3)\omega}=2G_3(T_3)э_{xy}^{(3)}\omega^{(3)}=2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)}\omega^{(3)},$$
$$\sigma_{xz}^{(3)}=\sigma_{xz}^{(3)0}-\sigma_{xz}^{(3)\omega},\quad \sigma_{xz}^{(3)0}=2G_3(T_3)э_{xz}^{(3)}=2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)},$$
$$\sigma_{xz}^{(3)\omega}=2G_3(T_3)э_{xz}^{(3)}\omega^{(3)}=2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)}\omega^{(3)},$$
$$\sigma_{yz}^{(3)}=\sigma_{yz}^{(3)0}-\sigma_{yz}^{(3)\omega},\quad \sigma_{yz}^{(3)0}=2G_3(T_3)э_{yz}^{(3)}=2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)},$$
$$\sigma_{yz}^{(3)\omega}=2G_3(T_3)э_{yz}^{(3)}\omega^{(3)}=2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)}\omega^{(3)},$$
$$K_k^{+}(T_k)=K_k(T_k)+\frac{4}{3}G_k(T_k),\quad K_k^{-}(T_k)=K_k(T_k)-\frac{2}{3}G_k(T_k) \tag{3}$$

где $\omega^{(k)}\equiv\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – универсальные функции нелинейности материалов слоев, определяемые экспериментально.

Аналогичную операцию проведем и с внутренними усилиями, получим ($k=1,2,3$):

$$N_{xx}^{(k)}=N_{xx}^{(k)0}-N_{xx}^{(k)\omega},\quad N_{yy}^{(k)}=N_{yy}^{(k)0}-N_{yy}^{(k)\omega},\quad M_{xx}^{(k)}=M_{xx}^{(k)0}-M_{xx}^{(k)\omega},$$
$$M_{yy}^{(k)}=M_{yy}^{(k)0}-M_{yy}^{(k)\omega},\quad M_{xy}^{(k)}=M_{xy}^{(k)0}-M_{xy}^{(k)\omega},\quad Q_{xy}{}^{(k)}=Q_{xy}{}^{(k)0}-Q_{xy}{}^{(k)\omega},$$
$$N_{zz}^{(3)}=N_{zz}^{(3)0}-N_{zz}^{(3)\omega},\quad M_{xz}^{(3)}=M_{xz}^{(3)0}-M_{xz}^{(3)\omega},\quad M_{yz}^{(3)}=M_{yz}^{(3)0}-M_{yz}^{(3)\omega},$$
$$Q_{xz}{}^{(3)}=Q_{xz}{}^{(3)0}-Q_{xz}{}^{(3)\omega},\quad Q_{yz}{}^{(3)}=Q_{yz}{}^{(3)0}-Q_{yz}{}^{(3)\omega}. \tag{4}$$

Обобщенные усилия с помощью соотношений (2) также разобьем на линейные и нелинейные составляющие:

