УДК 539.3:534.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

[1] Поленов В.С., [2] Чигарев А.В.

[1] *АНО ВО Автомобильно-транспортный институт, Воронеж*
[2] *Белорусский национальный технический университет, Минск*

Математическое моделирование двухкомпонентных пористых сред, насыщенных жидкостью, началось более 90 лет с исследований процесса консолидации грунтов.

Пористость среды необходимо учитывать при решении значительного числа прикладных задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности (грунты, пеноматериалы, различные цементные растворы, песок, пористая керамика и т.п.). Пористые двухкомпонентные среды широко применяются и в народном хозяйстве (строительство и восстановление разрушенных аэродромов, строительство дорог и.т.п.), где применяемые строительные материалы содержат значительное количество пустот.

Исследование волновых процессов очень важно для разработки новых методов диагностики, новых технологий по созданию двухкомпонентных сред, которые могли бы быть применены в области машиностроения, приборостроения, металлургии и атомной энергетике.

Однако сложность описания эффектов взаимодействия компонент, теплообмена и других сопутствующих процессов привели к тому, что до настоящего времени общепринятые модели (упругая среда – жидкость) полностью не разработаны

Поэтому представляет интерес разработка математической двухкомпонентной модели, когда одна из компонент представляет сферически - симметричную упругую среду, а другая – сжимаемую жидкость.

Распространению волн в пористых средах посвящено ряд работ [1 - 6]. Среди которых следует отметить Био М.А. [1,2], Косачевского Л.Я. [3].Френкеля Я.И. [6]. Цилиндрическим волнам в насыщенной жидкостью пористой среде посвящена работа [7,8].

Наличие и степень пористости в материалах учитывается с помощью коэффициента пористости, равного отношения объема пор к общему объему, занимаемому средой.

В сферически-симметричных пористых средах из симметрии следует, что в такой среде существуют только продольные волы.

Уравнения движения продольных волн в перемещениях пористой среды в случае сферической симметрии имеют вид [3,7]

$$(A+2N)\Delta u_r^{(1)} + \Gamma_1 \Delta u_r^{(2)} = \rho_{11}\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\Gamma_1 \Delta u_r^{(1)} + \Gamma_2 \Delta u_r^{(2)} = \rho_{12}\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} \quad (2)$$

где A, $N-$ коэффициенты Ламе; $\Gamma_1 = (1-m)R_0, \Gamma_2 = mR_0$, R_0-модуль сжимаемости жидкости; $m-$пористость. Индексы, стоящие вверху: $1-$ относится к упругой компоненте, $2-$ к жидкости; $\rho_{11}, \rho_{22}-$эффективные плотности твердого скелета и жидкости; $\rho_{12} = \rho_{21}-$коэффициент динамической связи твердого скелета и жидкости; $\Delta-$оператор Лапласа в сферически - симметричной системе координат.

Систему уравнений (1) запишем в безразмерной форме

$$\begin{aligned} &\sigma_{11}(\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}) + \sigma_{12}(\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r}) - \gamma_{11}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2} - \gamma_{12}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2} = 0 \\ &\sigma_{12}(\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}) + \sigma_{22}(\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r}) - \gamma_{12}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial t^2} - \gamma_{22}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = \frac{A+2N}{H}, \quad \sigma_{12} = \frac{\Gamma_1}{H}, \quad \sigma_{22} = \frac{\Gamma_2}{H}, \quad H = A + 2N + 2\Gamma_1 + \Gamma_2 \\ &\gamma_{11} = \frac{\rho_{11}}{\rho}, \quad \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho}, \quad \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho}, \quad \rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22}, \quad c = \sqrt{\frac{H}{\rho}} \end{aligned} \tag{4}$$