$$H_{1x}=H_{1x}^{0}-H_{1x}^{\omega},\quad H_{1x}^{0}=\frac{Q_{xz}^{(3)0}}{2c},\quad H_{1x}^{\omega}=\frac{Q_{xz}^{(3)\omega}}{2c},$$
$$H_{1y}=H_{1y}^{0}-H_{1y}^{\omega},\quad H_{1y}^{0}=\frac{Q_{yz}^{(3)0}}{2c},\quad H_{1y}^{\omega}=\frac{Q_{yz}^{(3)\omega}}{2c},$$
$$H_{2}=H_{2}^{0}-H_{2}^{\omega},\quad H_{2}^{0}=\frac{N_{zz}^{(3)0}}{2c},\quad H_{2}^{\omega}=\frac{N_{zz}^{(3)\omega}}{2c},$$
$$P_{1x}=P_{1x}^{0}-P_{1x}^{\omega},\quad P_{1x}^{0}=\frac{N_{xx}^{(3)0}}{2}+\frac{M_{xx}^{(3)0}}{2c}+N_{xx}^{(1)0},\quad P_{1x}^{\omega}=\frac{N_{xx}^{(3)\omega}}{2}+\frac{M_{xx}^{(3)\omega}}{2c}+N_{xx}^{(1)\omega},$$
$$P_{2x}=P_{2x}^{0}-P_{2x}^{\omega},\quad P_{2x}^{0}=\frac{N_{xx}^{(3)0}}{2}-\frac{M_{xx}^{(3)0}}{2c}+N_{xx}^{(2)0},\quad P_{2x}^{\omega}=\frac{N_{xx}^{(3)\omega}}{2}-\frac{M_{xx}^{(3)\omega}}{2c}+N_{xx}^{(2)\omega},$$
$$P_{1y}=P_{1y}^{0}-P_{1y}^{\omega},\quad P_{1y}^{0}=\frac{N_{yy}^{(3)0}}{2}+\frac{M_{yy}^{(3)0}}{2c}+N_{yy}^{(1)0},\quad P_{1y}^{\omega}=\frac{N_{yy}^{(3)\omega}}{2}+\frac{M_{yy}^{(3)\omega}}{2c}+N_{yy}^{(1)\omega},$$

$$P_{2y} = P_{2y}^0 - P_{2y}^\omega, \quad P_{2y}^0 = \frac{N_{yy}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{yy}^{(3)0}}{2c} + N_{yy}^{(2)0}, \quad P_{2y}^\omega = \frac{N_{yy}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{yy}^{(3)\omega}}{2c} + N_{yy}^{(2)\omega},$$

$$V_1 = V_1^0 - V_1^\omega, \quad V_1^0 = \frac{Q_{xy}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{xy}^{(3)0}}{2c} + Q_{xy}^{(1)0}, \quad V_1^\omega = \frac{Q_{xy}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{xy}^{(3)\omega}}{2c} + Q_{xy}^{(1)\omega},$$

$$V_2 = V_2^0 - V_2^\omega, \quad V_2^0 = \frac{Q_{xy}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{xy}^{(3)0}}{2c} + Q_{xy}^{(2)0}, \quad V_2^\omega = \frac{Q_{xy}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{xy}^{(3)\omega}}{2c} + Q_{xy}^{(2)\omega},$$

$$S_{1x} = S_{1x}^0 - S_{1x}^\omega, \quad S_{1x}^0 = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_{xx}^{(1)0} - M_{xx}^{(1)0} + \frac{h_1}{4} N_{xx}^{(3)0} + \frac{h_1}{4c} M_{xx}^{(3)0},$$

$$S_{1x}^\omega = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_{xx}^{(1)\omega} - M_{xx}^{(1)\omega} + \frac{h_1}{4} N_{xx}^{(3)\omega} + \frac{h_1}{4c} M_{xx}^{(3)\omega},$$

$$S_{2x} = S_{2x}^0 - S_{2x}^\omega, \quad S_{2x}^0 = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_{xx}^{(2)0} - M_{xx}^{(2)0} - \frac{h_2}{4} N_{xx}^{(3)0} + \frac{h_2}{4c} M_{xx}^{(3)0},$$

$$S_{2x}^\omega = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_{xx}^{(2)\omega} - M_{xx}^{(2)\omega} - \frac{h_2}{4} N_{xx}^{(3)\omega} + \frac{h_2}{4c} M_{xx}^{(3)\omega},$$

$$S_{1y} = S_{1y}^0 - S_{1y}^\omega, \quad S_{1y}^0 = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_{yy}^{(1)0} - M_{yy}^{(1)0} + \frac{h_1}{4} N_{yy}^{(3)0} + \frac{h_1}{4c} M_{yy}^{(3)0},$$

$$S_{1y}^\omega = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_{yy}^{(1)\omega} - M_{yy}^{(1)\omega} + \frac{h_1}{4} N_{yy}^{(3)\omega} + \frac{h_1}{4c} M_{yy}^{(3)\omega},$$

$$S_{2y} = S_{2y}^0 - S_{2y}^\omega, \quad S_{2y}^0 = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_{yy}^{(2)0} - M_{yy}^{(2)0} - \frac{h_2}{4} N_{yy}^{(3)0} + \frac{h_2}{4c} M_{yy}^{(3)0},$$

$$S_{2y}^\omega = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_{yy}^{(2)\omega} - M_{yy}^{(2)\omega} - \frac{h_2}{4} N_{yy}^{(3)\omega} + \frac{h_2}{4c} M_{yy}^{(3)\omega},$$

$$T_{1x} = T_{1x}^0 - T_{1x}^\omega, \quad T_{1x}^0 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q_{xz}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)0}}{2c}, \quad T_{1x}^\omega = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)\omega}}{2c},$$

$$T_{2x} = T_{2x}^0 - T_{2x}^\omega, \quad T_{2x}^0 = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q_{xz}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)0}}{2c}, \quad T_{2x}^\omega = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega}}{2c},$$

$$T_{1y} = T_{1y}^0 - T_{1y}^\omega, \quad T_{1y}^0 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q_{yz}^{(3)0}}{2} + \frac{M_{yz}^{(3)0}}{2c}, \quad T_{1y}^\omega = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q_{yz}^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{yz}^{(3)\omega}}{2c},$$

$$T_{2y} = T_{2y}^0 - T_{2y}^\omega, \quad T_{2y}^0 = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q_{yz}^{(3)0}}{2} - \frac{M_{yz}^{(3)0}}{2c}, \quad T_{2y}^\omega = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q_{yz}^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{yz}^{(3)\omega}}{2c},$$

$$U_1 = U_1^0 - U_1^\omega, \quad U_1^0 = \left(2c + h_1\right) Q_{xy}^{(1)0} - 2M_{xy}^{(1)0} + \frac{h_1}{4} Q_{xy}^{(3)0} + \frac{h_1}{2c} M_{xy}^{(3)0},$$

$$U_1^\omega = \left(2c + h_1\right) Q_{xy}^{(1)\omega} - 2M_{xy}^{(1)\omega} + \frac{h_1}{4} Q_{xy}^{(3)\omega} + \frac{h_1}{2c} M_{xy}^{(3)\omega},$$

$$U_2 = U_2^0 - U_2^\omega, \quad U_2^0 = \left(2c + h_2\right) Q_{xy}^{(2)0} + 2M_{xy}^{(2)0} + \frac{h_2}{4} Q_{xy}^{(3)0} - \frac{h_2}{2c} M_{xy}^{(3)0},$$

$$U_2^\omega = \left(2c + h_2\right) Q_{xy}^{(2)\omega} + 2M_{xy}^{(2)\omega} + \frac{h_2}{4} Q_{xy}^{(3)\omega} - \frac{h_2}{2c} M_{xy}^{(3)\omega}. \qquad (5)$$

Входящие в (5) линейные (с индексом «0») и нелинейные (с индексом «ω») составляющие внутренних усилий вычисляются через напряжения и деформации по формулам (3).

Система уравнений равновесия в обобщенных усилиях и соответствующие силовые граничные условия по виду совпадают с уравнениями, полученными в [7]:

$$H_{1x}^0 - V_1^0{}_{,y} - P_{1x}^0{}_{,x} = p_x + H_{1x}^\omega - V_1^\omega{}_{,y} - P_{1x}^\omega{}_{,x},$$

$$H_{1x}^0 + V_2^0{}_{,y} + P_{2x}^0{}_{,x} = H_{1x}^\omega + V_2^\omega{}_{,y} + P_{2x}^\omega{}_{,x},$$