$c-$скорость продольных волн пористой среды

Система уравнений (3) после умножения на r примет вид

$$\begin{aligned} &\sigma_{11}\frac{\partial^2(ru_r^{(1)})}{\partial r^2} + \sigma_{12}\frac{\partial^2(ru_r^{(2)})}{\partial r^2} - \gamma_{11}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(ru_r^{(1)})}{\partial t^2} - \gamma_{12}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(ru_r^{(2)})}{\partial t^2} = 0 \\ &\sigma_{12}\frac{\partial^2(ru_r^{(1)})}{\partial r^2} + \sigma_{22}\frac{\partial^2(ru_r^{(2)})}{\partial r^2} - \gamma_{12}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(ru_r^{(1)})}{\partial t^2} - \gamma_{22}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(ru_r^{(2)})}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Введем новые функции следующим образом [9]

$$ru_r^{(1)} = U_1, \quad ru_r^{(2)} = U_2 \tag{6}$$

Тогда систему (5) перепишем в такой форме

$$\begin{aligned} &\sigma_{11}\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \sigma_{12}\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} - \gamma_{11}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \gamma_{12}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = 0 \\ &\sigma_{12}\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \sigma_{22}\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} - \gamma_{12}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \gamma_{22}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Решения системы (7) будем искать в виде

$$U_r^{(1)} = A_1 \exp[i(\omega t + qr)], , \quad U_r^{(2)} = A_2 \exp[i(\omega t + qr)], \tag{8}$$

где $q-$волновое число продольной волны в пористой среде, A_1-амплитуда продольной волны I типа; A_2-амплитуда продольной волны II типа.

После подстановки решения (8) в систему (7) получим

$$\begin{aligned} &(\sigma_{11}q^2 - \gamma_{11}\frac{\omega^2}{c^2})A_1 + (\sigma_{12}q^2 - \gamma_{12}\frac{\omega^2}{c^2})A_2 = 0 \\ &(\sigma_{12}q^2 - \gamma_{12}\frac{\omega^2}{c^2})A_1 + (\sigma_{22}q^2 - \gamma_{22}\frac{\omega^2}{c^2})A_2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Разделим обе части системы на q^2, получим

$$(\sigma_{11} - \gamma_{11}\frac{c_q^2}{c^2})A_1 + (\sigma_{12} - \gamma_{12}\frac{c_q^2}{c^2})A_2 = 0 \tag{10}$$

$$(\sigma_{12}-\gamma_{12}\frac{c_q^2}{c^2})A_1+(\sigma_{12}-\gamma_{22}\frac{c_q^2}{c^2})A_2=0\,, \quad c_q^2=\frac{\omega^2}{q^2}$$

Систему (10) запишем в окончательном виде

$$(\sigma_{11}z-\gamma_{11})A_1+(\sigma_{12}z-\gamma_{12})A_2=0$$

$$(\sigma_{12}z-\gamma_{12})A_1+(\sigma_{12}z-\gamma_{22})A_2=0\,, \quad z=\frac{c^2}{c_q^2} \tag{11}$$

Однородная система имеет единственное решение в том случае, если ее определитель, составленный из коэффициентом при неизвестных A_1 и A_2, равен нулю [10]. Раскроем данный определитель, получим квадратное уравнение относительно z^2 продольных волн пористой среды

$$(\sigma_{11}\sigma_{22}-\sigma_{12}^2)z^2-[\sigma_{11}\gamma_{22}+\sigma_{22}\gamma_{11}-2\sigma_{12}\gamma_{12}]z+(\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2)=0 \tag{12}$$

Тогда волновые числа продольных волн I и II типов в сферически - симметричной пористой среде могут быть записаны в виде

$$q_1^2=z_1\left(\frac{\omega}{c}\right)^2, \quad q_2^2=z_2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{13}$$

где z_1 и z_2 – корни квадратного уравнения (12).

Если связь между упругой компонентной и жидкостью отсутствует

$$\sigma_{12}=0\,, \quad \gamma_{12}=0 \tag{14}$$

то из (12) следует

$$z_1=\frac{\gamma_{11}}{\sigma_{11}}, \quad z_2=\frac{\gamma_{22}}{\sigma_{22}} \tag{15}$$

Волновые числа продольных волн примут вид

$$q_1^2=\frac{\gamma_{11}}{\sigma_{11}}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2, \quad q_2^2=\frac{\gamma_{22}}{\sigma_{22}}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{16}$$

Перемещения продольных волн I и II типов пористой среды в случае сферической симметрии с учетом (6) имеют вид

$$u_{r_1}=A_1\frac{1}{r}\exp[i(\omega t+q_1 r)], \quad u_{r_2}=A_2\frac{1}{r}\exp[i(\omega t+q_2 r)] \tag{17}$$

Здесь A_1, A_2 – амплитуды продольных волн в пористой среде, они находятся из (11).