$$H^0_{1y} - V^0_1,_x - P^0_{1y},_y = p_y + H^\omega_{1y} - V^\omega_1,_x - P^\omega_{1y},_y ,$$

$$H^0_{1y} + V^0_2,_x + P^0_{2y},_y = H^\omega_{1y} + V^\omega_2,_x + P^\omega_{2y},_y ,$$

$$S^0_{1x},_{xx} + H^0_2 - T^0_{1x},_x - U^0_1,_{xy} + S^0_{1y},_{yy} - T^0_{1y},_y = q + \frac{p_x,_x h_1}{2} + \frac{p_y,_y h_1}{2} + S^\omega_{1x},_{xx} + H^\omega_2 - T^\omega_{1x},_x - U^\omega_1,_{xy} + S^\omega_{1y},_{yy} - T^\omega_{1y},_y ,$$

$$S^0_{2x},_{xx} - H^0_2 - T^0_{2x},_x - U^0_2,_{xy} + S^0_{2y},_{yy} - T^0_{2y},_y = S^\omega_{2x},_{xx} - H^\omega_2 - T^\omega_{2x},_x - U^\omega_2,_{xy} + S^\omega_{2y},_{yy} - T^\omega_{2y},_y . \qquad (6)$$

С силовыми граничными условиями поступим аналогично, т.е. при $x = 0, l_x$ должны выполняться требования:

$$P^0_{1x} = N^{(1)}_{rx} + P^\omega_{1x}, \quad P^0_{2x} = N^{(2)}_{rx} + P^\omega_{2x}, \quad V^0_1 = Q^{(1)}_{rxy} + V^\omega_1, \quad V^0_2 = Q^{(2)}_{rxy} + V^\omega_2 ,$$

$$T^0_{1x} - S^0_{1x},_x - U^0_1,_y = Q^{(1)}_{rx} + (T^\omega_{1x} - S^\omega_{1x},_x - U^\omega_1,_y) ,$$

$$T^0_{2x} - S^0_{2x},_x - U^0_2,_y = Q^{(1)}_{rx} + (T^\omega_{2x} - S^\omega_{2x},_x - U^\omega_2,_y), \quad S^0_{1x} = M^{(1)}_{rx} + S^\omega_{1x}, \quad S^0_{2x} = M^{(2)}_{rx} + S^\omega_{2x} .$$

При $y = 0, l_y$

$$P^0_{1y} = N^{(1)}_{sy} + P^\omega_{1y}, \quad P^0_{2y} = N^{(2)}_{sy} + P^\omega_{2y}, \quad V^0_1 = Q^{(1)}_{sxy} + V^\omega_1, \quad V^0_2 = Q^{(2)}_{sxy} + V^\omega_2 ,$$

$$T^0_{1y} - S^0_{1y},_y = Q^{(1)}_{sy} + (T^\omega_{1y} - S^\omega_{1y},_y), \quad T^0_{2y} - S^0_{2y},_y = Q^{(2)}_{sy} + (T^\omega_{2y} - S^\omega_{2y},_y) ,$$

$$S^0_{1y} = M^{(1)}_{sy} + S^\omega_{1y}, \quad S^0_{2y} = M^{(2)}_{sy} + S^\omega_{2y}, \quad U^0_1 = Q^{(1)}_{sxy} + U^\omega_1, \quad U^0_2 = Q^{(2)}_{sxy} + U^\omega_2 . \qquad (7)$$

Здесь $N^{(1)}_{rx}$, $Q^{(1)}_{rxy}$, $Q^{(1)}_{rx}$, $M^{(1)}_{rx}$, $N^{(1)}_{ry}$, $Q^{(1)}_{rxy}$, $Q^{(1)}_{ry}$, $M^{(1)}_{ry}$ – заданные усилия на торцах пластины в первом несущем слое (с индексом «2» – во втором несущем слое). Индекс r принимает значения $0, l_x$, индекс s – $0, l_y$, указывая, на каком конце пластины задано усилие.

Выразим внутренние усилия (4) через искомые перемещения u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}, w_1, w_2 и подставим в систему уравнений равновесия (6). Получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, описывающая изгиб упругопластической пластины в температурном поле. Данная система имеет вид аналогичный системе уравнений равновесия, полученной в [8]. При ее решении был использован метод «упругих решений» А.А. Ильюшина [9]. Система примет вид:

$$a_1 u^n_{1x} - a_1 u^n_{2x} - a_4 u^n_{1x},_{xx} - a_5 u^n_{2x},_{xx} - a_{19} u^n_{1x},_{yy} - a_{18} u^n_{2x},_{yy} - a_{21} u^n_{1y},_{xy} - a_{23} u^n_{2y},_{xy} + a_2 w^n_1,_x +$$
$$+ a_3 w^n_2,_x - 2a_{24} w^n_1,_{xyy} + a_{25} w^n_2,_{xyy} - 2a_6 w^n_1,_{xxx} + a_7 w^n_2,_{xxx} = p_x + p^{n-1}_\omega ,$$

$$-a_1 u^n_{1x} + a_1 u^n_{2x} - a_5 u^n_{1x},_{xx} - a_9 u^n_{2x},_{xx} - a_{18} u^n_{1x},_{yy} - a_{20} u^n_{2x},_{yy} - a_{23} u^n_{1y},_{xy} - a_{22} u^n_{2y},_{xy} - a_{10} w^n_1,_x -$$
$$- a_{17} w^n_2,_x - a_{24} w^n_1,_{xyy} + 2a_{25} w^n_2,_{xyy} - a_6 w^n_1,_{xxx} + 2a_7 w^n_2,_{xxx} = s^{n-1}_\omega ,$$

$$a_1 u^n_{1y} - a_1 u^n_{2y} - a_4 u^n_{1y},_{yy} - a_5 u^n_{2y},_{yy} - a_{19} u^n_{1y},_{xx} - a_{18} u^n_{2y},_{xx} - a_{21} u^n_{1x},_{xy} - a_{23} u^n_{2x},_{xy} + a_2 w^n_1,_y +$$
$$+ a_3 w^n_2,_y - 2a_{24} w^n_1,_{xxy} + a_{25} w^n_2,_{xxy} - 2a_6 w^n_1,_{yyy} + a_7 w^n_2,_{yyy} = p_y + h^{n-1}_\omega ,$$

$$-a_1 u^n_{1y} + a_1 u^n_{2y} - a_5 u^n_{1y},_{yy} - a_9 u^n_{2y},_{yy} - a_{18} u^n_{1y},_{xx} - a_{20} u^n_{2y},_{xx} - a_{23} u^n_{1x},_{xy} - a_{22} u^n_{2x},_{xy} - a_{10} w^n_1,_y -$$
$$- a_{17} w^n_2,_y - a_{24} w^n_1,_{xxy} + 2a_{25} w^n_2,_{xxy} - a_6 w^n_1,_{yyy} + 2a_7 w^n_2,_{yyy} = r^{n-1}_\omega ,$$

$$-a_2 u^n_{1x},_x - a_2 u^n_{1y},_y + a_{10} u^n_{2x},_x + a_{10} u^n_{2y},_y + 2a_6 u^n_{1x},_{xxx} + a_6 u^n_{2x},_{xxx} + 2a_6 u^n_{1y},_{yyy} + a_6 u^n_{2y},_{yyy} +$$
$$+ 2a_{24} u^n_{1x},_{xyy} + a_{24} u^n_{2x},_{xyy} + 2a_{24} u^n_{1y},_{xxy} + a_{24} u^n_{2y},_{xxy} + a_{11} w^n_1,_{xx} + a_{11} w^n_1,_{yy} - a_{12} w^n_2,_{xx} -$$
$$- a_{12} w^n_2,_{yy} + a_{15} w^n_1,_{xxxx} + a_{15} w^n_1,_{yyyy} - a_{16} w^n_2,_{xxxx} - a_{16} w^n_2,_{yyyy} + a_{26} w^n_1,_{xxyy} - a_{28} w^n_2,_{xxyy} +$$