Так как система (11) однородная, то данная система имеет бесчисленное множество решений, в том числе и нулевое. Поэтому из одного уравнения вытекает второе и наоборот. Следовательно, можно отбросить одно уравнение и найти решение второго. Пусть остается первое уравнение. Тогда, положим $A_2=n,$ получим формулы для амплитуд системы (11)

$$A_1=-\frac{\sigma_{12}-\gamma_{12}z}{\sigma_{11}-\gamma_{11}z}n\,, \quad A_2=n, \quad (-\infty<n<+\infty) \tag{18}$$

Подставим формулы (18), в (17), получим выражения для перемещений продольных волн I и II типов в пористой среде в случае сферической симметрии.

В качестве примера рассмотрим сферически-симметричную двухкомпонентную неограниченную среду радиуса r. Пусть $\sigma_{11}=0.610,$ $\sigma_{22}=0.305,$ $\sigma_{12}=0{,}043,$ $\gamma_{11}=0.650,$ $\gamma_{22}=0.650.$ $\gamma_{12}=-0.150,$ $\omega=1.$

По формуле (12) получим $z_1=0.909,$ $z_2=2.394$.

Тогда выражение для амплитуд продольных волн I и II типов по формуле (18) запишем в виде

$$\left|A_1'\right| = 8.54n, \quad \left|A_2'\right| = n$$
$$\left|A_1''\right| = 0.44n, \quad \left|A_2''\right| = n, \quad (-\infty < n < +\infty) \tag{19}$$

Перемещения продольных волн I и II типов пористой среды в случае сферической симметрии с учетом (17) имеют вид

$$u_{r_1}' = 8.54n\frac{1}{r}\exp[i(t+q_1 r)], \quad u_{r_2}' = n\frac{1}{r}\exp[i(t+q_2 r)]$$
$$u_{r_1}'' = 0.44n\frac{1}{r}\exp[i(t+q_1 r)], \quad u_{r_2}'' = n\frac{1}{r}\exp[i(t+q_2 r)] \tag{20}$$

Волновые числа находим из (13)

$$q_1^2 = 0{,}909c^{-2}, \quad q_2^2 = 2{,}394c^{-2} \tag{21}$$

Вывод. Разработана математическая модель двухкомпонентной среды, когда одна из компонент представляет сферически - симметричную упругую среду, а другая – сжимаемую жидкость. Получены формулы для определения перемещений продольных волн I и II типов пористой среды в случае сферической симметрии. В качестве примера рассмотрена сферически-симметричная двухкомпонентная неограниченная среда радиуса r.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range / M. A. Biot // J. Acoust. Soc. America. - 1956. - V. - 28. - № 2. - P. - 168-178.*
2. *Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid- saturated porous solid. II. Higher Frequency Range /M.A. Biot // J. Acoust. Soc. America. -1956. - V. - 28.- № 2. - P. 179 -191.*
3. *Косачевский Л.Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах / Л.Я. Косачевский // ПММ.-1959. --Т. 23. -Вып. 6.- С. 1115-1123.*
4. *Polenov V.S., Chigarev A.V. Mathematical modeling of shock waves in inhomogeneous viscoelastic two component media/V.S. Polenov, A.V.Chigarev// Journal of Applied Mathematics and Physics, -2018. -6. (5) .- P. 997-1005.*
5. *Поленов В.С. Распространение упругих волн в насыщенной вязкой жидкостью пористой среде/ В.С.Поленов// ПММ. – 2014. -Т. 78. - Вып. 4. - С. 501 – 507.*
6. *Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве /Я.И.Френкель// Изв. АН ССР. Сер. геогр. геофиз. -1944. -Т. 8. -№ 4. С.133-150.*
7. *Ibrahim A. Abbas and Abo-El-nour N. Abd-alla. A //Two-dimensional wave Propagation in a Proelastic Infinite Circular Cylinder//Journal of Physics. -Vol. 1. -№3-. 2012. -P. 32 - 38.*
8. *Киселев Г.К., Гусев А.П. и др. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах/Г.К.Киселев, А.П.Гусев, // Новосибирск. ВО «Наука». Сибирская издательская фирма. -1992. - 261 с.*
9. *Положий Г.Н. Уравнения математической физики /Г.Н.Положий // Изд. «Высшая школа». -М.: -1964. -559 с.*
10. *Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра/В.А.Ильин, Э.Г.Позняк// М.: -1984. - 204 с.*