$$+a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + \frac{p_x,_x h_1}{2} + \frac{p_y,_y h_1}{2} + q_\omega^{n-1},$$

$$-a_3 u_{1y}^n,_y - a_3 u_{1x}^n,_x + a_{17} u_{2y}^n,_y + a_{17} u_{2x}^n,_x - a_7 u_{1y}^n,_{yyy} - a_7 u_{1x}^n,_{xxx} - 2a_7 u_{2y}^n,_{yyy} - 2a_7 u_{2x}^n,_{xxx} -$$
$$-2a_{27} u_{2y}^n,_{xxy} - a_{25} u_{1y}^n,_{xxy} - 2a_{25} u_{2x}^n,_{xyy} - a_{25} u_{1x}^n,_{xyy} - a_{12} w_1^n,_{xx} - a_{12} w_1^n,_{yy} + a_{14} w_2^n,_{xx} +$$
$$+a_{14} w_2^n,_{yy} - a_{16} w_1^n,_{xxxx} - a_{16} w_1^n,_{yyyy} + a_{13} w_2^n,_{xxxx} + a_{13} w_2^n,_{yyyy} - a_{28} w_1^n,_{xxyy} + a_{27} w_2^n,_{xxyy} -$$
$$-a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_\omega^{n-1}, \tag{8}$$

где n – номер приближения;

p_ω^{n-1}, s_ω^{n-1}, h_ω^{n-1}, r_ω^{n-1}, q_ω^{n-1}, g_ω^{n-1} – величины, которые вычисляются по формулам, аналогичным [8]:

$$p_\omega^{n-1} = H_{1x}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)},_y - P_{1x}^{\omega(n-1)},_x, \quad s_\omega^{n-1} = H_{1x}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)},_y + P_{2x}^{\omega(n-1)},_x,$$
$$h_\omega^{n-1} = H_{1y}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)},_x - P_{1y}^{\omega(n-1)},_y, \quad r_\omega^{n-1} = H_{1y}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)},_x + P_{2y}^{\omega(n-1)},_y,$$
$$q_\omega^{n-1} = S_{1x}^{\omega(n-1)},_{xx} + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)},_x - U_1^{\omega(n-1)},_{xy} + S_{1y}^{\omega(n-1)},_{yy} - T_{1y}^{\omega(n-1)},_y,$$
$$g_\omega^{n-1} = S_{2x}^{\omega(n-1)},_{xx} - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2x}^{\omega(n-1)},_x - U_2^{\omega(n-1)},_{xy} + S_{2y}^{\omega(n-1)},_{yy} - T_{2y}^{\omega(n-1)},_y. \tag{9}$$

Решение системы дифференциальных уравнений получим методом Бубнова–Галеркина, который предполагает разложение искомых перемещений и внешних нагрузок в ряды по системам базисных функций. Тогда искомые перемещения выражаются следующим образом

$$u_{kx} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kxpm}^n \psi_{xpm}(x, y), \quad u_{ky} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kypm}^n \psi_{ypm}(x, y),$$
$$w_k = \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{kpm}^n \psi_{zpm}(x, y), \tag{10}$$

где U_{kxpm}^n, U_{kypm}^n, W_{kpm}^n – неизвестные амплитуды перемещений на n-м шаге ($k = 1, 2$);

$\psi_{xpm}, \psi_{ypm}, \psi_{zpm}$ – системы базисных ортогональных функций, удовлетворящие граничным условиям.

Внешние нагрузки

$$p_\omega^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} p_{\omega pm}^{n-1} \psi_{xpm}(x, y), \quad s_\omega^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} s_{\omega pm}^{n-1} \psi_{xpm}(x, y),$$
$$h_\omega^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} h_{\omega pm}^{n-1} \psi_{ypm}(x, y), \; r_\omega^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} r_{\omega pm}^{n-1} \psi_{ypm}(x, y), \quad q_\omega^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{\omega pm}^{n-1} \psi_{zpm}(x, y),$$
$$g_\omega^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} g_{\omega pm}^{n-1} \psi_{zpm}(x, y),$$
$$q = \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{pm} \psi_{zpm}(x, y). \tag{11}$$

После подстановки перемещений (10), нагрузок и дополнительных усилий (11) в систему (8) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений U_{1xpm}^n, U_{2xpm}^n, U_{1ypm}^n, U_{2ypm}^n, W_{1pm}^n, W_{2pm}^n, совпадающих:

$$b_1 U_{1xpm}^n + b_2 U_{2xpm}^n + b_{11} U_{1ypm}^n + b_{12} U_{2ypm}^n + b_3 W_{1pm}^n + b_4 W_{2pm}^n = p_{\omega pm}^{n-1},$$
$$b_2 U_{1xpm}^n + b_5 U_{2xpm}^n + b_{12} U_{1ypm}^n + b_{13} U_{2ypm}^n + b_6 W_{1pm}^n + b_7 W_{2pm}^n = s_{\omega pm}^{n-1},$$
$$b_{11} U_{1xpm}^n + b_{12} U_{2xpm}^n + b_{14} U_{1ypm}^n + b_{15} U_{2ypm}^n + b_{16} W_{1pm}^n + b_{17} W_{2pm}^n = h_{\omega pm}^{n-1},$$
$$b_{12} U_{1xpm}^n + b_{13} U_{2xpm}^n + b_{15} U_{1ypm}^n + b_{18} U_{2ypm}^n + b_{19} W_{1pm}^n + b_{20} W_{2pm}^n = r_{\omega pm}^{n-1},$$

$$b_3U^n_{1xpm}+b_6U^n_{2xpm}+b_{16}U^n_{1ypm}+b_{19}U^n_{2ypm}+b_8W^n_{1pm}+b_9W^n_{2pm}=q_{pm}+q^{n-1}_{\omega pm},$$

$$b_4U^n_{1xpm}+b_7U^n_{2xpm}+b_{17}U^n_{1ypm}+b_{20}U^n_{2ypm}+b_9W^n_{1pm}+b_{10}W^n_{2pm}=g^{n-1}_{\omega pm}.$$

Коэффициенты b_i вычисляются через величины a_i, зависят от температуры, параметров p и m.

Вывод. Полученное в работе аналитическое решение позволяет исследовать деформирование физически нелинейных трехслойных прямоугольных пластин при действии термосиловых нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Starovoitov, É. I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / É. I. Starovoitov, A.V. Yarovaya, D. V. Leonenko // Strength of materials. – 2003. – Vol. 35, № 4. – P. 346–352 DOI: 10.1023/A:1025834123302.*
2. *Старовойтов, Э.И. Импульсные локальные нагружения круговых трехслойных пластин / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А.В. Яровая // Прикладная механика. – 2003. – 39, № 8. – С. 86 – 94.*
3. *Starovoitov, É.I. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040. DOI: 10.1007/s10778-009-0115-9.*
4. *Леоненко Д.В. Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – №3. – С. 42–47.*
5. *Леоненко, Д.В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака / Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. − 2014. − № 1. − С. 59−63.*
6. *Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации (Москва). – 2001. – № 4. – С. 37–40.*
7. *Леоненко, Д. В. Упругопластический изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С.65–71.*
8. *Леоненко, Д. В. Напряженно-деформированное состояние физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 2(43). – С. 77–82.*
9. *Ильюшин, А.А. Упругопластические деформации полых цилиндров / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 224 с.*